Dinámica de rotación:

Experimento inicial:

Consideremos un disco que puede girar en torno a un eje que pase por su centro geométrico, como se muestra en la figura:

Si se practican pequeños agujeros a distintas distancias del eje de giro y se cuelgan pequeños pesos a distintas distancias, se puede observar la tendencia a rotar en uno u otro sentido, según donde se dispongan dichos pesos.

Se puede observar que para un mismo peso el movimiento de rotación se acentúa a medida que su posición cambia a una distancia mayor con respecto al eje de giro.

Del mismo, para una distancia constante, si se aumenta el peso, aumenta también la tendencia a rotar.

Este resultado se condensa en la siguiente relación: $\tau = F \cdot R$

En donde, τ es la suma de los momentos (llamado usualmente torque)

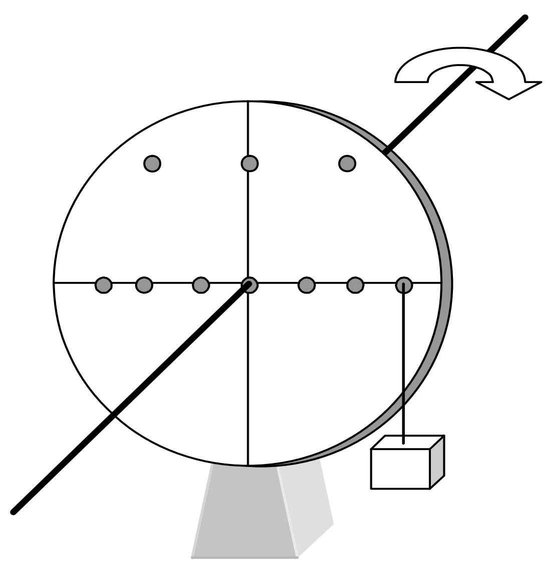
F en este caso es la fuerza peso del bloque dispuesto(más el peso del hilo que lo sostiene que se puede despreciar)

R es la magnitud del vector posición del punto de aplicación de la fuerza.

En general: τ, F, R son vectores y están relacionados por la ecuación: $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$ (producto cruz o vectorial)

El módulo de $\vec{\tau}$, viene dado por: $RF\sin\theta$, en donde el ángulo θ , es el ángulo entre los vectores: $\vec{R}$ y $\vec{F}$ que en el ejemplo ilustrado

es igual a 90° (recordemos que $\sin 90^\circ = 1.0$)



El momento(torque) , produce una aceleración angular α., relacionados ambos por la ecuación: $\tau = I\alpha$, en donde "I" es el momento de Inercia del disco (en este caso), magnitud que depende de la ubicación del eje de giro y de la masa del cuerpo que gira, por lo que se trata de una magnitud que para un mismo cuerpo puede variar, según varíe la ubicación de este eje.

Se puede interpretar al moento de Inercia como una medida de la oposición al movimiento rotacional, ya sea para iniciar el movimiento o bien para detenerlo. La semejanza con el papel desempeñado por la masa en el movimiento traslacional es total.

Acerca del momento de Inercia:

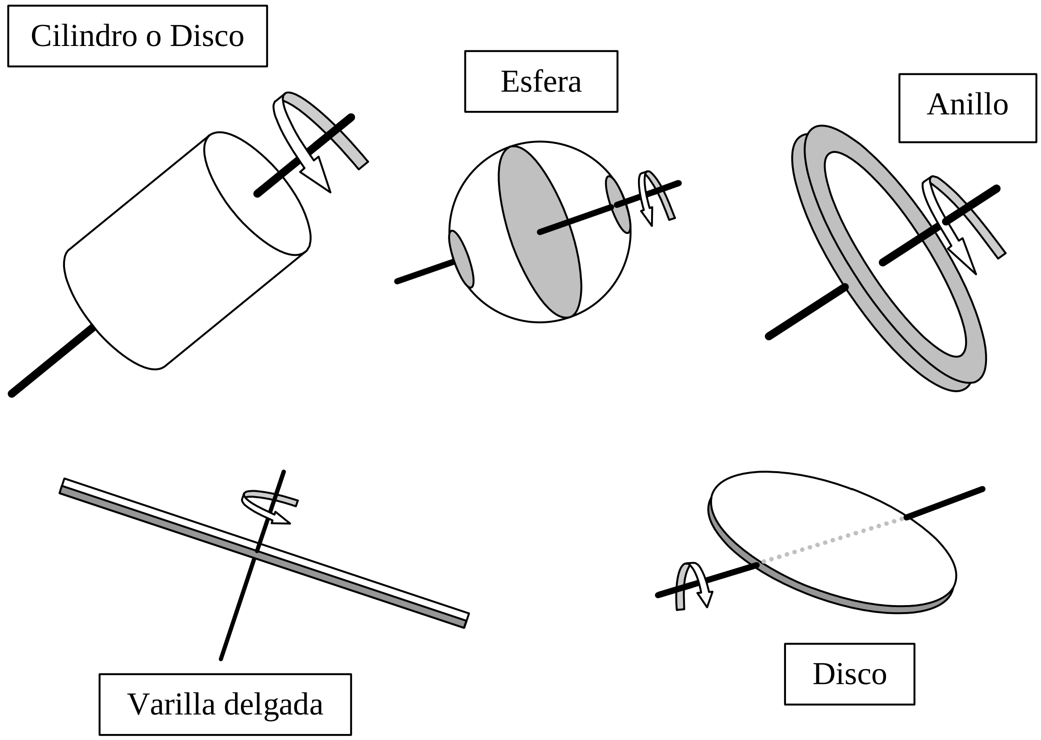
Así como la masa es la medida en que un cuerpo se opone al movimiento traslacional, el momento de Inercia de un cuerpo es la medida en que se opone al movimiento rotacional.

El momento de Inercia depende de la masa del cuerpo y de la ubicación del eje de rotación.Ya que no hay un eje de giro posible único, un mismo cuerpo de tendrá distintos valores de momento de Inercia dependiendo de cuál sea su eje de rotación.

Para determinar el momento de Inercia de un cuerpo sujeto a cierta simetría se puede calcular mediante una integral, es decir en forma matemática, pero también es posible su determinación en forma experimental, cuestión que se deja para cuerpos que no guarden simetría. Para cuerpos compuestos por otros más simples y cuyos momentos de Inercia se conocen(Tabla de fórmulas), es posible determinarlos también algebraicamente.

Se da a conocer una resumida tabla de fórmula para calcular el momento de Inercia de cuerpos simples, con relación a su centro de masa:

cuerpo	momento de Inercia	eje de rotación
Anillo	$I_o = mR^2$	pasa por centro geométrico
Disco o cilindro	$I_o = \frac{1}{2}mR^2$	eje longitudinal
Esfera	$I_o = \frac{2}{5}mR^2$	pasa por su centro geométrico
Varilla delgada	$I_o = \frac{1}{12}mL^2$	pasa por su centro
Disco	$I = \frac{1}{4}mR^2$	pasa por su eje diamentral

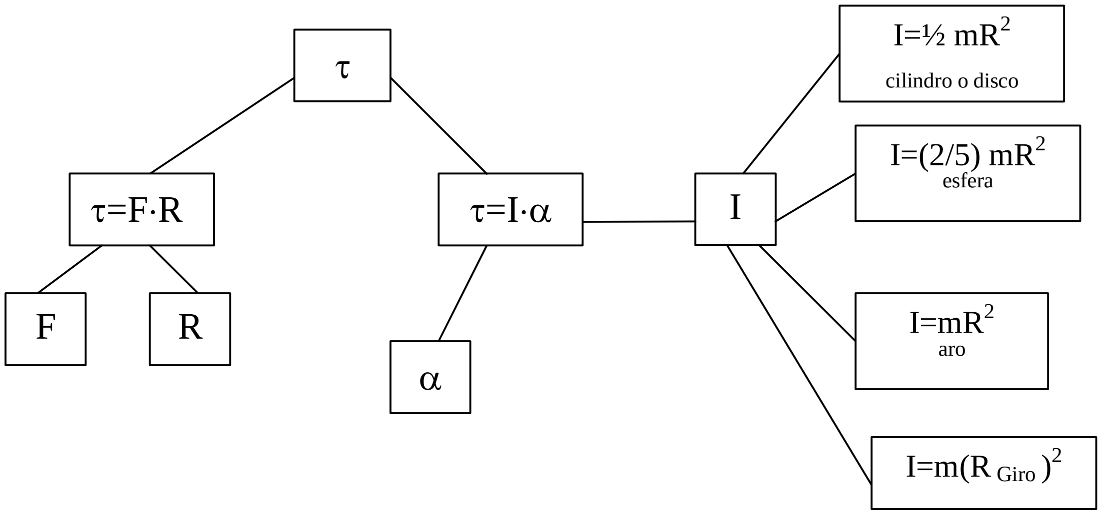


Puede demostrarse que con respecto al eje paralelo al que pase por el centro de masa, y a una distnacia "d" de él,el momento de Inercia es igual a: $I = I_o + md^2$ (esta ecuación es conocida como Teorema de Steiner)

Semejanza entre las ecuaciones de la dinámica lineal y rotacional:

concepto	dinámica lineal	dinámica rotacional
energía	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
trabajo	$F \cdot d$	$\tau\theta$
cantidad de movimiento	mv	$I\omega$
	F (fuerza)	τ (torque)
	m (masa)	I (momento de Inercia)
	v (velocidad)	ω (velocidad)
	a (aceleración)	α (aceleración)

Relación entre las magnitudes asociadas al movimiento rotacional:



Ejemplos de problemas:

Momento e Inercia y Teorema de Steiner:

1.- Calcular el momento de inercia de una varilla delgada con respecto a un eje de rotación en uno de sus extremos y perpendicular a ella.

A partir de $I_o = \frac{1}{12}mL^2$

Y ocupando el teorema de Steiner: $I = I_o + md^2$, en donde: $d = \frac{1}{2}L$

y sustituyendo : $I = \frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{1}{2}L)^2 \rightarrow I = \frac{1}{3}L^2m$

....

2.- Calcular el momento de inercia de una esfera con respecto a un punto en su superficie externa.

A partir de $I_o = \frac{2}{5}mR^2$

Y ocupando el teorema de Steiner: $I = I_o + md^2$, en donde: $d = R$

y sustituyendo : $I = \frac{2}{5}mR^2 + m(R)^2 \rightarrow I = \frac{7}{5}R^2m$

....

3.- Calcular el momento de inercia de un cilindro con respecto a una línea paralela al eje longitudinal sobre su superficie externa.

A partir de $I_o = \frac{1}{2}mR^2$

Y ocupando el teorema de Steiner: $I = I_o + md^2$, en donde: $d = R$

y sustituyendo : $I = \frac{1}{2}mR^2 + m(R)^2 \rightarrow I = \frac{3}{2}R^2m$

....

4.- Calcular el momento de inercia de un cilindro con respecto a una línea paralela al eje longitudinal sobre su superficie externa.

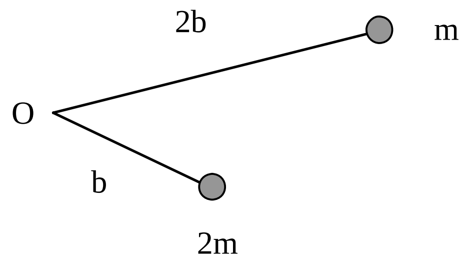
A partir de $I_o = \frac{1}{2}mR^2$

Y ocupando el teorema de Steiner: $I = I_o + md^2$, en donde: $d = R$

y sustituyendo : $I = \frac{1}{2}mR^2 + m(R)^2 \rightarrow I = \frac{3}{2}R^2m$

....

5.- Calcular el momento de Inercia del sistema rígido de masas m y 2m , respecto a un plano perpendicular al plano por el punto O.



Considerando las masas como partículas y las uniones entre ellas de masa despreciable, se tiene:

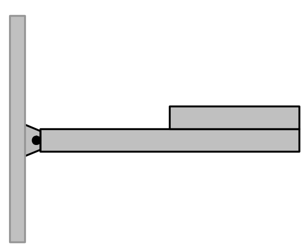
$I = m(2b)^2 + (2m)b^2 \rightarrow I = 6mb^2$

....

6.- El sistema se compone de una barra homogénea uniforme de longitud L y masa m,

articulada(sin roce) en O.

Sobre ella se encuentra otra barra de similares propiedades pero de longitud $\frac{L}{2}$ amarrada al punto O mediante una cuerda si masa. El sistema se suelta desde la posición indicada en la figura . ¿Cuál es el momento de Inercia del sistema respecto a "O" ?



Para la barra larga: $I_1 = \frac{1}{3}mL^2$

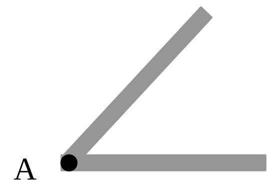
Para la barra corta: $I_2 = \frac{1}{3}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2$

Sumando ambos, se tiene el momento de Inercia para el conjunto:

$I_o = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{3}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2 \rightarrow I_o = \frac{11}{12}L^2m$

....

7.- Dos barras iguales(m;L) se sueldan formando un ángulo e 60° . La masa de soldadura es despreciable. Calcular el momento de Inercia del conjunto respecto de un eje perpendicular que pasa por el centro de masa del cuerpo así formado.



Determinación del centro de masa:

$x_C = \frac{\frac{L}{2} \cdot m + \frac{L}{2} \cdot m \cos 60°}{2m} = \frac{3}{8}L$

$y_C = \frac{0 + \frac{L}{2} \cdot m \sin 60°}{2m} = \frac{1}{8}L\sqrt{3}$

Calculamos la distancia del punto O de unión, al centro de masa:

$d^2 = \left(\frac{3}{8}L\right)^2 + \left(\frac{1}{8}L\sqrt{3}\right)^2 \to d^2 = \frac{3}{16}L^2$

Por Teorema de Steiner: $I_A = I_o + (m_{total})d^2$; $I_A = 2\left(\frac{1}{3}mL^2\right); (m_{total})d^2 = (2m)\left(\frac{3}{16}L^2\right)$

$I_o = 2\left(\frac{1}{3}mL^2\right) - (2m)\left(\frac{3}{16}L^2\right) \to I_o = \frac{7}{24}L^2 m$

....

Problemas que se resuelven usando el concepto de Energía:

1.- Una esfera de masa m y radio R rueda sin resbalar sobre una superfificie horizontal de modo que su centro de masa se mueve con rapidez v. Calcular la energía cinética de la esfera.

$Energía\ cinética = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

como $I = \frac{2}{5}mR^2$ para la esfera. y reemplazando ésta en la ecuación anterior.

$Energía\ cinética = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{5}mR^2)\omega^2$

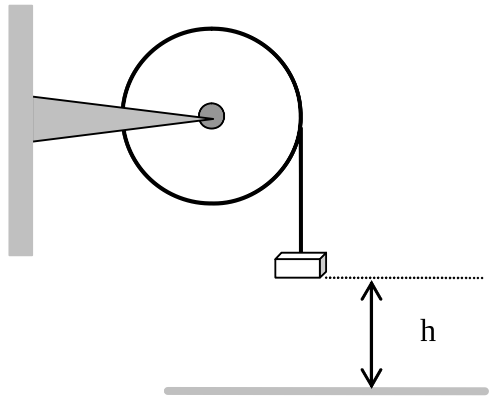
y como : $v = \omega R$

$Energía\ cinética = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$......$Energía\ cinética = \frac{7}{10}mv^2$

....

2.- Una polea de masa m y radio R tiene enrollado un hilo de masa despreciable unido a un bloque de igual masa.

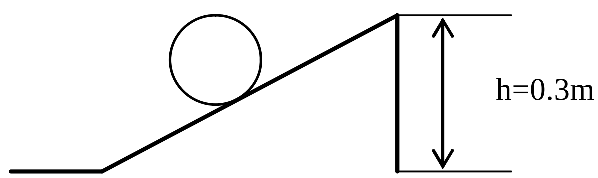
Calcular la velocidad que alcanza el bloque partiendo del reposo al bajar a una altura h.



A partir de : $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, como para la polea, se tiene : $I = \frac{1}{2}mR^2$
$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2)\omega^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}m(R\omega)^2$, pero $v = \omega R$, luego:
$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 \rightarrow ghm = \frac{3}{4}mv^2$, Solution is: $v = \frac{2}{3}\sqrt{gh}\sqrt{3}$

....

3.- Una moneda de 100 pesos parte desde el reposo por el plano inclinado. Cuando llega abajo su velocidad angular tiene un valor cercano a 200$\frac{rad}{s}$. Comprobarlo.



A partir de : $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, como para la moneda(disco), se tiene : $I = \frac{1}{2}mR^2$
$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2)\omega^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}m(R\omega)^2$, pero $v = \omega R$, luego:
$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 \rightarrow ghm = \frac{3}{4}mv^2$, Solution is: $v = \frac{2}{3}\sqrt{gh}\sqrt{3}$
y sustituyendo valores:$v = \frac{2}{3}\sqrt{10 \cdot 0.3}\sqrt{3} = 2.0\frac{m}{s}$
como $v = \omega R$, y considerando $R = 0.01m$, se tendrá: $\omega = \frac{2}{0.01} = 200.0\frac{rad}{s}$

....

4.- Cuatro objetos de masa y radio iguales, ruedan sin deslizar por un plano inclinado.Si partieran simltáneamente y del reposo y de la misma altura, deerminar el orden en que llegarán abajo.

Los objetos son: un aro, un anillo, un cascarón esférico, una esfera sólida.

resolución:

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I(\frac{v}{R})^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2R^2}v^2 I \rightarrow$
$mgh = \frac{1}{2R^2}v^2(I + R^2 m) \rightarrow v = \sqrt{\frac{2R^2 mgh}{(I+R^2 m)}}$

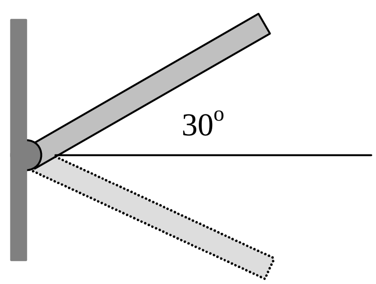
se puede observar que la velocidad depende (en igualdad de condiciones m,y R común) del momento de Inercia.

Por tanto el que tenga menor momento de Inercia llegará primero, y el que tenga mayor momento de Inercia llegará último.

cuerpo	momento de Inercia
Anillo	$I_o = mR^2$
Disco o cilindro	$I_o = \frac{1}{2}mR^2$
Esfera	$I_o = \frac{2}{5}mR^2$
Disco	$I = \frac{1}{4}mR^2$
Cascarón	$I_o = mR^2 averiguar$

....

5.- Considere una barra homogénea (longitud "b" , masa "m", momento de Inercia $I = \frac{1}{3}mb^2$)que puede girar sin roce en torno a su extremo izquierdo de la figura, en un plano vertical. Inicialmente la barra está en la posición indicada en la figura y se suelta. Calcular la rapidez angular cuando la barra ha girado un ángulo de 60°

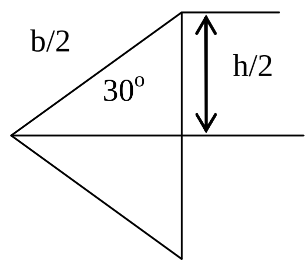


A partir de: $mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 \to mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mb^2\right)\omega^2 \to gh = \frac{1}{6}b^2\omega^2 \to \frac{6gh}{b^2} = \omega^2$

$\to \omega = \sqrt{\frac{6gh}{b^2}}$

Del triángulo formado, se tiene : $\frac{h}{2} = \frac{b}{2}\sin 30^\circ \to \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}b \to h = \frac{1}{2}b$

luego, sustituyendo.. en la expresión para la rapidez angular: $\omega = \sqrt{\frac{6g\frac{1}{2}b}{b^2}} \to \omega = \sqrt{\frac{3}{b}g}$



....

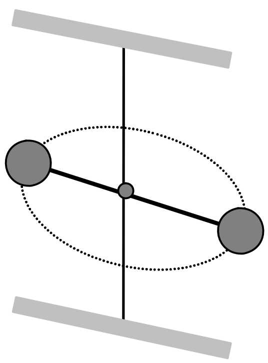
6.- El sistema de dos masas "m" se une por dos barras a una tuerca, las tees últimas de masa despreciable. La tuerca opuede descender o ascender sin roce. si al sistema se le proporciona una velocidad angular inicial ω , la máxima altura que puede alcanzar la tuerca es $h = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$.

Demostrar este resultado.

Considerando las masas como partículas: el momento de Inercia de cada una de ellas está dado por:

$I = mR^2$

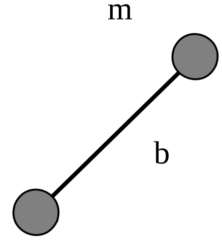
A partir de: $2mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \to 2ghm = I\omega^2 \to 2ghm = mR^2\omega^2 \to h = \frac{R^2\omega^2}{2g}$



....

7.- Dos cuerpos están unidos por una varilla rígida de masa despreciable , tal como se indica en la figura , se mueven sobre una mesa horizontal lisa. Si el centro de masa de este sistema se desplaza con una velocidad "v" , al mismo tiempo que el sistema rota con una rapidez angular ω Calcular la energía cinética del sistema, utilizando los siguientes datos:

$m = 10[kg]$	$\omega = 5[\frac{rad}{s}]$	$b = 0.6[m]$	$v = 2\frac{m}{s}$



$E_C(m_{total}, v, I, \omega) = \frac{1}{2}(m_{total})v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

La masa total es: $m_{Total} = 30kg$

Se debe determinar primeramente el centro de masa del sistema:

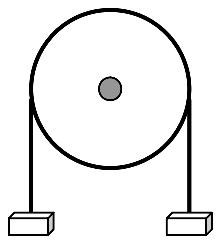
$CM = \frac{0.6m}{2m+m} = 0.2 = \frac{1}{5}$

A continuación el momento de Inercia del sistema de dos masas:
$I = \sum(m_i R_i^2) = 2m(\frac{1}{5})^2 + m(\frac{2}{5})^2 = \frac{6}{25}m = 0.24m \rightarrow I = 2.4[kg \bullet m^2]$
Observación: $I = \sum(m_i R_i^2)$ es el momento de Inercia para un sistema de partículas.
$E_C(30, 2, 2.4, 5) = 90.0[J]$

....

Problemas que se resueven usando las ecuaciones dinámicas de rotación:

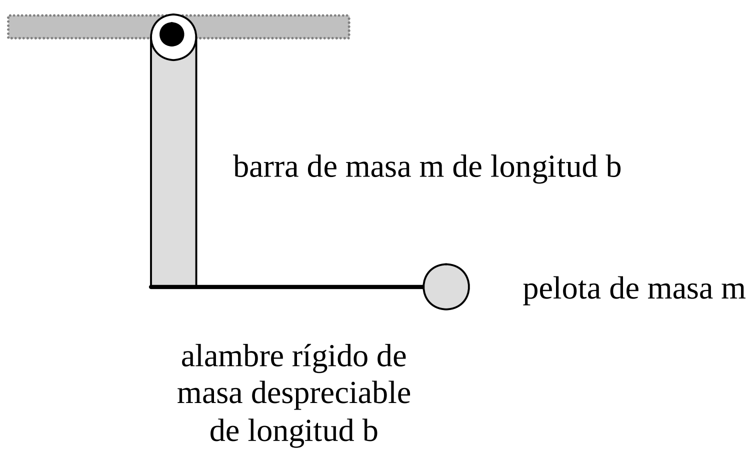
1.- En el sistema representado por la figura, la polea de radio R y momento de Inercia I_o puede girar alrededor de un eje fijo que pasa por su centro. En cada extremo de un hilo que no desliza sobre la polea están colocados sendos cuerpos. si el cuerpo de masa m_1, cae uniformemente (aceleación cero). Calcular el valor de la masa m_2.



ya que: $\sum \tau = 0$, aquí $\alpha = 0$ (aceleración angular.)
$m_1 gR - m_2 gR = 0 \rightarrow$, Solution is: $m_2 = m_1$

....

2.- Si el sistema mostrado en la figura parte del reposo con la barra en posición vertical, calcular la aceleración angular.



$$\tau = I\alpha \rightarrow bmg = \left(\frac{1}{3}mb^2 + m(2b^2)\right)\alpha \rightarrow bgm = \frac{7}{3}b^2 m\alpha \rightarrow \alpha = \frac{3g}{7b}$$

....

3.- Una polea de radio R=0.40 m tiene enrollada una cinta(de espesor y masa despreciables)y puede girar en torno al eje fijo como se indica. Se tira de la cinta con una fuerza constante de magnitud F=30N , partiendo el reposo. La cinta no resbala y el roce con el eje es despreciable. Calcular la energía cinética en el instante en que la polea ha descrito 60 radianes.

a partir de: $FR = I\alpha \to 30 \bullet 0.4 = I\alpha \to 12.0 = I\alpha$

pero como sabemos: energía cinética rotacional: $E_C = \frac{1}{2}I\omega_F^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$

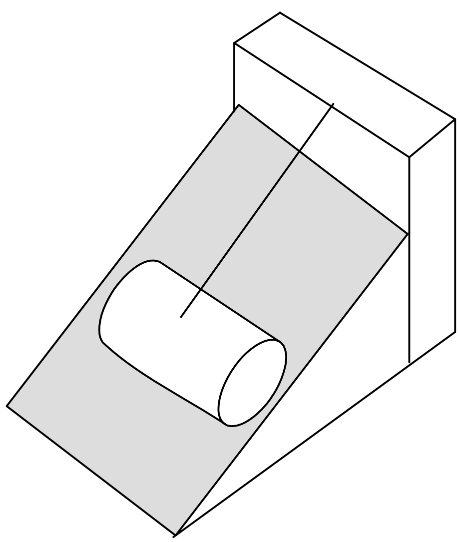
pero $\omega_i = 0$

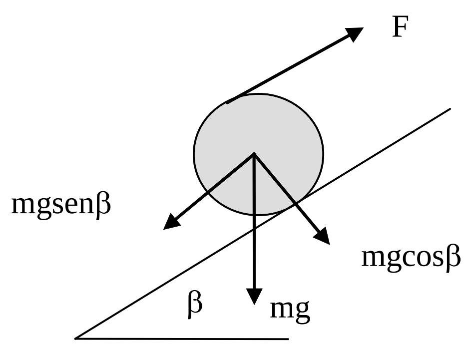
y además: $2\alpha\theta = \omega_F^2 - \omega_i^2$,luego:$12.0 = I\left(\frac{\omega_F^2 - \omega_i^2}{2\theta}\right) \to 12.0 = I\left(\frac{\omega_F^2}{2\theta}\right)$

$E_C = \frac{1}{2}I\omega_F^2 \to E_C = 12 \bullet 60 \to E_C = 720[J]$

....

4.- El cilindro de la figura está en equilibrio sobre el plano inclinado. Calcular la magnitud de la fuerza ejercida por la cuerda, sabiendo que el ángulo entre el plano inclinado y la horizontal es β y el coeficiente de roce entre las superficies es μ, la masa del cilindro es m y su radio R.

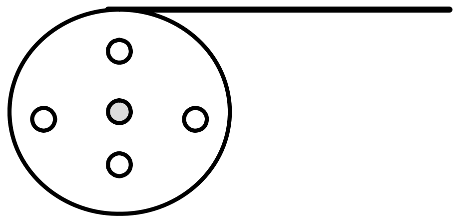




$$\sum \tau = 0 \to R(mg\sin\beta) - (2R)F = 0 \to F = \frac{R(mg\sin\beta)}{(2R)} \to F = \frac{1}{2}mg\sin\beta$$

....

5.- El disco perforado de masa "m" y radio R, es acelerado angularmente por la fuerza de magnitud F=mg aplicada a la cuerda enrollada. En un tiempo t=T , el punto P se desplaza una distancia R(partiendo del reposo). Determinar el momento de Inercia del disco respecto de su centro.



a partir de : $\tau = I\alpha \to I\alpha = mgR$
además : $\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \to \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$ (ya que $\omega_i = 0$)
reuniendo ambas ecuaciones: $I\alpha = mgR$ y $\alpha = \frac{2\theta}{t^2}$
$I\frac{2\theta}{t^2} = mgR \to I = \frac{mgRt^2}{2\theta}$, en donde $t = T$ y $\theta = \frac{s}{R} = \frac{R}{R} = 1$
finalmente: $I = \frac{mgRT^2}{2}$

....

6.- El cilindro de masa 2m ,y radio R, rueda sin resbalar , ligado por una cuerda a la masa m que está suspendida. Calcular la aceleración de la masa "m" colgante.

$$\begin{matrix} mg - T = ma \\ T - f_r = (2m)a \end{matrix} \to mg - T + T - f_r = ma + (2m)a \to mg - f_r = 3ma$$

además se tiene: $I = \frac{1}{2}(2m)R^2 \to I = R^2 m$

revisar

a partir de : $\sum\tau = I\alpha \to T \bullet R - f_r \bullet (2R) = I\alpha$, al tomar momentos con respecto a un punto de la superficie del cilindro.

....

7.- Una varilla de masa m y largo b que puee girar libremente en torno al pivote P , se suelta de la posición indicada. Calcular la aceleración angular de la varilla en ese instante.

$I = \frac{1}{3}mb^2$;
$\tau = I\alpha \to mg(\frac{b}{2}\cos 60^\circ) = \left(\frac{1}{3}mb^2\right)\alpha \to$, Solution is: $\alpha = \frac{3}{4b}g$
En donde se ha considerado el peso concentrado en el punto medio de la varilla.
En cualquier instante, el ángulo es la variable que depende del tiempo por lo tanto, se tendría el siguiente resultado más general: $mg(\frac{b}{2}\cos\theta) = \left(\frac{1}{3}mb^2\right)\alpha \to$, Solution is: $\alpha = \frac{3}{2b}g\cos\theta$

....

Cantidad de movimiento angular:(se considerará solamente movimiento circular)

Se define por $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} \to$ en donde: $\vec{p} = m \bullet \vec{v}$

siendo $\vec{R}$, el vector posición de la partícula de masa m en movimiento rotacional y $\vec{v}$ su velocidad

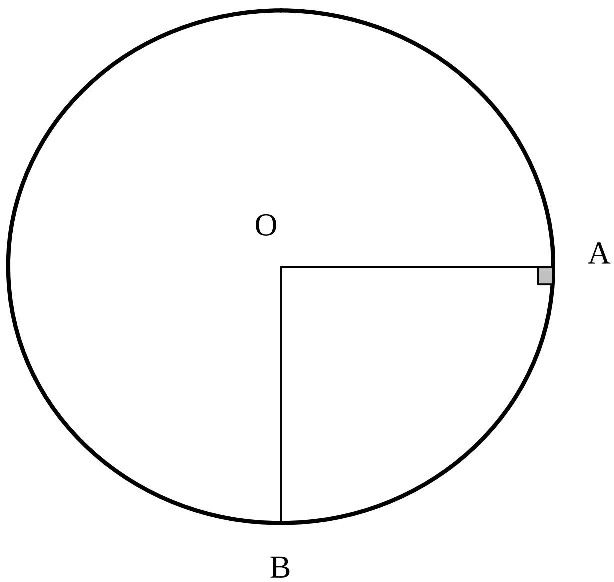
La magnitud de $\vec{L}$, iene dada por: $\left\|\vec{L}\right\| = R \cdot p|\sin\theta|$, en donde . según debemos recordar lo estudiado acerca del producto cruz, θ es el ángulo entre los vectores $\vec{R}\ y\ \vec{p}$.

En el movimiento circular, se tiene que $\theta = 90^\circ \to \left\|\vec{L}\right\| = R \cdot p$

....

Ejemplos:

1.- La masa m=1 kg se suelta desde la posición indicada(punto A) ,cuando la masa pasa por el punto B después de recorrer la superficie circular sin roce entre A y B , de radio R=5m.¿Cuál es la magnitud del cambio de la cantidad de movimiento angular con respecto al punto O.?



$mgR = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 \to$ como $v_B = 0 \to v_A = \sqrt{2gR} \to v_A = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} \to v_A = 10.0\frac{m}{s}$

por otro lado: $\triangle p = p_A - p_B \to$ en donde $p_B = 0,$luego : $\triangle p = p_A = 10\left[\frac{kg \cdot m}{s}\right]$

y ya que : $\left\|\vec{L}\right\| = R \cdot p \to L = 5 \cdot 10 = 50.0[J \cdot s]$

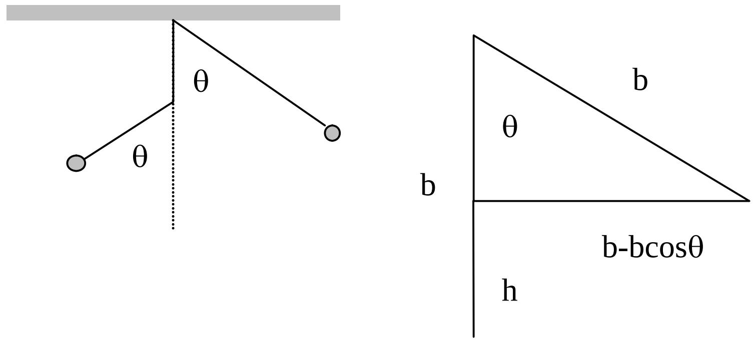
Observación: $[J \cdot s] = [N \cdot m \cdot s] = \left[kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m \cdot s\right] = \left[kg \cdot \frac{m^2}{s}\right]$

....

2.- La masa "m" se deja caer desde la posición indicada en la figura. ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular respecto al clavo, cuando pasa por el punto P ?

La longitud del hilo que sostiene a la pequeña masa es "b" y el clavo se encuentra a una distancia $\frac{b}{2}$, bajo la vertical del punto de donde se sostiene el hilo.El ángulo θ mide

60°



A partir de $mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow mg\frac{b}{2} = mg\frac{b}{4} + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow mg\frac{b}{2} - mg\frac{b}{4} = \frac{1}{2}mv^2$

$\frac{1}{2}bg = v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{2}bg}$

como $p = mv \rightarrow p = m\sqrt{\frac{1}{2}bg}$

y con respecto al clavo: la distnacia $R = \frac{b}{2}$, se tendrá: $L = Rp \rightarrow L = \frac{b}{2}m\sqrt{\frac{1}{2}bg}$

Otra forma de resolver el problema es haciendo uso de vectores:
aprovechando parte de la resolución anterior...

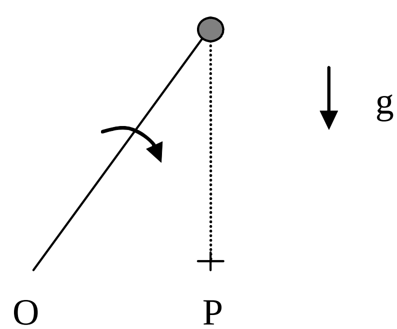
$\vec{v}= \sqrt{\frac{1}{2}bg}\,(-\cos 60^\circ i + \sin 60^\circ j);\ \vec{R}= \frac{b}{2}(-\cos 30^\circ i - \sin 30^\circ j);\ \vec{p}= m\sqrt{\frac{1}{2}bg}\,(-\cos 60^\circ i + \sin 60^\circ j)$

$$\vec{L}=\vec{R} \times \vec{p}= m(\tfrac{b}{2})\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}bg}\right)\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ -\cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{L}= -\left(\frac{1}{2}bm\sqrt{\frac{1}{2}bg}\right)\vec{k}$, y su módulo: $L = \frac{b}{2}m\sqrt{\frac{1}{2}bg}\left[\frac{kg\cdot m^2}{s}\right]$

....

3.- La masa "m" ligada a una barra de masa despreciable y longitud R, rota en torno de O, fijo. con velocidad angular ω . ¿Cuál es el momento angular de m con respecto al punto P?



$\vec{R}= R\sin 60^\circ j$, con respecto al punto P.

$\vec{v} = v\cos 30^\circ \hat{\imath} - v\sin 30^\circ \hat{\jmath}$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = m \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & R\sin 60^\circ & 0 \\ v\cos 30^\circ & -v\sin 30^\circ & 0 \end{vmatrix} = -(\tfrac{3}{4}Rmv)\hat{k}$$

Notabene: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, son vectores unitarios, como $v = \omega R$

$L = \frac{3}{4}Rmv \rightarrow L = \frac{3}{4}R^2 m\omega$

Conservación de la Cantidad de movimiento Angular:

En un movimiento rotatorio puede ocurrir que $\sum \tau = 0$, como $\sum \tau = \frac{d}{dt}L$

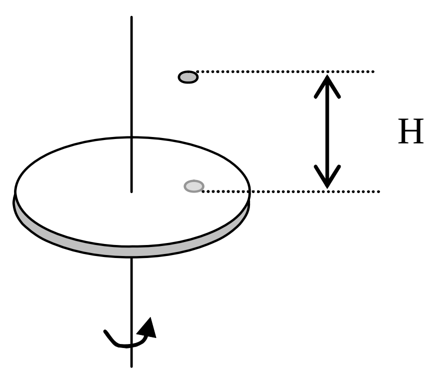
esto nos conduce a que el la cantidad de movimiento angular es constante(se dice que se "conserva")

Ya que para una partícula en movimiento rotacional se cumple en el caso en que: $\sum \tau = 0$

$$\sum \tau = I\alpha = 0 \rightarrow I\frac{\omega_f - \omega_i}{t} = 0 \rightarrow I\left(\omega_f - \omega_i\right) = 0 \rightarrow I\omega_f - I\omega_i = 0 \rightarrow I\omega_f = I\omega_i$$

Aplicación de este resultado:

1.- La masa "m" cae desde una altura H quedando pegada al disco de masa $M = 2m$ y radio R que gira sin roce en torno a un eje vertical con rapidez angular ω. Dspués del choque el disco y la masa giran a 0.8ω . Calcular la distancia a la que cayó la masa "m".



Como se cumple: $I_1\omega_i = I_2\omega_f \rightarrow I_1\omega = (I_1 + md^2)\omega_f$

$I_1\omega = (I_1 + md^2)(0.8\omega) \rightarrow I_1 = (I_1 + md^2)0.8 \rightarrow I_1 = 0.8I_1 + 0.8d^2 m$

$0.2I_1 = 0.8d^2m \rightarrow I_1 = 4d^2m \rightarrow \frac{1}{2}(2m)R^2 = 4d^2m \rightarrow$ Solution is: $d = \frac{1}{2}R$

....