Luis Rodríguez Valencia

PROBLEMAS RESUELTOS
DE MECANICA CALOR Y TERMODINAMICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO

Sección I. CINEMATICA DE LA PARTÍCULA

Problema 1.01 Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas cartesianas están dadas como funciones del tiempo

$$x = 3t$$
$$y = 2t - 5t^2$$

Determine

(a) las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración.

(b) las componentes polares de la velocidad y de la aceleración.

(c) las componentes normal y tangencial de la velocidad y aceleración.

(d) la ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas.

(e) la ecuación de la trayectoria en coordenadas polares.

Problema 1.02 Una partícula se mueve sobre una elipse de semi ejes a y b centrada en el origen de un sistema de coordenadas $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *con rapidez constante* v_0 *. Determine*

(a) la magnitud de la aceleración de la partícula en los puntos más alejado y más cercano de la partícula al centro.

(b) el tiempo que emplea la partícula en recorrer toda la elipse.

(c) La determinación de la ecuación paramétrica de la trayectoria con parámetro tiempo es un problema complicado, pero esquematice el método a seguir.

Problema 1.03 La ecuación de una elipse en coordenadas polares puede escribirse como $r = \frac{c}{1 - e\cos q}$ *siendo 0<c y 0<e<1 constantes. Si el ángulo* q *varía proporcionalmente al tiempo t con constante de proporcionalidad* W*, determine las componentes polares de la velocidad y de la aceleración en función del tiempo.*

soluciones

Problema 1.04** Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio R con aceleración angular constante α partiendo del reposo. Si la partícula realiza n vueltas completas a la circunferencia en el primer segundo, determine la aceleración angular de la partícula. Determine además el número de vueltas que realiza la partícula durante el siguiente segundo del movimiento.**

Problema 1.05 Desde lo alto de un edificio, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una rapidez de 12.5 (mi/s). La pelota llega a tierra 4.25 (s), después. Determine:

(a) La altura que alcanzó la pelota respecto del edificio.

(b) La rapidez de la pelota al llegar al suelo.

Problema 1.06 Se deja caer un cuerpo desde una altura de yo = 33 (m), y simultáneamente se lanza hacia abajo otro cuerpo con una rapidez inicial de 1 (m/s). Encontrar el instante en que la distancia entre ellos es de 18 (m).

Problema 1.07 Un cuerpo que cae, recorre en el último segundo 68.3 (m). Encontrar La altura desde donde cae.

Problema 1.08 Desde lo alto de un acantilado, se deja caer una piedra, desde la misma altura se lanza una segunda piedra 2 (s) más tarde con una rapidez de 30 (m/s). Si ambas golpean el piso simultáneamente. Encuentre: La altura del acantilado.

Problema 1.09 Desde el piso, se lanza hacia arriba una pelota con una rapidez de 40 (m/s). Calcule:

(a) El tiempo transcurrido entre los dos instante en que su velocidad tiene una magnitud de 2,5 (m/s).

(b) La distancia respecto al piso que se encuentra la pelota en ese instante.

Problema 1.10 Una roca cae libremente recorriendo la segunda mitad de la distancia de caída en 3(s). Encuentre

(a) la altura desde la cual se soltó.

(b) El tiempo total de caida.

Problema 1.11 Se dispara un proyectil desde la cima de una colina de 150 (m) de altura con una rapidez de 180 (m/s) y formando un ángulo de 30' con la horizontal. Calcule:

(a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del proyectil.

(b) La altura máxima del proyectil con respecto al suelo.

(c) Las componentes normal y tangencial de la aceleración al salir en el punto de disparo.

Problema 1.12 Un cañón de artillería lanza proyectiles con una rapidez de 300 (m/s). El artillero debe darle a un blanco que se encuentra a 8640 (m) detrás de un cerro cuya altura es de 1000 (m) ubicado a 1200 (m) del cañón. Demuestre que es posible darle al blanco y determine el ángulo de elevación para cumplir el objetivo.

Problema 1.13 Se dispara un proyectil de modo que su alcance horizontal es igual al triple de la altura máxima. Encuentre el ángulo de lanzamiento.

Problema 1.14 Un lanza granadas tiene un alcance máximo de 300 (m). Para dar en un blanco que se encuentra a una distancia de 400 (m) del lanza granada. Determine:

(a) La altura mínima que debe subirse el lanza granada.

(b) La rapidez de lanzamiento.

(c) El ángulo de lanzamiento,

Problema 1.15 Un automóvil viaja hacia el norte con una rapidez de 60 km/h en una carretera recta. Un camión viaja en dirección opuesta con una rapidez de 50 km/h.

(a) ¿Cuál es la velocidad del automóvil respecto al camión?

(b) ¿Cuál es la velocidad del camión respecto al automóvil?

Problema 1.16 Un automovilista viaja hacia el oeste sobre la Ruta Inter estatal 80 a 80 km/h y es seguido por un auto patrulla que viaja a 95 km/h.

(a) ¿Cuál es la velocidad del automovilista respecto al auto patrulla?

(b) ¿Cuál es la velocidad del auto patrulla respecto al automovilista?

Problema 1.17 *Un río tiene una rapidez uniforme de 0.5 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1 km y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de 1.2 m/s en agua tranquila, ¿cuánto dura el recorrido? Compare este resultado con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera tranquila.*

Problema 1.18 *Dos remeros en idénticas canoas ejercen el mismo esfuerzo remando en un río, uno corriente arriba (y se mueve corriente arriba), mientras que el otro rema directamente corriente abajo. Un observador sobre en reposo sobre la orilla del río determina sus rapideces que resultan ser de* V_1 *y* V_2 *respectivamente. Determine en términos de los datos la rapidez de las aguas del río.*

Problema 1.19 *Un bote cruza un río que mide de ancho w en el cual la corriente fluye con una rapidez uniforme de u. El botero mantiene una orientación (es decir, la dirección en la cual apunta el bote) perpendicular al río y al motor fijo para dar una rapidez constante de v m/s con respecto al agua. De acuerdo a los datos*

(a) ¿Cuál es la velocidad del bote respecto a un observador detenido en la orilla?

(b) ¿Hasta dónde estará el bote, medido corriente abajo paralelamente al río, desde la posición inicial hasta cuando alcance la orilla opuesta?

Problema 1.20 *Un comprador que está en una tienda puede caminar sobre una escalera mecánica en 30 s cuando está detenida. Cuando la escalera mecánica, funciona normalmente, puede llevar al comprador sin caminar al siguiente piso en 20 s. ¿Cuánto tiempo le tomaría al comprador al subir caminando con la escalera mecánica en movimiento? Suponga que el comprador hace el mismo esfuerzo al caminar sobre la escalera mecánica en movimiento o cuando está parada.*

Problema 1.21 *El piloto de un avión observa que la brújula indica que va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de 150 km/h. Si existiera un viento de 30 km/h hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra.*

Problema 1.22 *El piloto de un avión desea volar hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a 50 km/h. Si la rapidez del avión cuando no sopla el viento es de 200 km/h,*

(a) a) ¿en qué dirección debe dirigirse el avión?

(b) b) ¿cuál debe ser su rapidez respecto a la Tierra?

Problema 1.23 Un automóvil viaja hacia el Este con una rapidez de 50 km/h. Está lloviendo verticalmente con respecto a la Tierra. Las marcas de la lluvia sobre las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de 60° con la vertical, calcule la velocidad de la lluvia con respecto a:

(a) el automóvil y

(b) la Tierra.

Problema 1.24 Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo llevado corriente abajo por una corriente que fluye uniformemente con una rapidez de 2.5 km/h. El niño está a 0.6 km de la orilla y a 0.8 km corriente arriba de un embarcadero cuando un bote de rescate se pone en camino.

(a) a) si el bote procede a su rapidez máxima de 20 km/h con respecto al agua, ¿cuál es la dirección, relativa a la orilla, que deberá tomar el conductor del bote?

(b) ¿Cuál es el ángulo que hace la velocidad, v, del bote con respecto a la orilla?

(c) ¿Cuánto tiempo le tomará al bote para alcanzar al niño?

Problema 1.25 Desde el techo del carro de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de 2.5 m/s2 se suelta y cae un perno. ¿Cuál es la aceleración del perno con respecto a:

(a) el carro del tren?

(b) la estación de tren estacionaria?

Problema 1.26 Un estudiante de la Facultad de Ingeniería pasea sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante de V m/s. El estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo de α° con la horizontal y está en línea con la vía. El profesor del estudiante, que está *parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura subirá la pelota?*

Sección II. DINAMICA DE LA PARTICULA .

Problema 2.01 3.1 Una partícula de masa m se mueve en una línea recta (el eje X) sometida a una fuerza elástica $-K\,x$ *y a una fuerza de roce viscosa de la forma* $-2b\,\dot{x}$*. Si inicialmente la velocidad es V y la posición es* $x = 0$*, determine las expresiones para la posición de la partícula en función del tiempo, en los tres casos: sub amortiguado, amortiguado crítico y sobre amortiguado.*

Problema 2.02 Una partícula de masa m *se lanza verticalmente hacia arriba (el eje Y) con velocidad inicial* V *sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma* $-2b\;\dot{y}$*. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.*

Problema 2.03 Una partícula de masa m *se lanza verticalmente hacia arriba (el eje Y) con velocidad inicial* V *sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma* $-2b\;\dot{y}$*. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.*

Problema 2.04 Una partícula de masa m *se lanza verticalmente hacia arriba (el eje Y) con velocidad inicial* V *sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa proporcional al cuadrado de la rapidez, de la forma* $\pm 2b\;|\dot{y}|^2$*. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo. Considere que debe elegirse el signo adecuadamente para la subida y la bajada de la partícula.*

Problema 2.05 Demuestre que la ecuación de movimiento de un péndulo simple, partícula de masa m suspendida de un hilo liviano de largo L es : $\ddot{q} + \frac{g}{L} sin(q) = 0$

Problema 2.06 Una partícula da vueltas por el interior de un aro liso de radio R que tiene su plano vertical, sometida a su peso y a la reacción normal. Determine la velocidad mínima que debe tener la partícula en el punto más bajo para que la partícula realice vueltas completas sin perder contacto con el aro.

Problema 2.07 Respecto a la situación del problema anterior, si la velocidad en el punto más bajo es ${}^{3}\!/_{4}$ *de la mínima calculada, determine el punto donde se pierde el contacto.*

Problema 2.08 Una partícula de masa m se coloca en el punto más alto de un hemisferio liso de radio R y se perturba levemente de modo que ella comienza a caer deslizando. Determine el punto sobre el hemisferio donde la partícula pierde el contacto con el.

Problema 2.09 Una partícula descansa sobre una plataforma horizontal inicialmente en reposo. Si la plataforma comienza a moverse verticalmente de modo que su desplazamiento es: $y = A\sin(w\,t)$ *siendo A y* w *constantes. Determine la condición que deben cumplir esas constantes para que durante el movimiento de la plataforma la partícula se despegue de ella.*

Problema 2.10 Una partícula moviéndose en una línea de la recta está sometida a una resistencia que produce una fuerza de retardo kv^3*, donde v es la velocidad y k es una constante . Muestre que la velocidad v y el tiempo t están dados en términos de s, la distancia mediante las ecuaciones* $v = \dfrac{u}{1+ksu}$, $t = \dfrac{s}{u} + \dfrac{1}{2}ks^2$ *donde u es la velocidad inicial.*

Problema 2.11 Como un resultado de experimentos con un rifle, se estimó que la bala salió del cañón con una velocidad de 800 m/s y que se redujo la velocidad a 600 m/s cuando recorrió 100 [m]. Suponiendo que la resistencia del aire varió como v^3 *y despreciando la gravedad, calcule el tiempo para recorrer 1000 [m].*

Problema 2.12 Una partícula se mueve en una línea de la recta bajo la acción de una fuerza de roce de la forma kv^{m+1} *donde v es la velocidad a tiempo t. Muestre que, si u es la velocidad a t= 0* $kt = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{v^m} - \dfrac{1}{u^m}\right)$ *y obtenga una fórmula correspondiente para el espacio en términos de v.*

Problema 2.13 Una bala disparada con una velocidad horizontal de 800 [m/s] viaja con una velocidad de 500 [m/s] al final de un segundo. Suponiendo válido el modelo del problema anterior con $m = 1/2$ *, calcule k y el espacio recorrido en el primer segundo, despreciando el efecto de la gravedad.*

Problema 2.14 Se dispara verticalmente hacia arriba una piedra en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa kv *cuando la rapidez es v. Si* v_0 *es la rapidez del disparo, pruebe que la piedra vuelve al punto inicial después de un tiempo* t_1*, donde* $(g + kv_0)(1 + e^{-kt_1}) = gkt_1$

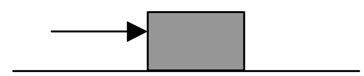
Problema 2.15 Una partícula se lanza hacia arriba con velocidad inicial u y se mueve en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa kv^2. *Pruebe que la partícula vuelve al punto de partida después de un tiempo* $\frac{1}{\sqrt{kg}}\left\{\alpha + \ln\left(\sec\alpha + \tan\alpha\right)\right\}$ *donde* $\tan\alpha = u\sqrt{k/g}$.

Problema 2.16 Un cuerpo se ata a un extremo un hilo inextensible y el otro extremo el hilo tiene movimiento armónico simple vertical de amplitud a, realizando n oscilaciones completas por segundo. Demuestre que el hilo no permanecerá siempre tenso a menos que $n^2 \leq g/4\pi^2 a$.

Problema 2.17 Un cuerpo de masa m = 16 (Kg) se encuentra sobre una superficie horizontal áspera cuyos coeficientes de roce estático y cinético son respectivamente 0.3 y 0.25. Si sobre el cuerpo se aplica una fuerza horizontal F, durante 4 segundos solamente, determine:

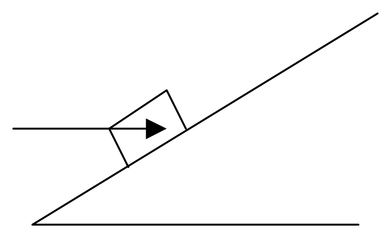
(a) La fuerza neta sobre el cuerpo si F = 45 N.

(b) La magnitud mínima de F para que el bloque esté a punto de iniciar el movimiento.



(c) La distancia que recorre hasta llegar a detenerse.

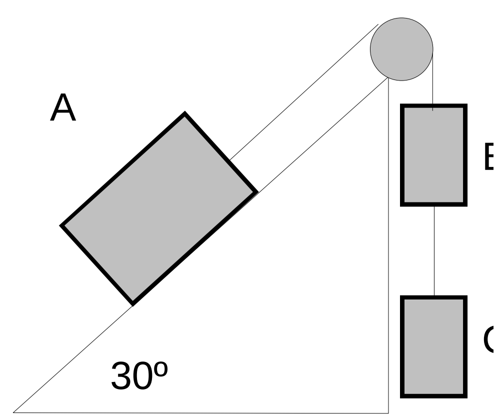
Problema 2.18 Un cuerpo de masa m = 1 Kg se empuja mediante una fuerza horizontal F de módulo 15 (N), desde el pie de un plano inclinado áspero que forma un ángulo de 37 con la horizontal y cuyo coeficiente de roce cinético es 0.2. Si la fuerza F sólo actúa durante 3 segundos, determine.



(a) La distancia que alcanza a subir por el plano.

(b) El tiempo que demora en volver al punto de Partida.

Problema 2.19 El sistema de la figura está formado por los bloques A, B, y C, ligados por cuerdas de masa despreciable e inextensibles. La cuerda que une los cuerpos A y B, pasa por una



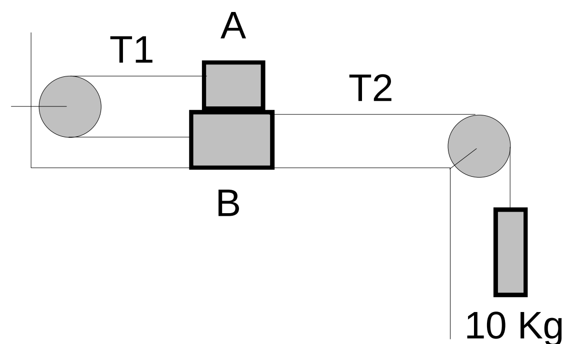
polea de masa y roce despreciable. El coeficiente de roce cinético entre el bloque A y el plano es 0.5 y la masa de A y B es de 2 Kg cada una, y el ángulo del plano inclinado es de 30º. Calcule:

(a) El valor de la masa del bloque C para que el bloque A suba con aceleración de módulo 2 m/s^2.

(b) La tensión que actúa sobre el bloque C.

(c) El mayor valor que puede tener la masa del bloque C para que el sistema esté a punto de deslizar. Si el coeficiente de roce estático es 0.8.

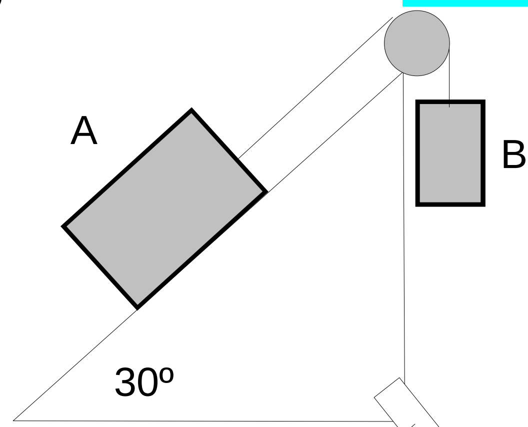
Problema 2.20 La figura muestra dos bloques A y B sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Las masas de los bloques son m_A=2 Kg y m_B=3 Kg siendo el coeficiente de roce cinético entre ambos bloques es m_k= 0.3. Las poleas no tienen roce y las cuerdas son inextensibles y de masa despreciable. Si el sistema se libera a partir del reposo. Determine:



(a) El módulo de la aceleración de cada bloque.

(b) Las tensiones en las cuerdas.

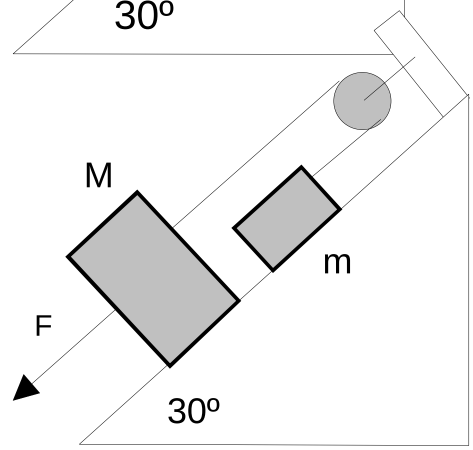
Problema 2.21 Los bloques A y B de la figura están ligados por una cuerda de masa despreciable e inextensible, la cual pasa por una polea liviana y sin roce. Entre el bloque B de masa m_B= 15 Kg y el plano inclinado en 30º es rugoso, existen coeficientes de roce estático y cinético m_s = 0.2 y m_k =0.1 respectivamente. Encontrar:



(a) El mayor valor que puede tener la masa del bloque A para que el sistema esté a punto de empezar a moverse.

(b) La distancia que recorre B entre t = 0 y 1(s) si M_A=60 Kg .

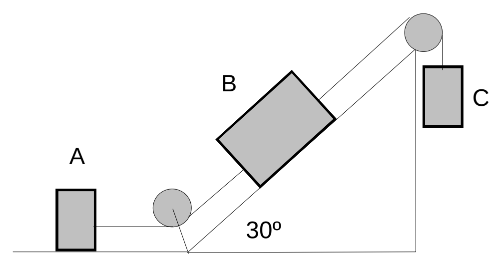
Problema 2.22 Se tiene un sistema de dos masas M = 0.5 Kg y m = 0.3 Kg, apoyadas sobre un plano inclinado áspero, unidas por una cuerda liviana inextensible de largo L que pasa por una pequeña polea suave, fija en el extremo superior del plano, tal como lo muestra la figura. Sobre la masa M actúa una fuerza constante F paralela al plano inclinado. Determinar:



(a) El coeficiente de roce cinético si se sabe que cuando el módulo de F es cero, el sistema se mueve con una rapidez v_o constante.

(b) El módulo de F y la tensión en la cuerda, si se sabe que el cuerpo M recorre una distancia de 1 m en 2 s a partir del reposo.

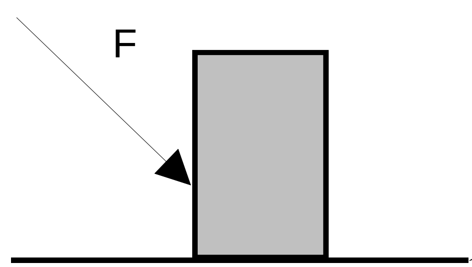
Problema 2.23 La figura muestra un sistema ligado, donde M_B = 2 Kg y M_C = 5 Kg. El plano horizontal es rugoso y el plano inclinado es liso, las cuerdas son inextensibles, de masa despreciable y sin roce, Calcule.



(a) El valor de la masa de A para que el sistema esté a punto de deslizar, si el coeficiente de roce estático entre el cuerpo A y el plano horizontal es 0.3.

(b) El tiempo que demora el cuerpo C en llegar al suelo. Si la masa de A es 1 Kg y el coeficiente de roce cinético entre el plano y el cuerpo A es 0.2.

Problema 2.24 La figura muestra un cuerpo de masa m = 10 Kg que descansa sobre una mesa horizontal.



Cuando sobre él actúa una fuerza de magnitud constante F = 100 N, inclinada en 37º respecto de la horizontal, el cuerpo está a punto de moverse. Manteniendo esta condición y sacando el cuerpo del reposo, éste recorre 160 m en 10 s. Determine los coeficientes de roce estático y cinético.

Sección III. DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Problema 3.01 Sí cada partícula de un sistema es atraída hacía un punto fijo 0 con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia al punto 0, demuestre que el centro de masas se mueve como sí fuera una partícula del sistema.

Problema 3.02 Un conjunto de partículas de masas m, *pueden deslizar libremente sobre alambres paralelos y se atraen una a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y a sus distancias. Demuestre que las partículas efectúan oscilaciones armónicas del mismo período relativas a un plano perpendicular a los alambres y que pasa por el centro de masas supuesto en reposo.*

Problema 3.03 Dos partículas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Sí las partículas deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto, demuestre que el centro de masas describe una cónica con su foco en la intersección de las correderas.

Problema 3.04 Dos partículas iguales deslizan sobre correderas lisas perpendiculares que se interceptan en 0. *Demuestre que si las partículas. se atraen y ellas parten desde el reposo de posiciones cualquiera sobre las correderas, ellas llegarán simultáneamente a la intersección.*

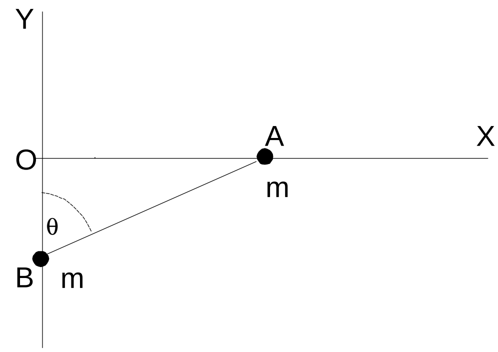
Problema 3.05 Dos partículas de masas iguales a m *se mueven sobre las correderas lisas perpendiculares* OX *y* OY *y se atraen con una fuerza proporcional a su distancia siendo* K *la constante de proporcionalidad. Inicialmente:* $x(0) = a, y(0) = a,$ $\dot{x}(0) = -V_0 \; y \; \dot{y}(0) = 0,$

(a) Determine x(t), y(t).

(b) Determine la ecuación cartesiana de la trayectoria del centro de masas del sistema.

Problema 3.06 Dos partículas de igual masa están unidas por un resorte de constante K y largo natural a. Además actúa entre ambas partículas una fuerza amortiguadora proporcional a la rapidez de la variación de la distancia entre ellas. El sistema se coloca en movimiento dándole a una de las partículas una velocidad V_0 perpendicular a la línea que une las partículas. Determine V_0 si después de un tiempo muy largo, el largo del resorte es 2a.

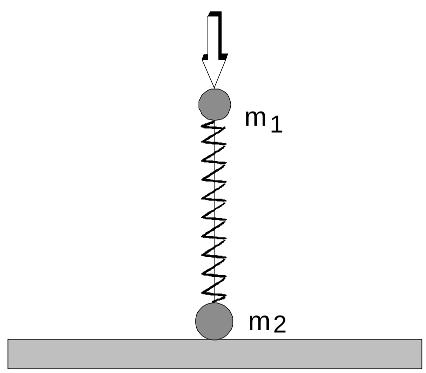
Problema 3.07 Dos partículas A y B de idéntica masa m*, están unidas entre sí por una cuerda inextensible de largo a. La partícula A se mueve por una corredera horizontal lisa OX, mientras que la partícula B se mueve por una corredera vertical lisa OY, ambas en un plano vertical. Inicialmente B está en 0 y OA = a, con el sistema en reposo. Si q es el ángulo en B:*



(a) Calcular en función de θ las reacciones que ejercen las correderas sobre las partículas.

(b) Calcular la tensión en la cuerda en función de θ

Problema 3.08 Se tiene el sistema de dos partículas m_1 *y* m_2 *de la figura en que el resorte, de constante* k *no tiene masa. Determinar el valor mínimo de la compresión DX del resorte, medido respecto de su largo natural, para que al soltar* m_1 *se despegue* m_2*.*



Problema 3.09 Tres partículas iguales están inicialmente en línea recta igualmente espaciadas sobre un plano horizontal liso y unidas por dos hilos de largos "a". La partícula del medio inicialmente está en reposo y a las partículas externas se les da una velocidad V_0 perpendicular a la línea que las une. Calcule la velocidad con que chocan las partículas.

Sección IV. CAMPO CENTRAL DE FUERZA.

Problema 4.01 Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R_o *con rapidez* V_0 *atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro, Si repentinamente la velocidad se reduce a la mitad, determine en termino de* R_o *y* V_0 *la ecuación de la nueva órbita.*

Problema 4.02 Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre M*, la constante de gravitación* G*, la velocidad angular terrestre* w*, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente aumentada al doble.*

Problema 4.03 Un satélite de masa m está en órbita circular de radio 2R en torno a la tierra supuesta esférica, de masa M y radio R, en reposo y sin atmósfera. Si la velocidad se altera en un punto de la órbita en un factor f, determine, siendo G la constante de gravitación

(a) la ecuación de la nueva órbita.

(b) el rango de valores de f para los cuales el satélite chocará con la tierra

(c) el rango de valores de *f* para los cuales el satélite se aleja Indefinidamente.

Problema 4.04 Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre M, la constante de gravitación G, la velocidad angular terrestre W*. Determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente reducida a la mitad.*

Problema 4.05 Considere la tierra como esférica, en reposo de masa M y radio R, sin atmósfera. Se lanza un proyectil con rapidez inicial V_0 *formando un ángulo* α *respecto a la* *horizontal. Determine el arco que el proyectil recorre hasta llegar al suelo (si lo hace). Discuta las condiciones bajo las cuales el proyectil cae nuevamente al suelo. La constante de gravitación es* G.

Problema 4.06 Una partícula de masa m = 1 es atraída por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a un punto fijo 0 y se mueve describiendo la elipse: $r = \dfrac{100}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}$. *Sí en el punto más alejado de su trayectoria, la rapidez de la partícula es V=1 determine la constante de la ley de fuerza. Sí en el punto más alejado, la rapidez de la partícula es duplicada, determine la ecuación de la nueva órbita.*

Problema 4.07 Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R_o *con rapidez* V_0 *atraída hacía el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Sí repentinamente la rapidez de la partícula se aumenta a* $V = \sqrt{\alpha}\, V_o$ *siendo* $\alpha > 1$ *demuestre que si* $\alpha \geq 2$ *la partícula se aleja hasta el infinito. En cambio si* $\alpha < 2$ *, determine la ecuación de la nueva órbita en términos de* R_o, V_o *y* α.

Sección V. DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO.

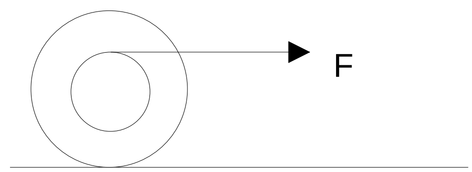
Problema 5.01 Un disco de masa M y radio R se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar si resbalar con su plano vertical. Si se tira del centro del disco con una fuerza horizontal constante F, determine:

(a) La aceleración del centro de masa del disco.

(b) La aceleración angular del disco.

(c) La fuerza de roce.

Problema 5.02 Un disco de masa M y radio 2R se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar si resbalar con su plano vertical. El disco tiene un resalto de radio R como se indica en la figura, en el cual se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante F, determine:



(a) La aceleración del centro de masa del disco.

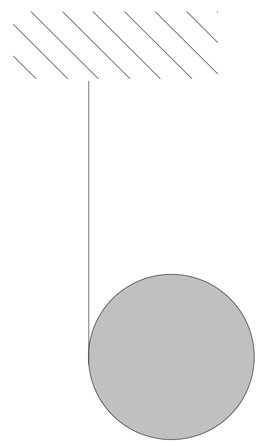
(b) La aceleración angular del disco.

(c) La fuerza de roce.

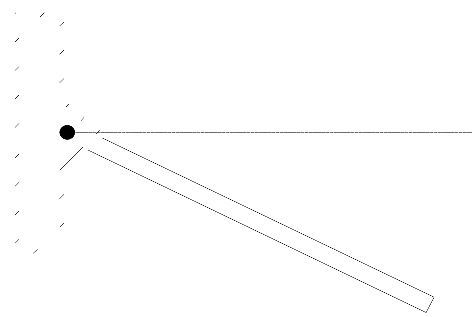
Problema 5.03 Un disco de masa M y radio R tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determine:

(a) La aceleración de bajada del disco.

(b) La tensión de la cuerda.



Problema 5.04 *Una barra de largo 2L y masa M está articulada en un extremo a un punto fijo O, inicialmente en reposo y horizontal. Si ella se suelta, comienza a rotar respecto a la articulación bajo el efecto del peso de la barra. Determine la reacción en la articulación y la velocidad angular de la barra en función del ángulo que ella ha girado.*



Problema 5.05 *Una barra de longitud 2L y masa M se coloca verticalmente sobre un plano horizontal liso, en reposo. Si ella es perturbada levemente comienza a caer. Determine la velocidad del centro de masa de la barra justo cuando ella se coloca horizontal.*

Problema 5.06 *Una barra de longitud 2L y masa M se coloca sobre un plano horizontal liso. Si la barra es tirada por una fuerza constante F, inicialmente perpendicular a la barra y aplicada en un extremo, la barra comienza a moverse sobre el plano. La fuerza se mantiene aplicada a ese mismo extremo manteniendo su dirección original. Determine una ecuación para el ángulo que gira la barra en función del tiempo.*

Problema 5.07 *Una barra de longitud L y masa M puede oscilar libremente en torno a uno de sus extremos que se mantiene fijo, bajo la acción de su peso. Escriba la ecuación diferencial para el ángulo que ella gira.*

Sección VI. CHOQUES.

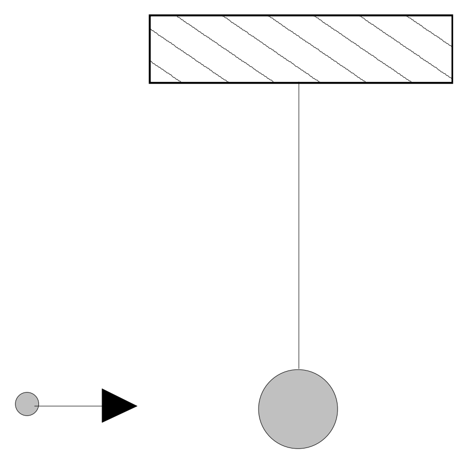
Problema 6.01 Una partícula de masa M se encuentra en reposo mientras que otra partícula de masa m se acerca con rapidez v y la choca frontalmente siendo e el coeficiente de restitución. Determine las velocidades resultantes del choque.

Problema 6.02 Una partícula de masa M se encuentra en reposo mientras que otra partícula de masa m se acerca con rapidez v y la choca frontalmente siendo e=0 el coeficiente de restitución. Determine las velocidades resultantes del choque.

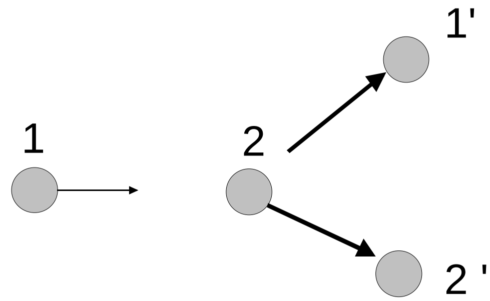
Problema 6.03 Una partícula de masa m se suelta desde una altura h y los choques que ocurren contra el suelo son con coeficiente de restitución e. Determine el tiempo total que demoran en ocurrir todos los choques.

Problema 6.04 Una partícula de masa m=1 Kg está en reposo mientras que otra de masa m=3 Kg se acerca con rapidez 5 m/s por la izquierda y la choca con coeficiente de restitución e=0,5. La partícula que estaba en reposo se coloca en movimiento y choca frontalmente contra una pared fija con coeficiente de restitución e=1, devolviéndose. Determine las velocidades finales una vez que todos los choques terminen.

Problema 6.05 Una partícula de masa m (una bala) se acerca horizontalmente con rapidez V y se incrusta en un saco de arena de masa M que cuelga de un cordel de longitud L. Por efecto del choque el sistema "saco+bala", sube una altura h, respecto a su altura inicial. Determine en términos de m, M, L, h la velocidad de la bala.



Problema 6.06 Una partícula (2) de masa m está en reposo y otra de la misma masa (1) se acerca con rapidez V y la choca lateralmente de manera que la que estaba en reposo sale en 30º respecto a la dirección de incidencia de la primera. Si el choque es con coeficiente de restitución e<1 determine el ángulo en el cual se desvía la otra respecto a su dirección de incidencia. Suponga que la velocidad relativa tangencial no es afectada por el choque.



Problema 6.07 Repita el problema anterior si el choque es con coeficiente de restitución e=1

Problema 6.08 .Demuestre que en el choque lateral y elástico de dos partículas de la misma masa una de las cuales estaba en reposo, los ángulos en que se desvían las partículas respecto a la dirección de incidencia de la móvil, suman 90 grados.

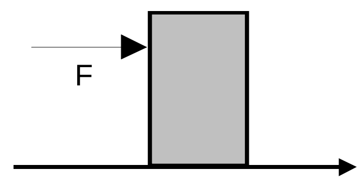
Sección VII. ESTATICA.

Problema 7.01 *Determine la posición del centro de masas de un semidisco homogéneo de masa M y radio R.*

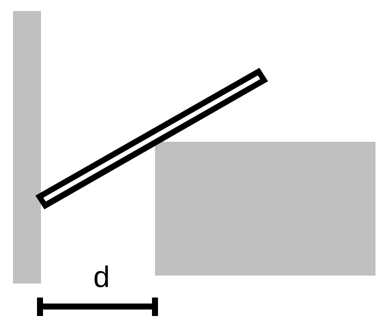
Problema 7.02 *Determine la posición del centro de masas de una semiesfera homogénea de masa M y radio R.*

Problema 7.03 *Determine la posición del centro de masas de una pirámide homogénea recta de base circular de radio R, altura h y de masa M.*

Problema 7.04 *Un cuerpo homogéneo de masa M altura H y base de largo 2a, es empujado por una fuerza horizontal F aplicado a un costado y a altura h desde el suelo. Si el coeficiente de roce estático en el suelo es* m_s *determine la condición para que al romperse el equilibrio aumentando F el cuerpo desliza o vuelca.*



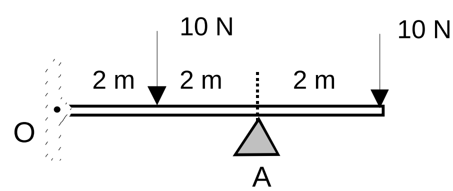
Problema 7.05 *Una barra de masa M y largo L se equilibra como se indica en la figura. No hay roce. Determine el ángulo que la barra hace con la horizontal cuando hay equilibrio.*



Problema 7.06 *Una barra de largo L=6 m y de peso W =20 N está articulada en su extremo izquierdo a un punto fijo O, apoyada en un soporte liso en A y cargada por fuerzas como se indica en la figura.*

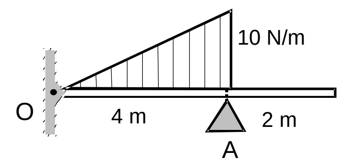
(a) Determine la reacción vertical en la articulación.

(b) Determine la reacción vertical en el soporte.

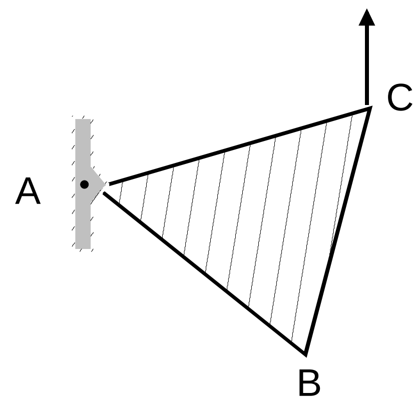


Problema 7.07 *Determine las fuerzas de corte y momento flector para la barra del problema anterior, en función de la posición x a partir el punto O, dibujando los diagramas correspondientes.*

Problema 7.08 *Considere la barra liviana de la figura la cual tiene una carga distribuida en forma lineal con un valor máximo de 10 N/m. Determine las fuerzas de corte y momento flector haciendo los diagramas correspondientes en función de x, la distancia al extremo izquierdo de la barra.*



Problema 7.09 *Una lámina de peso W en forma de triángulo equilátero de lado a, puede moverse en un plano vertical estando el vértice A articulado a un punto fijo. Si al vértice C se le aplica una fuerza F vertical hacia arriba, determine el ángulo que hace la arista AC con la vertical en la posición de equilibrio.*



Problema 7.10 *A una barra de largo L y de peso W que está en reposo sobre un plano horizontal liso, se le aplica a uno de sus extremos una fuerza F=W/2 verticalmente hacia arriba. Determine en la posición de equilibrio, el ángulo que la barra forma con la horizontal.*

Sección VIII. GASES IDEALES.

Problema 8.01 Un gas ideal ocupa un volumen de 100 cm^3 a 20 ºC y a una presión de 100 Pa. Determine el número de moles de gas en el recipiente.

Problema 8.02 Se mantiene un gas ideal en un recipiente a volumen constante. Inicialmente, su temperatura es 10ºC y su presión es 2.5 atmósferas ¿Cuál será la presión cuando la temperatura sea de 80ºC?

Problema 8.03 Un cilindro con un émbolo móvil contiene un gas a una temperatura de 127ºC, una presión de 30 kPa y un volumen de 4 m^3¿Cuál será su temperatura final si el gas se comprime a 2.5 m^3 presión aumenta a 90 kPa?

Problema 8.04 Se encuentra contenido un gas en una vasija de 8 L, a una temperatura de 20ºC y a una presión de 9 atmósferas:

(a) Determine el número de moles en la vasija.

(b) ¿Cuántas moléculas hay en la vasija?

Problema 8.05 Se encuentra confinado un gas en un tanque a una presión de 10.0 atmósferas y a una temperatura de 15ºC. Si se saca la mitad del gas y se aumenta la temperatura a 65ºC. ¿Cuál es la nueva presión en el tanque?

Problema 8.06 Se calienta un gas de 27ºC a 127ºC mientras se mantiene a presión constante en un recipiente cuyo volumen aumenta. ¿En qué factor cambia el volumen?

Problema 8.07 Un cilindro con un volumen de 12 litros contiene un gas de helio a una presión de 136 atm. ¿Cuántos globos se pueden llenar con este cilindro a presión atmosférica si el volumen de cada globo es de 1 litro?

Problema 8.08 Un tanque con un volumen de 0.1 m^3 contiene gas de helio a una presión de 150 atm. ¿Cuántos globos se pueden inflar si cada globo lleno es una esfera de 30 cm de diámetro y a una presión absoluta de 1.2 atm?

Problema 8.09 Un mol de gas oxígeno está a una presión de 6 atm y a una temperatura de 27ºC.

(a) Si el gas se calienta a volumen constante hasta que la presión se triplica, ¿cuál es la temperatura final?

(b) Si el gas se calienta de tal manera que tanto la presión como el volumen se duplican, ¿cuál es la temperatura final?

Problema 8.10 Se infla la llanta de un automóvil con aire inicialmente a 10ºC y a presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime a 28% de su volumen inicial y su temperatura aumenta a 40ºC. ¿Cuál es la presión de] aire? Después de manejar el automóvil a altas velocidades, la temperatura de] aire de las ruedas aumenta a 85ºC y el volumen interior de la rueda aumenta 2%. ¿Cuál es la nueva presión en la rueda? Exprese su respuesta en Pa (absoluta) y en lb/in^2 (manométrica). (1 atm = 14.70 lb/in^2)

Problema 8.11 Un globo poroso tiene un volumen de 2 m^3 a una temperatura de 10ºC y a una presión de 1.1 atm. Cuando se calienta a 150ºC el volumen se expande a 2.3 m^3 y se observa que se escapa el 5% del gas.

(a) ¿Cuánto gas había en el globo a 10ºC?

(b) ¿Cuál es la presión en el globo a 150ºC?

Problema 8.12 En los sistemas modernos de vacío, se han logrado presiones tan bajas como 10^{-11} mm Hg. Calcule el número de moléculas en un recipiente de 1 m^3 a esta presión si la temperatura es de 27ºC. (Observe: *que una atmósfera de presión corresponde a 760 mm Hg.)*

Problema 8.13 La rueda de una bicicleta se llena con aire a una presión manométrica de 550 kPa (80 lb/in^2) a 20'C. ¿Cuál es la presión manométrica en la rueda después de manejarla en un día soleado cuando la temperatura del aire es de 40ºC? (Suponga que el volumen no cambia y recuerde que la presión manométrica significa la presión absoluta en la rueda menos la presión atmosférica. Además, suponga que la presión atmosférica permanece constante e igual a 101 kPa.)

Problema 8.14 Demuestre que un mol de cualquier gas a presión atmosférica (1.01 X 10^5 N/m^2) y a temperatura estándar (273 K) ocupa un volumen de 22.4 L.

Problema 8.15 Una campana de buzo cilíndrica de 3 in de diámetro y 4 m de altura con el fondo abierto se sumerge a una profundidad de 220 m en el océano. La temperatura en la superficie es de 25ºC y en el fondo, a los 220 m, es de 5ºC. La densidad del agua de mar es de 1025 kg/m^3 . ¿Cuánto subirá el nivel de] agua adentro de la campana cuando se sumerge?

Problema 8.16 Una campana de buzo en forma de cilindro con una altura de 2.50 m está cerrada en la parte superior y abierta en la parte inferior. La campana se baja desde el aire al agua de mar (r = 1.025 gm/cm^3). El aire en la campana inicialmente está a 20ºC. La campana se baja a una profundidad (medida desde el fondo de la campana) de 45.0 brazas o 82.3 m. A esta profundidad la temperatura del agua es de 4ºC, y la campana está en equilibrio térmico con el agua.

(a) ¿Cuánto subirá el nivel del agua dentro de la campana?

(b) ¿A qué presión mínima se debe subir la presión de] aire dentro de la campana para sacar el agua que entró?

Problema 8.17 Sube una burbuja de gas desde el fondo en un lago con agua limpia a una profundidad de 4.2 m y a una temperatura de 5ºC hasta la superficie donde la temperatura del agua es de 12ºC. ¿Cuál es el cociente de los diámetros de la burbuja en los dos puntos? (Suponga que la burbuja de gas está en equilibrio térmico con el agua en los dos puntos.)

Sección IX. EQUILIBRIO TERMICO.

Problema 9.01 ¿Cuántas calorías de calor se requieren para elevar la temperatura de 3 kg de aluminio de 20ºC a 50ºC?

Problema 9.02 Se utilizan 2 kcal para calentar 600 g de una sustancia desconocida de 15ºC a 40ºC ¿Cuál es el calor específico de la sustancia?

Problema 9.03 Una pieza de cadmio de 50 g está a 20ºC. Si se agregan 400 cal al cadmio, ¿cuál será su temperatura final?

Problema 9.04 Cuál es la temperatura final de equilibrio cuando 10 g de leche a 10ºC. se agregan a 160 g de café a 90ºC? (Suponga que las capacidades caloríficas de los dos líquidos son iguales a la del agua, y desprecie la capacidad calorífica del recipiente.)

Problema 9.05 Se calientan balines de cobre, cada uno con una masa de 1 g, a una temperatura de 100ºC. ¿Cuántos balines se deben agregar a 500 g de agua inicialmente a 20ºC para que la temperatura final de equilibrio sea de 25ºC? (Desprecie la capacidad calorífica del contenedor.)

Problema 9.06 Una herradura de hierro de 1.5 kg inicialmente a 600ºC se deja caer en un cubo que contiene 20 kg de agua a 25ºC. ¿Cuál es la temperatura final? (Desprecie la capacidad calorífica del recipiente.)

Problema 9.07 Un recipiente de 300 g de aluminio contiene 200 g de agua a 10ºC si se agregan 100 g de agua a 100'C, ¿cuál es la temperatura final de equilibrio del sistema?

Problema 9.08 Un trozo de 300 g de cobre se calienta en un horno y en seguida se deja caer en un calorímetro de 500 g de aluminio que contiene 300 g de agua. Si la temperatura del agua se eleva de 15ºC a 30ºC ¿cuál era la temperatura inicial del cobre? (Suponga que no se pierde calor.) ¿Cuánto calor se debe agregar a 20 g de aluminio a 20ºC para fundirlo completamente?

Problema 9.09 Un calorímetro de aluminio con una masa de 100 g contiene 250 g de agua. Están en equilibrio térmico a 10ºC Se colocan dos bloques de metal en el agua. Uno es una pieza de 50 g de cobre a 80ºC La otra muestra tiene una masa de 70 g a una temperatura de 100ºC Todo el sistema se estabiliza a una temperatura final de 20ºC

(a) Determine el calor específico de la muestra desconocida.

(b) Determine qué material puede ser, usando la tabla 20.1 del Serway volumen I.

Problema 9.10 Un recipiente de espuma de estireno contiene 200 g de mercurio a 0ºC. A esto se le agregan 50 g de alcohol etílico a 50ºC y 100 g de agua a 100ºC

(a) ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla?

(b) ¿Cuánto calor fue ganado o perdido por el mercurio, el alcohol y el agua? (El calor específico de el mercurio es 0.033 cal/g Cº el de alcohol etílico, 0.58 cal/g Cº y se desprecia la capacidad térmica de la espuma de estireno.)

Problema 9.11 Un bloque de 1 kg de cobre a 20ºC, se deja caer en un recipiente con nitrógeno líquido el cual está hirviendo a 77 K. Suponiendo que el recipiente está aislado térmicamente de los alrededores, calcule el número de litros de nitrógeno que se evaporan durante el tiempo que tarda el cobre en llegar a los 77 K. (Nota: el nitrógeno tiene un calor específico de 0.21 cal/g Cº un calor de vaporización de 48 cal/g y una densidad de 0.8 g/cm^3)

Problema 9.12 Un cubo de hielo de 20 *g a OºC se calienta hasta que* 15 *g se han convertido en agua a* 100ºC y 5 *g se han convertido en vapor. ¿Cuánto calor se necesitó para lograr esto?*

Problema 9.13 Se usa un litro de agua a 30ºC para hacer té helado. ¿Cuánto hielo a OºC se necesita para hacer que la temperatura del té sea de 10ºC? (El hielo tiene un calor específico de 0.50 *cal/g Cº.)*

Problema 9.14 *Un calorímetro de 50 g de cobre contiene 250 g de agua a* 20ºC. *¿Cuánto vapor se debe condensar en el agua para que la temperatura del agua sea de* 50ºC?

Problema 9.15 Si se vierten 90 g de plomo fundido a 327,3ºC *en una pieza de hierro fundido de* 300 *g inicialmente a* 20ºC, *¿cuál es la temperatura final del sistema? (Suponga que no se pierde calor.)*

Problema 9.16 En un recipiente aislado, se agregan 250 *g de hielo a OºC a 600 g de agua a 18ºC.*

(a) ¿Cuál es la temperatura final del sistema?

(b) ¿Cuánto hielo queda?

Problema 9.17 Se enfría un bloque de hielo de 40 *kg a –78ºC. Éste se agrega a* 560 *g de agua en un calorímetro de 80 g de cobre a una temperatura de* 25ºC. *Determine la temperatura final (si no se funde todo el hielo, determine cuánto hielo queda). Recuerde que el hielo primero se debe calentar hasta OºC, después se funde y luego continúa calentándose como agua. El calor específico del hielo es* 0.500 *cal/gºC.*

Problema 9.18 Determine el estado final cuando se mezclan 20 *g de hielo a OºC con 10 g de vapor a 1000C.*

Problema 9.19 Una cacerola con agua se coloca en el sol hasta que alcanza una temperatura de equilibrio de 30ºC. La *cacerola está hecha de 100gm de aluminio y contiene 180 g de agua. Para enfriar el sistema, se agregan 100 g de hielo a OºC.*

(a) Determine la temperatura final. Si T =OºC, determine cuánto hielo queda.

(b) Repita esto para el caso en que utilizan *50* g de hielo.

Problema 9.20 Un centavo de 3 *g de cobre a* 25ºC, *cae al piso desde una altura de 50 m.*

(a) Sí 60% de su energía potencial inicial se gasta en aumentar su energía interna, determine su temperatura final.

(b) ¿Depende el resultado de la masa del centavo? Explique.

Problema 9.21 A un bloque de aluminio de 2 *kg se le da una rapidez inicial de* 4 *m/s sobre una superficie horizontal rugosa. Debido a la fricción, se llega a detener.*

(a) Si 75% de su energía cinética inicial la absorbe en forma de energía térmica, calcule el aumento en la temperatura del bloque.

(b) ¿Qué le ocurre al resto de la energía?

Problema 9.22 Una bala de plomo de 3 *g que viaja con una rapidez de 400 m/s se detiene en un árbol. Si toda su energía cinética se trasforma en energía térmica, encuentre el incremento en la temperatura de la bala. ¿Es la respuesta razonable?*

Sección X. TRABAJO DE EXPANSION.

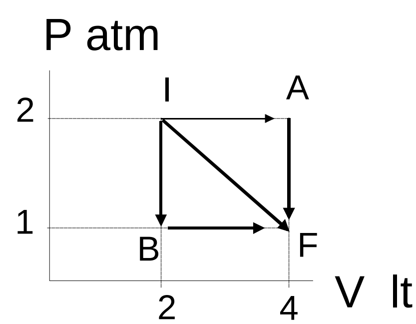
Problema 10.01 *Un gas en un recipiente está a una presión de* 1.5 *atm y a un volumen* 4 m^3 *. ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas cuando*

(a) se expande a una presión constante hasta el doble de su volumen inicial y

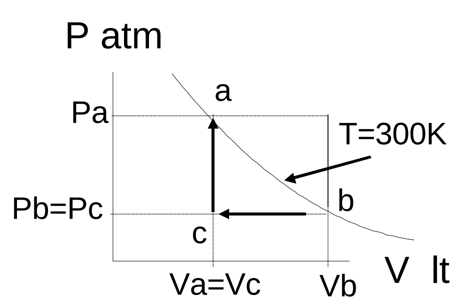
(b) se comprime a presión constante hasta un cuarto de su volumen inicial?

Problema 10.02 Un gas ideal está encerrado en un cilindro. Hay un émbolo movible en la parte superior del cilindro. El émbolo tiene masa de 8000 g, una área de 5 cm^2 y es libre de moverse hacia arriba o hacia abajo, manteniendo la presión del gas constante. ¿Cuánto trabajo se hace si la temperatura de 0.2 moles de gas se eleva de 20ºC a 300ºC?

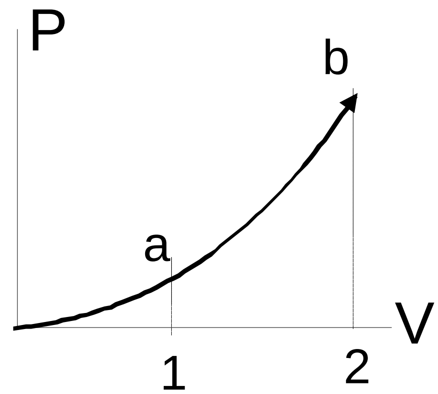
Problema 10.03 Un gas se expande desde I a F por tres posibles trayectorias como se indica en la figura. Calcule el trabajo realizado por el gas a lo largo de las trayectorias IAF, IF y IBF.



Problema 10.04 Una muestra de un gas ideal de 1 mol se lleva a través de un proceso termodinámico cíclico, como se muestra en la figura. El ciclo consta de tres Partes - una expansión isotérmica (a - b), *una compresión isobárica* (b - c) *y un aumento de la presión a volumen constante (c -d).* Si T = 300 K, Pa = 5 *atm, Pb = Pc = 1 atm, determine el trabajo realizado por el gas durante el ciclo.*



Problema 10.05 Una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen original de 1 m^3 en un proceso cuasiestático para el cual $P = \alpha V^2$, con α = 5.0 atm/m^6 como se muestra en la figura. ¿Cuánto trabajo realizó el gas en expansión?



Problema 10.06 Un gas ideal en condiciones estándar (1 atm y 0ºC) se lleva a través de un proceso en donde el volumen se expande de 25 L *a* 80 *L. Durante este proceso la presión varía corno el inverso cuadrado del volumen,* $P = 0.5aV^{-2}$

(a) Determine la constante a en unidades SI.

(b) Encuentre la temperatura y presión final.

(c) Determine una expresión general para el trabajo realizado por el gas durante este proceso.

(d) En particular, calcule, en joules el trabajo realizado por el gas en el proceso.

Problema 10.07 Una mol de un gas ideal hace un trabajo de 3000 *J sobre los alrededores al expandirse isotérmicamente a una presión final de 1 atm y a un volumen final de* 25 *L.*

(a) Determine el volumen inicial y

(b) la temperatura del gas.

Sección XI. PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA.

Problema 11.01 Un gas se expande de I a F, como en el problema 10.03. El calor que se agrega al gas es de 400 *J cuando el gas va de I a* F *por la trayectoria diagonal.*

(a) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del gas?

(b) ¿Cuánto calor se debería agregar al gas si se fuera por el camino indirecto IAF, para tener el mismo cambio en la energía interna?

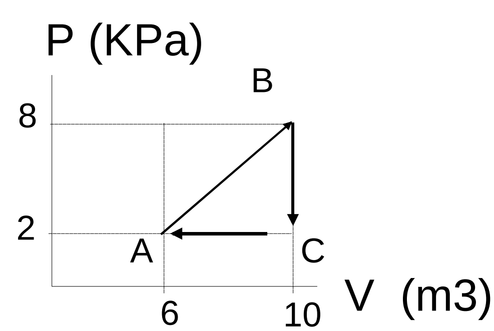
Problema 11.02 Se comprime un gas a presión constante de 0.8 *atm de un volumen de 9 L a un volumen de* 2 *L. En el proceso se escapan del gas* 400 *J de energía calorífica.*

(a) ¿Cuál es trabajo realizado por el gas?

(b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del gas?

Problema 11.03 Un sistema termodinámico sigue un proceso en el cual su energía interna disminuye 500 *J. Si al mismo tiempo se hacen* 220 *J de trabajo sobre el sistema, encuentre el calor transferido por, o hacia, el sistema.*

Problema 11.04 Un gas se lleva a través del proceso cíclico descrito en la siguiente figura.



(a) Encuentre el calor neto transferido al sistema durante un ciclo completo.

(b) Si el ciclo se invierte, esto es, el proceso va por el camino ACBA, ¿cuál es el calor neto transferido por ciclo?

Problema 11.05 Considere el proceso cíclico descrito en la figura del problema anterior. *Si Q es negativo para el proceso* BC y ΔU *es negativo para el proceso* CA, *determine los signos de Q,* W y ΔU *asociados a cada proceso.*

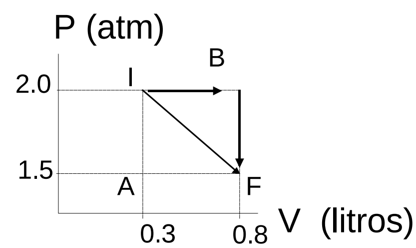
Problema 11.06 Cinco moles de un gas ideal se expanden isotérmicamente a 127ºC *hasta cuatro veces su volumen inicial. Encuentre*

(a) el trabajo realizado por el gas y

(b) el flujo total de calor hacia el sistema, ambos en joules.

Problema 11.07 ¿Cuánto trabajo hace el sistema cuando 1 mol de agua a 100ºC hierve y se convierte en un mol de vapor a 100ºC a una presión de 1 atm? Determine el cambio en la energía interna del vapor al evaporarse. Considere el vapor como un gas ideal.

Problema 11.08 Un mol de gas, inicialmente a una presión de 2 *atm y a un volumen de* 0.3 *L, tiene una energía interna de 91 J. En su estado final, la presión es de* 1.5 *atm, el volumen de* 0.8 *L y la energía interna de* 182 *J. Para los tres caminos,* IAF, IBF *e* IF *en la figura siguiente*, *calcule*



(a) el trabajo realizado por el gas y

(b) el calor neto transferido en el proceso.

Problema 11.09 Se confina gas nitrógeno (m = 1.00 kg) en un cilindro con un émbolo movible expuesto a presión atmosférica normal. Se agrega una cantidad de calor (Q = 25 000 *cal) al gas en un proceso isobárico y su energía interna aumenta en 8000 cal.*

(a) ¿Cuánto trabajo realizó el gas?

(b) ¿Cuál es el cambio en el volumen?

Problema 11.10 Un gas ideal inicialmente a 300 *K se expande en forma isobárica a una presión de* 2.5 *kPa. Si el volumen aumenta de 1* m^3 *a* 3 m^3 *y se agregan* 12 500 *J de calor al sistema, encuentre*

(a) el cambio en la energía interna del gas y

(b) su temperatura final.

Problema 11.11 Dos moles de gas helio inicialmente a una temperatura de 300 K y a *una presión de* 0.4 *atm se comprimen en forma isotérmica a una presión de* 1.2 *atm. Encuentre*

(a) el volumen final del gas,

(b) el trabajo realizado por el gas y

(c) el calor transferido. Considere el helio como un gas ideal.

Problema 11.12 Dos moles de un gas ideal se expanden cuasiestática y adiabáticamente desde una presión de 5 atm y un volumen de 12 litros a un volumen final de 30 litros. (γ *= 1.40)*

(a) ¿Cuál es la presión final del gas?

(b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final?

Problema 11.13 Un gas ideal se expande cuasiestática y adiabáticamente. Si la temperatura final es un tercio de la inicial. (g = 1.40)

(a) ¿en qué factor cambia el volumen?

(b) ¿En qué factor cambia la presión?

Problema 11.14 Un mol de un gas ideal monoatómico inicialmente a 300 K y a *1 atm se comprime cuasiestática y adiabáticamente a un cuarto de su volumen inicial. Encuentre la presión y temperatura final. (g = 1*.67)

Problema 11.15 Durante el tiempo de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1 a 20 atm. Suponiendo que el proceso es adiabático y el gas es ideal con g = 1.40, a) ¿en qué factor cambia el volumen? y b) ¿en qué factor cambia la temperatura?

Problema 11.16 Gas de helio a 20ºC se comprime sin perder calor a 115 de su volumen inicial. a) ¿Cuál es la temperatura después de la compresión? b) ¿Cuál si el gas es aire seco (77% N2, 23% 02)?

Sección XII. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA.

Problema 12.01 Una máquina térmica absorbe 360 J de calor y realiza un trabajo de 25 J en cada ciclo. Encuentre: a) la eficiencia de la máquina y b) el calor liberado en cada ciclo.

Problema 12.02 Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30%. Para cada ciclo de operación, a) ¿cuánto calor se absorbe?, y b) ¿cuánto calor se libera?

Problema 12.03 Un refrigerador tiene un coeficiente de operación igual a 5. Sí el refrigerador absorbe 120 J de calor de una fuente fría en cada ciclo, encuentre: a) el trabajo hecho en cada ciclo y b) el calor liberado hacia la fuente caliente.

Problema 12.04 Cierta máquina tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, encuentre: a) el calor absorbido en cada ciclo y b) el tiempo para cada ciclo.

Problema 12.05 El calor absorbido por una máquina es el triple del trabajo que realiza. a) ¿Cuál es su eficiencia térmica? b) ¿Qué fracción del calor absorbido se libera a la fuente fría?

Problema 12.06 En cada ciclo de su operación, cierto refrigerador absorbe 100 J de la fuente fría y libera 130 J. a) ¿Cuál es la potencia requerida para operar el refrigerador si trabaja a 60 ciclos/s? b) ¿Cuál es el coeficiente de operación del refrigerador?

Problema 12.07 Una máquina absorbe 1600 J de una fuente caliente y libera 1000 J a la fuente fría en cada ciclo. a) ¿Cuál es la eficiencia de la máquina? b) ¿Cuánto trabajo se hace en cada ciclo? e) ¿Cuál es la potencia de salida de la máquina si cada ciclo dura 0.3 s?

Problema 12.08 Una máquina térmica opera entre dos fuentes a temperaturas de 20ºC y 300ºC. ¿Cuál es la máxima eficiencia posible para esta máquina?

Problema 12.09 La eficiencia de una máquina de Carnot es de 30%. La maquina absorbe 800 J de calor por ciclo de una fuente caliente a 500 K. Determine a) el calor liberado por ciclo y b) la temperatura de la fuente fría.

Problema 12.10 Una máquina de Carnot tiene una potencia de salida de 150 kW. La máquina opera entre dos fuentes a 20ºC y 500ºC. a) ¿Cuánta energía calorífica se absorbe por hora? b) ¿Cuánta energía calorífica se pierde por hora?

Problema 12.11 Se ha propuesto una planta de potencia que haga uso del gradiente de temperatura en el océano. El sistema se diseñó para operar entre 20ºC (temperatura de la superficie del agua) y 5ºC (temperatura del agua a una profundidad de casi 1 km). a) ¿Cuál es la máxima eficiencia de dicho sistema? b) Si la potencia de salida de la planta es de 7,5 MW, ¿cuánta energía térmica se absorbe por hora? e) En vista de los resultados del inciso a), ¿piensa que se deba tornar en cuenta dicho sistema?

Problema 12.12 Una máquina térmica opera en un ciclo de Carnot entre 80ºC y 350ºC. Absorbe 2 X 10^{4} *J de calor de la fuente caliente por ciclo. Cada ciclo dura 1 s. a) ¿Cuál es la máxima potencia de salida de esta máquina? b) ¿Cuánto calor libera en cada ciclo?*

Problema 12.13 Una de las máquinas más eficiente que jamás se han construido opera entre 430ºC y 1870ºC. Su eficiencia actual es de 42%. a) ¿Cuál es su eficiencia teórica máxima? b) ¿Cuál es su potencia de salida si absorbe 1.4 X 10^{5} *J de calor cada segundo?*

Problema 12.14 En una turbina de vapor, entra vapor a 800ºC y se libera a 120ºC. ¿Cuál es la eficiencia (máxima) de esta turbina?

Problema 12.15 La eficiencia de una planta nuclear de 1000 MW es de 33%; es decir, se liberan 2000 MW de calor al medio ambiente por cada 1000 MW de energía eléctrica producida. Si se utiliza un río con una rapidez de flujo de 10^{6} *kg/s para eliminar el exceso de calor, ¿cuál será el aumento promedio en la temperatura del río?*

Problema 12.16 Una planta generadora de electricidad tiene una potencia de salida de 500 MW. La planta usa vapor a 200ºC y agua de salida a 40ºC. Si el sistema opera con la mitad de la máxima eficiencia (Carnot), a) ¿a qué rapidez se libera calor al medio ambiente? b) Si el calor de desperdiciado va a un río con una rapidez de flujo de 1.2 X 10^{6} *kg/s, ¿cuál es el aumento en la temperatura del río?*

Problema 12.17 Un aparato de aire acondicionado absorbe calor de su embobinado de enfriamiento a 13ºC y libera calor al exterior a 30ºC. a) ¿Cuál es el máximo coeficiente de operación del aparato? b) Si el coeficiente de operación actual es de la tercera parte del *valor máximo y si el aparato remueve 8 X 10^4 J de energía calórica cada segundo, ¿qué potencia debe desarrollar su motor?*

Problema 12.18 Una bomba de calor impulsada por un motor eléctrico absorbe calor del exterior a 5ºC y libera calor en el interior en forma de aire caliente a 40ºC. a) ¿Cuál es el máximo coeficiente de operación de la bomba de calor? b) Si el coeficiente de operación actual es de 3.2, ¿qué fracción *del trabajo teórico máximo (energía eléctrica) se realiza?*

Problema 12.19 Un gas ideal se lleva a través de un ciclo de Carnot. La expansión isotérmica ocurre a 250ºC y la compresión isotérmica tiene lugar a 50ºC. Si el gas absorbe 1200 J de calor durante la expansión isotérmica, encuentre: a) el calor liberado en cada ciclo a la fuente fría y b) el trabajo neto realizado por el gas en cada ciclo.

Sección XIII. ENTROPIA.

Problema 13.01 Un kilogramo de agua a temperatura de 280ºK se mezcla con 2 kilogramos de agua a 310ºK en un recipiente aislado térmicamente. Determine el cambio en la entropía del Universo.

Problema 13.02 Una masa m de líquido a temperatura T_1 se mezcla con una igual cantidad del mismo líquido a temperatura T_2 en un recipiente aislado térmicamente. Demuestre que el cambio de entropía del Universo es $2mc_p \ln \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$ *y pruebe que es necesariamente positivo.*

Problema 13.03 Un kilogramo de agua a 0ºC se coloca en contacto con una fuente térmica a 100ºC. Cuando el agua alcance los 100ºC determine el cambio de entropía del Universo.

Problema 13.04 Un kilogramo de agua a 0ºC se coloca en contacto con una fuente térmica a 50ºC hasta que alcance los 50ºC y luego con una fuente térmica a 100ºC hasta que alcance los 100ºC, determine el cambio de entropía del Universo.

Problema 13.05 Explique como puede agua calentarse desde 0ºC hasta 100ºC sin que ocurra cambio de entropía del Universo.

Problema 13.06 Dos cuerpos finitos de calor específico constante que están inicialmente a temperaturas T_1 y T_2 se utilizan como fuentes de calor para operar una máquina que opera en ciclos reversibles infinitesimales. Si los cuerpos permanecen a presión constante y no *experimentan cambios de fase, demuestre que la temperatura final de ellos es* $T_f = \sqrt{T_1 T_2}$ *y que el trabajo total realizado por la máquina es* $C_p(T_1 + T_2 - 2T_f)$

Problema 13.07 Dos moles de un gas ideal experimentan una expansión isotérmica desde 0.02 m^3 a 0.04 m^3 a una temperatura de 300 K. ¿Cuál es la variación de entropía del gas?

Problema 13.08 Se mezcla un kilogramo de agua a 0ºC con un kilogramo de agua a 100ºC. Determine la entropía del sistema al mezclarlas.

Problema 13.09 Un trozo de 50 g de aluminio a 50ºC se introduce en un recipiente con 60 g de agua a 20ºC. Calcule el cambio de entropía en este proceso.

Problema 13.10 Si la capacidad calórica del gas Nitrógeno a presión constante varía con la temperatura de acuerdo a $c_p = 6.524 + 1.25\times 10^{-3} T - 10^{-9} T^2$ *cal/mol-K determine el cambio de entropía de un mol de Nitrógeno al calentarlo de 400 a 800 K a presión de 1 atm.*

Problema 13.11 La capacidad calórica a volumen constante del nitrógeno a presiones bajas está dada por $c_V = 4.537 + 1.25\times 10^{-3} T - 10^{-9} T^2$ *cal/mol-K. Calcule el calor absorbido cuando seis moles de nitrógeno sufren una elevación de temperatura desde 127 a 227ºC a volumen constante, suponiendo que el cambio de presión no afecta la capacidad calórica. Determine además el cambio de entropía.*

volver

Soluciones problemas
Cinemática de la Partícula
Problema 1.01

$$
\begin{aligned}
x &= 3t \\
y &= 2t - 5t^2
\end{aligned}
$$

a) $v_x = 3$, $v_y = 2 - 10t$, $a_x = 0$, $a_y = -10$,

b) $\hat{r} = \frac{3t\hat{\imath}+(2t-5t^2)\hat{\jmath}}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}}, \hat{\theta} = \hat{k} \times \hat{r} = \frac{3t\hat{\jmath}-(2t-5t^2)\hat{\imath}}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}}$

$$
\begin{aligned}
v_r &= \vec{v} \cdot \hat{r} = \frac{9t + (2t-5t^2)(2-10t)}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}} \\
v_\theta &= \vec{v} \cdot \hat{\theta} = \frac{3t(2-10t) - (2t-5t^2)3}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}} \\
a_r &= \vec{a} \cdot \vec{r} = \frac{(-10)(2t-5t^2)}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}} \\
a_\theta &= \vec{a} \cdot \hat{\theta} = \frac{(-10)3t}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}}
\end{aligned}
$$

c) $\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{3\hat{\imath}+(2-10t)\hat{\jmath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$, $\hat{N} = \hat{T} \times \hat{k} = \frac{-3\hat{\jmath}+(2-10t)\hat{\imath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$ entonces

$$
\begin{aligned}
v_T &= \vec{v} \cdot \hat{T} = v = \sqrt{9+(2-10t)^2} \\
v_N &= 0 \\
a_T &= \vec{a} \cdot \hat{T} = \frac{-10(2-10t)\hat{\jmath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}} \\
a_N &= \vec{a} \cdot \hat{N} = \frac{30}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}
\end{aligned}
$$

d)

$$
y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}x^2
$$

e) Sería necesario expresar $r = r(\theta)$ donde

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2} \\
\tan\theta &= \frac{y}{x} = \frac{2-5t}{3}
\end{aligned}
$$

de donde

$$t = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\tan\theta$$

y luego con algo de algebra resulta

$$r = \frac{3}{5}\left(2 - 3\tan\theta\right)\sqrt{\left(1 + \tan^2\theta\right)}$$

Campo central de fuerza

fórmulas

$$\begin{aligned}
K &= GmM, \\
E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r} \\
l_0 &= |m\vec{r} \times \vec{v}| \\
e^2 &= 1 + \frac{2El_0^2}{mK^2} \\
r &= \frac{l_0^2}{mK}\frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}
\end{aligned}$$

Problema 1.02

De la elipse, deseamos obtener el radio de curvatura.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Derivando implicitamente obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{yy'}{b^2} &= -\frac{x}{a^2} \\
y' &= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \\
y'' &= -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{y} + \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y^2}y' \\
&= -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{y} - \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^3} \\
&= -\frac{b^4}{a^2y^3}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2})^{3/2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} \\
&= \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}
\end{aligned}$$

Si $a > b$ el punto más alejado es $x = a$, $y = 0$, $\rho = \frac{b^2}{a}$.
El punto más cercano es $x = 0$, $y = b$, $\rho = \frac{a^2}{b}$

a)

$$a = \frac{v_0^2}{\rho} = \begin{cases} \frac{v_0^2 a}{b^2} \\ \frac{v_0^2 b}{a^2} \end{cases}$$

b) La rapidez constante significa que

$$\frac{ds}{dt} = v_0,$$

de donde

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (y')^2}\frac{dx}{dt} &= v_0 \\ dt &= \frac{1}{v_0}\sqrt{1 + (y')^2}dx \end{aligned}$$

junto a

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}\frac{b}{a}x \\ dt &= \frac{1}{v_0}\frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{b^2x^2 + a^4 - a^2x^2}{a^2 - x^2}\right)}dx \end{aligned}$$

si la última expresión pudiera integrarse se tendría $t = t(x)$ y problema resuelto.

Problema 1.03

Aquí

$$\begin{aligned} r &= \frac{c}{1 - e\cos\theta} \\ \theta &= \text{-}\ t \end{aligned}$$

las componentes polares están dadas por

$$
\begin{aligned}
v_r &= \dot{r} = -\frac{e\text{-}\,c\sin\text{-}\,t}{(1-e\cos\text{-}\,t)^2}\\
v_\theta &= r\dot{\theta} = \frac{\text{-}\,c}{1-e\cos\text{-}\,t}\\
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\\
&= \ddot{r} - r\text{-}\,^2\\
&= \left(-\frac{e\cos\text{-}\,t}{(1-e\cos\text{-}\,t)} + \frac{2e^2\sin^2\text{-}\,t}{(1-e\cos\text{-}\,t)^2} - 1\right)\frac{\text{-}\,^2 c}{1-e\cos\text{-}\,t}\\
a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\\
&= 2\dot{r}\text{-}\\
&= -\frac{2e\text{-}\,^2 c\sin\text{-}\,t}{(1-e\cos\text{-}\,t)^2}
\end{aligned}
$$

Problema 1.04

Aquí

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

entonces

$$
\begin{aligned}
2\pi n &= \frac{1}{2}\alpha,\\
\alpha &= 4\pi n
\end{aligned}
$$

y durante el siguiente segundo realiza

$$\frac{\theta(2)-\theta(1)}{2\pi} = n(2^2 - 1^2) = 3n$$

vueltas.

Problema 1.05

La altura en función del tiempo será

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

luego, tomando $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

$$y = h + 12.5t - 5t^2$$

siendo

a) $h + 12.5(4.25) - 5(4.25)^2 = 0,\ h = 37.19\,\mathrm{m}$

b) $v_y = 12.5 - 10t = 12.5 - 10(4.25) = -30.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Problema 1.06

$$\begin{aligned} y_1 &= 33 - 5t^2 \\ y_2 &= 33 - t - 5t^2 \end{aligned}$$

$$y_1 - y_2 = t$$

entonces la distancia entre ellos es 18 m a los 18 s .

Problema 1.07

Suponiendo que se soltó del reposo

$$y = h - 5t^2$$

el tiempo en que llega al suelo es $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$la distancia recorrida en el último segundo será

$$\begin{aligned} & y(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1) - y(\sqrt{\frac{h}{5}}) \\ &= 5(\sqrt{\frac{h}{5}})^2 - 5(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1)^2 = 68.3 \\ h &= 268.6\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Problema 1.08

$$\begin{aligned} y_1 &= h - 5t^2 \\ y_2 &= h - 30(t-2) - 5(t-2)^2 \end{aligned}$$

siendo al mismo tiempo

$$\begin{aligned} y_1 &= h - 5t^2 = 0 \\ y_2 &= h - 30(t-2) - 5(t-2)^2 = 0 \end{aligned}$$

de aquí $t = 4\,\mathrm{s}$,

$$h = 80\,\mathrm{m}$$

Problema 1.09

$$\begin{aligned} y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y &= v_0 - g t \end{aligned}$$

de aquí

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 - g t_1 = 2.5 \\ v_y &= v_0 - g t_2 = -2.5 \end{aligned}$$

de donde

$$t_2 - t_1 = \frac{5}{g} = 0.5\,\mathrm{s}$$

Problema 1.10

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

el tiempo en que alcanza $h/2$ es $t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$ y el tiempo en que $h = 0$ es $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

a) por lo tanto el tiempo empleado en la seguna parte de recorrido es

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} &= 3 \\ h &= 524.6\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

b)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{524.6}{5}} = 10.2\,\mathrm{s}$$

Problema 1.11

$$\begin{aligned} x &= 180(\cos \pi/6)t \\ y &= 150 + 180(\sin \pi/6)t - 5t^2 \end{aligned}$$

a) Punto de caida $150 + 180(\sin \pi/6)t - 5t^2 = 0$, $t = 19.5\,\mathrm{s}$

$$x = 180(\cos \pi/6)(19.5) = 3039.8\,\mathrm{m}$$

b) Tiempo para la altura máxima $180(\sin \pi/6) - 10t = 0$, $t = 9.0\,\mathrm{s}$ entonces $y_{\max} = 150 + 180(\sin \pi/6)(9) - 5(9)^2 = 555.0$

$$y_{\max} = 555.0\,\mathrm{m}$$

c) El vector unitario tangente es

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \frac{\vec{v}}{v} = \hat{\imath}\cos\pi/6 + \hat{\jmath}\sin\pi/6,\\ \vec{a} &= -10\hat{\jmath}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}a_T &= \vec{a}\cdot\hat{T} = -10\sin\pi/6 = -5\,\mathrm{m\,s^{-2}}\\ a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{100-25} = 8.66\,\mathrm{m\,s^{-2}}\end{aligned}$$

Problema 1.12

Supondremos que damos en el blanco entonces

$$\begin{aligned}y &= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\\ 0 &= 8649\tan\alpha - \frac{5(8649)^2}{(300)^2\cos^2\alpha}\end{aligned}$$

que tiene dos raices reales

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 53.03^o\\ \alpha_2 &= 36.97^o\end{aligned}$$

debemos verificar que el disparo pasa sobre el cerro, para ello evaluamos en ambos ángulos $y(1200)$

$$\begin{aligned}y_1(1200) &= 1373.0\,\mathrm{m}\\ y_2(1200) &= 777.95\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

siendo la altura del cerro excedida en el primer caso.

Problema 1.13

Sabemos que

$$\begin{aligned}x_{\max} &= \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\\ y_{\max} &= \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 3\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

entonces $2\cos\alpha = 3\sin\alpha$

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{2}{3} \\ \alpha &= 33.69^o \end{aligned}$$

Problema 1.14

La ecuación de la parábola de seguridad es

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Sabemos también que para $h = 0$ la distancia máxima alcanzable es

$$x(0) = \frac{v_0^2}{g} = 300$$

y para una altura h la distancia horizontal máxima será

$$x(h) = \sqrt{(v_0^2 + 2hg)}\frac{v_0}{g} = 400\,\mathrm{m}$$

de la primera

b)

$$v_0 = \sqrt{3000} = 54.77\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

y de $\sqrt{((54.77)^2 + 2h10)}\frac{54.77}{10} = 400$

a)

$$h = 116.701\,\mathrm{m}$$

c) El ángulo de lanzamiento cuando el blanco está sobre el límite de la parábola de seguridad es $\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx}$ entonces

$$\alpha = 36.87^o$$

Problema 1.15

Si el norte corresponde al sentido positivo, entonces

a) $60 - (-50) = 110\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

b) $-50 - 60 = -110\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

Problema 1.16

Similarmente si el Oeste indica el sentido positivo entonces

a) $80 - 95 = -15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

b) $95 - 80 = 15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

Problema 1.17

La rapidez absoluta (respecto a la ribera) cuando nada corriente arriba es $1.2 - 0.5 = 0.7$ y cuando nada corriente abajo es $1.2 + 0.5 = 1.7$ entonces el tiempo de ida y vuelta será

$$\begin{aligned} t &= \frac{1000}{0.7} + \frac{1000}{1.7} = 2016.81\,\mathrm{s} \\ &= 0.56\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Problema 1.18

Sea W la rapidez del río y u la rapidez de los botes respecto al agua, (igual en ambos), entonces

$$\begin{aligned} V_1 &= u - W \\ V_2 &= u + W \end{aligned}$$

de modo que

$$W = \frac{V_2 - V_1}{2}.$$

Problema 1.19

Sea x paralelo al río e y perpendicular al río de ancho w. Entonces sea v la velocidad del bote respecto al río, u la velocidad del río, V la velocidad absoluta del bote (respecto a tierra). Luego

a)

$$\vec{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath}$$

b) La componente de la velocidad absoluta perpendicular al río determine el tiempo de cruce de acuerdo a

$$t = \frac{w}{v}$$

por lo tanto el bote avanza paralelamente al río una distancia

$$d = ut = \frac{u}{v}w$$

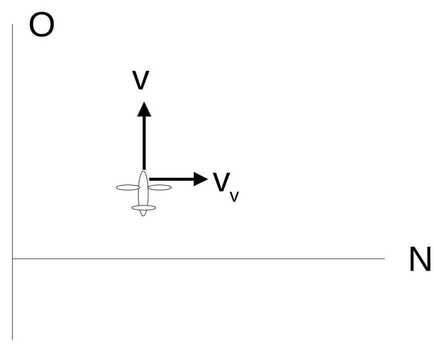


Figura 1:

Problema 1.20

Sea L el largo de la escalera. Entonces la velocidad de la persona respecto a la escalera es

$$v' = \frac{L}{30}.$$

Sea v_e la velocidad de la escalera. Ella corresponde a la de la persona cuando no camina, es decir

$$v_e = \frac{L}{20}$$

Si la escalera funciona y la persona camina, entonces

$$\begin{aligned} v &= v_e + v' = \frac{L}{20} + \frac{L}{30} \\ &= \frac{L}{t} \end{aligned}$$

de donde el tiempo será

$$t = 12\,\mathrm{s}$$

Problema 1.21

La velocidad del viento es $v_v = 30$ y la rapidez del avión respecto al aire es $v' = 150$, en magnitudes. Pero

$$\vec{v} = v\hat{\jmath} = 30\hat{\imath} + \vec{v}'$$

de donde

$$\vec{v}' = v\hat{\jmath} - 30\hat{\imath}$$

y si tomamos magnitudes

$$150 = \sqrt{v^2 + 30^2}$$

de donde

$$v = 146.969\,\mathrm{km\,h}^{-1}$$

Problema 1.22

Usaremos la figura anterior pero ahora la velocidad del viento está hacia el Sur. Ahora la velocidad del viento es $v_v = 50$ y la rapidez del avión respecto al aire es $v' = 200$, en magnitudes. Pero

$$\vec{v} = v\hat{\jmath} = -50\hat{\imath} + \vec{v}'$$

y similarmente resulta

$$v' = 200 = \sqrt{v^2 + 50^2}$$

de donde

b)

$$v = 193.65\,\mathrm{km\,h}^{-1}$$

a)

$$\vec{v}' = 50\hat{\imath} + 193.65\hat{\jmath}$$

da la dirección en que debe dirigirse el avión.

Problema 1.24

Para el niño

$$\begin{aligned} x &= 2.5t \\ y &= 0.6 \end{aligned}$$

para el bote

$$\begin{aligned} x &= 0.8 + v_x t \\ y &= v_y t \end{aligned}$$

volver

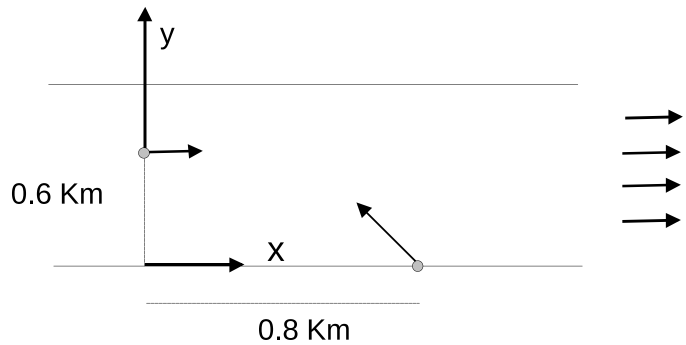


Figura 2:

el bote encuentra al niño cuando

$$\begin{aligned} 2.5t &= 0.8 + v_x t \\ 0.6 &= v_y t \end{aligned}$$

pero la velocidad absoluta está dada por

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 2.5\hat{\imath} + \vec{v}' \\ (v_x - 2.5)\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} &= \vec{v}' \end{aligned}$$

siendo $v' = 20$ de modo que si tomamos módulo de $\vec{v}'$ resultará

$$(v_x - 2.5)^2 + v_y^2 = 400$$

si reemplazamos aquí $v_x - 2.5 = -\frac{0.8}{t}$ y $v_y = \frac{0.6}{t}$ resultará

$$(\frac{0.8}{t})^2 + (\frac{0.6}{t})^2 = 400$$

de donde

c)

$$t = 0.05\,\mathrm{h}$$

b) Ahora podemos calcular v_x, v_y

$$\begin{aligned} v_x &= 2.5 - \frac{0.8}{t} \\ &= 2.5 - \frac{0.8}{0.05} \\ &= -13.5 \\ v_y &= \frac{0.6}{0.05} = 12. \end{aligned}$$

O sea, como se supuso en la figura, el bote va corriente arriba formando un ángulo con la orilla determinado de

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{12}{13.5} \\ \theta &= 41.63^o. \end{aligned}$$

a) El conductor del bote debe dirigirlo según

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= (v_x - 2.5)\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} \\ &= -16\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}. \end{aligned}$$

o sea formando un ángulo θ' respecto a la orilla aguas arriba dado por

$$\begin{aligned} \tan\theta' &= \frac{12}{16} \\ \theta' &= 36.87^o. \end{aligned}$$

Problema 1.25

Si y es la vertical hacia arriba y x es la dirección de la aceleración del tren, entonces

a)

$$\vec{a}' = -2.5\hat{\imath} - 9.8\hat{\jmath}.$$

b)

$$\vec{a} = -9.8\hat{\jmath}.$$

Problema 1.26

Si V' es la rapidez relativa al tren inicial de lanzamiento, entonces en la dirección del movimiento x tenemos

$$V_x = V'\cos\alpha - V = 0$$

porque el Profesor observa que sale verticalmente. Entonces

$$V' = \frac{V}{\cos\alpha}$$

entonces

$$V_y = V_y' = V'\sin\alpha = V\cot\alpha$$

y como sabemos subirá una altura h dada por

$$h = \frac{V^2\cot^2\alpha}{2g}$$

Dinámica de la partícula.

Problema 2.01

La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + Kx + 2\beta\dot{x} = 0$$

siendo la ecuación característica

$$mp^2 + 2\beta p + K = 0$$

con solución $p = -\frac{\beta}{m} + \sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{K}{m}}, p = -\frac{\beta}{m} - \sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{K}{m}}$

a) Sub amortiguado $\frac{K}{m} - (\frac{\beta}{m})^2 = \omega^2 > 0$

$$x = e^{-\frac{\beta}{m}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

b) amortiguado crítico $\frac{K}{m} - (\frac{\beta}{m})^2 = 0$

$$x = e^{-\frac{\beta}{m}t}(A + Bt)$$

c) sobre amortiguado $(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{K}{m} > 0$

$$x = e^{-\frac{\beta}{m}t}(Ae^{\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2-\frac{K}{m}}t} + Be^{-\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2-\frac{K}{m}}t})$$

donde al considerar las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V$ permite obtener

a)

$$x = \frac{V}{\omega}e^{-\frac{\beta}{m}t}\sin\omega t)$$

b)

$$x = Ve^{-\frac{\beta}{m}t}t$$

c)

$$x = \frac{V}{2\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{K}{m}}}e^{-\frac{\beta}{m}t}(e^{\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2-\frac{K}{m}}t} - e^{-\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2-\frac{K}{m}}t})$$

Problema 2.02

Aquí, la ecuación de movimiento será

$$m\ddot{y} = -mg - 2\beta\dot{y}$$

o bien

$$\ddot{y} + 2\frac{\beta}{m}\dot{y} = -g$$

con soluciones particular y homogéneas las siguientes

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{mg}{2\beta}t \\ y_h &= A + Be^{-2\frac{\beta}{m}t} \end{aligned}$$

de modo que la solución general es

$$y(t) = -\frac{mg}{2\beta}t + A + Be^{-2\frac{\beta}{m}t}$$

siendo $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = V$ de modo que

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -\frac{mg}{2\beta} - 2\frac{\beta}{m}B &= V \end{aligned}$$

o sea

$$B = -\frac{1}{4}\frac{mg + 2V\beta}{\beta^2}m$$

y finalmente

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{mg}{2\beta}t + \frac{1}{4}\frac{mg + 2V\beta}{\beta^2}(1 - e^{-2\frac{\beta}{m}t}) \\ v(t) &= -\frac{mg}{2\beta} + \frac{1}{2}\frac{mg + 2V\beta}{\beta m}e^{-2\frac{\beta}{m}t}. \end{aligned}$$

Problema 2.03

Es igual.

Problema 2.04

Mientras la partícula sube

$$m\ddot{y} = -mg - 2\beta\dot{y}^2$$

volver

y mientras baja

$$m\ddot{y} = -mg + 2\beta\dot{y}^2$$

puesto que la fuerza resistente es contraria a la velocidad. Si llamamos a $v = \dot{y}$ tenemos

a) para la subida

$$\begin{aligned}
&= -g - \frac{2\beta}{m}v^2 \\
dt &= -\frac{dv}{g + \frac{2\beta}{m}v^2} \\
t &= -\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g + \frac{2\beta}{m}v^2}
\end{aligned}$$

b) para la bajada

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= -g + \frac{2\beta}{m}v^2 \\
dt &= -\frac{dv}{g - \frac{2\beta}{m}v^2}, \\
t &= -\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g - \frac{2\beta}{m}v^2}
\end{aligned}$$

Las integrales podrían hacerse de tablas, pero no vale la pena porque son expresiones complicadas.

Problema 2.05

Hay varios caminos. Si usamos conservación de energía, con energía potencial definida como cero en el punto más bajo, tenemos que

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$

que si se deriva respecto al tiempo da

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

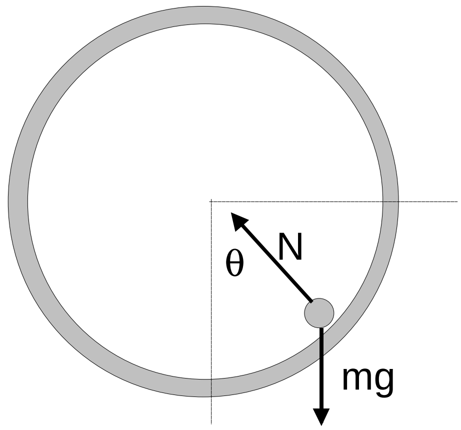


Figura 3:

Problema 2.06

Para la figura la segunda Ley de Newton, radial y tangencial da

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{R} &= N - mg\cos\theta, \\ m\frac{dv}{dt} &= -mg\sin\theta \end{aligned}$$

o bien la segunda se puede escribir como

$$mR\ddot{\theta} = \frac{mR}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -mg\sin\theta$$

Si llamamos $v_0 = R\dot{\theta}_0$ la rapidez en el punto más bajo, donde $\theta = 0$, podemos integrar la última ecuación obteniendo

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - 1)$$

o bien

$$v_0^2 - v^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

y de allí podemos calcular N que resulta ser

$$\begin{aligned} N &= m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta \\ &= \frac{m}{R}(v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)) + mg\cos\theta \\ &= \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2) \end{aligned}$$

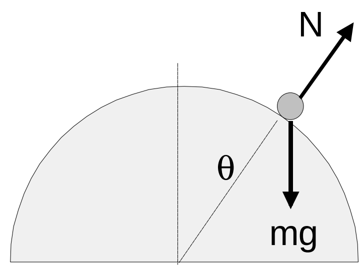


Figura 4:

Para que la partícula realice vueltas completas debe ser

$$N = \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2) > 0$$

entonces, en el caso más desfavorable $\theta = \pi$

$$\frac{m}{R}v_0^2 + mg(-3 - 2) > 0$$

entonces

$$v_0 > \sqrt{5gR}$$

Problema 2.07

Si en el problema anterior colocamos

$$v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{5gR}$$

entonces

$$\begin{aligned} N &= \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2) \\ &= \frac{m}{R}\frac{9}{16}5gR + mg(3\cos\theta - 2) \\ &= mg(\frac{13}{16} + 3\cos\theta) \end{aligned}$$

que se anula donde $\frac{13}{16} + 3\cos\theta = 0$, o sea en: $\theta = 105.7^o$ y allí se separa.

Problema 2.08

Considere la figura

la segunda Ley de Newton, radial da

$$m\frac{v^2}{R} = -N + mg\cos\theta,$$

y conservación de energía

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta = mgR$$

o sea

$$v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$$

que sustituida en la primera da

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) \\ &= (3\cos\theta - 2)mg \end{aligned}$$

que se anula donde $\cos\theta = \frac{2}{3}$ o sea el punto de despegue es $\theta = 48.19^o$.

Problema 2.09

Mientras la partícula permanezca apoyada sobre la plataforma, la reacción normal actuando sobre ella, hacia arriba N, está dada por

$$m\ddot{y} = N - mg$$

con

$$y = A\sin\omega t$$

de modo que

$$N = mg - mA\omega^2\sin\omega t.$$

Entonces la parícula no despegará si $N > 0$ para todo t lo cual requiere que

$$A\omega^2 < g$$

o bien la partícula despegará si

$$A\omega^2 > g.$$

volver

Problema 2.10

La ecuación de movimiento será

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^3$$

siendo

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

La primera puede escribirse como

$$\begin{aligned} m\frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} &= -kv^3 \\ mv\frac{dv}{ds} &= -kv^3 \\ m\frac{dv}{ds} &= -kv^2 \end{aligned}$$

que puede integrarse, siendo u la velocidad inicial, como sigue

$$\begin{aligned} \int_u^v \frac{dv}{v^2} &= -km\int_0^s ds \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} &= -kms \end{aligned}$$

entonces

a)

$$v = \frac{u}{1+kmsu}$$

Además

b)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{u}{1+kmsu}$$

que puede integrarse

$$\begin{aligned} \int (1+kmsu)ds &= \int udt \\ s + \frac{1}{2}kmus^2 &= ut \end{aligned}$$

o bien

$$t = \frac{s}{u} + \frac{1}{2}kms^2$$

Problema 2.11

Deberíamos tener al igual que en el problema anterior,

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^3,$$

de donde (haciendo $km = K$)

$$\begin{aligned} v &= \frac{u}{1+Ksu}, \\ t &= \frac{s}{u} + \frac{1}{2}Ks^2 \end{aligned}$$

pero sabemos que $v = u = 800$ cuando $s = 0$ y que $v = 600$ cuando $s = 100$ de modo que

$$\begin{aligned} 600 &= \frac{800}{1+K(100)(800)}, \\ K &= \frac{1}{240\,000}. \end{aligned}$$

De la otra ecuación

$$\begin{aligned} t &= \frac{100}{800} + \frac{1}{2}(\frac{1}{240\,000})(100)^2 \\ &= \frac{7}{48} = 0.15\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Problema 2.12

Aquí supondremos que la masa es unidad de modo que

$$\frac{dv}{dt} = -kv^{m+1}$$

o

$$v\frac{dv}{ds} = -kv^{m+1}$$

Si integramos la primera

$$\int_u^v \frac{dv}{v^{m+1}} = -kt$$

de donde

$$kt = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{v^m} - \frac{1}{u^m}\right).$$

Similarmente si integramos la segunda forma

$$\int_u^v \frac{dv}{v^m} = -ks$$

o sea

$$ks = \frac{1}{m-1}(\frac{1}{v^{m-1}} - \frac{1}{u^{m-1}}).$$

Problema 2.13

Para el problema anterior, se tiene ahora $m = \frac{1}{2}$ y $u = 800$, y para $t = 1$, $v = 500$. Entonces

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{(1/2)}\left(\frac{1}{500^{1/2}} - \frac{1}{800^{1/2}}\right) \\ &= 0.0\,187\,32. \end{aligned}$$

Enntonces

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{k(m-1)}(\frac{1}{v^{m-1}} - \frac{1}{u^{m-1}}) \\ &= \frac{1}{(0.0\,187\,32)(-1/2)}(\frac{1}{500^{-1/2}} - \frac{1}{800^{-1/2}}) \\ &= 632.\,457\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Problema 2.14

Aquí

$$\frac{dv}{dt} = -kv - g$$

de donde

$$v(t) = \frac{-g + e^{-kt}C_1 k}{k}$$

pero

$$v_0 = \frac{-g + C_1 k}{k}$$

de modo que

$$C_1 = \frac{v_0 k + g}{k}$$

y

$$v(t) = \frac{-g}{k} + \frac{v_0 k + g}{k} e^{-kt}$$

entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t (\frac{-g}{k} + \frac{v_0 k + g}{k} e^{-kt}) dt \\ &= -\frac{gt}{k} + \frac{v_0 k + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) \end{aligned}$$

De aquí, haciendo $y = 0$ en $t = t_1$ resulta

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{gt_1}{k} + \frac{v_0 k + g}{k^2}(1 - e^{-kt_1}), \\ gkt_1 &= (v_0 k + g)(1 - e^{-kt_1}) \end{aligned}$$

Problema 2.15

Aquí, para la subida

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 - g \tag{1}$$

y debemos calcular la altura máxima y el tiempo empleado en subir. Podemos integrar

$$\begin{aligned} t &= -\int_u^v \frac{dv}{kv^2 + g} \\ &= \frac{-\arctan v \frac{k}{\sqrt{(gk)}} + \arctan u \frac{k}{\sqrt{(gk)}}}{\sqrt{(gk)}} \end{aligned}$$

en el punto más alto $v = 0$, por lo tanto el tiempo de subida es

$$t_s = \frac{1}{\sqrt{(gk)}} \arctan u \frac{k}{\sqrt{(gk)}}$$

Para saber la altura máxima, modificamos la ecuación (1) de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -kv^2 - g \\ vdv &= (-kv^2 - g)dy \end{aligned}$$

entonces

$$y = -\int_u^v \frac{vdv}{kv^2 + g}.$$

Como nos interesa solamente $y_{\max}$ hacemos $v = 0$, entonces

$$y_{\max} = \frac{1}{2k} \ln \frac{g + ku^2}{g}.$$

Para la bajada, con $v(0) = 0$ y $y(0) = y_{\max}$

$$\frac{dv}{dt} = kv^2 - g \tag{2}$$

entonces

$$\begin{aligned} t &= -\int_0^v \frac{dv}{g - kv^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(gk)}} \operatorname{arctanh} v \frac{k}{\sqrt{(gk)}} \end{aligned}$$

además modificando la ecuación (2)

$$vdv = (kv^2 - g)dy$$

entonces

$$\begin{aligned} y - y_{\max} &= \int_0^v \frac{vdv}{kv^2 - g} \\ &= \frac{1}{2k} \ln \frac{g - kv^2}{g} \end{aligned}$$

luego la velocidad de llegada v_f al suelo $(y = 0)$ estará dada por

$$\begin{aligned} -y_{\max} &= \frac{1}{2k} \ln \frac{g - kv_f^2}{g} \\ &= -\frac{1}{2k} \ln \frac{g + ku^2}{g} \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{g - kv_f^2}{g} = \frac{g}{g + ku^2}$$

o bien

$$v_f = -\sqrt{\frac{g}{g + u^2 k}} u$$

finalmente, el tiempo de bajada estará dado por

$$
\begin{aligned}
t_b &= -\frac{1}{\sqrt{(gk)}} \operatorname{arctanh} v \frac{k}{\sqrt{(gk)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(gk)}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{g}{g+u^2k}} u \frac{k}{\sqrt{gk}}
\end{aligned}
$$

y el tiempo total será

$$
t = \frac{1}{\sqrt{(gk)}} \arctan u \frac{k}{\sqrt{(gk)}} + \frac{1}{\sqrt{(gk)}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{g}{g+u^2k}} u \frac{k}{\sqrt{gk}}
$$

si llamamos $\tan\alpha = u\sqrt{\frac{k}{g}}$

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{\sqrt{(gk)}} \arctan(\tan\alpha) + \frac{1}{\sqrt{(gk)}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} \tan\alpha, \\
&= \frac{1}{\sqrt{(gk)}} (\alpha + \operatorname{arctanh} \sin\alpha)
\end{aligned}
$$

pero existe la identidad

$$
\operatorname{arctanh} \phi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\phi}{1-\phi}
$$

de modo que el tiempo será

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{\sqrt{(gk)}} (\alpha + \ln \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(gk)}} (\alpha + \ln \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(gk)}} (\alpha + \ln \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(gk)}} (\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha)).
\end{aligned}
$$

(¡¡Este problema no será colocado en pruebas!!)

Problema 2.16

- Para la masa tendremos

$$
m\ddot{y} = T - mg,
$$

estando y dado por

$$y = a\sin(2\pi nt)$$

entonces

$$\begin{aligned} T &= mg - m\ddot{y} \\ &= mg + m4\pi n^2 a \sin 2\pi nt, \end{aligned}$$

Para que el hilo permanezca tenso debe ser

$$T = mg + m4\pi n^2 a \sin 2\pi nt > 0$$

y entonces

$$\begin{aligned} mg &> m4\pi n^2 a \\ n^2 &< \frac{g}{4\pi a}. \end{aligned}$$

Problema 2.17

$m = 16\,\mathrm{kg}$
$\mu_s = 0.3$
$\mu_k = 0.25$
De aquí la fuerza de roce máxima es $f_{\max} = 0.3 \times 16 \times 10 = 48\,\mathrm{N}$, luego

a) Si $F = 45\,\mathrm{N}$, la fuerza neta es cero.

b) $F = 48\,\mathrm{N}$

c) Supondremos aquí (no se dice) que la fuerza aplicada durante $4\,\mathrm{s}$ es $F = 50\,\mathrm{N}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 16a &= 50 - 0.25 \times 16 \times 10 \\ a &= 0.625 \end{aligned}$$

y después de los $4\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} 16a &= -0.25 \times 16 \times 10 \\ a &= -2.5 \end{aligned}$$

de aquí para la aceleración

$$\begin{aligned} v &= 0.625 \times 4 = 2.5 \\ s &= \frac{1}{2}0.625(4)^2 = 5 \end{aligned}$$

y para el frenado

$$\begin{aligned} v &= 2.5 - 2.5t \\ s &= 5 + 2.5t - \frac{1}{2}2.5t^2 \end{aligned}$$

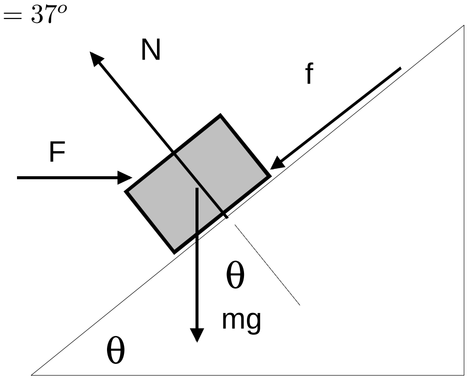
se detiene en $t = 1$ (a partir de los 4) y el espacio total será

$$s = 5 + 2.5 - \frac{1}{2}2.5 = 6.25\,\mathrm{m}$$

Problema 2.18

Aquí

$m = 1\,\mathrm{kg}$
$F = 15\,\mathrm{N}$
$\mu_k = 0.2$
$\theta = 37^o$



Tomando el eje x paralelo al plano inclinado e y normal, tenemos

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F\cos\theta - f - mg\sin\theta = ma\\ \sum F_y &= N - F\sin\theta - mg\cos\theta = 0\\ f &= \mu_k N\end{aligned}$$

entonces

$$f = \mu_k(F\sin\theta + mg\cos\theta)$$

$$a = \frac{F\cos\theta - \mu_k F\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta - mg\sin\theta}{m}$$

$$a\begin{cases}\frac{F(\cos\theta-\mu_k\sin\theta)-mg(\mu_k\cos\theta+\sin\theta)}{m} & \text{si} \quad t<3\\ -g(\mu_k\cos\theta+\sin\theta) & \text{si} \quad t>4\end{cases}$$

calculemos numéricamente

$$a\begin{cases}2.56 & \text{si} \quad t<3\\ -7.62 & \text{si} \quad t>3\end{cases}$$

así resulta para $t = 3$, $s = \frac{1}{2}(2.56)\times 3^2 = 11.52\,\mathrm{m}$ y $v = 2.56\times(3) = 7.68\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Pasado este tiempo el cuerpo empieza a frenar y

$$\begin{aligned}v &= 7.68 - 7.62t\\ s &= 11.52 + 7.68t - \frac{1}{2}7.62t^2\end{aligned}$$

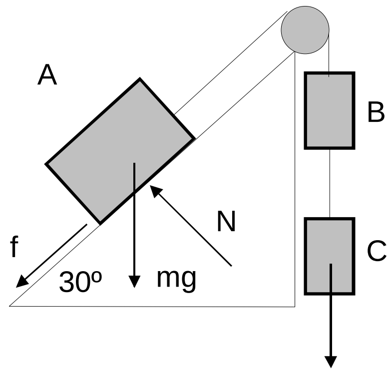


Figura 5:

a) El cuerpo sube hasta que $v = 0$, o sea $7.68 - 7.62t = 0$, con solución $t = 1.01\,\mathrm{s}$ y por lo tanto la distancia que ha subido es

$$\begin{aligned} s &= 11.52 + 7.68(1.01) - \frac{1}{2}7.62(1.01)^2 \\ &= 15.39\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

b) Hacemos $11.52 + 7.68t - \frac{1}{2}7.62t^2 = 0$, con solución $t = 3.02\,\mathrm{s}$, a partir de los 3 s de modo que el tiempo es

$$t = 6.02\,\mathrm{s}\,.$$

Problema 2.19

$$\begin{aligned} m_C g + m_B g - m_A g \sin 30 - \mu_k N &= m_A a \\ N &= m_A g \cos 30 \\ m_C g - T_C &= m_C a \end{aligned}$$

podemos entonces calcular

a)

$$\begin{aligned} m_C g + m_B g - m_A g \sin 30 - \mu_k m_A g \cos 30 &= m_A a \\ 10(m_C + 2 - 1 - 0.5 \times \sqrt{3}) &= 2 \times 2 \\ m_C &= 0.266\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

y además

b) $T_C = m_C g - m_C a = 0.266(10 - 2) = 2.128\,\mathrm{N}$

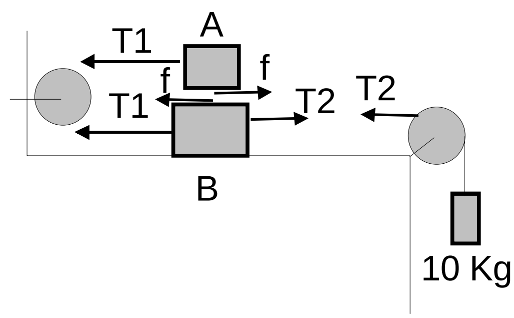


Figura 6:

Problema 2.20

Tenemos que $m_A = 2$, $m_B = 3$, $m_C = 10$. De acuerdo a la figurase tiene que

$$\begin{aligned} 10 \times 10 - T_2 &= 10a \\ T_2 - T_1 - f &= 3a \\ T_1 - f &= 2a \\ f &= 0.3 \times 2 \times 10 \\ &= 6 \end{aligned}$$

si las sumamos todas tenemos que

a)

$$\begin{aligned} 15a &= 100 - 2 \times 0.3 \times 2 \times 10 \\ a &= 5.87\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

b) $T_1 = f + 2a = 17.74\,\mathrm{N}$ y $T_2 = T_1 + f + 3a = 41.35\,\mathrm{N}$.

Problema 2.21

Con relación a la figura y $m_B = 15$, $\mu_s = 0.2$, $\mu_k = 0.1$ tenemos

$$\begin{aligned} T - m_B g &= m_B a \\ m_A g \sin 30 - f - T &= m_A a \\ N &= m_A g \cos 30 \end{aligned}$$

Si el sistema está en equilibrio y a punto de deslizar entonces $a = 0$ y $f = \mu_s m_A g \cos 30$ entonces

$$m_A g \sin 30 - \mu_s m_A g \cos 30 - m_B g = 0$$

de donde

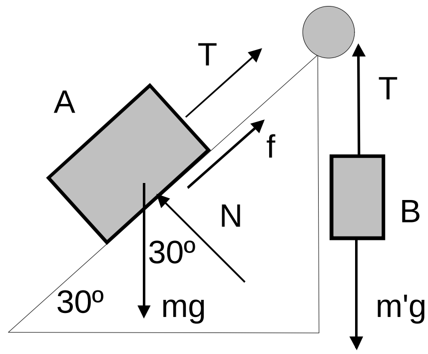


Figura 7:

a)

$$
\begin{aligned}
m_A &= \frac{m_B}{\sin 30 - \mu_s \cos 30} \\
&= \frac{15}{\frac{1}{2} - 0.2 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}} \\
&= 45.9\,\mathrm{kg}
\end{aligned}
$$

b) Falta especificar en el problema la masa de A que supondremos es $m_A = 60\,\mathrm{kg}$. Entonces ahora habrá aceleración y las ecuaciones son las mismas pero con $f = \mu_k N$ entonces

$$
\begin{aligned}
T - m_B g &= m_B a \\
m_A g \sin 30 - \mu_k m_A g \cos 30 - T &= m_A a
\end{aligned}
$$

y si se suman se obtiene

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{m_A \sin 30 - \mu_k m_A \cos 30 - m_B}{m_A + m_B} g, \\
&= \frac{30 - 0.1 \times 30\sqrt{3} - 15}{75} 10 \\
&= 1.31\,\mathrm{m\,s^{-2}}
\end{aligned}
$$

entonces la distancia que recorrerá el bloque B en un segundo será

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2} a t^2 \\
&= 0.66\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Problema 2.22

El diagrama de cuerpo libre será

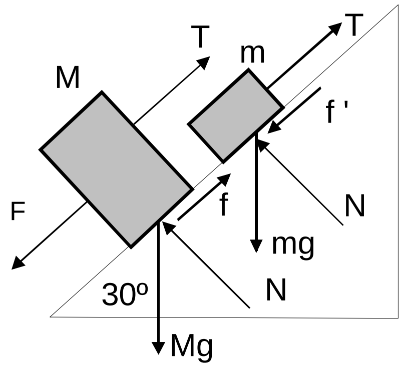


Figura 8:

a) Cuando $F = 0$ se sabe que la velocidad es constante, o sea la aceleración es cero y se tendrá

$$\begin{aligned} Mg\sin 30 - T - \mu_k Mg\cos 30 &= 0 \\ T - \mu_k mg\cos 30 - mg\sin 30 &= 0 \end{aligned}$$

sumándolas, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= Mg\sin 30 - \mu_k Mg\cos 30 - \mu_k mg\cos 30 - mg\sin 30 \\ \mu_k &= \frac{M-m}{M+m}\tan 30 = 0.14 \end{aligned}$$

b) Ahora $F > 0$, hay aceleración $a = \frac{2d}{t^2} = \frac{2}{4} = 0.5$, entonces

$$\begin{aligned} F + Mg\sin 30 - T - \mu_k Mg\cos 30 &= Ma \\ T - \mu_k mg\cos 30 - mg\sin 30 &= ma \end{aligned}$$

de donde podemos despejar T y F.

$$\begin{aligned} F + 0.5\times 10\times 0.5 - T - 0.14\times 0.5\times 10\times 0.5\sqrt{3} &= 0.5\times 0.5 \\ T - 0.14\times 0.3\times 10\times 0.5\sqrt{3} - 0.3\times 10\times 0.5 &= 0.3\times 0.5 \end{aligned}$$

resultando $T = 2.01\,\mathrm{N}, F = 0.37\,\mathrm{N}$.

Dinámica de un sistema de partículas.

Problema 3.01

Por hipótesis para cada partícula se tendría

$$\begin{aligned} m_i\vec{a}_i &= -km_i\vec{r}_i \\ \vec{a}_i &= -k\vec{r}_i \end{aligned}$$

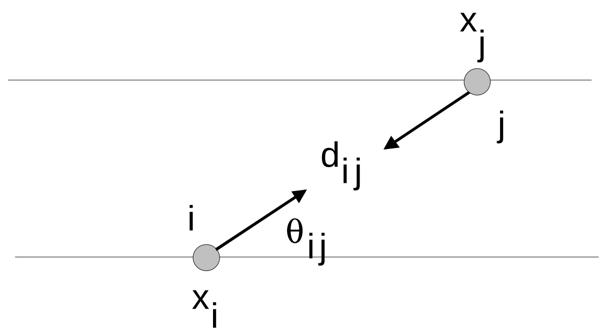


Figura 9:

luego el centro de masas

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

tendría una aceleración

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{CM} &= \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i \\
&= \frac{1}{M} \sum m_i (-k\vec{r}_i) \\
&= -k\frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \\
\vec{a}_{CM} &= -k\vec{r}_{CM}
\end{aligned}$$

es decir igual que cada partícula del sistema.

Problema 3.02

Sea N el número de partículas y, con respecto a la figura, la partícula de la corredera i interactúa con las otras partículas j como se explica a continuación:

La segunda ley de Newton, para la dirección x paralela a la corredera será

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_i &= \sum_{j\neq i} F_{ij} \cos\theta_{ij} \\
&= km^2 \sum_{j\neq i} d_{ij} \cos\theta_{ij} \\
&= km^2 \sum_{j\neq i} (x_j - x_i).
\end{aligned}$$

La suma es sobre $j \neq i$, pero $i = j$ puede incluirse pués la diferencia es cero,

entonces

$$\ddot{x}_i = km \sum_j (x_j - x_i) \qquad (3)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{Nm}\sum_j m x_j \\ &= \frac{1}{N}\sum_j x_j \\ \ddot{x}_{CM} &= \frac{1}{N}\sum_j \ddot{x}_j . \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (3) puede escribirse

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= km\sum_j x_j - kmNx_i \\ &= kmNx_{CM} - kmNx_i \\ &= -kmN(x_i - x_{CM}), \end{aligned}$$

luego si llamamos $x_i' = x_i - x_{CM}$ tenemos que

$$\ddot{x}_i' = -kmNx_i'$$

qque significa que todas las partículas efectúan oscilaciones armónicas del mismo periodo T respecto a la posición del centro de masas siendo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{kmN}}.$$

Problema 3.03

Considere la figura

Sea $x = d\cos\theta$, $y = d\sin\theta$ entonces tenemos por aplicación de la segunda Ley de Newton que

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F\cos\theta = -\frac{k}{d^2}\cos\theta = -\frac{k}{d^3}x \\ m\ddot{y} &= -F\sin\theta = -\frac{k}{d^2}\sin\theta = -\frac{k}{d^3}y \end{aligned}$$

por otro lado $x_{CM} = \frac{x}{2}$ y $y_{CM} = \frac{y}{2}$, $r_{CM} = \frac{d}{2}$ entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{CM} &= -\frac{k}{8mr_{CM}^3}x_{CM}, \\ \ddot{y}_{CM} &= -\frac{k}{8mr_{CM}^3}y_{CM} \end{aligned}$$

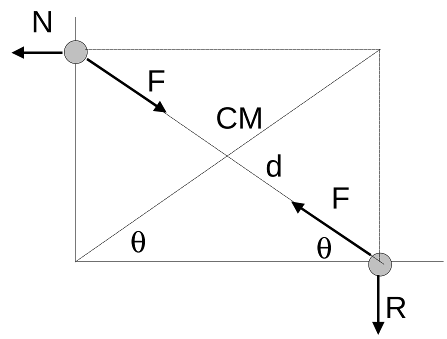


Figura 10:

que equivale a

$$\vec{a}_{CM} = -\frac{k}{8mr_{CM}^3}\vec{r}_{CM}.$$

O sea el centro de masas es atraido hacia el origen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al origen. Problema que se estudia en campo central de fuerzas y se demuestra allí que la trayectoria es necesariamente una sección cónica.

Problema 3.04

Con una figura análoga a la del problema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= -F\cos\theta = -F\frac{x}{d} \\ m_2\ddot{y} &= -F\sin\theta = -F\frac{y}{d} \end{aligned}$$

de donde

$$m_1\ddot{x}y - m_2\ddot{y}x = 0.$$

Si las masas son iguales (no se especifica en el enunciado del problema) entonces

$$\begin{aligned} \ddot{x}y - \ddot{y}x &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $\dot{x}y - \dot{y}x$ es constante e igual a cero porque las partículas partieron del reposo, o sea

$$\dot{x}y - \dot{y}x = 0,$$

o bien

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y}$$

que puede integrarse dando

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln c + \ln x, \\ y &= cx \end{aligned}$$

o sea si $x = 0$ entonces simultáneamente $y = 0$.

Problema 3.05

Similarmente tendremos

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F\cos\theta = -Kd\cos\theta = -Kx \\ m\ddot{y} &= -F\sin\theta = -Fd\sin\theta = -Ky \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ y(t) &= C\cos\omega t + D\sin\omega t, \\ \dot{x}(t) &= \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t), \\ \dot{y}(t) &= \omega(-C\sin\omega t + D\cos\omega t) \end{aligned}$$

y colocando las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned} a &= A, \\ a &= C, \\ -V_0 &= \omega B, \\ 0 &= \omega D \end{aligned}$$

entonces

a)

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos\omega t - \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t, \\ y(t) &= a\cos\omega t. \end{aligned}$$

b) Las coordenadas del centro de masas son

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{x}{2} = \frac{1}{2}a\cos\omega t - \frac{V_0}{2\omega}\sin\omega t, \\ y_{CM} &= \frac{y}{2} = \frac{1}{2}a\cos\omega t, \end{aligned}$$

de donde debemos eliminar t, obteniendo

$$x_{CM} = y_{CM} - \frac{V_0}{2\omega}\sqrt{1 - \left(\frac{2y_{CM}}{a}\right)^2},$$

que se puede escribir así

$$y^2(1 + (\frac{V_0}{a\omega})^2) - 2yx + x^2 = (\frac{V_0}{2\omega})^2.$$

Esto es se trata de una elipse.

Problema 3.06

Mirado desde el centro de masas, que por viajar a velocidad constante $v_G = \frac{1}{2}V_0$ es un sistema inercial, tenemos que las partículas al comienzo y al final (una vez que las oscilaciones terminan) giran en circunferencias alrededor de el. Así al comienzo

$$\begin{aligned} L_G &= m\frac{1}{2}V_0\frac{a}{2} + m\frac{1}{2}V_0\frac{a}{2} \\ &= \frac{1}{2}mV_0 a. \end{aligned}$$

Al final, si V son las rapideces respecto a G, entonces

$$L_G = mVa + mVa = 2mVa.$$

Como el momentum angular es constante

$$V = \frac{1}{4}V_0.$$

Además, para el movimiento circular de cada partícula

$$m\frac{V^2}{a} = K(2a - a),$$

luego

$$V = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$$

y finalmente

$$V_0 = 4V = 4a\sqrt{\frac{K}{m}}.$$

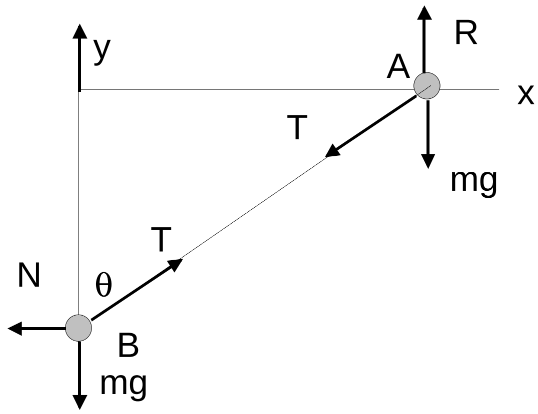


Figura 11:

Problema 3.07

Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas del centro de masas $x_{CM} = \frac{1}{2}a\sin\theta$, $y_{CM} = -\frac{1}{2}a\cos\theta$ serán

$$\begin{aligned} 2m\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{2}a\sin\theta &= -N \\ -2m\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{2}a\cos\theta &= R - 2mg \end{aligned}$$

Además, por ser las velocidades de las partículas paralelas a sus vectores posición, entonces $\vec{L}_0 = 0$, entonces

$$\tau_0 = (R - mg)a\sin\theta - Na\cos\theta = 0.$$

a) Despejando R, N de las dos primeras y reemplazando en la tercera se obtiene

$$g\sin\theta - 2\sin\theta\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{2}a\cos\theta + 2\cos\theta\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{2}a\sin\theta = 0.$$

Pero es conocido el truco

$$\frac{d^2}{dt^2}F(\theta) = \frac{1}{2F'(\theta)}\frac{d}{d\theta}(F'(\theta)\dot{\theta})^2$$

que si se usa conduce a

$$\frac{g}{a}\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta\dot{\theta})^2 = 0$$

que se simplifica a

$$\frac{2g}{a}\sin\theta + \frac{d}{d\theta}(\dot{\theta})^2 = 0$$

e integrando con $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
(\dot{\theta})^2 &= \frac{2g}{a}\cos\theta \\
\dot{\theta} &= -\sqrt{\frac{2g}{a}\cos\theta}
\end{aligned}$$

b) Para determinar la tensión del hilo, escribamos la ecuación de movimiento de una partícula

$$\begin{aligned}
T\cos\theta - mg &= m\frac{d^2}{dt^2}y \\
&= -am\frac{d^2}{dt^2}\cos\theta \\
&= am\frac{1}{2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\dot{\theta})^2
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
T &= \frac{mg}{\cos\theta} + am\frac{1}{2\cos\theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin^2\theta\frac{2g}{a}\cos\theta \\
&= \frac{mg}{\cos\theta} + \frac{mg}{\cos\theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\cos\theta) \\
&= 3mg\cos\theta.
\end{aligned}$$

Problema 3.08

Sea y el largo del resorte mientras la partícula m_1 se mueve, sin que m_2 abandonde el contacto con el suelo, y N la reacción en el suelo. Así las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1 &= -m_1 g - k(y - l_0) \\
m_2\ddot{y}_2 &= N - m_2 g + k(y - l_0) = 0
\end{aligned}$$

De la primera evaluaremos $y_1(t)$ y de la segunda $N(t)$ para ver la conndición bajo la cual se haga $N = 0$. Las condiciones iniciales para integrar la primera son $y_1(0) = l_0 - \Delta x$, $\dot{y}_1(0) = 0$. reordenemos la primera ecuación

$$\ddot{y}_1 + \frac{k}{m_1}y = -g + \frac{kl_0}{m_1}$$

que tiene por solución

$$y_1(t) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} + A\cos\sqrt{\frac{k}{m_1}}t$$

y en $t = 0$

$$l_0 - \Delta x = l_0 - \frac{m_1 g}{k} + A$$

de donde $A = \frac{m_1 g}{k} - \Delta x$ y entonces

$$y_1(t) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} - (\Delta x - \frac{m_1 g}{k})\cos\sqrt{\frac{k}{m_1}}t$$

y

$$\begin{aligned} N &= m_2 g - k(y - l_0) \\ &= m_2 g + m_1 g + (k\Delta x - m_1 g)\cos\sqrt{\frac{k}{m_1}}t). \end{aligned}$$

Aquí hay que pensar. Se desea el mínimo Δx para que N se anule. El caso más favorable corresponde a $\cos\sqrt{\frac{k}{m_1}}t = -1$ de donde

$$m_2 g + m_1 g - (k\Delta x_{\min} - m_1 g) = 0$$

$$\Delta x_{\min} = \frac{m_2 g + 2m_1 g}{k}$$

Problema 3.09

Al partir si x es la dirección perpendicular a la linea que une las partículas entonces

$$\begin{aligned} P_x &= 2mV_0 \\ K &= \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 \\ &= mV_0^2 \end{aligned}$$

justo antes del choque, Las tres partículas tienen la misma componente de velocidad en x, llamemosla u, y dos partículas tienen la misma rapidez v en el eje y entonces

$$\begin{aligned} P_x &= 3mu \\ K &= 3\frac{1}{2}mu^2 + 2\frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

Conservación de P_x y K implica

$$u = \frac{2}{3}V_0$$

y

$$\frac{3}{2}(\frac{2}{3}V_0)^2 + v^2 = V_0^2$$

entonces

$$v = \frac{1}{3}\sqrt{3}V_0.$$

Campo central de fuerza
Problema 4.01

Para la órbita circular

$$m\frac{v_0^2}{R_0} = \frac{K}{R_0^2},$$

entonces

$$v_0 = \sqrt{\frac{K}{mR_0}}$$

que reducida a la mitad implica

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\frac{K}{mR_0} - \frac{K}{R_0} \\ &= -\frac{7}{8}\frac{K}{R_0} \\ l_0 &= mR_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{mR_0}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{mR_0K} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2(-\frac{7}{8}\frac{K}{R_0})\frac{1}{4}mR_0K}{mK^2} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

volver

y

$$\begin{aligned} \frac{l_0^2}{mK} &= \frac{\frac{1}{4} m R_0 K}{mK} \\ &= \frac{1}{4} R_0 \end{aligned}$$

luego la nueva órbita es (tomando $\alpha = 0$)

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{4} R_0 \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\cos\theta} \\ &= \frac{R_0}{4 - 3\cos\theta} \end{aligned}$$

Problema 4.02

Si - denota la velocidad angular terrestre entonces órbita geo estacionaria significa

$$v_0 = - r_0$$

además de (problema anterior)

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

con estas se puede obtener:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{-} \sqrt[3]{(GM-)}, \\ v_0 &= \sqrt[3]{(GM-)}. \end{aligned}$$

Sea por un momento $v_0 = 2\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ la velocidad inicial. Entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m 4 \frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= G\frac{Mm}{r_0} \\ l_0 &= m r_0 2 \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \end{aligned}$$

entonces

$$e^2 = 1 + \frac{2G\frac{Mm}{r_0} 4 m^2 r_0^2 \frac{GM}{r_0}}{m G^2 M^2 m^2} = 9$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{4m^2 r_0^2 \frac{GM}{r_0}}{mGMm} \frac{1}{1-3\cos(\theta-\alpha)} \\ &= \frac{4r_0}{1-3\cos(\theta-\alpha)} \end{aligned}$$

Si el ángulo polar se mide desde donde cambió la velocidad entonces debe ser $\alpha = \pi$ y finalmente

$$\begin{aligned} r &= \frac{4r_0}{1+3\cos\theta} \\ &= \frac{4}{-}\sqrt[3]{(GM-)}\frac{1}{1+3\cos\theta} \end{aligned}$$

Problema 4.03

Aquí sea $r_0 = 2R$ la distancia y como en los problemas anteriores, si llamamos f al factor en que cambia la velocidad

$$\begin{aligned} v_0 &= f\sqrt{\frac{GM}{r_0}}, \\ l_0 &= mr_0 f\sqrt{\frac{GM}{r_0}} \\ E &= \frac{1}{2}mf^2\frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} \\ e^2 &= 1 + \frac{2(\frac{1}{2}mf^2\frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0})m^2 r_0^2 f^2 \frac{GM}{r_0}}{mG^2M^2m^2} \\ &= 1 + f^4 - 2f^2 \\ e &= \left|f^2 - 1\right| \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{m^2 r_0^2 f^2 \frac{GM}{r_0}}{mGMm} \frac{1}{1-|f^2-1|\cos(\theta-\alpha)} \\ r &= \frac{r_0 f^2}{1-|f^2-1|\cos(\theta-\alpha)} \end{aligned}$$

a)

$$r = \frac{2Rf^2}{1-|f^2-1|\cos(\theta-\alpha)}$$

b) Para que el satélite choque con la Tierra debe ser $f < 1$ entonces

$$r = \frac{2Rf^2}{1-(1-f^2)\cos(\theta-\alpha)}$$

volver

y si el cambio de velocidad se produce en $\theta = 0$ debe ser $\alpha = 0$ y entonces

$$r = \frac{2Rf^2}{1 - (1 - f^2)\cos\theta}$$

y chocará si en algún ángulo θ ocurre que $r = R$, es decir

$$\begin{aligned}
R &= \frac{2Rf^2}{1 - (1 - f^2)\cos\theta} \\
1 - (1 - f^2)\cos\theta &= 2f^2 \\
-1 &< \cos\theta = \frac{1 - 2f^2}{1 - f^2} < 1
\end{aligned}$$

desigualdad que resolveremos $\frac{1-2f^2}{1-f^2} < 1$ o sea $2f^2 > f^2$ que es siempre válida. La otra desigualdad $\frac{1-2f^2}{1-f^2} > -1$ implica que $1 - 2f^2 > -1 + f^2$ o sea $3f^2 < 2$ y entonces debe ser

$$f < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

c) Debe ser $e = \left|f^2 - 1\right| \geq 1$ entonces

$$f \geq \sqrt{2}$$

Problema 4.04

Es casi igual al problema 4.02 pero ahora

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} \\
&= -\frac{7}{8}\frac{GMm}{r_0} \\
l_0 &= mr_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{r_0}}
\end{aligned}$$

entonces

$$e^2 = 1 + \frac{2(-\frac{7}{8}\frac{GMm}{r_0})\frac{1}{4}m^2r_0^2\frac{GM}{r_0}}{mG^2M^2m^2} = \frac{9}{16}$$

entonces

$$\begin{aligned}
r &= \frac{m^2r_0^2\frac{1}{4}\frac{GM}{r_0}}{mGMm}\frac{1}{1 - \frac{3}{4}\cos(\theta - \alpha)} \\
&= \frac{1}{4}r_0\frac{1}{1 - \frac{3}{4}\cos(\theta - \alpha)} \\
&= \frac{1}{-}\sqrt[3]{(GM-)}\frac{1}{4 - 3\cos\theta}
\end{aligned}$$

Problema 4.05

Aquí

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \\
l_0 &= mRv_0\cos\alpha \\
e^2 &= 1 + \frac{2(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R})m^2R^2v_0^2\cos^2\alpha}{mG^2M^2m^2} \\
&= 1 + \frac{(v_0^2 - \frac{2GMm}{R})R^2v_0^2\cos^2\alpha}{G^2M^2}
\end{aligned}$$

sea

$$v_e^2 = \frac{2GM}{R}$$

entonces

$$e^2 = 1 + \frac{4(v_0^2 - v_e^2)v_0^2\cos^2\alpha}{v_e^4}$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{l_0^2}{mK}\frac{1}{1 - e\cos(\theta - \beta)} \\
r &= \frac{2Rv_0^2\cos^2\alpha}{v_e^2}\frac{1}{1 - e\cos(\theta - \beta)}
\end{aligned}$$

Sea ϕ el ángulo del punto de caida. Entonces debe ser

$$1 - e\cos(\phi - \beta) = 1 - e\cos(\beta)$$

de donde

$$\phi = 2\beta$$

y el ángulo β estará dado de

$$R = \frac{2Rv_0^2\cos^2\alpha}{v_e^2}\frac{1}{1 - e\cos(\beta)}$$

luego el ángulo β, la inclinación del semi eje mayor de la cónica, satisface

$$1 - e\cos(\beta) = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{v_e^2}.$$

como

$$e^2 = 1 + \frac{4(v_0^2 - v_e^2)v_0^2\cos^2\alpha}{v_e^4}$$

Sea

$$z = \frac{v_0^2}{v_e^2} < 1$$

$$e^2 = 1 - 4(1-z)z\cos^2\alpha$$

$$1 - \sqrt{1 - 4(1-z)z\cos^2\alpha}\cos\beta = 2z\cos^2\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{1 - 2z\cos^2\alpha}{\sqrt{1 - 4(1-z)z\cos^2\alpha}}$$

Ejemplo si $\alpha = \pi/4$ y $z = \frac{1}{2}$ resulta

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{1-z}{\sqrt{1-2(1-z)z}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
\beta &= \frac{\pi}{4} \\
\phi &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Problema 4.06

Aquí

$$r = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}$$

de donde

$$\begin{aligned}
r_{\max} &= \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = 200 \\
r_{\min} &= \frac{100}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{200}{3}
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\frac{l_0^2}{mK} = 100$$

siendo $m = 1$ y $l_0 = m r_{\max} v_{\min} = 1 \times 200 \times 1$ resulta

$$K = \frac{200^2}{100} = 400$$

En el punto más alejado la velocidad es $v_{\min} = 1$ y si esta rapidez es duplicada

$$\begin{aligned} l_0 &= 200 \times 2 = 400 \\ E &= \frac{1}{2}2^2 - \frac{400}{200} = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$e = 1$$

y

$$\begin{aligned} r &= \frac{400^2}{400}\frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)} \\ &= 400\frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)} \end{aligned}$$

siendo $r(0) = 200$ por lo tanto $\alpha = \pi$

$$r = \frac{400}{1+\cos\theta}$$

problema 4.07

Al igual que en el problema 4.01

$$v_0 = \sqrt{\frac{K}{mR_0}}$$

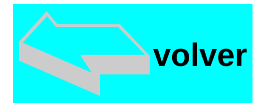
que reducida en un factor $\sqrt{\alpha}$ implica

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\alpha\frac{K}{mR_0} - \frac{K}{R_0} \\ &= \frac{1}{2}K\frac{\alpha-2}{R_0} \\ l_0 &= mR_0\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{K}{mR_0}} \end{aligned}$$

Entonces, de la segunda se observa que si $\alpha > 2$ resulta $E > 0$ y en consecuencia la trayectoria es una hipérbola o parábola si $\alpha = 2$, alejándose hasta el infinito.

Si $\alpha < 2$ entonces

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{K\frac{\alpha-2}{R_0}m^2R_0^2\alpha\frac{K}{mR_0}}{mK^2} \\ &= 1 + (\alpha-2)\,\alpha \\ &= (\alpha-1)^2 \\ e &= |\alpha-1| \end{aligned}$$



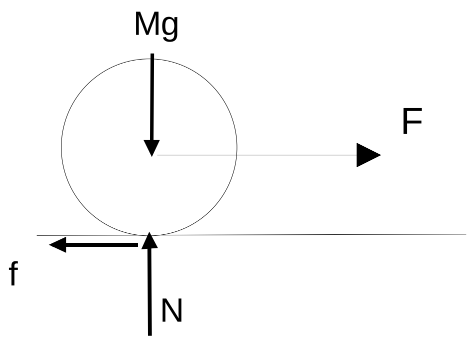


Figura 12:

y finalmente

$$r = R_0\alpha\frac{1}{1-|\alpha-1|\cos\theta}$$

Dinámica del cuerpo rígido.

Problema 5.01

Aquí

$$\begin{aligned} F-f &= Ma \\ N-Mg &= 0 \\ fR &= \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MRa \end{aligned}$$

entonces

$$f = \frac{1}{2}Ma$$

que susituida en la primera da

a)

$$a = \frac{2F}{3M}$$

b)

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2F}{3MR}$$

c)

$$f = \frac{1}{2}Ma = \frac{F}{3}$$

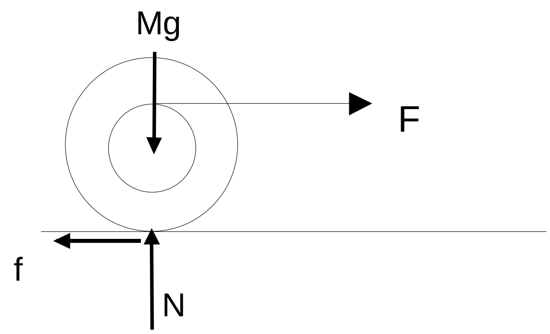


Figura 13:

Problema 5.02

Ahora

$$\begin{aligned} F - f &= Ma \\ N - Mg &= 0 \\ f2R + FR &= \frac{1}{2}M(2R)^2\alpha = \frac{1}{2}2MRa \end{aligned}$$

simplificando

$$2f + F = Ma = F - f$$

de donde resulta $f = 0$ y

a)

$$a = \frac{F}{M}$$

b)

$$\alpha = \frac{F}{2MR}$$

c)

$$f = 0.$$

Problema 5.03

Aquí

$$\begin{aligned} Mg - T &= Ma \\ TR &= \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MRa \end{aligned}$$

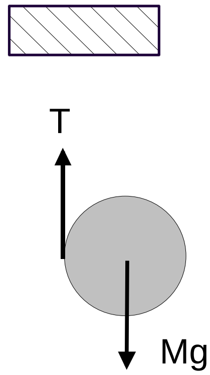


Figura 14:

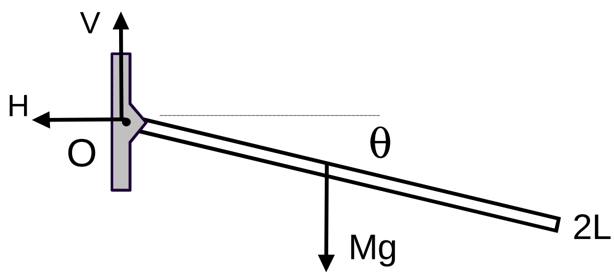


Figura 15:

de donde

$$Mg - \frac{1}{2}Ma = Ma$$

a)

$$a = \frac{2}{3}g$$

b)

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{3}Mg$$

Problema 5.04

Por conservación de energía tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}M(2L)^2\dot{\theta}^2 - MgL\sin\theta = 0$$

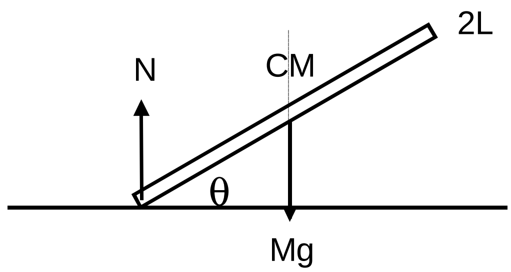


Figura 16:

luego la velocidad angular de la barra es$\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta}.$$

Además

$$\begin{aligned} -H &= M\frac{d^2}{dt^2}L\cos\theta \\ V - Mg &= M\frac{d^2}{dt^2}(-L\sin\theta) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} H &= ML\frac{1}{2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\dot{\theta})^2 \\ &= ML\frac{1}{2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta) \\ &= \frac{9}{4}Mg\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= Mg + M\frac{d^2}{dt^2}(-L\sin\theta) \\ &= Mg - ML\frac{1}{2\cos\theta}\frac{d}{d\theta}(\cos^2\theta\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta) \\ &= \frac{5}{2}Mg - \frac{9}{4}Mg\cos^2\theta. \end{aligned}$$

Problema 5.05

La posición x del centro de masas no varía. Entonces

$$\begin{aligned} N - Mg &= M\frac{d^2}{dt^2}L\sin\theta \\ -NL\cos\theta &= \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} \end{aligned}$$

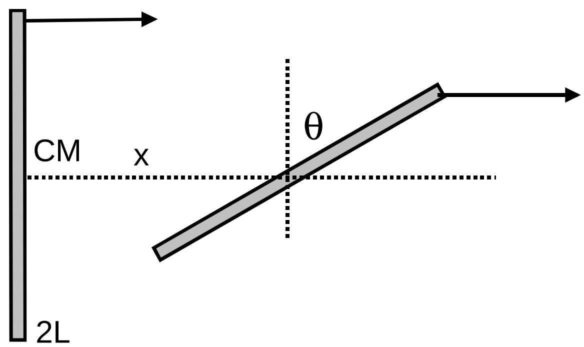


Figura 17:

pero es preferible usar la ecuación de conservación de energía considerando que $y_{CM} = L\sin\theta$ y entonces $v_{CM} = L\dot{\theta}\cos\theta$ entonces

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + MgL\sin\theta = MgL$$

entonces

$$\frac{1}{2}v_{CM}^2 + \frac{1}{6}\frac{v_{CM}^2}{\cos^2\theta} = gL(1 - \sin\theta)$$

para $\theta = 0$ resulta

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{3}{2}gl}.$$

Problema 5.06

El troque respecto al centro de masa conduce a

$$FL\sin\theta = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta}$$

o bien

$$\ddot{\theta} = \frac{3F}{L}\sin\theta.$$

Problema 5.07

Por conservación de energía

$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

volver

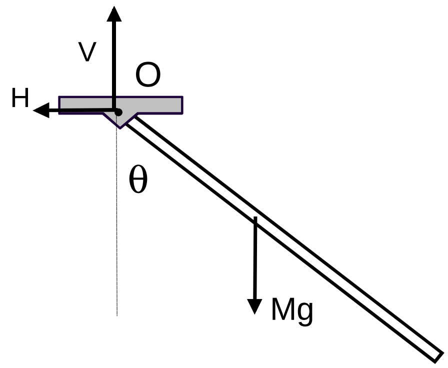


Figura 18:

y derivando respecto al tiempo

$$\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

y finalmente

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\sin\theta = 0.$$

Choques

Fórmulas

Para choques unidimensionales

$$\begin{aligned} m_1v_1' + m_2v_2' &= m_1v_1 + m_2v_2 \\ v_2' - v_1' &= e(v_1 - v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{m_1v_1 + m_2v_2 + m_1e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \\ v_1' &= \frac{m_1v_1 + m_2v_2 - m_2e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Para choqques en dos dimensiones

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ v_{2n}' - v_{1n}' &= e(v_{1n} - v_{2n}) \\ v_{2t}' - v_{1t}' &= v_{2t} - v_{1t}) \end{aligned}$$

Problema 6.01

$m_1 = m$

$v_1 = v$

$m_2 = M$

$v_2 = 0$

reemplazando en las fórmulas

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{m(1+e)}{m+M}v \\ v_1' &= \frac{m-Me}{m+M}v \end{aligned}$$

Problema 6.02

Es un caso particular resultando

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{m}{m+M}v \\ v_1' &= \frac{m}{m+M}v \end{aligned}$$

Problema 6.03

Si la partícula se suelta desde una altura h_1

$$\begin{aligned} y &= h_1 - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y &= -gt \end{aligned}$$

llega al suelo en un tiempo $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ con rapidez $-g\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = -\sqrt{2gh_1}$ y rebota con velocidad $e\sqrt{2gh_1}$. Ahora con esa velocidad inicial de subida llegará hasta una altura $gh_2 = \frac{1}{2}e^2 2gh_1$ o sea

$$h_2 = e^2 h_1.$$

volver

O sea la secuencia de alturas que ocurren es $h_1,\ e^2h_1,\ e^4h_1\cdots$y los tiempos empleados son $t_1=\sqrt{\frac{2h_1}{g}},\ t_2=2\sqrt{\frac{2h_2}{g}},\ t_3=2\sqrt{\frac{2h_3}{g}}\cdots$ y el tiempo total será

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_1}+2\sqrt{h_2}+2\sqrt{h_3}+\cdots\right)\\
&= \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_1}+2e\sqrt{h_1}+2e^2\sqrt{h_1}+\cdots\right)\\
&= \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\left(1+2e+2e^2+\cdots\right)\\
&= \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\left(1+\frac{2e}{1-e}\right)\\
&= \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)
\end{aligned}$$

Problema 6.04

$m_1=3$
$v_1=5$
$m_2=1$
$v_2=0$
$e=0.5$
de las fórmulas resultará

$$\begin{aligned}
v_2' &= \frac{m_1v_1+m_2v_2+m_1e(v_1-v_2)}{m_1+m_2}=5.625\\
v_1' &= \frac{m_1v_1+m_2v_2-m_2e(v_1-v_2)}{m_1+m_2}=3.125
\end{aligned}$$

la partícula (2) choca con la pared y se devuelve con rapidez $v_2''=-5.625$. Tenemos un nuevo choque donde ahora las velocidades antes del segundo choque entre las partículas son
$m_1=3$
$v_1=3.125$
$m_2=1$
$v_2=-5.625$
$e=0.5$
Así resultarán

$$\begin{aligned}
v_2' &= \frac{m_1v_1+m_2v_2+m_1e(v_1-v_2)}{m_1+m_2}=4.21875\\
v_1' &= \frac{m_1v_1+m_2v_2-m_2e(v_1-v_2)}{m_1+m_2}=-0.15625
\end{aligned}$$

habrá un tercer choque entre ellas donde inicialmente
$v_1 = -0.15625$
$v_2 = -4.21875$
resultando finalmente

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = 0.35 \\ v_1' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = -1.68 \end{aligned}$$

La partícula (2) chocará nuevamente con la pared pero no pilla más a la partícula (1), de modo que las velocidades finales son

$$\begin{aligned} v_2' &= -0.35\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ v_1' &= -1.68\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

Problema 6.05

El saco más bala adquiere una velocidad V' determinada por

$$\begin{aligned} mV &= (m+M)V' \\ V' &= \frac{m}{m+M}V. \end{aligned}$$

Por conservación de energía del movimiento siguiente se tiene

$$\frac{1}{2}V'^2 = gh$$

o sea

$$\begin{aligned} \frac{m}{m+M}V &= \sqrt{2gh} \\ V &= \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}. \end{aligned}$$

Problema 6.06

Sean $\theta = 30^o$ y ϕ por determinar, los ángulos en que se desvían las partíclas respecto a la dirección de incidencia. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} v_{1n}' + v_{2n}' &= v_{1n} + v_{2n} \\ v_{1t}' + v_{2t}' &= v_{1t} + v_{2t} \\ v_{2n}' - v_{1n}' &= e(v_{1n} - v_{2n}) \\ v_{2t}' - v_{1t}' &= v_{2t} - v_{1t} \end{aligned}$$

pero aquí $\vec{v}_2$ es normal, luego $v_{2t}' = 0$ y $v_{2n} = v_{2t} = 0$, luego

volver

$$\begin{aligned} v'_{1n} + v'_{2n} &= v_{1n} \\ v'_{1t} &= v_{1t} \\ v'_{2n} - v'_{1n} &= e(v_{1n}) \\ -v'_{1t} &= -v_{1t} \end{aligned}$$

pero $v'_{1n} = v'_1 \cos(30+\phi)$, $v'_{1t} = v'_1 \sin(30+\phi)$, $v_{1n} = V\cos 30$, $v_{1t} = V\cos\phi$ de modo que

$$\begin{aligned} v'_1 \cos(30+\phi) + v'_{2n} &= V\cos 30 \\ v'_{2n} - v'_1 \cos(30+\phi) &= eV\cos 30 \\ v'_1 \sin(30+\phi) &= V\cos\phi \end{aligned}$$

restando las dos primeras

$$\begin{aligned} 2v'_1 \cos(30+\phi) &= (1-e)V\cos 30 \\ v'_1 \sin(30+\phi) &= V\cos\phi \end{aligned}$$

y dividiendo

$$\cot(30+\phi) = \frac{(1-e)}{2}\frac{\cos 30}{\cos\phi}$$

ecuación que determina ϕ.

Problema 6.07

El resultado anterior aplica con $e = 1$ obteniendo

$$\begin{aligned} \cot(30+\phi) &= 0, \\ \phi &= 60^o. \end{aligned}$$

Problema 6.08

Del problema 6.05 tenemos

$$\begin{aligned} v'_{1n} + v'_{2n} &= v_{1n} \\ v'_{1t} &= v_{1t} \\ v'_{2n} - v'_{1n} &= e(v_{1n}) \end{aligned}$$

pero si $e = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} v'_{1n} + v'_{2n} &= v_{1n} \\ v'_{2n} - v'_{1n} &= v_{1n} \end{aligned}$$

volver

de donde

$$v'_{1n} = 0$$

es decir $\vec{v}'_1$ es tangente, y por lo tanto está a 90^o de $\vec{v}'_2$ que es normal.

Estática.

Problema 7.01

Para calcular la distancia del centro de masas al centro, usando coordenadas polares tenemos que

$$\begin{aligned}
y_{CM} &= \frac{1}{M}\int_0^R\int_0^\pi (r\sin\theta)\sigma dA \\
&= \frac{1}{M}\sigma\int_0^R\int_0^\pi (r\sin\theta) r dr d\theta \\
&= \frac{1}{M}\frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}\frac{R^3}{3}2 = \frac{4}{3\pi}R
\end{aligned}$$

Problema 7.02

Analogamente

$$\begin{aligned}
y_{CM} &= \frac{1}{M}\int_0^R\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (r\sin\theta)\rho r^2\cos\theta d\theta dr d\phi \\
&= \frac{1}{M}\frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3}\frac{R^4}{4}2\pi\frac{1}{2} = \frac{3}{8}R
\end{aligned}$$

Problema 7.03

Coloquemos la base en el plano xy la altura en el eje z. Entonces

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^h z\rho\pi r^2 dz$$

siendo

$$\begin{aligned}
r &= \frac{R}{h}(h-z) \\
\rho &= \frac{M}{V} \\
V &= \int_0^h \pi r^2 dz \\
&= \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h (h-z)^2 dz \\
&= \frac{1}{3}\pi R^2 h
\end{aligned}$$

entonces

$$z_{CM} = \frac{1}{\frac{1}{3}\pi R^2 h}\int_0^h z\pi \frac{R^2}{h^2}(h-z)^2 dz = \frac{1}{4}h$$

Problema 7.04

Supondremos que la reacción normal del suelo se corre una distancia x con respecto al centro C de la base, Así tendremos

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F - f = 0 \\ \sum F_y &= N - Mg = 0 \\ \sum \Gamma_C &= Fh - Nx = 0 \end{aligned}$$

de aquí, la fuerza de roce es

$$f = F$$

su valor máximo es

$$f_{\max} = \mu_s Mg$$

y x es

$$\begin{aligned} x &= \frac{F}{Mg}h \\ x\frac{Mg}{h} &= F \end{aligned}$$

y su valor máximo es

$$x_{\max} = a$$

O sea que al crecer F se romperá el equilibrio dependdiendo de cual es menor $a\frac{Mg}{h}$ ó $\mu_s Mg$. Si $a\frac{Mg}{h} < \mu_s Mg$ o sea si

$$\frac{a}{h} < \mu_s$$

entonces el cuerpo volcará, y caso contrario deslizará.

Problema 7.05

Con respecto a la figura tenemos que

$$\begin{aligned} \sum F_x &= N - R\sin\theta = 0 \\ \sum F_y &= R\cos\theta - Mg = 0 \\ \sum \tau_A &= \frac{d}{\cos\theta}R - \frac{L}{2}(\cos\theta)Mg = 0 \end{aligned}$$

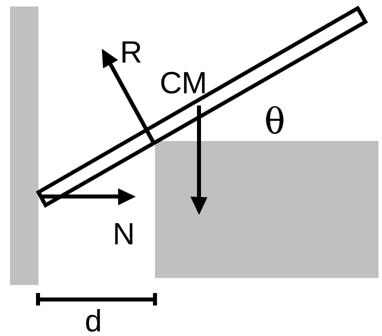


Figura 19:

eliminando R

$$\frac{d}{\cos\theta}\frac{Mg}{\cos\theta} - \frac{L}{2}(\cos\theta)Mg = 0$$

y finalmente

$$\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{2d}{L}}$$

Problema 7.06

Sean R_0 y R_A las reacciones en la articulación y en el soporte respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum F_y &= R_0 + R_A - 10 - 10 - 20 = 0 \\
\sum \tau_0 &= 4R_A - 10\times 2 - 10\times 6 - 20\times 3 = 0 \\
R_A &= 35\,\mathrm{N} \\
R_0 &= 5\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Problema 7.07

Con el cálculo de la reacción en A el sistema es

y al hacer un corte en x, la fuerza cortante $V(x)$ y el momento flector los definiremos positivos cuando sean como en la figura, dependiendo si se trata de la seción izquierda o derecha:

Hay tres regiones y hay que considerar que el peso, para estos efectos es una fuerza distribuida con $\omega(x) = \frac{20}{6}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$

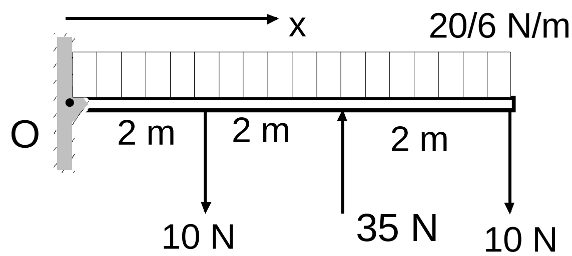


Figura 20:

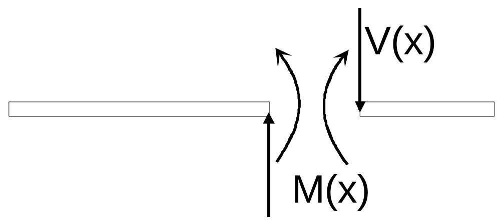


Figura 21:

a) $4 < x < 6$

$$\begin{aligned} V(x) &= -10 - \frac{20}{6}(6-x) \\ &= -30 + \frac{10}{3}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x) &= -\frac{20}{6}\frac{(6-x)^2}{2} - 10(6-x) \\ &= -120 + 30x - \frac{5}{3}x^2 \end{aligned}$$

b) $2 < x < 4$

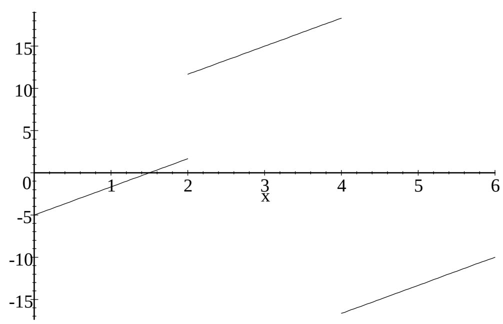
$$\begin{aligned} V(x) &= 25 - \frac{20}{6}(6-x) \\ &= 5 + \frac{10}{3}x \\ M(x) &= 35(4-x) - 10(6-x) - \frac{20}{6}\frac{(6-x)^2}{2} \\ &= 20 - 5x - \frac{5}{3}x^2 \end{aligned}$$

c) $0 < x < 2$

$$
\begin{aligned}
V(x) &= 15 - \frac{20}{6}(6-x) \\
&= -5 + \frac{10}{3}x \\
M(x) &= -10(2-x) + 35(4-x) - 10(6-x) - \frac{20}{6}\frac{(6-x)^2}{2} \\
&= 5x - \frac{5}{3}x^2
\end{aligned}
$$

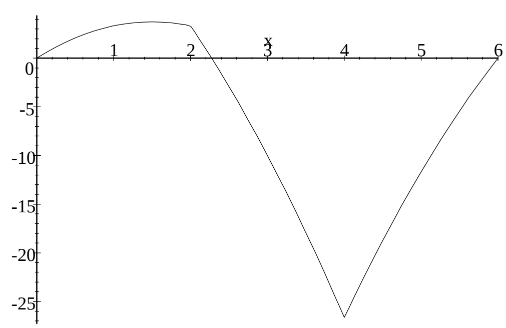
Sus gráficos o diagramas son los siguientes

$$
V(x) = \begin{cases} -30 + \frac{10}{3}x & \text{if} \quad 4 < x < 6 \\ 5 + \frac{10}{3}x & \text{if} \quad 2 < x < 4 \\ -5 + \frac{10}{3}x & \text{if} \quad 0 < x < 2 \end{cases}
$$



$V(x)$

$$
M(x) = \begin{cases} -120 + 30x - \frac{5}{3}x^2 & \text{if} \quad 4 < x < 6 \\ 20 - 5x - \frac{5}{3}x^2 & \text{if} \quad 2 < x < 4 \\ 5x - \frac{5}{3}x^2 & \text{if} \quad 0 < x < 2 \end{cases}
$$



$M(x)$

Problema 7.08

Aquí

$$\omega(x) = 10x$$

y para calcular la reacciòn en A, hacemos balance de torque respecto al punto 0 resultando

$$\begin{aligned}\sum \tau_0 &= 4R_A - \int_0^4 x\omega(x)dx = 0 \\ &= 4R_A - 10\int_0^4 x^2 dx\end{aligned}$$

o sea

$$R_A = \frac{160}{3}$$

a) Para $x > 4$ es evidente que

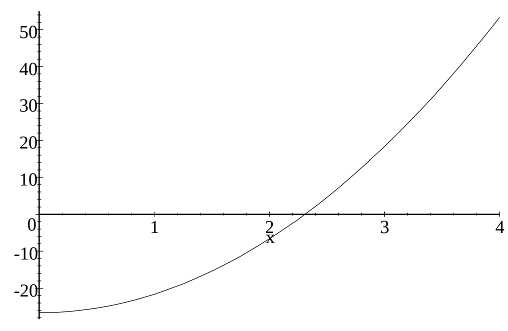
$$\begin{aligned}V(x) &= 0 \\ M(x) &= 0\end{aligned}$$

b) para $x < 4$ resultará

$$\begin{aligned}-V(x) - \int_x^4 10x dx + \frac{160}{3} &= 0 \\ M(x) + \int_x^4 10x'(x'-x)dx' - \frac{160}{3}(4-x) &= 0\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}V(x) &= -\frac{80}{3} + 5x^2 \\ M(x) &= \frac{80}{3}x - \frac{5}{3}x^3\end{aligned}$$



$-\frac{80}{3} + 5x^2$

$V(x)$

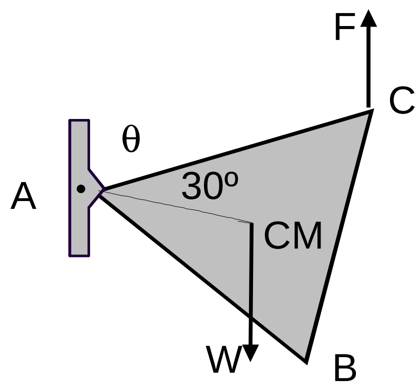
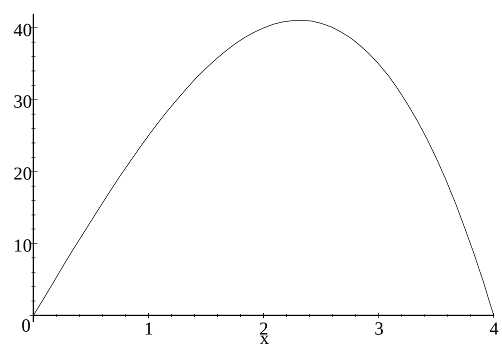


Figura 22:



$\frac{80}{3}x - \frac{5}{3}x^3$

$M(x)$

Problema 7.09

Para la figuraSi la arista es a, la distancia desde A al centro de masas será

$$d = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

de modo que

$$\sum \tau_A = Fa\sin\theta - W\frac{a}{\sqrt{3}}\sin(30+\theta) = 0$$

de donde

$$\tan\theta = \frac{1}{3}\frac{W\sqrt{3}}{2F - W}$$

Problema 7.10

Bueno, al parecer este problema no está muy bien. Es evidente que la barra permanece horizontal.

Soluciones problemas

Temperatura

Symbol: K
La unidad SI de temperatura termodinámica

Un kelvin se define como 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua, donde coexisten agua solida-líquida y gaseosa. El kelvin se usa tambien como la unidad de diferencia de temperatura de las escalas Kelvin y Celsius, donde $1\mathrm{K} = 1°\mathrm{C}$.

$T_K = t_C + 273.15$
$t_C = (t_F - 32)/1.8$
$T_K = (t_F + 459.67)/1.8$

Presión

Símbolo: Pa
La unidad SI de presión

Un pascal sew define como la presión que resulta de la fuerza de un Newton actuando sobre un área de un metro cuadrado.

Símbolo: bar
La unidad SI de presión

Un bar se define igual a $10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}$ (pascal). El milibar (mbar) se usa corrientemente en meteorología-

Símbolo: atm
La unidad SI de presión

Una atmósfera se define igual a 760 milimetros de Mercurio o $101325\ \mathrm{N\,m^{-2}}$. Es aproximadamente igual a $1\ \mathrm{kg\,cm^{-2}}$.

Presión

Para convertir de	a	*Multiplique por*
atmósfera	pascal	101 325
bar	pascal	1.0×10^5
torr	pascal	133.322

Energía

Símbolo: cal
La unidad SI de energía

Una caloría fué definida originalmente como la cantidad de energía requerida para elevar la temperatura de un gramo de agua de 14.5°C a 15.5°C a la presión estándar. Se define ahora como 4.1868 joules.

Energía

Para convertir de	*a*	*Multiplique por*
British thermal unit (BTU)	joule	1055.056
kilocaloría	joule	4186
erg	joule	1.0×10^{-7}
electronvolt	joule	1.60219×10^{-19}

Cantidad de substancia

Símbolo: mol
La unidad SI de cantidad de substancia

Un mol se define como la cantidad de substancia de un sistema que contiene tantas unidades elementales como hay átomos in 0.012 kilogramos de carbono-12, o sea en 12 gramos de carbono 12. Las entidades elementales deben ser especificadas y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras particulas, o grupos especificados de partículas.

Unidad atómica de masa.

Símbolo: μ
La unidad SI de masa

Una unidad atómica de masa es igual a la masa de 1/12 de la masa de un átomo de carbono-12. Es aproximadamente igual a 1.6605 x 10^{-27} kg o aproximadamente 931MeV.

Constantes

Denotaremos por mol al mol gramo.

número de Avogadro	$N_A = 6.022 \times 10^{23} (\mathrm{mol})^{-1}$
constante de los gases	$R = 8.3145\,\mathrm{J} / \mathrm{K}\,\mathrm{mol}$
constante de los gases	$R = 0.0821\,\mathrm{atm}\,\mathrm{mol}^{-1}\,\mathrm{K}^{-1}$
unidad atómica de masa	$1.6605402 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
masa neutrón	$m_N = 1.6749286 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
masa protón	$m_P = 1.6726231 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
constante de Boltzman	$k = 1.3806568 \times 10^{-23}\,\mathrm{J}\,\mathrm{K}^{-1}$

Algunos pesos atómicos

Hidrógeno	$w_H = 1.0079$
Oxígeno	$w_O = 15.9994$
Helio	$w_{He} = 4.002602$
Nitrógeno	$w_N = 14.00674$
Carbono-12	$w_{C12} = 12$

Algunos calores específicos a 25^{o}C y a 1 atm.

Substancia	J/Kg^{o}C	cal/g^{o}C	J/mol^{o}C
Aluminio	900	0.215	24.3
Berilio	1830	0.436	16.5
Cadmio	230	0.055	25.9
Cobre	387	0.0924	24.5
Germanio	322	0.077	23.4
Oro	129	0.0308	25.4
Hierro	448	0.107	25
Plomo	128	0.0305	26.4
Silicio	703	0.168	19.8
Plata	234	0.056	25.4
Vidrio	837	0.2	
Hielo	2090	0.5	
Alcohol	2400	0.58	
Agua	4186	1	

Calores de fusión y vaporización

Substancia	$t_F{}^oC$	$L_f(J/kg)$	$t_e{}^oC$	$L_e(J/Kg)$
Helio	-269.65	5.23×10^3	-268.93	2.09×10^4
Nitrógeno	-209.97	2.55×10^4	-195.81	2.01×10^5
Oxígeno	.218.79	1.38×10^4	-182.97	2.13×10^5
Alcohol et.	-114	1.04×10^5	79	8.54×10^5
Agua	0	3.33×10^5	100	2.26×10^6
Azufre	119	3.81×10^4	444.6	3.26×10^5
Plomo	327.3	2.45×10^4	1750	8.70×10^5
Aluminio	660	3.97×10^5	2450	1.14×10^7
Plata	960.8	8.82×10^4	2193	2.33×10^6
Oro	1063	6.44×10^4	2660	1.58×10^6
Cobre	1083	1.34×10^5	1187	5.06×10^6

volver

Soluciones

Gases ideales

Problema 8.01

$p = 100\,\mathrm{Pa} = 9.869\,2 \times 10^{-4}\,\mathrm{atm}$
$V = 100 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 = 0.1\,\mathrm{l}$,
$t = 20\,°\mathrm{C}$
$T = 293.15\,\mathrm{K}$
$R = 0.082\,\mathrm{l\,atm\,mol^{-1}\,K^{-1}} = 8.31\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
se puede hacer el cálculo en los dos sistemas de unidades usando

$$n = \frac{pV}{RT}$$

$$n = \frac{9.869\,2 \times 10^{-4} \times 0.1}{0.082 \times 293.15} = 4.11 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol}$$

$$n = \frac{100 \times 100 \times 10^{-6}}{8.31 \times 293.15} = 4.11 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol}$$

Problema 8.02

$p_1 = 2.5\,\mathrm{atm}$
$t_1 = 10\,°\mathrm{C}$
$T_1 = 283.15\,\mathrm{K}$
$t_2 = 80\,°\mathrm{C}$
$T_2 = 353.15\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned} n &= \frac{p_1 V}{RT_1} = \frac{p_2 V}{RT_2} \\ P_2 &= \frac{p_1 T_2}{T_1} = \frac{2.5 \times 353.15}{283.15} = 3.118\,\mathrm{atm} \end{aligned}$$

Problema 8.03

$p_1 = 30 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$
$V_1 = 4\,\mathrm{m}^3$
$t_1 = 127\,°\mathrm{C}$
$T_1 = 400.15\,\mathrm{K}$
$p_2 = 90 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$
$V_2 = 2.5\,\mathrm{m}^3$
De

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_2 V_2}{RT_2}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= p_2 V_2 \frac{T_1}{p_1 V_1} \\ &= \frac{90 \times 10^3 \times 2.5 \times 400.15}{30 \times 10^3 \times 4} \\ &= 750.28\,\mathrm{K} = 477.13\,^\circ\mathrm{C} \end{aligned}$$

Problema 8.04

$p = 9\,\mathrm{atm}$
$V = 8\,\mathrm{l}$
$t = 20\,^\circ\mathrm{C}$
$T = 293.15\,\mathrm{K}$

a)

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{9 \times 8}{0.082 \times 293.15} = 3.0\,\mathrm{mol}$$

b) $N_A = 6.0221367 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

$$3 \times 6.0221367 \times 10^{23} = 1.81 \times 10^{24}\ \text{moléculas}$$

Problema 8.05

$p_1 = 10\,\mathrm{atm}$
$V_1 = V_2 = V$
$t_1 = 15\,^\circ\mathrm{C}$
$T_1 = 288.15\ \mathrm{K}$
n_1
$t_2 = 65\,^\circ\mathrm{C}$
$T_2 = 338.15\,\mathrm{K}$
$n_2 = \frac{n_1}{2}$

$$\begin{aligned} p_1 V &= n_1 R T_1 \\ p_2 V &= \frac{n_1}{2} R T_2 \\ p_2 &= p_1 \frac{T_2}{2T_1} \\ &= 10 \frac{338.15}{2 \times 288.15} \\ &= 5.87\,\mathrm{atm} \end{aligned}$$

Problema 8.06

$t_1 = 27\,^\circ\mathrm{C}$
$T_1 = 300.15\,\mathrm{K}$
$t_2 = 127\,^\circ\mathrm{C}$
$T_2 = 400.15\,\mathrm{K}$
$p_1 = p_2 = p$
V_1
$V_2 = f \times V_1$

$$\begin{aligned} n &= \frac{pV_1}{RT_1} = \frac{pf \times V_1}{RT_2} \\ f &= \frac{T_2}{T_1} = \frac{400.15}{300.15} = 1.33 \end{aligned}$$

Problema 8.07

$p_1 = 136\,\mathrm{atm}$
$V_1 = 12\,\mathrm{l}$
$T_1 = T_2 = T$
$p_2 = 1\,\mathrm{atm}$
$V_2 = 1\,\mathrm{l}$

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{p_1 V_1}{RT} \\ n_2 &= \frac{p_2 V_2}{RT} \end{aligned}$$

como n_2 es la cantidad de gas que hay en cada globo, el número de ellos será

$$N = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{136 \times 12}{1 \times 1} = 1632$$

Problema 8.08

Análogamente
$p_1 = 150\,\mathrm{atm}$
$V_1 = 0.1\,\mathrm{m}^3$
$T_1 = T_2 = T$
$p_2 = 1.2\,\mathrm{atm}$
$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(15 \times 10^{-2})^3 = 1.4137 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$

$$N = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{150 \times 0.1}{1.2 \times 1.4137 \times 10^{-2}} = 884$$

volver

Problema 8.09

$p_1 = 6\,\text{atm}$
$t_1 = 27\,°\text{C}$
$T_1 = 300.15\,\text{K}$

a) $pV = nRT$ si la presión se triplica, la temperatura se triplica

$$T_2 = 3 \times 300.15\,\text{K} = 627.3\,°\text{C}$$

b) Si la presión y el volumen se duplican, la temperatura aumenta en un factor 4

$$T_2 = 4 \times 300.15\,\text{K} = 927.45\,°\text{C}$$

Problema 8.10

$p_1 = 1\,\text{atm}$
$V_1 = V\,\text{l}$
$t_1 = 10\,°\text{C}$
$T_1 = 283.15\,\text{K}$
$V_2 = 0.28V$
$t_2 = 40\,°\text{C}$
$T_2 = 313.15\,\text{K}$
De $pV = nRT$ como la masa no varía

$$\frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_2 V_2}{RT_2}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = \frac{313.15}{0.28 \times 283.15} = 3.95\,\text{atm} \\ &= 4.0 \times 10^5\,\text{Pa} \end{aligned}$$

Nota la presión manométrica p_2', es la presión relativa a la atmosférica, es decir
$p_2' = 2.95\,\text{atm} = 2.95 \times 14.7 = 43.365\,\text{lb}\,\text{in}^{-2}$
la segunda parte
$t_2 = 85\,°\text{C}$
$T_2 = 358.15\,\text{K}$
$V_2 = 1.002 \times 0.28V$

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = \frac{358.5}{1.002 \times 0.28 \times 283.15} = 4.51\,\text{atm} \\ &= 4.5698 \times 10^5\,\text{Pa} \end{aligned}$$

y la manométrica será
$p_2' = 3.51\,\text{atm} = 3.51 \times 14.7 = 51.6\,\text{lb}\,\text{in}^{-2}$

Problema 8.11

$p_1 = 1.1\,\text{atm}$
$V_1 = 2\,\text{m}^3 = 2000\,\text{l}$
$t_1 = 10\,°\text{C}$
$T_1 = 283.15\,\text{K}$
$n_1 =?$
$t_2 = 150\,°\text{C}$
$T_2 = 423.15\,\text{K}$
$V_2 = 2.3\,\text{m}^3 = 2300\,\text{l}$
$n_2 = 0.95 n_1$
$p_2 =?$

a)

$$n_1 = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = \frac{1.1 \times 2000}{0.082 \times 283.15} = 94.8\,\text{mol}$$

b)

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{n_2 R T_2}{V_2} = \frac{0.95 \times 94.8 \times 0.082 \times 423.15}{2300} \\ &= 1.3587\,\text{atm} \end{aligned}$$

problema 8.12

$p = 10^{-11}\text{mm de Hg} = 10^{-11} \times \frac{1}{760} = 1.32 \times 10^{-14}\,\text{atm}$
$t = 27\,°\text{C}$
$T = 300.15\,\text{K}$
$V = 1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{l}$
$n =?$

$$\begin{aligned} n &= \frac{pV}{RT} = \frac{1.32 \times 10^{-14} \times 1000}{0.082 \times 300.15} \\ &= 5.3632 \times 10^{-13}\,\text{mol} \end{aligned}$$

y el número de moléculas será

$$\begin{aligned} N &= 5.3632 \times 10^{-13} \times 6.0221367 \times 10^{23} \\ &= 3.2298 \times 10^{11} \end{aligned}$$

posiblemente mucho más grande de lo que usted se imaginaba.

problema 8.13

$p_1' = 550 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$

$p_{at} = 101 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$

$p_1 = 550 \times 10^3 + 101 \times 10^3 = 651 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$

$t_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$

$T_1 = 293.15\,\mathrm{K}$

$t_2 = 40\,^\circ\mathrm{C}$

$T_2 = 313.15\,\mathrm{K}$

$V_1 = V_2 = V$

$$\begin{aligned} \frac{p_1 V}{T_1} &= \frac{p_2 V}{T_2} \\ p_2 &= p_1 \frac{T_2}{T_1} = 651 \times 10^3 \frac{313.15}{293.15} \\ &= 6.9541 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

la presión manométrica será

$$\begin{aligned} p_2' &= 6.9541 \times 10^5 - 101 \times 10^3 \\ &= 594.41 \times 10^3\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

Problema 8.14

$$\begin{aligned} V &= \frac{nRT}{p} = \frac{1 \times 0.082 \times 273}{1} \\ &= 22.4\,\mathrm{l} \end{aligned}$$

Problema 8.15

Sea h esa altura.

$p_1 = 1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$

$V_1 = \pi r^2 H$

$r = 1.5\,\mathrm{m}$

$H = 4\,\mathrm{m}$

$t_1 = 25\,^\circ\mathrm{C}$

$T_1 = 298.15\,\mathrm{K}$

$t_2 = 5\,^\circ\mathrm{C}$

$T_2 = 278.15\,\mathrm{K}$

$V_2 = \pi r^2 (H - h)$

profundidad campana $h' = 220\,\mathrm{m}$

el nivel del agua en la campana está a profundidad $h' - h$

$p_2 = p_1 + \rho g (h' - h)$

$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
$\rho = 1025\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
donde tenemos $\frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_2 V_2}{RT_2}$
o sea

$$\frac{p_1 H}{T_1} = \frac{(p_1 + \rho g(h' - h))(H - h)}{T_2}$$

$$\frac{101\,325 \times 4}{298.\,15} = \frac{(101\,325 + 1025 \times 9.8 \times (220 - h))(4 - h)}{278.15}$$

ecuación que tiene por solución

$$h = 3.\,834\,\mathrm{m}$$

(casi llena)

Problema 8.16

Similarmente
$p_1 = 1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$
$V_1 = \pi r^2 H$
$H = 2.5\,\mathrm{m}$
$t_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$
$T_1 = 293.\,15\,\mathrm{K}$
$t_2 = 4\,^\circ\mathrm{C}$
$T_2 = 277.15\,\mathrm{K}$
$V_2 = \pi r^2 (H - h)$
profundidad campana $h' = 82.3\,\mathrm{m}$. El nivel del agua en la campana está a profundidad
$h' - h$
$p_2 = p_1 + \rho g(h' - h)$
$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
$\rho = 1025\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

$$\frac{101\,325 \times 2.5}{293.\,15} = \frac{(101\,325 + 1025 \times 9.8 \times (82.3 - h))(2.5 - h)}{277.15}$$

ecuación que tiene por solución (a)

$$h = 2.\,24\,\mathrm{m}\,.$$

Para averiguar a que presión p_3 sale el agua que entró, averiguemos la presión actual

$$
\begin{aligned}
p_2 &= p_1 + \rho g(h' - h) \\
&= 101\,325 + 1025 \times 9.8 \times (82.3 - 2.24) \\
&= 9.\,06 \times 10^5\,\mathrm{Pa}
\end{aligned}
$$

entonces la presión debe ser aumentada a p_3(aumentando la masa de aire) de modo que

$$
\begin{aligned}
p_3 &= p_1 + \rho g(h') \\
&= 101\,325 + 1025 \times 9.8 \times (82.3) \\
&= 9.\,28 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \;\; \text{(b)}
\end{aligned}
$$

Problema 8.17

si b inddica la presión atmosférica

$h = 4.2\,\mathrm{m}$
$p_1 = b + \rho g h$
$t_1 = 5\,^\circ\mathrm{C}$
$T_1 = 278.\,15\,\mathrm{K}$
$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$
$p_2 = b$
$t_2 = 12\,^\circ\mathrm{C}$
$T_2 = 285.\,15\,\mathrm{K}$
$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$

$$
\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{(b + \rho g h) d_1^3}{T_1} &= \frac{b d_2^3}{T_2} \\
\frac{(b + \rho g h) d_1^3}{T_1} &= \frac{b d_2^3}{T_2}
\end{aligned}
$$

supondremos que

$b = 1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$
$\rho = 1025\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
entonces

$$
\frac{(101\,325 + 1025 \times 9.8 \times 4.2) d_1^3}{278.\,15} = \frac{101\,325 d_2^3}{285.\,15}
$$

o bien

$$\frac{d_2}{d_1} = 1.13$$

Equilibrio térmico.

Problema 9.01

Tomemos como calor específico del aluminio $c = 0.215\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$ entonces

$$\begin{aligned} Q &= mc\Delta t = 3000 \times 0.215 \times (50 - 20) \\ &= 1.935 \times 10^4\,\mathrm{cal} \end{aligned}$$

Problema 9.02

$$\begin{aligned} c &= \frac{Q}{m\Delta t} = \frac{2000}{600 \times (40 - 15)} \\ &= 0.133\,33\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}} \end{aligned}$$

Problema 9.03

De la tabla tomemos como calor específico del cadmio $c = 0.055\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$ entonces

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{Q}{mc} = \frac{400}{50 \times 0.055} \\ &= 145.45\,{}^\circ\mathrm{C} \end{aligned}$$

por lo tanto la temperatura final será

$$t_F = 20 + 145.45 = 165.45\,{}^\circ\mathrm{C}$$

Problema 9.04

Supondremos que para ambos líquidos $c_1 = c_2 = c$ entonces
la temperaturafinal será

$$t_F = 20 + 145.45 = 165.45\,{}^\circ\mathrm{C}$$

Problema 9.04

Supondremos que para ambos líquidos $c_1 = c_2 = c$ entonces

$$\begin{aligned} Q_{absorbido} &= 10c(t_F - 10), \\ Q_{cedido} &= 160c(90 - t_F) \end{aligned}$$

siendo entonces $10(t_F - 10) = 160(90 - t_F)$, de donde

$$t_F = 85.294\,^\circ\mathrm{C}$$

Problema 9.05

Sea de la tabla

$c_{Cu} = 0.0924\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
entonces si n denota el número de balines de Cobre se tiene que

$$\begin{aligned} Q_{absorbido} &= 500 \times 1 \times (25 - 20), \\ Q_{cedido} &= n \times 1 \times 0.0924 \times (100 - 25) \end{aligned}$$

entonces aproximadamente

$$n = \frac{500 \times 1 \times (25 - 20)}{0.0924 \times (100 - 25)} = 361$$

Problema 9.06

Sea de la tabla

$c_{Fe} = 0.107\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
entonces

$$\begin{aligned} Q_{absorbido} &= 20000 \times 1 \times (t_F - 25), \\ Q_{cedido} &= 1500 \times 0.107 \times (600 - t_F) \end{aligned}$$

entonces $20000 \times 1 \times (t_F - 25) = 1500 \times 0.107 \times (600 - t_F)$, de donde

$$t_F = 29.6\,^\circ\mathrm{C}$$

Problema 9.07

Sea de la tabla
$c_{Al} = 0.215\,\text{cal}\,\text{g}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$
$c_{H_2O} = 1\,\text{cal}\,\text{g}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$
Aquí

$$\begin{aligned} Q_{absorbido} &= 200 \times 1 \times (t_F - 10) + 300 \times 0.215 \times (t_F - 10) \\ Q_{cedido} &= 100 \times 1 \times (100 - t_F) \end{aligned}$$

entonces
$200 \times 1 \times (t_F - 10) + 300 \times 0.215 \times (t_F - 10) = 100 \times 1 \times (100 - t_F)$,
de donde

$$t_F = 34.7\,{}^\circ\text{C}$$

Problema 9.08

$c_{Al} = 0.215\,\text{cal}\,\text{g}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$
$c_{H_2O} = 1\,\text{cal}\,\text{g}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$
$c_{Cu} = 0.0924\,\text{cal}\,\text{g}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$

$$\begin{aligned} Q_{absorbido} &= 300 \times 1 \times (30 - 15) + 500 \times 0.215 \times (30 - 15) \\ Q_{cedido} &= 300 \times 0.0924 \times (t_i - 30) \end{aligned}$$

entonces
$300 \times 1 \times (30 - 15) + 500 \times 0.215 \times (30 - 15) = 300 \times 0.0924 \times (t_i - 30)$,
de donde la temperatura inicial del Cobre resulta ser $t_i = 250.51\,{}^\circ\text{C}$.

Para saber las calorías necesarias para fundir 20 gramos de aluminio a $20\,{}^\circ\text{C}$, de las tablas obtenemos para el calor de fusión:
$L_f(Al) = 3.97 \times 10^5\,\text{J}\,\text{kg}^{-1}$ a $t = 660\,{}^\circ\text{C}$, de modo que el calor necesario será

$$Q = mc\Delta t + mL_f$$

Para tener unidades consistentes tenemos que
$1\,\text{J} = 0.24\,\text{cal}$ de modo que
$L_f(Al) = 3.97 \times 10^2 \times 0.24 = 95.28\,\text{cal}\,\text{g}^{-1}$
entonces

$$\begin{aligned} Q &= 20 \times 0.215(660 - 20) + 20 \times 95.28 \\ &= 4657.6\,\text{cal} \end{aligned}$$

Problema 9.09

$c_{Al} = 0.215\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$c_{Cu} = 0.0924\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

sea c el calor específico del material desconocido

$$\begin{aligned} Q_{absorbido} &= 100 \times 0.215 \times (20-10) + 250 \times 1 \times (20-10) \\ Q_{cedido} &= 50 \times 0.0924 \times (80-20) + 70 \times c \times (100-20) \end{aligned}$$

entonces

$100 \times 0.215 \times (20-10) + 250 \times 1 \times (20-10) = 50 \times 0.0924 \times (80-20) + 70 \times c \times (100-20)$,

de donde

a) $c = .435\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

b) Podría ser Berilio cuyo calor específico es $c = 0.436\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$.

Problema 9.10

$c_{alcohol} = 0.58\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$c_{Hg} = 0.033\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$$\begin{aligned} Q_{absorbido} &= 200 \times 0.033 \times t_F \\ Q_{cedido} &= 50 \times 0.58 \times (50 - t_F) + 100 \times 1 \times (100 - t_F) \end{aligned}$$

entonces de igualar sale

a) $200 \times 0.033 \times t_F = 50 \times 0.58 \times (50 - t_F) + 100 \times 1 \times (100 - t_F)$,

$$t_F = 84.4395\,{}^\circ\mathrm{C}$$

b) De lo anterior se desprende que en realidad el Mercurio absorbió: $200 \times 0.033 \times 84.4395 = 557.301\,\mathrm{cal}$ el alcohol absorbió: $50 \times 0.58 \times (84.4395 - 50) = 998.746\,\mathrm{cal}$ el agua cedió: $100 \times 1 \times (100 - 84.4395) = 1556.05\,\mathrm{cal}$

Problema 9.11

Note que $T = 77\,\mathrm{K}$ entonces $t = 77 - 273.15 = -196.15\,{}^\circ\mathrm{C}$

El calor cedido por el cobre será

$Q_{cedido} = 1000 \times 0.0924 \times (20 - (-196.15)) = 1.99723 \times 10^4\,\mathrm{cal}$

Entonces la masa de nitrógeno que se puede evaporar es

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{Q_{cedido}}{C_e} = \frac{1.997\,23 \times 10^4}{48} \\
&= 416.1\,\mathrm{g}
\end{aligned}
$$

por lo tanto el volumen será

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{m}{\rho} = \frac{416.1}{0.8} \\
&= 520.1 \times 10^{-3}\,\mathrm{l}
\end{aligned}
$$

Problema 9.12

El calor de evaporación del agua es

$$L_v = 2.26 \times 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 542.4\,\mathrm{cal\,g^{-1}}\,.$$

El calor de fusión del hielo es

$$L_f = 3.33 \times 10^5\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 80\,\mathrm{cal\,g^{-1}}\,.$$

El calor necesario será el que se requiere para llevar toda la masa a $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ y luego evaporar $5\,\mathrm{g}$ es decir

$$
\begin{aligned}
Q &= 20 \times 80 + 20 \times 1 \times (100 - 0) + 5 \times 542.4 \\
&= 6312.0\,\mathrm{cal} \\
&= 2.63 \times 10^4\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

Problema 9.13

Datos

$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,^{\circ}C^{-1}}$

$c_{Hielo} = 0.50\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,^{\circ}C^{-1}}$

$L_f = 3.33 \times 10^5\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 80\,\mathrm{cal\,g^{-1}}\,.$

$\rho_{H_2O} = 1\,\mathrm{gcm^{-3}}$

$V = 1000\ \mathrm{cm^3}$

$m_{H_2O} = 1000\,\mathrm{g}$

sea m la masa de hielo. El calor absorbido por el Hielo al fundirse y subir su temperatura hasta $10\,^{\circ}\mathrm{C}$ será

$$Q_{absorbido} = m \times 80 + m \times 0.5 \times (10 - 0)$$

volver

el calor cedido por el agua será

$$Q_{cedido} = 1000 \times 1 \times (30 - 10)$$

entonces

$$m \times 80 + m \times 0.5 \times (10 - 0) = 1000 \times 1 \times (30 - 10)$$

de donde

$$m = 235.3\,\mathrm{g}$$

Problema 9.14

$c_{Cu} = 0.0924\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
$L_v = 2.26 \times 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 542.4\,\mathrm{cal\,g^{-1}}$.

$$Q_{abs} = 50 \times 0.0924 \times (50 - 20) + 250 \times 1 \times (50 - 20)$$

$$Q_{cedido} = m \times 542.4 + m \times 1 \times (100 - 50)$$

De donde

$$m = 12.9\,\mathrm{g}$$

Problema 9.15

$c_{Fe} = 0.107\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
$c_{Pb} = 0.0305\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
$L_f = 2.45 \times 10^4\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 5.88\,\mathrm{cal\,g^{-1}}$.

$$\begin{aligned} Q_{ced} &= 90 \times 5.88 + 90 \times 0.0305 \times (327.3 - t) \\ Q_{abs} &= 300 \times 0.107 \times (t - 20) \end{aligned}$$

de aquí

$$t = 59.3956\,{}^\circ\mathrm{C}$$

Problema 9.16

$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$L_f = 3.33 \times 10^5\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 80\,\mathrm{cal\,g^{-1}}$.

Sea m la masa que se derrite (funde). Entonces la temperatura final debe ser

a)

$$t = 0\,{}^\circ\mathrm{C}$$

y

$$\begin{aligned} Q_{abs} &= m \times 80 \\ Q_{ced} &= 600 \times 1 \times (18 - 0) \end{aligned}$$

de donde $600 \times 1 \times (18 - 0)/80 = 135.0$

$$m = 135$$

y quedan $250 - 135 = 115.0\,\mathrm{g}$ de Hielo.

b)

$$115.0\,\mathrm{g}$$

Problema 9.17

$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$c_{Hielo} = 0.5\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$c_{Cu} = 0.0924\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$L_f = 3.33 \times 10^5\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 80\,\mathrm{cal\,g^{-1}}$.

$m_{Hielo} = 40.000\,\mathrm{g}$

$m_{Cu} = 80\,\mathrm{g}$

$m_{H_2O} = 560\,\mathrm{g}$

Supondremos que se funde una masa m de hielo, de modo que la temperatura final debería ser $0\,{}^\circ\mathrm{C}$. (Después de calcular se debe analizar si la suposición es consistente) Entonces

$$\begin{aligned} Q_{abs} &= 40000 \times 0.5 \times 78 + m \times 80 \\ &= 1.56 \times 10^6 + m \times 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{ced} &= 560 \times 1 \times (25 - 0) + 80 \times 0.0924 \times (25 - 5) \\ &= 1\,414\,7.8 \end{aligned}$$

de donde

$$m = \frac{1\,414\,7.8 - 1560}{80} = 157.35\,\mathrm{g}$$

quedan sin fundirse $40000 - 157.35 = 3.984\,27 \times 10^4\,\mathrm{g}$.

Nota 1 *Este problema es del Serway pero hay algo extraño con los datos pues no se comprende como se puede colocar un bloque de Hielo de 40*kg *en un calorímetro de apenas 80*g *de Cobre.*

Problema 9.18

$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$L_f = 3.33 \times 10^5\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 80\,\mathrm{cal\,g^{-1}}$.

$L_v = 2.26 \times 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 542.4\,\mathrm{cal\,g^{-1}}$.

$m_{Hielo} = 20\,\mathrm{g}$

$m_{Vapor} = 10\,\mathrm{g}$

Si se condensa todo el vapor cede 5424 cal. Si se funde todo el Hielo absorbe $80 \times 20 = 1600\,\mathrm{cal}$ quedando agua que para ser llevada a $100\,{}^\circ\mathrm{C}$ absorbería a lo más $20 \times 100 = 2000\,\mathrm{cal}$. De aquí se concluye que no puede condensarse todo el vapor, pero sí fundirse todo el Hielo. De modo que la temperatura final, en presencia de vapor debe ser $t_F = 100\,{}^\circ\mathrm{C}$. Supongamos entonces que condensa m de vapor

$$
\begin{aligned}
Q_{cedido} &= 542.4 \times m\,\mathrm{cal}, \\
Q_{abs} &= 20 \times 80 + 20 \times 1 \times 100 \\
&= 3600\,\mathrm{cal}
\end{aligned}
$$

entonces $m = \frac{3600}{542.4} = 6.6\,\mathrm{g}$, luego el estado final consiste en una mezcla a $100\,{}^\circ\mathrm{C}$ de 4.4 g de vapor y 26.6 g de agua líquida.

Problema 9.19

$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$c_{Al} = 0.215\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$c_{Hielo} = 0.5\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$

$L_f = 3.33 \times 10^5\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 80\,\mathrm{cal\,g^{-1}}$.

$m_{Al} = 100\,\mathrm{g}$

$m_{H_2O} = 180\,\mathrm{g}$

a) Supongamos no se funde todo el Hielo sino que una masa m y la temperatura final es $t_F = 100\,{}^\circ\mathrm{C}$

$m_{Hielo} = 100\,\mathrm{g}$

$$
\begin{aligned}
Q_{cedido} &= 100 \times 0.215 \times (30 - 0) + 180 \times 1 \times (30 - 0) \\
&= 6045 \\
Q_{abs} &= m \times 80
\end{aligned}
$$

De donde

$$m = \frac{6045}{80} = 75.6\,\mathrm{g}$$

quedando

$$100 - 75.6 = 24.4\,\mathrm{g}\ \text{ de Hielo.}$$

b) Si inicialmente hay $m_{Hielo} = 50\,\mathrm{g}$ entonces la temperatura final la llamaremos t_F

$$\begin{aligned} Q_{cedido} &= 100 \times 0.215 \times (30 - t_F) + 180 \times 1 \times (30 - t_F) \\ Q_{abs} &= 50 \times 80 + 50 \times 1 \times (t_F - 0) \end{aligned}$$

de donde resolvemos
$100 \times 0.215 \times (30 - t_F) + 180 \times 1 \times (30 - t_F) = 50 \times 80 + 50 \times 1 \times (t_F - 0)$,

$$t_F = 8.13\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Problema 9.20

$c_{Cu} = 0.0924\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,^{\circ}C^{-1}}$
$m_{Cu} = 3\,\mathrm{g}$

a) La energía potencial será

$$\begin{aligned} U &= mgh = 0.003 \times 9.8 \times 50 \\ &= 1.47\,\mathrm{J} \\ &= 0.35\,\mathrm{cal} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} t_F &= t_i + \frac{Q}{mc_{Cu}} = \\ &= 25 + \frac{0.6 \times .35}{3 \times 0.0924} \\ &= 25.76\,^{\circ}\mathrm{C} \end{aligned}$$

b) No depende de m pués Q es proporcional m y el aumento de temperatura es inversamente proporcional a m.

volver

Problema 9.21

a) La energía cinética es

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2(16)^2 \\ &= 256\,\mathrm{J} \\ &= 256 \times 0.24\,\mathrm{cal} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} t_F - t_i &= \frac{0.75 \times 256}{2000 \times c_{Al}} \\ &= \frac{0.75 \times 256 \times 0.24}{2000 \times 0.215} \\ &= 0.1\,^\circ\mathrm{C} \end{aligned}$$

b) Habrá sido absorbida por el suelo.

Problema 9.22

$c_{Pb} = 0.0305\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,^\circ C^{-1}}$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0.003(400)^2 \\ &= 240\,\mathrm{J} \\ &= 240 \times 0.24\,\mathrm{cal} \\ &= 57.6\,\mathrm{cal} \end{aligned}$$

Esta energía se supone que es transformada en calor, por lo tanto la temperatura subiría

$$t_F - t_i = \frac{57.6}{3 \times 0.0305} = 629.5\,^\circ\mathrm{C}$$

No es razonable suponer que no hay energía absorbida por el árbol.

Trabajo de expansión.

El trabajo de expansión realizado por un gas está dado por

$$W_{i\to f} = \int_i^f p dV = \text{ área bajo la curva}$$

siendo

$$pV = nRT,$$

y

$$\begin{aligned} R &= 8.314510\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}} \\ &= 0.082\,\mathrm{l\,atm\,mol^{-1}\,K^{-1}} \end{aligned}$$

$$1\,\mathrm{l\,atm} = 101.33\,\mathrm{J},$$

Problema 10.01

$p_i = 1.5\,\mathrm{atm}$
$V_i = 4\,\mathrm{m}^3 = 4 \times 1000\,\mathrm{l}$

a) $p = const.$, $V_f = 8\,\mathrm{m}^3$

$$\begin{aligned} W_{i\to f} &= \int_i^f p dV = \\ &= p_i \int_i^f dV \\ &= p_i(V_f - V_i) \\ &= 1.5 \times (8-4) \times 1000\,\mathrm{l\,atm} \\ &= \mathrm{l\,atm} \\ &= 6.0798 \times 10^5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

b) $p = const.$, $V_f = 1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$

$$\begin{aligned} W_{i\to f} &= \int_i^f p dV = \\ &= p_i \int_i^f dV \\ &= p_i(V_f - V_i) \\ &= 1.5 \times (-3) \times 1000\,\mathrm{l\,atm} \\ &= -4500\,\mathrm{l\,atm} \\ &= -4.56 \times 10^5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 10.02

$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{0.8\times 9.8}{5\times 10^{-4}} = 1.568 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$. A presión constante

$$\begin{aligned} W &= p_i(V_f - V_i) \\ &= nR(T_f - T_i) \\ &= 0.2 \times 8.3145 \times (300-20) \\ &= 465.6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 10.03

a)

$$
\begin{aligned}
W_{IAF} &= \int_i^f pdV = 2 \times (4-2) = 4\,\mathrm{l\,atm} \\
&= 4 \times 101.33\,\mathrm{J} \\
&= 405.32\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
W_{IF} &= \int_i^f pdV = 2 \times 1 + \frac{1}{2} 1 \times 2 = 3\,\mathrm{l\,atm} \\
&= 304\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
W_{IBF} &= \int_i^f pdV = 2 \times 1 = 2\,\mathrm{l\,atm} \\
&= 202.7\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

Problema 10.04

Para una expansión isotérmica

$$
\begin{aligned}
W_{i \to f} &= \int_i^f pdV = \int_i^f \frac{nRT}{V} dV \\
&= nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \\
&= nRT \ln \frac{P_i}{P_f}
\end{aligned}
$$

en este caso al trabajo de la expansión isoterma hay que sumarle el trabajo (negativo) de la compresión isobárica obteniendo

$$
\begin{aligned}
W &= nRT \ln \frac{P_a}{P_b} + P_b (V_c - V_b) \\
&= nRT \ln \frac{P_a}{P_b} + P_b \left(\frac{nRT}{P_a} - \frac{nRT}{P_b}\right) \\
&= RT \left(\ln 5 + \frac{1}{5} - \frac{1}{1}\right) \\
&= 19.9\,\mathrm{l\,atm} \\
&= 2017.5\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

Problema 10.05

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_1^2 5V^2 dV \\ &= 11.67\,\mathrm{atm\,m^3} \\ &= 11.67\times 10^3\,\mathrm{l\,atm} \\ &= 1.18\times 10^6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 10.06

$P_i = 1\,\mathrm{atm}$
$T_i = 273.15\,\mathrm{K}$
$V_i = 25\,\mathrm{l}$
$V_f = 80\,\mathrm{l}$

a)

$$P = 0.5aV^{-2}$$

de donde

$$a = 2PV^2$$

pero $1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$ y $25\,\mathrm{l} = 0.0\,25\,\mathrm{m^3}$, entonces

$$\begin{aligned} a &= 2\times 1(25)^2\,\mathrm{atm\,l^2} \\ &= 1250\,\mathrm{atm\,l^2} \end{aligned}$$

b)

$$P = 0.5(1250)V^{-2} = 625V^{-2}$$

Si $V_f = 80\,\mathrm{l}$ entonces

$$P_f = 625(80)^{-2} = 9.77\times 10^{-2}\,\mathrm{atm}$$

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}$$

o bien

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{p_f V_f}{p_i V_i} T_i \\ &= \frac{9.77\times 10^{-2}\times 80}{1\times 25} 273.15 \\ &= 85.4\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Problema 10.07

$W = 3000\,\mathrm{J} = \frac{3000}{101.33} = 29.61\,\mathrm{l\,atm}$

$n = 1\,\mathrm{mol}$

$p_f = 1\,\mathrm{atm}$

$V_f = 25\,\mathrm{l}$

El trabajo isotérmico es

$$\begin{aligned}
W_{i\to f} &= \int_i^f pdV = \int_i^f \frac{nRT}{V}dV \\
&= nRT\ln\frac{V_f}{V_i} \\
&= nRT\ln\frac{P_i}{P_f} \\
&= p_fV_f\ln\frac{V_f}{V_i} \\
29.61 &= 1\times 25\ln\frac{25}{V_i}
\end{aligned}$$

entonces

a)

$$V_i = 7.65\,\mathrm{l}$$

b)

$$\begin{aligned}
T &= \frac{p_fV_f}{nR} \\
&= \frac{1\times 25}{1\times 0.082} \\
&= 304.9\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

Primera Ley de la termodinámica.

Problema 11.01

$Q = 400\,\mathrm{J}$

$$Q = \Delta U + W$$

a) Para la trayectoria diagonal el trabajo fué calculado y es

$$W_{I\to F} = 304\,\mathrm{J}$$

por lo tanto

$$\Delta U = 400 - 304 = 96\,\mathrm{J}$$

b) Además fué calculado

$$\begin{aligned} W_{IAF} &= \int_i^f pdV = 2 \times (4-2) = 4\,\mathrm{l\,atm} \\ &= 405.\,3\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} Q &= 96 + 405.3 \\ &= 501.\,3\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 11.02

$P = 0.8\,\mathrm{atm}$
$V_i = 9\,\mathrm{l}$
$V_f = 2\,\mathrm{l}$
$Q = -400\,\mathrm{J}$

a)

$$\begin{aligned} W &= p(V_f - V_i) \\ &= 0.8 \times (2-9) \\ &= -5.6\,\mathrm{l\,atm} \\ &= -567.\,5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \Delta U &= Q - W \\ &= -400 + 567.5 \\ &= 167.\,5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 11.03

$\Delta U = -500\,\mathrm{J}$
$W = -220\,\mathrm{J}$
entonces

$$Q = -720\,\mathrm{J}$$

calor transferido hacia el sistema. (Positivo: absorbido; Negativo: cedido)

Problema 11.04

a) El cambio de energía interna es $\Delta U = 0$ como en todo ciclo. El trabajo es el área encerrrada por el ciclo (positiva para el sentido indicado)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} 6 \times 10^3 \times 4 \\ &= 12\,000\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$Q = 12\,000\,\mathrm{J}$$

b) El trabajo ahora es negativo entonces

$$Q = -12\,000\,\mathrm{J}$$

Problema 11.05

$Q_{BC} < 0$

$\Delta U_{CA} = U_A - U_C < 0$

Partimos del proceso BC

$W_{BC} = 0$, $Q_{BC} < 0$ entonces $\Delta U_{BC} = U_C - U_B = Q - W < 0$ y adicionalmente se deduce que $U_A - U_B < 0$

Ahora proceso CA

$W_{CA} < 0$, $\Delta U_{CA} = U_A - U_C < 0$, entonces $Q_{CA} < 0$

Proceso AB

Obviamente $W_{AB} > 0$ y como se estableció $\Delta U_{AB} = U_B - U_A > 0$ por lo tanto $Q_{AB} > 0$.

Problema 11.06

$n = 5\,\mathrm{mol}$

$t = 127\,^{\circ}\mathrm{C}$

$T = 400.15\,\mathrm{K}$

$V_f = 4V_i$

a)

$$\begin{aligned} W_{i\to f} &= \int_i^f p dV = \int_i^f \frac{nRT}{V} dV \\ &= nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= 5 \times 8.3145 \times 400.15 \ln 4 \\ &= 2.306\,13 \times 10^4\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

b) Para un gas ideal U es función de la temperatura nada más, por lo tanto $\Delta U = 0$ y

$$Q = 2.306\,13 \times 10^4\ \mathrm{J}$$

Problema 11.07

$n = 1\,\mathrm{mol}$

$m = 18\,\mathrm{g} = 0.018\,\mathrm{kg}$

$t = 100\,^\circ\mathrm{C}$

$T = 373.15\,\mathrm{K}$

$L_e = 2.26 \times 10^6\ \mathrm{J\,kg^{-1}} = 542.4\,\mathrm{cal\,g^{-1}}$.

El calor absorbido será

$$\begin{aligned} Q &= 0.018 \times 2.26 \times 10^6 \\ &= 4.068 \times 10^4\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

Si despreciamos el volumen del agua líquida, el trabajo podemos calcularlo como

$$\begin{aligned} W &= p \times V_{vapor} = nRT \\ &= 1 \times 8.3145 \times 373.15 \\ &= 3102.56\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

por lo tanto el cambio de la energía interna será

$$\begin{aligned} \Delta U &= Q - W = 4.068 \times 10^4 - 3102.56 \\ &= 3.76 \times 10^4\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 11.08

$n = 1\,\mathrm{mol}$

$p_i = 2\,\mathrm{atm}$

$V_i = 0.3\,\mathrm{l}$

$U_i = 91\,\mathrm{J}$

$p_f = 1.5\,\mathrm{atm}$

$V_f = 0.8\,\mathrm{l}$

$U_f = 182\,\mathrm{J}$

$1\,\mathrm{l\,atm} = 101.33\,\mathrm{J}$,

a) Los trabajos realizados son las áreas bajo la curva es decir

$$\begin{aligned} W_{IAF} &= 1.5 \times (0.8 - 0.3)\,\mathrm{l\,atm} \\ &= 0.75\,\mathrm{l\,atm} \\ &= 76\,\mathrm{J} \\ W_{IBF} &= 2 \times (0.8 - 0.3)\,\mathrm{l\,atm} \\ &= 1\,\mathrm{l\,atm} \\ &= 101.33\,\mathrm{J} \\ W_{IF} &= 1.5 \times (0.8 - 0.3) + \frac{1}{2} 0.5 \times (0.8 - 0.3) \\ &= 0.875\,\mathrm{l\,atm} \\ &= 88.6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

b) El cambio de energía interna es el mismo para los tres caminos, es decir $\Delta U = 182 - 91 = 91\,\mathrm{J}$ por lo cual los calores resultan ser

$$\begin{aligned} Q_{IAF} &= 91 + 76 = 167\,\mathrm{J} \\ Q_{IBF} &= 91 + 101.33 = 192.33\,\mathrm{J} \\ Q_{IF} &= 91 + 88.6 = 179.6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 11.09

$m = 1\,\mathrm{kg}$
$p = 1\,\mathrm{atm} = 101325\,\mathrm{Pa}$
$Q = 25000\,\mathrm{cal}$
$\Delta U = 8000\,\mathrm{cal}$

$$Q = \Delta U + W$$

a)

$$\begin{aligned} W &= Q - \Delta U \\ &= 25000 - 8000 \\ &= 17\,000\,\mathrm{cal} \\ &= 7.08 \times 10^4\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} W &= p\Delta V, \\ \Delta V &= \frac{W}{p} = \frac{7.08 \times 10^4}{101325} \\ &= 0.7\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

volver

Problema 11.10

$T_i = 300\,\mathrm{K}$
$p = 2.5 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$
$V_i = 1\,\mathrm{m}^3$
$V_f = 3\,\mathrm{m}^3$
$Q = 12500\,\mathrm{J}$
El trabajo isobárico es:

$$\begin{aligned} W &= p\Delta V = \\ &= 2.5 \times 10^3(3-1) \\ &= 5000\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} \Delta U &= Q - W = 12500 - 5000 \\ &= 7500\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{V_f}{V_i} T_i \\ &= \frac{3}{1} 300 \\ &= 900\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Problema 11.11

$n = 2\,\mathrm{mol}$
$T_i = T = 300\,\mathrm{K}$ (constante)
$p_i = 0.4\,\mathrm{atm}$
$p_f = 1.2\,\mathrm{atm}$

a)

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{p_i V_i}{p_f} \\ &= \frac{nRT_i}{p_f} \\ &= \frac{2 \times 0.082 \times 300}{1.2} \\ &= 41\,\mathrm{l} \end{aligned}$$

volver

b)

$$\begin{aligned} W &= nRT \ln \frac{P_i}{P_f} \\ &= 2 \times 8.3145 \times 300 \ln \frac{0.4}{1.2} \\ &= -5480.65\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

c) Si el helio es gas ideal, su energía interna depende exclusivamente de su temperatura y por lo tanto no ha variado. Entonces

$$Q = W = -5480.65\,\mathrm{J}$$

Problema 11.12

$n = 2\,\mathrm{mol}$
$\gamma = 1.4$
$p_i = 5\,\mathrm{atm}$
$V_i = 12\,\mathrm{l}$
$V_f = 30\,\mathrm{l}$

a) Para una expansión adiabática

$$pV^\gamma = \mathrm{cte.}$$

Entonces

$$\begin{aligned} p_i V_i^\gamma &= p_f V_f^\gamma \\ 5 \times 12^{1.4} &= p_f 30^{1.4} \end{aligned}$$

de donde

$$p_f = 1.39\,\mathrm{atm}$$

b)

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{p_i V_i}{nR} \\ &= \frac{5 \times 12}{2 \times 0.082} \\ &= 365.9\,\mathrm{K} \\ T_f &= \frac{p_f V_f}{nR} \\ &= \frac{1.39 \times 30}{2 \times 0.082} \\ &= 254.3\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Problema 11.13

$\gamma = 1.4$
$T_f = \frac{1}{3} T_i$

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= \text{cte.} \\ pV &= nRT \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} V^{1-\gamma} &\propto T \\ p^{\gamma-1} &\propto T^\gamma \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} V &\propto T^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ p &\propto T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \frac{V_f}{V_i} &= \left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{0.4}} = 0.0\,64 \\ \frac{p_f}{p_i} &= \left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 2.1 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Problema 11.14

$n = 1\,\text{mol}$
$\gamma = 1.67$
$T_i = 300\,\text{K}$
$p_i = 1\,\text{atm}$
$V_f = \frac{1}{4} V_i$

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= \text{cte.} \\ pV &= nRT \end{aligned}$$

bien

$$\begin{aligned} p_i V_i^\gamma &= p_f V_f^\gamma \\ \frac{p_i V_i}{T_i} &= \frac{p_f V_f}{T_f} \\ V_i^{\gamma-1} T_i &= V_f^{\gamma-1} T_f \end{aligned}$$

la última puede escribirse

$$
\begin{aligned}
T_f &= \frac{V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} T_i \\
&= (4)^{0.67} 300 \\
&= 759.5\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_f &= p_i \frac{V_i^{\gamma}}{V_f^{\gamma}} \\
&= 1 \times 4^{1.67} \\
&= 10.1\,\mathrm{atm}
\end{aligned}
$$

Problema 11.15

$\gamma = 1.40$
$p_i = 1\,\mathrm{atm}$
$p_f = 20\,\mathrm{atm}$

a)

$$
\begin{aligned}
p_i V_i^{\gamma} &= p_f V_f^{\gamma} \\
\frac{V_f}{V_i} &= \left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&= \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{1.4}} \\
&= 0.12
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{T_f}{T_i} &= \frac{V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} \\
&= \left(\frac{1}{0.12}\right)^{0.4} \\
&= 2.33
\end{aligned}
$$

Segunda Ley de la termodinámica

Notación

Q_2 calor absorbido de la fuente caliente por ciclo
Q_1 calor cedido a la fuente fría por ciclo
W trabajo realizado por ciclo
$W = Q_2 - Q_1$

volver

eficiencia máquina térmica

$$\eta = \frac{W}{Q_2}$$

eficiencia ciclo de carnot

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Coeficiente de operación de bombas de calor COP
Q_2 calor transferido a la fuente caliente
Q_1 calor absorbido de la fuente fría
W trabajo gastado por la bomba

$$COP = \frac{Q_2}{W}$$

Problema 12.01

$Q_2 = 360\,\mathrm{J}$
$W = 25\,\mathrm{J}$

a)

$$\begin{aligned} e &= \frac{W}{Q_2} = \frac{25}{360} \\ &= 6.9 \times 10^{-2} \\ &= 6.9\% \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Q_{liberado} &= Q - W \\ &= 335\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 12.02

Q_2 calor absorbido de la fuente caliente
Q_1 calor cedido a la fuente fría
$W = 200\,\mathrm{J}$

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 0.3$$

entonces

a)

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{200}{0.3} \\ &= 666.7\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

volver

b)

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 - W \\ &= 666.7 - 200 \\ &= 466.7\,\text{J} \end{aligned}$$

problema 12.03

$COP = 5$
$Q_1 = 120\,\text{J}$

$$\begin{aligned} COP &= \frac{Q_2}{W} = \frac{W + Q_1}{W} \\ 5 &= \frac{W + 120}{W} \end{aligned}$$

de donde

a)

$$W = 30\,\text{J}$$

b)

$$\begin{aligned} Q_2 &= W + Q_1 \\ &= 30 + 120 \\ &= 150\,\text{J} \end{aligned}$$

Problema 12.04

$P = potencia = 5\,\text{kW} = 5 \times 10^3\,\text{W}$
$\eta = 25\% = 0.25$
$Q_1 = 8000\,\text{J}$
si t es el tiempo de un ciclo

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W}{Q_2} = \frac{W}{W + Q_1} \\ &= \frac{Pt}{Pt + Q_1} \end{aligned}$$

o bien

$$0.25 = \frac{5 \times 10^3 t}{5 \times 10^3 t + 8000}$$

de donde se obtiene $t = 0.53\,\mathrm{s}$ el tiempo para cada ciclo. El calor absorbido en cada ciclo será

$$\begin{aligned} Q_2 &= 5 \times 10^3 t + 8000 \\ &= 5 \times 10^3 (0.53) + 8000 \\ &= 1.065 \times 10^4\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 12.05

$Q_2 = 3W$

a)

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W}{Q_2} = 0.33 \\ &= 33\% \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 - W \\ &= Q_2 - \frac{Q_2}{3} \\ \frac{Q_2}{Q_1} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Problema 12.06

$Q_1 = 100\,\mathrm{J}$
$Q_2 = 130\,\mathrm{J}$

a)

$$W = Q_2 - Q_1 = 30\,\mathrm{J}$$

es el trabajo absorbido por ciclo. Como trabaja a 60 Hz entonces la potencia requerida será

$$\begin{aligned} P &= 30 \times 60 \\ &= 1800\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} COP &= \frac{Q_2}{W} = \frac{130}{30} \\ &= 4.3 \end{aligned}$$

volver

Problema 12.07

$Q_1 = 1000\,\mathrm{J}$
$Q_2 = 1600\,\mathrm{J}$

a)

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}\\ &= \frac{600}{1600} = 0.375\\ &= 37.5\%\end{aligned}$$

b)

$$W = Q_2 - Q_1 = 600\,\mathrm{J}$$

c)

$$\begin{aligned}P &= \frac{600}{0.3}\\ &= 2000\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

Problema 12.08

$t_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$
$t_2 = 300\,^\circ\mathrm{C}$
$T_1 = 293.15\,\mathrm{K}$
$T_2 = 573.\,15\,\mathrm{K}$
La de Carnot, es decir

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{293.15}{573.15}\\ &= 0.488\\ &= 48.8\%\end{aligned}$$

Problema 12.09

$T_2 = 500\,\mathrm{K}$
$Q_2 = 800\,\mathrm{J}$
$\eta = 0.3$

a)

$$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

o sea

$$0.3 = 1 - \frac{Q_1}{800}$$

de donde

$$Q_1 = 560\,\mathrm{J}$$

b)

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

o sea

$$0.3 = 1 - \frac{T_1}{500}$$

de donde

$$T_1 = 350\,\mathrm{K}$$

Problema 12.10

$t_1 = 20\,{}^\circ\mathrm{C}$
$t_2 = 500\,{}^\circ\mathrm{C}$
$T_1 = 293.15\,\mathrm{K}$
$T_2 = 773.15\,\mathrm{K}$
$P = 150\,\mathrm{kW} = 150 \times 10^3\,\mathrm{W}$

Llamemos P_2, P_1 a las potencias calóricas absorbidas de la fuente caliente y entregada a la fuente fría. Entonces

$$P_2 - P_1 = P = 150$$

y

$$1 - \frac{P_1}{P_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{293.15}{773.15}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} P_2 &= 241.6\,\mathrm{kW}, \\ P_1 &= 91.6\,\mathrm{kW} \end{aligned}$$

esto es por segundo. En una hora los calores serán

$$\begin{aligned} Q_2 &= 241.6 \times 1000 \times 3600\,\mathrm{J} \\ &= 8.6976 \times 10^8\,\mathrm{J} \\ Q_1 &= 91.6 \times 1000 \times 3600\,\mathrm{J} \\ &= 3.2976 \times 10^8\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

volver

Problema 12.11

$t_1 = 5\,°\mathrm{C}$
$t_2 = 20\,°\mathrm{C}$
$T_1 = 278.15\,\mathrm{K}$
$T_2 = 293.\,15\,\mathrm{K}$
$P = 7.5\,\mathrm{MW}$

a)

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{T_1}{T_2} \\ &= 1 - \frac{278.15}{293.15} \\ &= 0.051 \\ &= 5.1\%\end{aligned}$$

b)

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{P}{P_2}$$

o sea la potencia absorbida será

$$\begin{aligned}P_2 &= \frac{7.5}{0.051}\,\mathrm{MW} \\ &= 147\,\mathrm{MW}\end{aligned}$$

en una hora

$$\begin{aligned}Q_2 &= 147 \times 3600 \times 10^6\,\mathrm{J} \\ &= 5.\,292 \times 10^{11}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

c) Pienso que nó.

Problema 12.12

$t_1 = 80\,°\mathrm{C}$
$t_2 = 350\,°\mathrm{C}$
$T_1 = 353.\,15\,\mathrm{K}$
$T_2 = 623.\,15\,\mathrm{K}$
$Q_2 = 2 \times 10^4\,\mathrm{J}$
$T = 1\,\mathrm{s}$

a)

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}, \\ \frac{W}{2\times 10^4} &= 1 - \frac{353.15}{623.15} \\ W &= 8665.65\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

y la potencia será

$$W = 8665.65\,\mathrm{W}$$

b)

$$\begin{aligned}Q_1 &= Q_2 - W = 2\times 10^4 - 8665.65 \\ &= 1.13\times 10^4\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

Problema 12.13

$t_1 = 430\,^\circ\mathrm{C}$
$t_2 = 1870\,^\circ\mathrm{C}$
$T_1 = 703.15\,\mathrm{K}$
$T_2 = 2143.15\,\mathrm{K}$
$\eta = 0.42$
$P_2 = 1.4\times 10^5\,\mathrm{W}$

a)

$$\begin{aligned}\eta_{\max} &= 1 - \frac{703.15}{2143.15} \\ &= 0.67\end{aligned}$$

b)

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{P}{P_2}$$

entonces

$$\begin{aligned}P &= \eta P_2 = 0.42\times 1.4\times 10^5 \\ &= 5.88\times 10^4\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

Problema 12.14

$t_1 = 120\,^\circ\mathrm{C}$
$t_2 = 800\,^\circ\mathrm{C}$

$T_1 = 393.15\,\mathrm{K}$
$T_2 = 1073.15\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned}\eta_{\max} &= 1 - \frac{393.15}{1073.15} \\ &= .63\end{aligned}$$

Problema 12.15

$P = 1000\,\mathrm{MW}$
$P_1 = 2000\,\mathrm{MW}$
$\eta = 0.33$
Esto es se están entregando al río

$$2 \times 10^9\,\mathrm{W} = 2 \times 0.24 \times 10^9\,\mathrm{cal\,s^{-1}}$$

y el agua fluye a razón de

$$10^6\,\mathrm{kg\,s^{-1}} = 10^9\,\mathrm{g\,s^{-1}}$$

o sea en promedio

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{Q}{mc} = \frac{2 \times 0.24 \times 10^9}{10^9} \\ &= 0.48\,^\circ\mathrm{C}\end{aligned}$$

Problema 12.16

$P = 500\,\mathrm{MW}$
$t_1 = 40\,^\circ\mathrm{C}$
$t_2 = 200\,^\circ\mathrm{C}$
$T_1 = 313.15\,\mathrm{K}$
$T_2 = 473.15\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned}\eta_{Carnot} &= 1 - \frac{313.15}{473.15} \\ &= 0.338\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{0.338}{2} = \frac{P}{P + P_1} \\ &= \frac{500}{500 + P_1}\end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned}P_1 &= 2458.6\,\mathrm{MW} \\ &= 2.46 \times 10^9\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

b) El calor se entrega al río a razón

$$5.\,904\times 10^{8}\,\mathrm{cal\,s^{-1}}$$

y el agua fluye a razón

$$1.2\times 10^{9}\,\mathrm{g\,s^{-1}}$$

de aquí

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{Q}{mc}=\frac{5.\,904\times 10^{8}}{1.2\times 10^{9}}\\ &= 0.49\,^{\circ}\mathrm{C}\end{aligned}$$

Problema 12.17

Q_2 calor transferido a la fuente caliente
Q_1 calor absorbido de la fuente fría
W trabajo gastado por la bomba

$$COP=\frac{Q_2}{W}$$

a) Si el refrigerador es una máquina de Carnot funcionando a la inversa

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{T_1}{T_2}=\frac{273.15+13}{273.15+30}=0.\,943\,922$$

entonces

$$\begin{aligned}COP &= \frac{Q_2}{W}=\frac{Q_2}{Q_2-Q_1}\\ &= \frac{1}{1-\frac{Q_1}{Q_2}}=17.\,83\end{aligned}$$

b) Si $COP=17.\,83/3=5.\,943\,33$ y $P_1=8\times 10^{4}\,\mathrm{J\,s^{-1}}$entonces

$$COP=\frac{Q_2}{W}=\frac{W+Q_1}{W}$$

de aquí la potencia resulta

$$\begin{aligned}W &= \frac{P_1}{COP-1}=\frac{8\times 10^{4}}{5.94-1}\\ &= 16.2\,\mathrm{kW}\end{aligned}$$

Entropía

Problema 13.01

Aquí, un proceso de mezclado

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2}$$

donde (calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

siendo

$m_1 = 1000\,\mathrm{g}$
$T_1 = 280 + 273.15 = 553.15\,\mathrm{K}$
$m_2 = 2000\,\mathrm{g}$
$T_2 = 310 + 273.15 = 583.15\,\mathrm{K}$
entonces

$$T_f = \frac{553.15 + 2 \times 583.15}{3} = 573.15\,\mathrm{K}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta S &= 1000 \ln \frac{573.15}{553.15} + 2000 \ln \frac{573.15}{583.15} \\ &= 0.92\,\mathrm{cal\,K^{-1}} \end{aligned}$$

Problema 13.02

El cambio de entropía del Universo será el cambio de entropía de la mezcla, es decir

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2}$$

donde (calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

pero $m_1 = m_2 = m$ y $c_1 = c_2 = c$ por lo cual resulta

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

y

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= mc\ln\frac{T_f^2}{T_1T_2} \\
&= 2mc\ln\frac{T_f}{\sqrt{T_1T_2}} \\
&= 2mc\ln\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}.
\end{aligned}
$$

Para probar que es positivo, debemos demostrar que en general

$$\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} > 1$$

y esto se deduce de

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 > 0$$

de donde

$$
\begin{aligned}
x+y-2\sqrt{xy} &> 0 \\
x+y &> 2\sqrt{xy}, \\
\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} &> 1
\end{aligned}
$$

Problema 13.03

El cambio del agua se puede calcular para un calentamientto reversible del agua desde 0^oC a 100^oC suponiendo calor específico constante

$$
\begin{aligned}
\Delta S_{agua} &= \int\frac{dq}{T} = \int_{273}^{373}\frac{mcdT}{T} \\
&= 1000\times 1\times\ln\frac{373}{273} \\
&= 312.107\,\mathrm{cal\,K}^{-1}
\end{aligned}
$$

Además, el calor que cedió la fuente es

$$
\begin{aligned}
Q &= 1000\times 1\times(373-273) \\
&= 1.0\times 10^5\,\mathrm{cal}
\end{aligned}
$$

por lo tantto el cambio de entropía de la fuentes es

$$
\begin{aligned}
\Delta S_{fuente} &= -\frac{1.0\times 10^5}{373} \\
&= -268.097\,\mathrm{cal\,K}^{-1}
\end{aligned}
$$

de donde el cambio de entropía del Universo será

$$
\begin{aligned}
\Delta S_{Univ} &= 312.107-268.097 \\
&= 44.01\,\mathrm{cal\,K}^{-1}
\end{aligned}
$$

volver

Problema 13.04

El cambio de entropía del agua es la misma que la calculada anteriormente es decir

$$\Delta S_{agua} = 312.107\,\text{cal}\,\text{K}^{-1}$$

pero ahora hay dos fuentes a $T_1 = 273 + 50 = 323.0\,\text{K}$ y $T_2 = 273 + 100 = 373.0\,\text{K}$ que liberan las siguientes cantidades de calor

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1000 \times 1 \times (323 - 273) \\ &= 5 \times 10^4\,\text{cal} \\ Q_2 &= 1000 \times 1 \times (373 - 323) \\ &= 5.0 \times 10^4\,\text{cal} \end{aligned}$$

luego el cambio de entropía del Universo será

$$\begin{aligned} \Delta S_{Univ} &= \Delta S_{agua} - \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \\ &= 312.107 - \frac{5 \times 10^4}{323} - \frac{5 \times 10^4}{373} \\ &= 23.26\,\text{cal}\,\text{K}^{-1} \end{aligned}$$

Note que es menor que en el problema anterior.

Problema 13.05

Calentándola reversiblemente, es decir colocándola en contacto térmico con una serie (infinita) de fuentes térmicas con diferencias infinitesimales de temperatura entre 0^oC y 100^oC. En el caso del problema anterior, el cambio de entropía del Universo disminuyó por haber usado dos fuentes térmicas en vez de una. Si usted colocará más y más fuentes a temperaturas intermedias, lograría en el límite $\Delta S_{Univ} = 0$.

Problema 13.06

Suponiendo ciclos infinitesimales de Carnot tendremos que

$$\frac{dW}{dq_2} = \frac{dq_2 - dq_1}{dq_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

pero
$dq_2 = -mc_p dT_2$ y $dq_1 = mc_p dT_1$ luego

$$\frac{-dT_2 - dT_1}{-dT_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$\surd$o bien

$$\frac{dT_1}{dT_2} = -\frac{T_1}{T_2}$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{T1} + \frac{dT_2}{T_2} &= 0 \\ d\ln T_1 T_2 &= 0 \end{aligned}$$

o sea es constante

$$T_1 T_2 = T_f^2$$

de donde

$$T_f = \sqrt{T_1 T_2}.$$

Además el ytrabajo realizado por la máquina será

$$dW = (1 - \frac{T_1}{T_2}) dq_2$$

o bien

$$\begin{aligned} dW &= -(1 - \frac{T_1}{T_2}) m c_p dT_2 \\ &= -(1 - \frac{T_f^2}{T_2^2}) m c_p dT_2 \end{aligned}$$

que podemos integrar

$$\begin{aligned} W &= -\int_{T_2}^{T_f} (1 - \frac{T_f^2}{T_2^2}) m c_p dT_2 \\ &= m c_p \frac{-2T_f T_2 + T_2^2 + T_f^2}{T_2} \\ &= m c_p \frac{-2T_f T_2 + T_2^2 + T_1 T_2}{T_2} \\ &= m c_p (T_1 + T_2 - 2T_f) \\ &= C_p (T_1 + T_2 - 2T_f) \end{aligned}$$

Problema 13.07

Para una expansión isotérmica reversible de un gas ideal

$$dq = dU + pdV$$

siendo $dU = 0$ entonces

$$dq = \frac{nRT}{V} dV$$

entonces

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int \frac{dq}{T} = nR \int \frac{dV}{V} \\ &= nR \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= 2 \times 8.3145 \times \ln \frac{0.04}{0.02} \\ &= 11.5\,\mathrm{J\,K^{-1}} \end{aligned}$$

Problema 13.08

Aquí, un proceso de mezclado

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2}$$

donde (calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

si las masas son iguales a m y los calores específicos también

$$\Delta S = mc \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2}$$

donde (calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$T_1 = \mathrm{K}$
$T_2 = 373.15\,\mathrm{K}$ entonces

$$T_f = \frac{273.15 + 373.15}{2} = 323.15\,\mathrm{K}$$

$$\begin{aligned} \Delta S &= 1000 \times 1 \times \ln \frac{323.15^2}{273.15 \times 373.15} \\ &= 24.23\,\mathrm{cal\,K^{-1}} \\ &= 101\,\mathrm{J\,K^{-1}} \end{aligned}$$

volver

Problema 13.09

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2}$$

donde (calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

$m_{Al} = 50\,\mathrm{g}$
$m_{Agua} = 60\,\mathrm{g}$
$t_{Al} = 50\,{}^\circ\mathrm{C}$
$T_{Al} = 273.15 + 50 = 323.15\,\mathrm{K}$
$t_{Agua} = 20\,{}^\circ\mathrm{C}$
$T_{Agua} = 273.15 + 20 = 293.15\,\mathrm{K}$
$c_{H_2O} = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
$c_{Al} = 0.215\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$
entonces

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{50 \times 0.215 \times 323.15 + 60 \times 1 \times 293.15}{50 \times 0.215 + 60 \times 1} \\ &= 297.71\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta S &= 50 \times 0.215 \ln \frac{297.71}{323.15} + 60 \times 1 \times \ln \frac{297.71}{293.15} \\ &= 0.045\,\mathrm{cal\,K^{-1}} \end{aligned}$$

Problema 13.10

A presión constante $dq = nc_p dT$ luego

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int \frac{dq}{T} = \int_{400}^{800} \frac{6.524 + 1.25 \times 10^{-3} T - 10^{-9} T^2}{T} dT \\ &= 5.02\,\mathrm{cal\,K^{-1}} \end{aligned}$$

Problema 13.11

A volumen constante $dq = nc_V dT$ luego

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int \frac{dq}{T} = \int_{400}^{800} \frac{4.537 + 1.25 \times 10^{-3} T - 10^{-9} T^2}{T} dT \\ &= 3.64\,\mathrm{cal\,K^{-1}} \end{aligned}$$

Tablas

Temperatura

Symbol: K
La unidad SI de temperatura termodinámica

Un kelvin se define como 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua, donde coexisten agua solida-líquida y gaseosa. El kelvin se usa tambien como la unidad de diferencia de temperatura de las escalas Kelvin y Celsius, donde $1\mathrm{K} = 1°\mathrm{C}$.

$T_K = t_C + 273.15$
$t_C = (t_F - 32)/1.8$
$T_K = (t_F + 459.67)/1.8$

Presión

Símbolo: Pa
La unidad SI de presión

Un pascal sew define como la presión que resulta de la fuerza de un Newton actuando sobre un área de un metro cuadrado.

Símbolo: bar
La unidad SI de presión

Un bar se define igual a 10^5 $\mathrm{N\,m^{-2}}$ (pascal). El milibar (mbar) se usa corrientemente en meteorología-

Símbolo: atm
La unidad SI de presión

Una atmósfera se define igual a 760 milimetros de Mercurio o 101325 $\mathrm{N\,m^{-2}}$. Es aproximadamente igual a 1 $\mathrm{kg\,cm^{-2}}$.

Presión

Para convertir de	a	*Multiplique por*
atmósfera	pascal	101 325
bar	pascal	1.0×10^5
torr	pascal	133.322

Energía

Símbolo: cal
La unidad SI de energía

Una caloría fué definida originalmente como la cantidad de energía requerida para elevar la temperatura de un gramo de agua de 14.5°C a 15.5°C a la presión estándar. Se define ahora como 4.1868 joules.

Energía

Para convertir de	*a*	*Multiplique por*
British thermal unit (BTU)	joule	1055.056
kilocaloría	joule	4186
erg	joule	1.0×10^{-7}
electronvolt	joule	1.60219×10^{-19}

Cantidad de substancia

Símbolo: mol

La unidad SI de cantidad de substancia

Un mol se define como la cantidad de substancia de un sistema que contiene tantas unidades elementales como hay átomos in 0.012 kilogramos de carbono-12, o sea en 12 gramos de carbono 12. Las entidades elementales deben ser especificadas y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras particulas, o grupos especificados de partículas.

Unidad atómica de masa.

Símbolo: μ

La unidad SI de masa

Una unidad atómica de masa es igual a la masa de 1/12 de la masa de un átomo de carbono-12. Es aproximadamente igual a 1.6605 x 10^{-27} kg o aproximadamente 931MeV.

Constantes

Denotaremos por mol al mol gramo.

número de Avogadro	$N_A = 6.022 \times 10^{23} (\text{mol})^{-1}$
constante de los gases	$R = 8.3145\,\text{J} / \text{K}\,\text{mol}$
constante de los gases	$R = 0.082\,\text{l}\,\text{atm}\,\text{mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}$
unidad atómica de masa	$1.6605402 \times 10^{-27}\,\text{kg}$
masa neutrón	$m_N = 1.6749286 \times 10^{-27}\,\text{kg}$
masa protón	$m_P = 1.6726231 \times 10^{-27}\,\text{kg}$
constante de Boltzman	$k = 1.3806568 \times 10^{-23}\,\text{J}\,\text{K}^{-1}$

Algunos pesos atómicos

Hidrógeno	$w_H = 1.0079$
Oxígeno	$w_O = 15.9994$
Helio	$w_{He} = 4.002602$
Nitrógeno	$w_N = 14.00674$
Carbono-12	$w_{C12} = 12$

Algunos calores específicos a 25^oC y a 1 atm.

Substancia	J/Kg^{o}C	cal/g^{o}C	J/mol^{o}C
Aluminio	900	0.215	24.3
Berilio	1830	0.436	16.5
Cadmio	230	0.055	25.9
Cobre	387	0.0924	24.5
Germanio	322	0.077	23.4
Oro	129	0.0308	25.4
Hierro	448	0.107	25
Plomo	128	0.0305	26.4
Silicio	703	0.168	19.8
Plata	234	0.056	25.4
Vidrio	837	0.2	
Hielo	2090	0.5	
Alcohol	2400	0.58	
Agua	4186	1	

Calores de fusión y vaporización

Substancia	$t_F{}^oC$	$L_f(J/kg)$	$t_e{}^oC$	$L_e(J/Kg)$
Helio	-269.65	5.23×10^3	-268.93	2.09×10^4
Nitrógeno	-209.97	2.55×10^4	-195.81	2.01×10^5
Oxígeno	.218.79	1.38×10^4	-182.97	2.13×10^5
Alcohol et.	-114	1.04×10^5	79	8.54×10^5
Agua	0	3.33×10^5	100	2.26×10^6
Azufre	119	3.81×10^4	444.6	3.26×10^5
Plomo	327.3	2.45×10^4	1750	8.70×10^5
Aluminio	660	3.97×10^5	2450	1.14×10^7
Plata	960.8	8.82×10^4	2193	2.33×10^6
Oro	1063	6.44×10^4	2660	1.58×10^6
Cobre	1083	1.34×10^5	1187	5.06×10^6