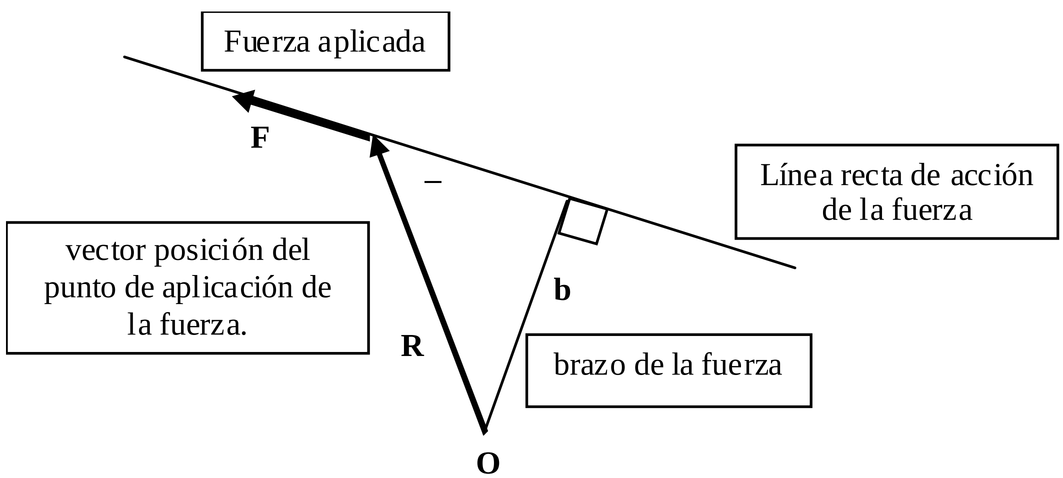
Resumen de contenidos a tratar en tercera prueba parcial

1.- Momento de una fuerza.

Def: Es la medida de la tendencia de un cuerpo a rotar en torno a un eje debido a la acción de una fuerza.

1.1 Momento como producto de la fuerza por la distancia medida a la línea recta de acción de la fuerza.

Operacionalmente se define por el producto $b \cdot F$ , en donde tanto b como F son positivos,el signo,se considera positivo o negativo según el sentido de la rotación a que esté tendiendo el cuerpo sometido a la fuerza F; positivo si es sentido antihorario y negativo en caso contrario. Para la situación de la figura se tendría: $M = +b \cdot F$




1.2 Momento como producto vectorial.

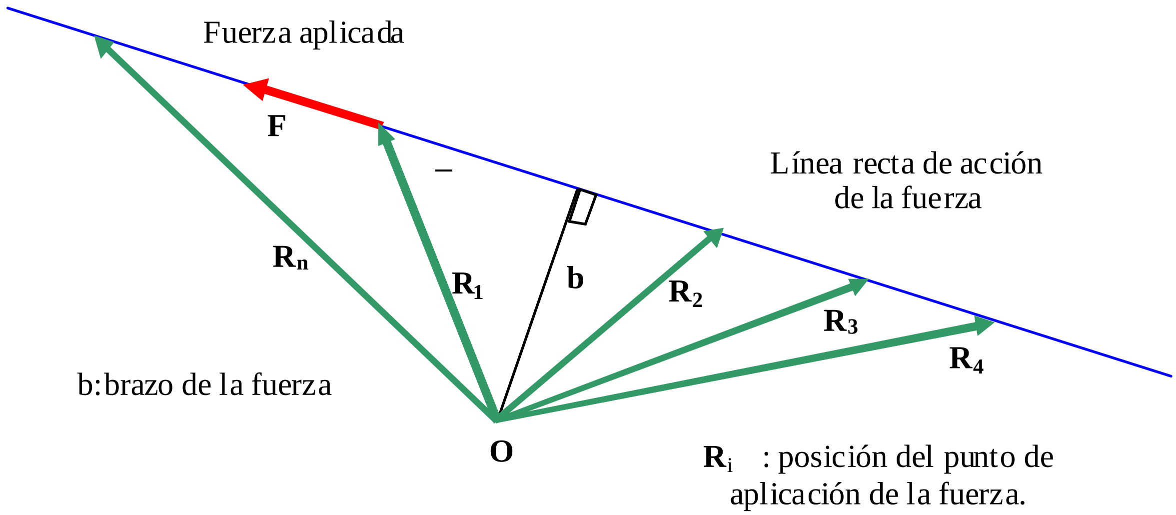
De la figura, ya se había obtenido: $M = +b \cdot F$;en donde $b = R\sin\theta$. de aquí que se puede escribir $M = (R\sin\theta)F$

y del mismo modo, recordando lo que sabemos de producto vectorial entre vectores: $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

Si conocemos $\vec{R}$ y $\vec{F}$ entonces: $\vec{M}_O = \vec{R} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ R_x & R_y & R_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ R_x & R_y & R_z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$

producto que se realiza en la forma usual:

Una propiedad interesante al trabajar con el producto cruz o vectorial es que se puede utilizar el vector posición de cualquier punto que pertenezca a la línea recta de acción de la fuerza. Ver dibujo:




De este modo tendríamos múltiples posibilidades de calcular el momento de la fuerza F con respecto al punto O, así:

$$\vec{M}_O = \vec{R}_1 \times \vec{F} = \vec{R}_2 \times \vec{F} = \vec{R}_3 \times \vec{F} = \vec{R}_4 \times \vec{F} = \vec{R}_5 \times \vec{F} = \ldots\ldots\ldots = \vec{R}_n \times \vec{F}$$

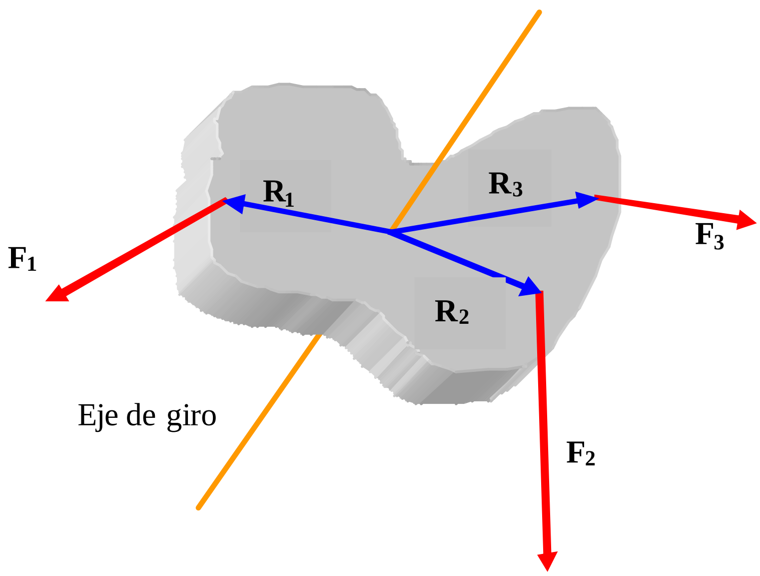
1.3 Teorema de Varignon

1.3.1 Para el cálculo del momento de un conjunto de fuerzas.

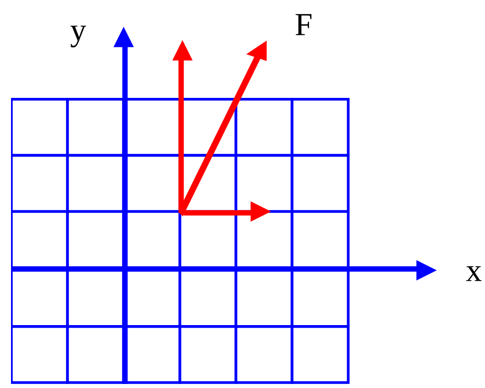
El teorema de Varignon establece que el momento de la resultante de un conjunto de fuerzas actuando sobre un cuerpo es igual a la suma vectorial de los momentos de cada una de estas fuerzas, considerando por cierto el mismo cuerpo y con respecto al mismo punto. En forma de dibujo:

$$\vec{M}_O = \vec{R} \times \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = \left(\vec{R}_1 \times \vec{F}_1\right) + \left(\vec{R}_2 \times \vec{F}_2\right) + \left(\vec{R}_3 \times \vec{F}_3\right)$$

en donde los $\vec{R}_i$ son los vectores posición de las fuerzas $\vec{F}_i$ y $\vec{R}$ es el vector posición de la resultante $\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i$




Este teorema es válido también para una fuerza única, así, el momento de una fuerza será igual a la suma de los momentos de sus componentes, cualesquiera que sean éstas.(una fuerza se puede descomponer en la suma de cualquier cantidad de fuerzas, siempre que la resultante sea igual a la fuerza)




1.3.2 Para el cálculo del momento de una fuerza como la suma de los momentos de sus componentes.

De este modo, el momento de la fuerza F con respecto al punto O(0,0) o con respecto a cualquier otro punto, se puede obtener sumando los momentos de sus componentes rectangulares(o cualquiera otra descomposición) con respecto al punto elegido.Se puede verificar, para el caso de sus componentes rectangulares.

$M_O = -(F\cos\theta)\cdot 1 + (F\sin\theta)\cdot 1 = F\sin\theta - F\cos\theta$

al usar producto vectorial...

$\vec{M}_O = (\hat{\imath}+\hat{\jmath}) \times [(F\cos\theta)\hat{\imath} + (F\sin\theta)\hat{\jmath}] = (F\sin\theta)(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}) + (F\cos\theta)(\hat{\jmath}\times\hat{\imath})$

$\vec{M}_O = (F\sin\theta)\hat{k} + (F\cos\theta)\left(-\hat{k}\right) \rightarrow \vec{M}_O = (F\sin\theta - F\cos\theta)\left(\hat{k}\right)$

Obs: generalmente la descomposición de la fuerza es en componentes rectangulares, pero puede ser cualquier otra descomposición.

2.- Centroide, centro de masa, centro de gravedad.

2.1 Diferencia entre centroide, centro de masa y centro de gravedad.

Centroide: centro geométrico.

Centro de masa: el punto en donde se puede considerar que se concentra toda la masa del cuerpo.

Centro de gravedad: es el punto por donde pasa el vector peso

Analizaremos el siguiente ejemplo:

Pensemos en una lámina delgada formada por otras dos cada una de longitud L y de distinta densidad, según muestra la figura:

Si las dos láminas tienen exactamente las mismas dimensiones(ancho "a" y longitud"L"), entonces el centro geométrico se ubica en el centro,es decir $C_{geométrico} = L$ sin embargo el centro de masa se ubica más cerca del extremo de la lámina de mayor densidad.(simbolizada por el rectángulo más obscuro.)

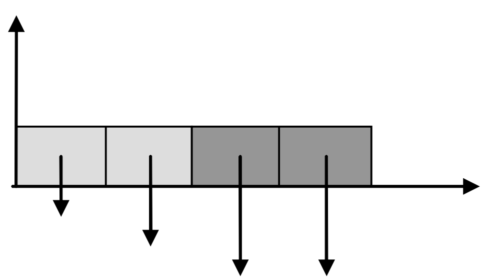
Con los datos : $m_1 = 2m$ y $m_2 = 6m$

y $L_1 = L_2 = L$

se tendrá para el centro de masa:

$C_m = \frac{m_1 \cdot \frac{L_1}{2} + m_2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{5}{4}L = 1.25L$

Si dividimos la lámina compuesta en cuatro sectores iguales(cuestión arbitraria ésta, para ilustrar la idea que se quiere analizar.)



Y suponemos que la aceleración de gravedad no es constante a lo largo de la lámina, pero sí dentro de cada sector. El centro de gravedad, se puede comprobar que está en un punto diferente del centroide o del centro de masa.

$C_G = \frac{\sum (x_i \cdot m_i . g_i)}{\sum (m_i . g_i)} = \frac{\frac{m_1}{2} \cdot \frac{L_1}{2} \cdot g_1 + \frac{m_1}{2} \cdot \left(\frac{L_1}{2} + \frac{L_1}{4}\right) \cdot g_2 + \frac{m_2}{2} \cdot \left(L_1 + \frac{L_1}{2}\right) \cdot g_3 + \frac{m_2}{2} \cdot \left(L_1 + \frac{L_1}{2} + \frac{L_1}{4}\right) \cdot g_3}{\frac{m_1}{2} \cdot g_1 + \frac{m_1}{2} \cdot g_2 + \frac{m_2}{2} g_3 + \frac{m_2}{2} \cdot g_3}$

y suponiendo que: $g_1 = 9.79; g_2 = 9.8; g_3 = 9.81$ (distintos valores de la aceleración de gravedad.)

$C_G = 1.3753L$

Resumimos estos resultados en la siguiente Tabla:

| | |
|---|---|
| Centroide | $C_{geométrico} = L$ |
| Centro de Masa | $C_m = \frac{5}{4}L = 1.25L$ |
| Centro de Gravedad | $C_G = 1.3753L$ |

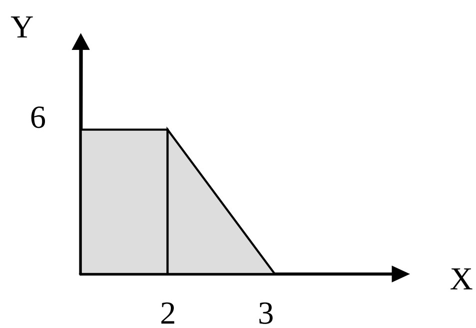
Para cuerpos pequeños, la variación de la aceleración de gravedad ( que también es pequeña) punto a punto sobre la supeficie terrestre, normalmente se desprecia, de allí tal vez la confusión existente entre el común de la gente tomar estos puntos como sinónimos, lo cual es un error.

Podría ser de importancia considerar las variaciones de la aceleración de gravedad en el diseño de un puente(un cuerpo muy grande), por ejemplo, de gran longitud, en una zona donde la variación de "g" sea notable.

En la práctica entonces centro de masa y centro de gravedad, se pueden considerar como coincidentes, no así con relación al centroide, ya que la diferencia allí sí es notable.

3.- Calcular el centroide de la figura plana compuesta mostrada en la figura,siendo

todas las medidas en $[cm]$




| figura elemental considerada | $área\ cm^2$ | $x_i[cm]$ | $y_i[cm]$ |
|---|---|---|---|
| para el rectángulo(fig1) | 12 | 1 | 3 |
| para el triángulo(fig2) | 3 | $2+1=3$ | 2 |
| figura compuesta | 15 | $C_x = 1.4$ | $C_y = 2.8$ |

$C_x = \frac{12 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{12+3} \rightarrow C_x = \frac{7}{5}cm = 1.4cm$

$C_y = \frac{12 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{12+3} \rightarrow C_y = \frac{14}{5}cm = 2.8cm$

Como se observa, el Centroide se ubica en la zona donde hay "más área" que es la zona baja del triángulo.

2.2 Cálculo de centroides de figuras compuestas,líneas, superficies y volúmenes.

Para una línea compuesta por varias de longitudes $L_1$,$L_2$,...$L_n$, se tendrá:

$x_{centroide} = \frac{x_1 \bullet L_1 + x_2 \bullet L_2 + .....x_n \bullet L_n}{L_1 + L_2 + ...L_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \bullet L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}$ ; para la obtención de la ordenada, la expresión a utilizar es análoga.

Para el caso de superficies compuestas, es cuestión de cambiar las longitudes $L_i$ por las áreas $A_i$

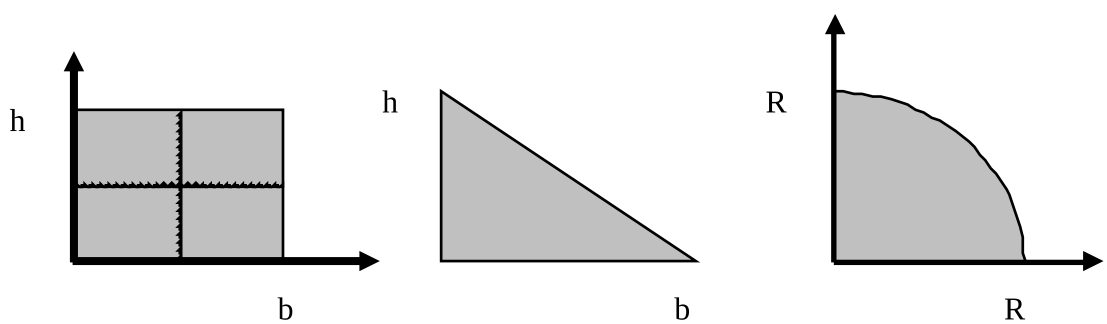
$$x_{centroide} = \frac{x_1 \bullet A_1 + x_2 \bullet A_2 + .....x_n \bullet A_n}{A_1 + A_2 + ...A_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \bullet A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Lo mismo para el caso de volúmenes: $x_{centroide} = \frac{x_1 \bullet V_1 + x_2 \bullet V_2 + .....x_n \bullet V_n}{V_1 + V_2 + ...V_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \bullet V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$

2.3 Cálculo de centros de masas de sistemas de partículas y de cuerpos compuestos.

Para el caso de un sistema de partículas con masas $m_1, m_2, m_3, .....$

$$x_{centroide} = \frac{x_1 \bullet m_1 + x_2 \bullet m_2 + .....x_n \bullet m_n}{m_1 + m_2 + ...m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \bullet m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$




| figura | *área* | *x* | *y* |
|---|---|---|---|
| rectángulo | $bh$ | $\frac{b}{2}$ | $\frac{h}{2}$ |
| triángulo | $\frac{1}{2}bh$ | $\frac{b}{3}$ | $\frac{h}{3}$ |
| cuadrante de círculo | $\frac{1}{4}\pi R^2$ | $\frac{4R}{3\pi}$ | $\frac{4R}{3\pi}$ |

........................................................................................................................................

3.- Equilibrio de un cuerpo rígido.

Para que un cuerpo rígido esté en equilibrio estático es requisito que no esté rotando y que no se esté trasladando, es decir debe estar en reposo tanto en movimiento de traslación como de rotación.

3.1 Ecuaciones de equilibrio de un cuerpo rígido.

Las ecuaciones que se deben cumplir son: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$ en primer lugar, ecuación que asegura que el cuerpo no tiene aceleración traslacional.(con respecto a un sistema inercial)

Lo mismo para el movimiento rotacional: $\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = 0$

Estas dos ecuaciones de equilibrio ‘pueden generar cada una de ellas tres ecuaciones escalares, por lo que se podrían tener 6 ecuaciones escalares de equilibrio, una por cada eje coordenado considerado.En los ejercicios que se resuelven en este nivel (Física UNO) basta con tres ecuaciones escalares, si se trata de un cuerpo simple.

## 3.2 Diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido.

Un diagrama de cuerpo libre es un dibujo en el que se representan las fuerzas activas(en estructuras simples no móviles usualmente son las cargas y peso de la estructura o de sus elementos) y las fuerzas de reacción de ligadura(se debe aplicar el Principio de Acción y Reacción a cada elemento de la estructura. Se le denomina cuerpo libre, porque se le han quitado las ligaduras, es decir todos los cuerpo que limitan el movimiento libre del cuerpo en estudio.)

El D.C.L. juega un rol importantísimo en la resolución de un problema de estática, ya que a partir de él se escriben las ecuaciones de equilibrio.

Ejemplo: Hallar la fuerza F horizontal necesaria para mantener la barra en equilibrio en la posición mostrada. La barra en L pesa 600 [N] es homogénea y uniforme, el sector horizontal mide 4m y el vertical 2m. Halle, si es posible, una relación que vincule F,con la componente y de un eje vertical con origen en el sector horizontal de la barra.

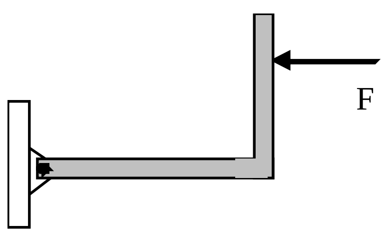
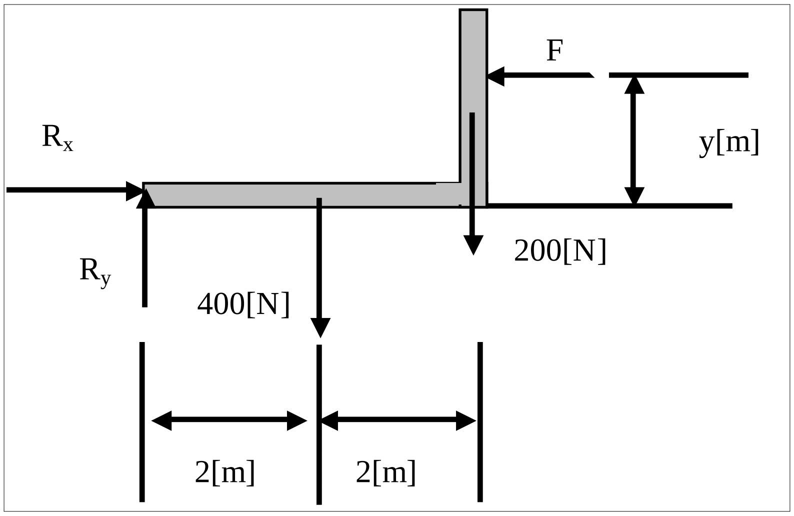



Diagrama de cuerpo libre:




Se utilizará el sistema de coordenadas usual para la escritura de las ecuaciones

escalares de equilibrio.

equilibrio traslacional:

eje x: $R_x - F = 0$

eje y: $R_y - 400 - 200 = 0$

equilibrio rotacional:

Obs:

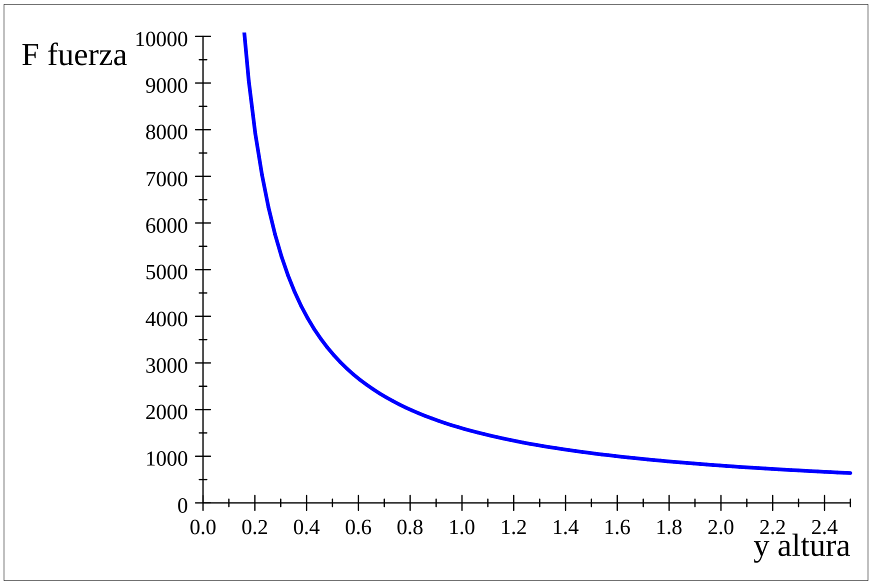
1.- se eligirá el extremo izquierdo, ya que de este modo la reacción en el pasador no aparecerán en la ecuación)

2.- las magnitudes de distancias y fuerzas se consideran todas positivas, el signo que se antepone en cada producto fuerza por distancia dependerá solamente del sentido de rotación que le daría la fuerza al cuerpo en cuestión.

$-2 \cdot 400 - 4 \cdot 200 + y \cdot F = 0$, Solution is: $\begin{cases} \{\frac{1600}{y}\} & \text{if } y \neq 0 \\ \emptyset & \text{if } y = 0 \end{cases}$

La fuerza viene dada por $F = \frac{1600}{y}$ ; de donde y no puede ser igual a cero,ya que no habría un momento que contrarrestara el efecto del peso de la barra, como este sector de la barra mide 2m , el máximo valor que puede tomar y es 2m, y en este caso la fuerza tomaría el valor.$800[N]$ que correspondería al valor mínimode la fuerza.

La gráfica muestra el comportamiento de la fuerza en función de la altura en donde se aplique ésta.(es una rama de una hipérbola.)




.......................................................................................................................

## 4.- Momento de inercia.

### 4.1 Momento de inercia de una partícula.

Al considerar un punto material sobre un cilindro que rota debido a la aplicación de una fuerza F, a una distancia R del eje de giro, se tiene que $\tau = FR \rightarrow \tau = maR \rightarrow \tau = m\alpha RR$

$\tau = mR^2\alpha$ , se conviene en llamar a la expresión: $mR^2$ , momento de inercia de una partícula,y se la designa con la letra $I$,de esta manera $\tau = I\alpha$, con $I = mR^2$

Se tiene así la equivalencia entre la ecuación $\tau = I\alpha$ del movimiento rotacional de un cuerpo y la ecuación que describe su movimiento traslacional: $F = ma$

Se puede decir que el Momento de Inercia de un cuerpo es la medida de su inercia rotacional.

Si un cuerpo se considera constituído por pequeñas partículas de masas $m_1, m_2, m_3$,...a las distancias respectivas: $r_1, r_2, r_3$,.... de un eje , su momento de inercia con respecto a dicho eje estará dado por:

$I = \sum(m_i r_i^2)$ en una expresión mucho más general: $I = \int r^2 dm$.

ejemplos:

1.- Calcular el momento de inercia del sistema de partículas especificado por la tabla adjunta, con respecto al eje x, y con respecto al eje y.

| $i$ | $m[kg]$ | $x[m]$ | $y[m]$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.2 | 1 | -3 |
| 2 | 0.4 | 2 | 1 |
| 3 | 0.7 | -3 | -2 |
| 4 | 0.3 | -5 | 3 |

## 4.2 Momento de inercia para diferentes cuerpos simétricos simples (láminas,anillo,cilindro,esferas,etc)

Ejemplo: Hallar una fórmula para el momento de inercia de una lámina plana,delgada,

uniforme, con respecto al eje x y al eje y.

Los lados miden base:a; altura :b

por la fórmula general dada: (momento de inercia con respecto al eje y) $I_y = \int_0^a x^2 dm = \int_0^a x^2 \rho b\varepsilon dx = \frac{1}{3} a^3 b\varepsilon\rho$

pero $\rho_{(densidad)} = \frac{m}{ab\varepsilon}$; luego: $I_y = \frac{1}{3} a^3 b\varepsilon \frac{m}{ab\varepsilon} \to I_y = \frac{1}{3} ma^2;$ en forma análoga se obtiene $I_x$

En forma análoga(vía integración) se obtienen las diversas relaciones matemáticas para el momento de inercia de diferentes cuerpos que guarden cierta simetría. Se adjunta una tabla con algunos resultados de este tipo calculados con respecto a un eje que pasa por ekl centro de masa,salvo la lámina rectangular,que se ha calculado para un eje que coincide con sus aristas(paralelo al centro de masa)

| | |
|---|---|
| aro o cilindro hueco | $I_{cm} = mr^2$ |
| disco uniforme o cilindro | $I_{cm} = \frac{1}{2} mr^2$ |
| varilla uniforme | $I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$ |
| esfera uniforme | $I_{cm} = \frac{2}{5} mr^2$ |
| lámina rectangular de lados a y b | $I_x = mb^2; I_y = ma^2$ |

## 4.3 Teorema de Steiner de los ejes paralelos.

El momento de inercia $I$ de un cuerpo alrededor de un eje paralelo a un eje que pasa por su centro de masas viene dado por $I_{nuevo.eje} = I_{cm} + md^2,$ en donde M es la masa total del cuerpo, d es la distancia perpendicular entre los ejes paralelos.

ejemplo:

Calcular el momento de inercia de una esfera con respecto a un punto en su superficie externa.

A partir de $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$ Y ocupando el teorema de Steiner: $I = I_{cm} + md^2$ , en donde:

$d = R$

y sustituyendo : $I = \frac{2}{5}mR^2 + m(R)^2 \rightarrow I = \frac{7}{5}R^2m$

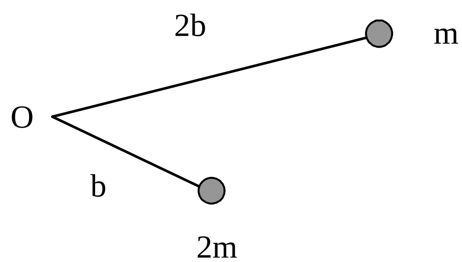
## 4.4 Teorema de superposición para el cálculo del momento de inercia para cuerpos compuestos.

Teorema:

Si un cuerpo está formado por otros dos de masas $m_1$ y $m_2$ respectivamente con momentos de inercia $I_1$ e $I_2$ , con respecto a un mismo eje, entonces el momento de inercia de este cuerpo compuesto con respecto al eje común se obtiene mediante la suma de ambos momentos de inercia. En forma de ecuación: $I = I_1 + I_2$

ejemplo:

Calcular el momento de Inercia del sistema rígido de masas m y 2m , respecto a un plano perpendicular al plano por el punto O.




Considerando las masas como partículas y las uniones entre ellas de masa despreciable, se tiene:

$I = m(2b)^2 + (2m)b^2 \rightarrow I = 6mb^2$

Obs: si las masas de las uniones(podrían ser alambres...) no son despreciables y tuvieran masas, por ejemplo $\frac{1}{5}m$ para el almbre de longitud "b" y $\frac{2}{5}m$ , para el alambre de longitud 2b, entonces, el momento de inercia para el conjunto sería:

para el sistema: 2b,m : $I_1 = \frac{1}{3}m(2b)^2 + m(2b)^2 = \frac{16}{3}b^2m$

para el sistema: b,2m : $I_2 = \frac{1}{3}m(b)^2 + 2m(b)^2 = \frac{7}{3}b^2m$

finalmente: $I = I_1 + I_2 = \frac{16}{3}b^2m + \frac{7}{3}b^2m \rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{23}{3}b^2m$

Radio de giro(k): Se define radio de giro de un cuerpo de masa "m" como la distancia "k" a la que se debería situar una partícula de igual masa , de modo que posea el mismo momento de inercia.

Ejemplo: Calcular el radio de giro de un cilindro (sólido)de masa m=2.4 kg y radio 10 cm.

según fórmula: $I = \frac{1}{2}mr^2 \rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot 2.4 \cdot 0.10^2 = 0.012\,[kg \cdot m^2]$

$0.012 = mk^2 \rightarrow 0.012 = 2.4k^2$, Solution is:$k = 7.07107 \times 10^{-2}[m] \approx 7.07[cm]$

## Analogía entre magnitudes lineales y angulares:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| desplazamiento lineal | $s$ | | desplazamiento angular | $\theta$ |
| rapidez lineal | $v$ | | rapidez angular | $\omega$ |
| aceleración lineal | $a$ | | aceleración angular | $\alpha$ |
| masa | $m$ | | momento de inercia | $I$ |
| fuerza | $F$ | | torque | $\tau$ |
| cantidad de movimiento lineal | $mv$ | | cantidad de movimiento angularl | $I\omega$ |
| impulso lineal | $F \cdot t$ | | impulso angular | $\tau \cdot t$ |
| energía cinética | $\frac{1}{2}mv^2$ | | energía cinética | $\frac{1}{2}I\omega^2$ |
| trabajo | $W = Fs$ | | | $W = \tau\theta$ |
| potencia | $P = Fv$ | | | $P = \tau\omega$ |

El momento(torque) , produce una aceleración angular $\alpha$., relacionados ambos por la ecuación: $\tau = I\alpha$ , en donde "I" es el momento de Inercia del disco (en este caso), magnitud que depende de la ubicación del eje de giro y de la masa del cuerpo que gira, por lo que se trata de una magnitud que para un mismo cuerpo puede variar, según varíe la ubicación de este eje.

Se puede interpretar al momento de Inercia como una medida de la oposición al movimiento rotacional, ya sea para iniciar el movimiento o bien para detenerlo. La semejanza con el papel desempeñado por la masa en el movimiento traslacional es total.

## Acerca del momento de Inercia:

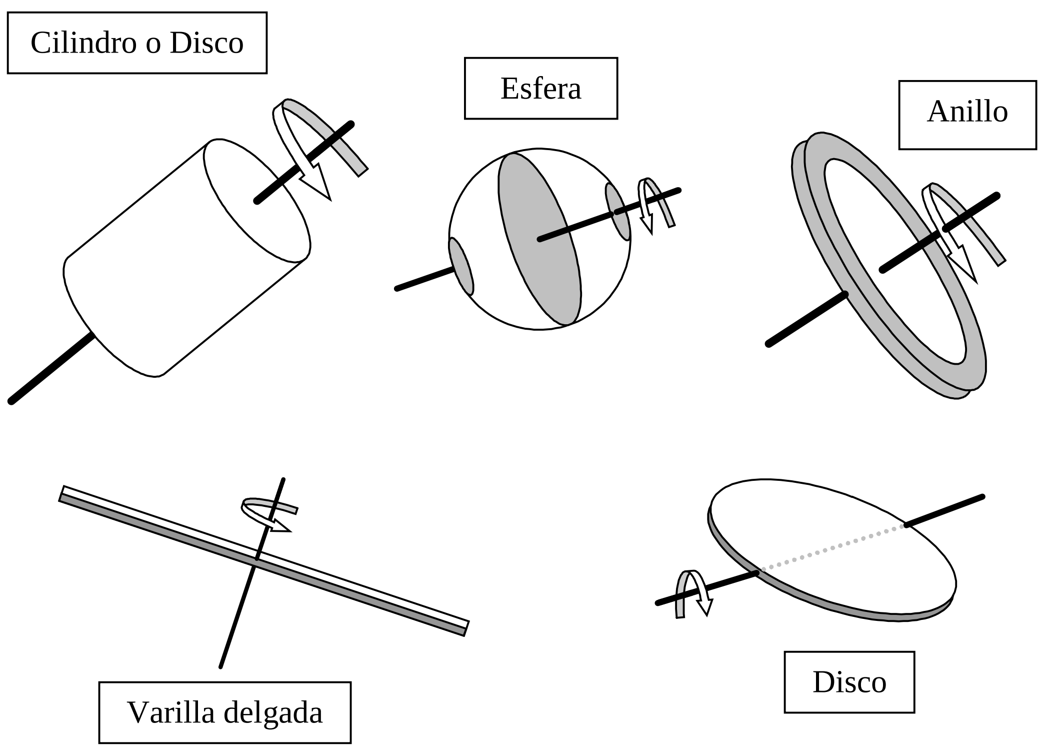
Así como la masa es la medida en que un cuerpo se opone al movimiento traslacional, el momento de Inercia de un cuerpo es la medida en que se opone al movimiento rotacional.

El momento de Inercia depende de la masa del cuerpo y de la ubicación del eje de rotación.Ya que no hay un eje de giro posible único, un mismo cuerpo de tendrá distintos valores de momento de Inercia dependiendo de cuál sea su eje de rotación.

Para determinar el momento de Inercia de un cuerpo sujeto a cierta simetría se puede calcular mediante una integral, es decir en forma matemática, pero también es posible su determinación en forma experimental, cuestión que se deja para cuerpos que no guarden simetría. Para cuerpos compuestos por otros más simples y cuyos momentos de Inercia se conocen(Tabla de fórmulas), es posible determinarlos también algebraicamente.

Se da a conocer una resumida tabla de fórmula para calcular el momento de Inercia de cuerpos simples, con relación a su centro de masa:

| cuerpo | momento de Inercia | eje de rotación |
|---|---|---|
| Anillo | $I_o = mR^2$ | pasa por centro geométrico |
| Disco o cilindro | $I_o = \frac{1}{2}mR^2$ | eje longitudinal |
| Esfera | $I_o = \frac{2}{5}mR^2$ | pasa por su centro geométrico |
| Varilla delgada | $I_o = \frac{1}{12}mL^2$ | pasa por su centro |
| Disco | $I = \frac{1}{4}mR^2$ | pasa por su eje diamentral |




Puede demostrarse que con respecto al eje paralelo al que pase por el centro de masa, y a una distancia "d" de él,el momento de Inercia es igual a: $I = I_o + md^2$ ( esta ecuación es conocida como Teorema de Steiner)

..........................................................................................................................................

## 5.- Dinámica del movimiento de rotación de un cuerpo rígido.

### 5.1 Rotación pura de un cuerpo rígido.

Experimento inicial:

Consideremos un disco que puede girar en torno a un eje que pase por su centro geométrico, como se muestra en la figura:

Si se practican pequeños agujeros a distintas distancias del eje de giro y se cuelgan pequeños pesos a distintas distancias, se puede observar la tendencia a rotar en uno u otro sentido, según donde se dispongan dichos pesos.

Se puede observar que para un mismo peso el movimiento de rotación se acentúa a medida que su posición cambia a una distancia mayor con respecto al eje de giro.

Del mismo, para una distancia constante, si se aumenta el peso, aumenta también la tendencia a rotar.

Este resultado se condensa en la siguiente relación: $\tau = F \cdot R$

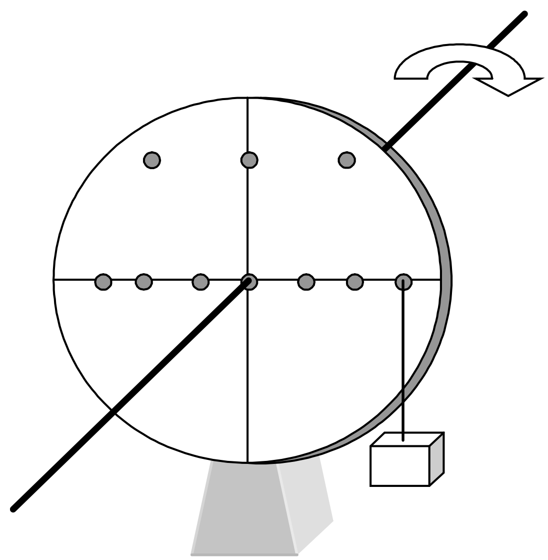
En donde, $\tau$ es la suma de los momentos (llamado usualmente torque)

F en este caso es la fuerza peso del bloque dispuesto (más el peso del hilo que lo sostiene que se puede despreciar)

R es la magnitud del vector posición del punto de aplicación de la fuerza.

En general: $\tau, F, R$ son vectores y están relacionados por la ecuación: $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$ (producto cruz o vectorial)

El módulo de $\vec{\tau}$ , viene dado por: $RF\sin\theta$, en donde el ángulo $\theta$ , es el ángulo entre los vectores: $\vec{R}$ y $\vec{F}$ que en el ejemplo ilustrado es igual a $90^\circ$ ( recordemos que $\sin 90^\circ = 1.0$ )



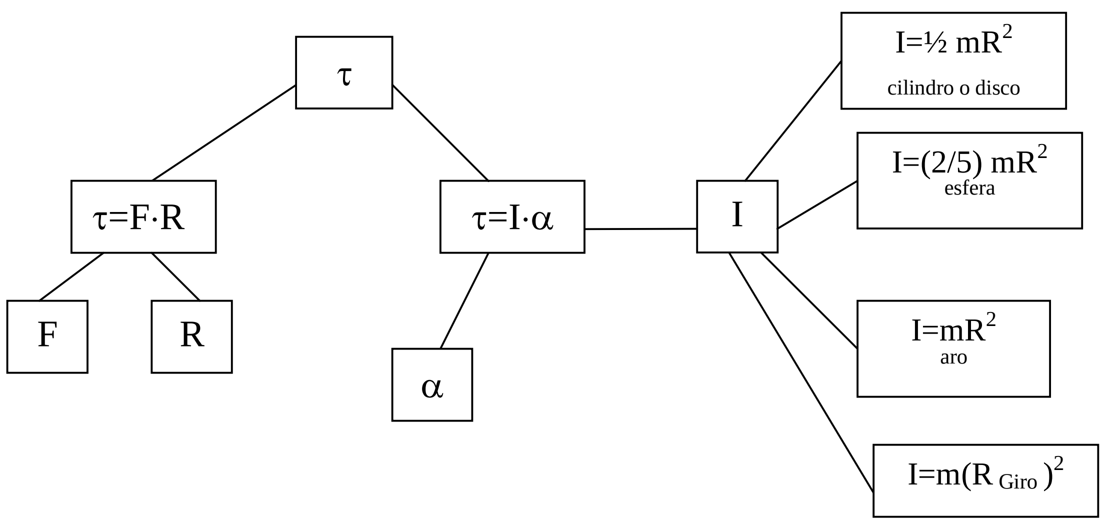
El momento(torque) , produce una aceleración angular $\alpha$., relacionados ambos por la ecuación: $\tau = I\alpha$ , en donde "I" es el momento de Inercia del disco (en este caso), magnitud que depende de la ubicación del eje de giro y de la masa del cuerpo que gira, por lo que se trata de una magnitud que para un mismo cuerpo puede variar, según varíe la ubicación de este eje.

Se puede interpretar al momento de Inercia como una medida de la oposición al movimiento rotacional, ya sea para iniciar el movimiento o bien para detenerlo. La semejanza con el papel desempeñado por la masa en el movimiento traslacional es total.

## Semejanza entre las ecuaciones de la dinámica lineal y rotacional:

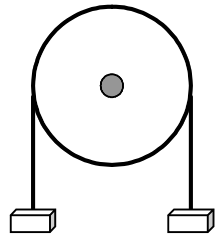
| concepto | dinámica lineal | dinámica rotacional |
|---|---|---|
| energía | $\frac{1}{2}mv^2$ | $\frac{1}{2}I\omega^2$ |
| trabajo | $F \cdot d$ | $\tau\theta$ |
| cantidad de movimiento | $mv$ | $I\omega$ |
| | | |
| | $F$ (fuerza) | $\tau$ (torque) |
| | $m$ (masa) | $I$ (momento de Inercia) |
| | $v$ (velocidad) | $\omega$ (velocidad) |
| | $a$ (aceleración) | $\alpha$ (aceleración) |

Relación entre las magnitudes asociadas al movimiento rotacional:




## Ejercicios resueltos:(consultar página web)

En el sistema representado por la figura, la polea de radio R y momento de Inercia $I_o$ puede girar alrededor de un eje fijo que pasa por su centro. En cada extremo de un hilo que no desliza sobre la polea están colocados sendos cuerpos. si el cuerpo de masa $m_1$, cae uniformemente (aceleración cero). Calcular el valor de la masa $m_2$.



ya que: $\sum \tau = 0$, aquí $\alpha = 0$ (aceleración angular.)
$m_1 gR - m_2 gR = 0 \rightarrow$, Solution is:$m_2 = m_1$

.................................................................................................................................

Un volante tiene un momento de inercia de 12 $[slug \cdot pie^2]$ y pesa 100 $[lbf]$ Está

acelerándose a la razón constante de $2 \left[ \frac{rad}{s^2} \right]$.

La masa del volante se supone que está concentrada en la llanta.

Calcular : el radio de giro ; diámetro, par resultante que recibe el volante, tiempo que tarda el volante en alcanzar una velocidad de $10\ [\frac{rad}{s}]$

$$\tau = I\alpha$$
$$\tau = FR$$
$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

$\tau = I\alpha \rightarrow \tau = 12 \cdot 2 = 24[lbf \cdot pie]$
$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} \rightarrow 2 = \frac{10-0}{t}$, Solution is: $t = 5[s]$

$I = mk^2 \rightarrow 12 = \frac{100}{32.174} k^2$, Solution is: $k = 1.9649$ (radio de giro)
$2 \times 1.9649 = 3.9298$(diámetro)

.................................................................................................................................

Una polea de radio R=0.40 m tiene enrollada una cinta(de espesor y masa despreciables)y puede girar en torno al eje fijo como se indica. Se tira de la cinta con una fuerza constante de magnitud F=30N , partiendo el reposo. La cinta no resbala y el roce con el eje es despreciable. Calcular la energía cinética en el instante en que la polea ha descrito 60 radianes.

a partir de: $FR = I\alpha \rightarrow 30 \cdot 0.4 = I\alpha \rightarrow 12.0 = I\alpha$

pero como sabemos: energía cinética rotacional: $E_C = \frac{1}{2} I\omega_F^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$
pero $\omega_i = 0$
y además: $2\alpha\theta = \omega_F^2 - \omega_i^2$,luego:$12.0 = I\left( \frac{\omega_F^2 - \omega_i^2}{2\theta} \right) \rightarrow 12.0 = I\left( \frac{\omega_F^2}{2\theta} \right)$
$E_C = \frac{1}{2} I\omega_F^2 \rightarrow E_C = 12 \cdot 60 \rightarrow E_C = 720[J]$

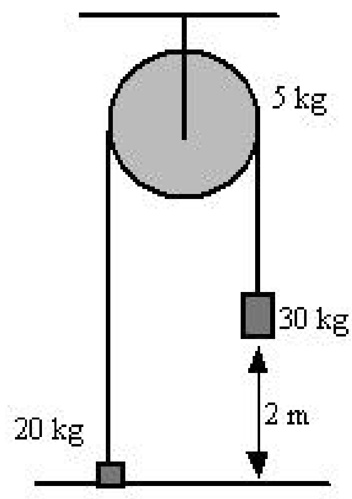
.................................................................................................................................

## 5.2 Rotación y traslación de un cuerpo rígido.

El sistema de la figura está inicialmente en reposo. El bloque de 30 kg está a 2 m del suelo. La polea ($I = \frac{1}{2} MR^2$) es un disco uniforme de 20 cm de diámetro y 5 kg de masa. Se supone que la cuerda no resbala sobre la polea. Encontrar:

- La velocidad del bloque de 30 kg justo antes de tocar el suelo.
- La velocidad angular de la polea en ese instante.
- Las tensiones de la cuerda.
- El tiempo que tarda el bloque de 30 kg en tocar el suelo.

(Resolver el problema por dinámica y aplicando el balance energético)




$$\left(\begin{array}{c} 30\cdot 9.8 - T_1 = 30a \\ T_2 - 20\cdot 9.8 = 20a \\ 0.1T_1 - 0.1T_2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 0.1^2\right)\alpha \\ a = 0.1\alpha \end{array}\right)$$, Solution is:

$\{[a = 1.86667, \alpha = 18.6667, T_1 = 2.38\times 10^2, T_2 = 2.33333\times 10^2]\}$

$2ad = v_f^2 - v_i^2 \rightarrow$

$2\cdot 1.86667\cdot 2 = v^2$, Solution is: $2.73252[\frac{m}{s}]$

por método de energía: $30\cdot 9.8\cdot 2 = \frac{1}{2}(20+30)v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 0.1^2\right)\omega^2$, en donde

$v = 0.1\omega$

$$\left(\begin{array}{c} 30\cdot 9.8\cdot 2 = \frac{1}{2}(20+30)v^2 + 20\cdot 9.8\cdot 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 0.1^2\right)\omega^2 \\ v = 0.1\omega \end{array}\right)$$, Solution is: $v \approx 2.7[\frac{m}{s}], \omega \approx 27.3[\frac{rad}{s}]$

..........................................................................................................................................

## 6.- Cantidad de movimiento angular.

### 6.1 Definición de cantidad de movimiento angular.

Cantidad de movimiento angular : Es una cantidad vectorial que tiene magnitud $I\omega$ y

está dirigida a lo largo del eje de rotación.

Se define por $\vec{L}=\vec{R}\times\vec{p}\rightarrow$ en donde: $\vec{p}=m\bullet\vec{v}$

siendo $\vec{R}$ , el vector posición de la partícula de masa m en movimiento rotacional y $\vec{v}$ su velocidad

La magnitud de $\vec{L}$ , viene dada por: $\left\|\vec{L}\right\| = R\bullet p|\sin\theta|$ , en donde, según debemos

recordar lo estudiado acerca del producto cruz, $\theta$ es el ángulo entre los vectores $\vec{R}\ y\ \vec{p}$.

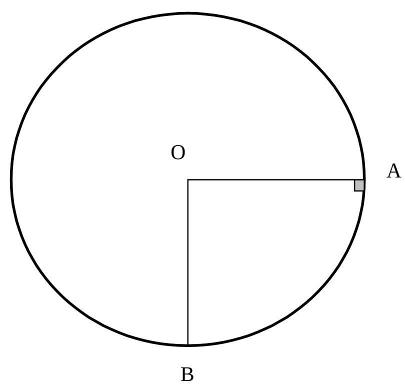
En el movimiento circular, se tiene que

$\theta = 90^\circ \rightarrow \left\|\vec{L}\right\| = R\bullet p = Rmv = RmR\omega = mR^2\omega = I\omega$

........................................................................................................................................

Ejemplos:

La masa m=1 kg se suelta desde la posición indicada(punto A) ,cuando la masa pasa por el punto B después de recorrer la superficie circular sin roce entre A y B , de radio R=5m.¿Cuál es la magnitud del cambio de la cantidad de movimiento angular con respecto al punto O.?




$mgR = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow$ como $v_B = 0 \rightarrow v_A = \sqrt{2gR} \rightarrow v_A = \sqrt{2\bullet 10\bullet 5} \rightarrow v_A = 10.0\,\frac{m}{s}$

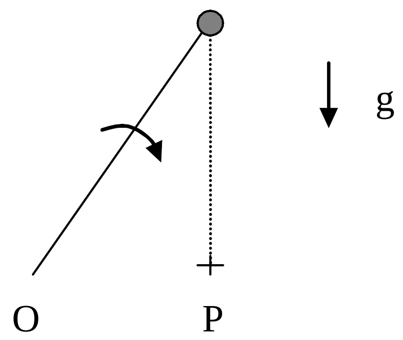
por otro lado: $\triangle p = p_A - p_B \rightarrow$ en donde $p_B = 0,$ luego : $\triangle p = p_A = 10\left[\frac{kg\bullet m}{s}\right]$

y ya que : $\left\|\vec{L}\right\| = R\bullet p \rightarrow L = 5\bullet 10 = 50.0[J\bullet s]$

Observación: $[J\bullet s] = [N\bullet m\bullet s] = \left[kg\bullet\frac{m}{s^2}\bullet m\bullet s\right] = \left[kg\bullet\frac{m^2}{s}\right]$

........................................................................................................................................

La masa "m" ligada a una barra de masa despreciable y longitud R, rota en torno de O, fijo. con velocidad angular $\omega$ . ¿Cuál es el momento angular de m con respecto al punto P?




$\vec{R} = R\sin 60° j$ , con respecto al punto P.

$\vec{v} = v\cos 30°\hat{\imath} - v\sin 30°\hat{\jmath}$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = m\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & R\sin 60° & 0 \\ v\cos 30° & -v\sin 30° & 0 \end{vmatrix} = -\left(\tfrac{3}{4}Rmv\right)\hat{k}$$

Notabene: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ , son vectores unitarios, como $v = \omega R$

$L = \frac{3}{4}Rmv \to L = \frac{3}{4}R^2 m\omega$

.............................................................................................................................

Cuando se aplican 100 $[J]$ de trabajo sobre un volante, su rapidez angular se incrementa de 60 $[rpm]$ a 180$[rpm]$ ¿Cuál es su momento de Inercia?

a partir de : $W = \frac{1}{2}I\omega_F^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \to W = \frac{1}{2}I(\omega_F^2 - \omega_i^2) \to I = \frac{2W}{\left(\omega_F^2 - \omega_i^2\right)}$

como: $\omega_i = 60\ [rpm] = 60 \bullet \frac{2\pi}{60} = 2\pi[\frac{rad}{s}]$, $\omega_F = 180[rpm] = 180 \bullet \frac{2\pi}{60} = 6\pi[\frac{rad}{s}]$

$I = \frac{2 \bullet 100}{(6\pi)^2 - (2\pi)^2} = \frac{25}{4\pi^2} = 0.63326 \to I = 0.63326[kg \bullet m^2]$

.............................................................................................................................

## 6.2 Conservación de la cantidad de movimiento angular.

Si el torque neto sobre el cuerpo es cero, la cantidad de movimiento angular permanece sin cambios tanto en magnitud como en dirección, ésta es la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular.

En un movimiento rotatorio puede ocurrir que $\sum \tau = 0$ , como $\sum \tau = \frac{d}{dt}L$

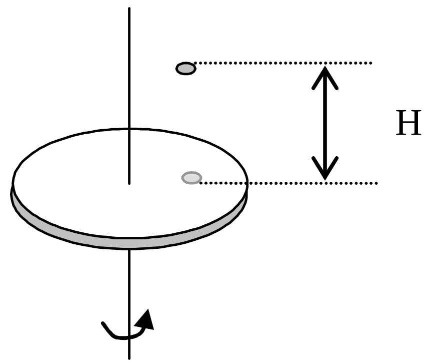
esto nos conduce a que el la cantidad de movimiento angular es constante( se dice que se "conserva")

Ya que para una partícula en movimiento rotacional se cumple en el caso en que: $\sum \tau = 0$

$$\sum \tau = I\alpha = 0 \to I\frac{\omega_f - \omega_i}{t} = 0 \to I\left(\omega_f - \omega_i\right) = 0 \to I\omega_f - I\omega_i = 0 \to I\omega_f = I\omega_i$$

Aplicación de este resultado:

1.- La masa "m" cae desde una altura H quedando pegada al disco de masa $M = 2m$ y radio R que gira sin roce en torno a un eje vertical con rapidez angular $\omega$. Después del choque el disco y la masa giran a $0.8\omega$ . Calcular la distancia a la que cayó la masa "m".




Como se cumple: $I_1\omega_i = I_2\omega_f \to I_1\omega = (I_1 + md^2)\omega_f$

$I_1\omega = (I_1 + md^2)(0.8\omega) \to I_1 = (I_1 + md^2)0.8 \to I_1 = 0.8I_1 + 0.8d^2m$

$0.2I_1 = 0.8d^2m \to I_1 = 4d^2m \to \frac{1}{2}(2m)R^2 = 4d^2m \to$ Solution is: $d = \frac{1}{2}R$

..........................................................................................................................................

Un hombre se encuentra en una plataforma giratoria, montada en en chumaceras sin fricción, que describe 6 [rad/s] . La energía cinética de rotación del hombre más la plataforma vale 18 pie•[lbf]

¿ Cuánto vale el momento de inercia del conjunto hombre + plataforma ?

Cuando el hombre extiende sus brazos su velocidad angular desciende a 3 [rad/s] . Calcular la cantidad de movimiento angular del conjunto en estas condiciones.

$E_{CR} = \frac{1}{2}I\omega^2 \to 18 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot 6^2 \to I = 1[slug \cdot pie^2]$

$L = I\omega \to L = 1 \cdot 6 = 6\left[slug \cdot \frac{pie^2}{s}\right]$ es la cantidad de movimiento angular antes de que el hombre extienda los brazos , por conservación de la Cant. de Movimiento, este valor se mantiene, y lo que cambia es el momento de Inercia.