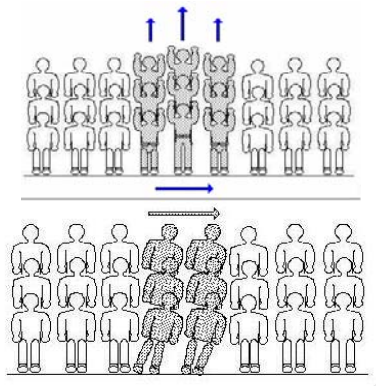
CAPÍTULO 3. MOVIMIENTO ONDULATORIO Y ONDAS

INTRODUCCIÓN

Existen en la naturaleza muchos fenómenos de los cuales se dice "tienen naturaleza ondulatoria" pero ¿qué es exactamente una onda? ¿Qué propiedades tienen? ¿Cómo se puede formalizar una expresión matemática de un fenómeno ondulatorio? Estas y otras cuestiones son el tema objeto de este capítulo.
No obstante, antes de entrar de lleno en lo que es una onda y su formalismo, vamos a definir onda como:
Una onda es una perturbación física que transmite energía, pero que no transmite materia.
En las ondas materiales las partículas concretas que componen el material no se propagan, sino que se limitan a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. No obstante cuando una onda se transmite por dicho material se produce una sincronización de oscilaciones entre las distintas partículas componentes del medio que posibilita la propagación de energía.
La onda de choque de una explosión es un buen ejemplo. La creación súbita de calor en la explosión eleva a presión muy alta a la masa de gas de su vecindad inmediata. Esta presión se ejerce sobre el aire que rodea el cual es comprimido e incrementado en presión. Esta presión a su vez es ejercida sobre el aire de más allá, o sea que hay una onda de presión que se aleja de la explosión con una velocidad de 335 m/s esta onda contiene la energía requerida para comprimir el aire. Esta energía rompe ventanas a grandes distancias de la explosión. Ningún material viaja, el movimiento de cualquier partícula de aire relativamente es pequeño, la perturbación es la que viaja rápidamente a grandes distancias y transmite la energía

DEFINICIÓN - CARACTERÍSTICAS

Una onda es una perturbación que se propaga desde el punto en que se produjo hacia el medio que rodea ese punto.
Las ondas materiales (todas menos las electromagnéticas) requieren un medio elástico para propagarse.
El medio elástico se deforma y se recupera vibrando al paso de la onda.
La perturbación comunica una agitación a la primera partícula del medio en que impacta, este es el foco de las ondas y en esa partícula se inicia la onda.
La perturbación se transmite en todas las direcciones por las que se extiende el medio que rodea al foco con una velocidad constante en todas las direcciones, siempre que el medio sea isótropo (de iguales características físico-químicas en todas las direcciones).
Todas las partículas del medio son alcanzadas con un cierto retraso respecto a la primera y se ponen a vibrar, recuerda la ola de los espectadores en un estadio de fútbol.



La forma de la onda es la foto de la perturbación propagándose, la instantánea que congela las posiciones de todas las partículas en ese instante. Curiosamente, la representación de las distancias de separación de la posición de equilibrio de las partículas al vibrar frente al tiempo dan una función matemática seno que, una vez representada en el papel, tiene forma de onda.
Podemos predecir la posición que ocuparán dichas partículas más tarde, aplicando esta función matemática.
El movimiento de cada partícula respecto a la posición de equilibrio en que estaba antes de llegarle la perturbación es un movimiento oscilatorio armónico simple.
Una onda transporta energía pero no transporta materia: las partículas vibran alrededor de la posición de equilibrio pero no viajan con la perturbación. Veamos un ejemplo: la onda que transmite un látigo lleva una energía que se descarga al golpear su punta. Las partículas del látigo vibran, pero no se desplazan con la onda.

Pulso y tren de ondas – Onda viajera

El movimiento de cualquier objeto material en un medio (aire, agua, etc.) puede ser considerado como una fuente de ondas. Al moverse perturba el medio que lo rodea y esta perturbación, al propagarse, puede originar un pulso o un tren de ondas.
Un impulso único, una vibración única en el extremo de una cuerda, al propagarse por ella origina un tipo de onda llamada **pulso**. Las partículas oscilan una sola vez al paso del pulso, transmiten la energía y se quedan como estaban

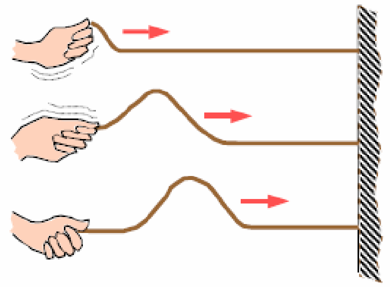
inicialmente. El pulso sólo está un tiempo en cada lugar del espacio. El sonido de un disparo es un pulso de onda sonora.
Si las vibraciones que aplicamos al extremo de la cuerda se suceden de forma continuada se forma un **tren de ondas** que se desplazará a lo largo de la cuerda, esto viene a ser una **onda viajera**.

TIPOS DE ONDAS

Podemos establecer criterios de clasificación de las ondas. Algunos serían:

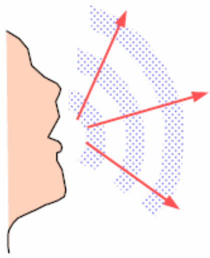
Según el medio por el que se propaguen
Ondas mecánicas. Son las que requieren un medio material para propagarse. Ejemplo, el sonido
La onda de sonido ordinario es una forma de transmisión de energía, perturbaciones en el aire entre fuente vibrante que es la que produce el sonido y un receptor tal como el oído. El sonido también puede transmitirse en los líquidos y en los sólidos. Las ondas en una cuerda, en un resorte y las ondas de agua son otros ejemplos de ondas que necesitan de un medio elástico para propagarse. A este tipo de ondas se los denomina "ondas mecánicas".
Ondas electromagnéticas. Son las que no requieren un medio material. Ejemplo, la luz.
Existe otro tipo de ondas relacionada con la luz, transmisión de radio y radiación de calor, esto es las ondas electromagnéticas que no necesitan de un medio para propagarse.

Según el número de dimensiones que involucran
Unidimensionales. Ejemplo, la propagación del movimiento en una cuerda

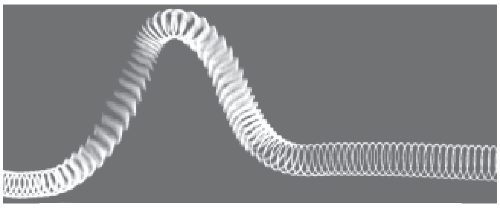


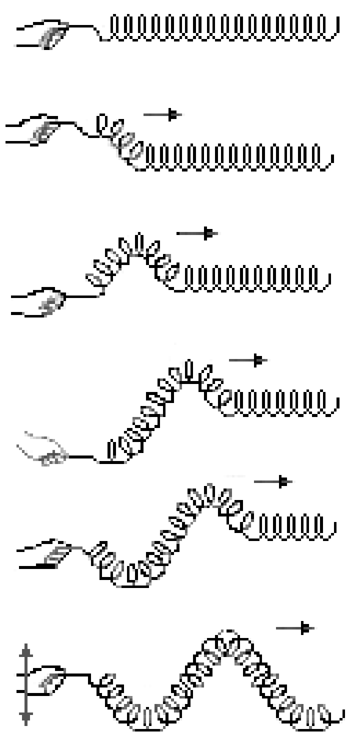
Bidimensionales. Ejemplo, olas en la superficie de un líquido.

Tridimensionales. Ejemplo, el sonido normal.

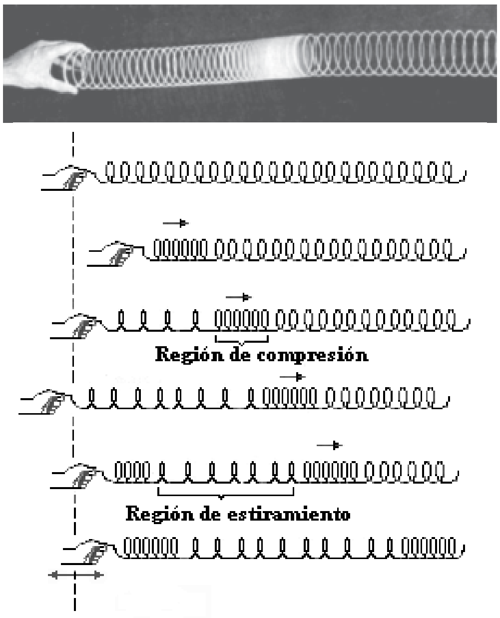


Según la relación entre la vibración y la dirección de propagación
Transversales. Son aquellas ondas en las cuales la oscilación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo en una cuerda normal y tensa la onda se propaga de izquierda a derecha (en cierto caso particular) pero, en cambio, la oscilación de un punto concreto de la cuerda se produce de arriba a abajo, es decir, perpendicularmente a la propagación



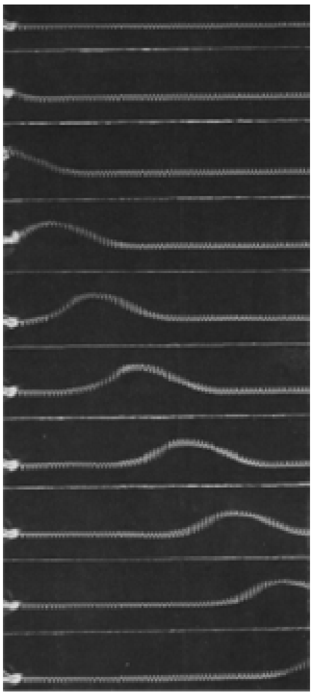


Longitudinales. En este tipo la propagación es paralela a la oscilación. Como ejemplo, si apretamos un resorte las espiras oscilan de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, paralelas en cualquier caso a la dirección de propagación.

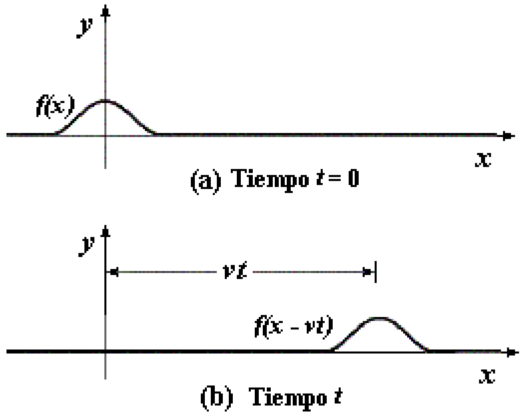


EXPRESIÓN MATEMÁTICA PARA UNA ONDA VIAJERA.

En la Figura (Physical Science Study Committee, 1965) se muestra una secuencia de fotografías de un pulso propagándose de izquierda a derecha a lo largo de un resorte. En esta sección haremos uso de estas fotografías para descubrir la expresión matemática de una onda viajera y probar el significado de algunos de los términos utilizados para describir las ondas.



El intervalo de tiempo entre cada fotografía es el mismo. Estas fotografías indican que la velocidad de un pulso es constante; y la forma del pulso prácticamente no cambia durante el movimiento de avance. Un examen más minucioso muestra que el pulso se va haciendo gradualmente más ancho conforme avanza; la altura del pulso se va haciendo menor mientras el ancho del pulso crece. Este ensanchamiento del pulso es una consecuencia de la dispersión. La dispersión no tiene un interés primordial en las ondas que deseamos considerar, por lo que la ignoraremos en nuestro estudio.



En la Figura arriba pueden apreciarse dos etapas del movimiento de un pulso en una cuerda, a dos tiempos diferentes, cuando el pulso se propaga de izquierda a derecha con velocidad *v*. La figura está dibujada sobre un sistema de ejes coordenados de modo que el eje *x* muestra la dirección en que la cuerda no se distorsiona. Supongamos que la forma de la cuerda a $t = 0$ está dada por la expresión $f(x)$ (Figura a). Después de un tiempo *t* el pulso ha avanzado hacia la derecha una distancia vt (Figura b). Debe notarse que la función $f(x-a)$ tiene la misma forma que la función $f(x)$, sin embargo $f(x-a)$ esta desplazada una distancia *a* en la dirección +x. Si suponemos que el pulso mantiene su forma mientras se propaga, podemos expresar la forma del pulso en un instante de tiempo *t* mediante

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

Una descripción similar a la anterior, nos proporciona la expresión de un pulso que se mueve hacia la izquierda con velocidad *v*

$$y(x,t) = f(x + vt)$$

Se denomina función de onda a la función $y(x,t)$ que sirve para describir onda. Para el caso de una onda en una cuerda, la función de onda representa la coordenada *y* de un elemento de la cuerda. Por tanto, la función de onda da el desplazamiento *y* de dicho elemento desde su posición de equilibrio $y = 0$, pero es una función que depende de *x* y de *t*.

Esto significa que el desplazamiento de un elemento de cuerda depende de:
a) la coordenada *x* del elemento; y
b) el tiempo *t* de la observación.
Esto es, *x* y *t* deben aparecer combinados en $y(x,t)$ como $(x - vt)$ o $(x + vt)$. Para especificar una función de onda debemos escribirla como una determinada función. Así por ejemplo la función de onda específica que vamos a discutir en la sección siguiente es $y(x,t) = A\text{sen}(x - vt)$.

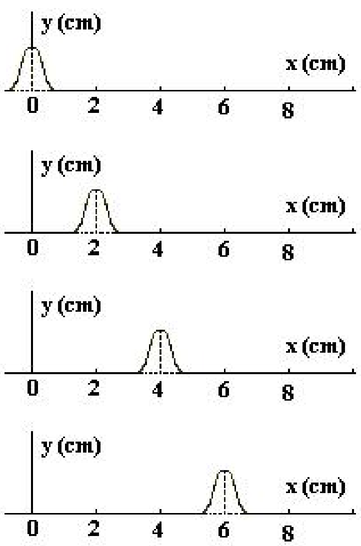
Ejemplo 1. De las funciones que se presentan a continuación, sólo dos pueden representar ecuaciones de onda, de ondas unidimensionales que se propagan en el eje *x*:

$$y_1(x,t) = \frac{5\times10^{-2}}{\left[0,25 + (x-2t)^2\right]}$$

$$y_2(x,t) = \frac{5\times10^{-2}}{\left[0,25 + \left(x^2 + 4t^2 - 2t\right)\right]}$$

$$y_3(x,t) = \frac{5\times10^{-2}}{\left[0,25 + (2x+t)^2\right]}$$

a) Decir cuales de las funciones: y_1, y_2 e y_3 son funciones de onda y justificar la respuesta.
b) ¿Cuáles son las velocidades de propagación de dichas ondas?
c) En la figura se representan varias "fotografías" de una cuerda tensa, en la cual se está propagando una onda que corresponde a una de las dos anteriores. Las "fotografías" corresponden a instantes separados 0,01 s. ¿A cuál de las ondas corresponden las "fotos"?



Solución

a) Cualquier perturbación que obedece en todo instante a la ecuación: $y(x,t) = f(x \pm vt)$ representa una onda unidimensional que se propaga hacia la derecha (signo negativo) o hacia la izquierda (signo positivo) del eje x, con velocidad *v*. Así pues, las funciones y_1 e y_3 son las únicas posibles representantes de ecuaciones de onda.
b) Para y_1, el valor de la velocidad será $v_1 = 2\text{m/s}$, hacia la derecha del eje x.
Para y_3, la transformamos en:

$$y_3 = \frac{5\times10^{-2}}{0,25 + 4\left(x + \frac{1}{2}t\right)^2} \Rightarrow v_3 = -\frac{1}{2}\text{m/s},$$

hacia la izquierda del eje x. .
c) Corresponde a y_1 puesto que su propagación es hacia la derecha del eje x, y además, es claro que su velocidad es 2 m/s, lo que se deduce de las medidas dadas en las fotografías sucesivas.

ONDAS ARMÓNICAS

Un caso especialmente interesante y frecuente es aquel en que y es una función sinusoidal o armónica tal como $y(x) = A\text{sen}kx$, de modo que

$$y(x,t) = A\text{sen}k(x - vt) \qquad (1)$$

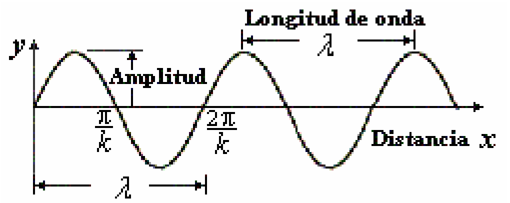
La cantidad k conocida como **número de onda** (diferente a la constante k del resorte) tiene un significado especial. Reemplazando el valor de x por $\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)$, obtenemos para $y(x,t)$, el mismo valor; esto es,

$$y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = A\text{sen}k\left[\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) - vt\right]$$
$$= A\text{sen}k\left[(x - vt) + 2\pi\right]$$
$$= A\text{sen}k(x - vt) = y(x,t)$$

Observamos que $\frac{2\pi}{k}$ es el "periodo de espacio" de la curva, repitiéndose cada $\frac{2\pi}{k}$, cantidad la llamaremos **longitud de onda** y la designaremos por λ .

Entonces $\lambda = \frac{2\pi}{\text{k}}$

Para un determinado tiempo



Observamos que la ecuación (1) también puede ser escrita en la forma

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - kvt) = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

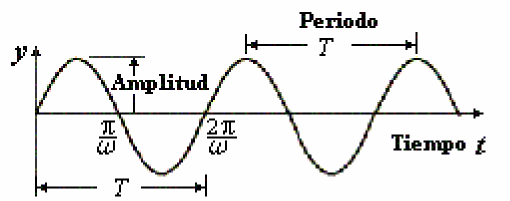
Donde la **frecuencia angular** $\omega = kv$ y

$$v = \frac{\omega}{k}$$

La función $y(x,t)$ es también periódica en el tiempo, con un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Y por lo tanto, con una frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Para un determinado espacio *x*.



Podemos obtener una relación importante de las ondas.

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$, expresión que concuerda con

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f$$

También es frecuente escribir la ecuación de la onda sinusoidal en la forma:

$$y = A\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

Onda que viaja a la izquierda. Similarmente para una onda que viaja a la izquierda se tendría

$$y = A\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = A\text{sen}(kx + \omega t)$$

Función sinusoidal desfasada con respecto al origen. Adicionalmente, podemos tener una función sinusoidal desfasada con respecto al origen de coordenadas, esto es,

$$y(x) = A\text{sen}(kx - \varphi)$$

y la onda viajera será

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t - \varphi)$$

Similarmente para una onda que viaja hacia la izquierda se tendrá

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx + \omega t - \varphi)$$

Nota. Una onda real no puede ser perfectamente armónica, puesto que unas ondas armónicas se extienden hacia el infinito en ambos sentidos a lo largo del eje *x* y no tienen ni principio ni fin en el tiempo. Una onda real debe tener principio y fin en algún lugar del espacio y del tiempo. Las ondas existentes en la naturaleza, como son las ondas de sonido o las ondas de luz, pueden frecuentemente aproximarse a ondas armónicas, puesto que su extensión en el espacio es mucho mayor que su longitud de onda, y el intervalo de tiempo que tardan en pasar por un punto es mucho mayor que su período. Una onda de este tipo se denomina tren de ondas. Así que una onda armónica es una representación idealizada de un tren de ondas.

Ejemplo 2. Una onda sinusoidal es enviada a lo largo de una de un resorte, por medio de un vibrador fijo en uno de sus extremos. La frecuencia del vibrador es 20 ciclos por segundo y la distancia entre puntos de mínimo sucesivos en el resorte es 24 cm. Encontrar:
a) La velocidad de la onda
b) La ecuación de la onda, sabiendo que el desplazamiento longitudinal máximo es de 4 cm. y que se mueve en el sentido positivo de *x*.

Solución.

a) Si $f = 20$ Hertz y λ = 24 cm.
La velocidad es
$v = \lambda f$ = 24 x 20 = 490 cm/seg.

b) La ecuación de la onda que se mueve en el sentido positivo es

$$y = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

Siendo

$A = 4\text{cm}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{12}$ y

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 40\ \pi$$

Luego la ecuación de la onda es

$$y_{(x,t)} = 4\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{24} - 20t\right)$$

y en cm *x* en cm y *t* en segundos.
Corno la variable x aparece en la expresión con signo opuesto a la variable *t*, la onda se propaga en la dirección + *x*.

Ejemplo 3. a) Una onda en una cuerda esta descrita por $y = 0{,}002\text{sen}(0{,}5x - 628t)$.
Determine la amplitud, la frecuencia, periodo, longitud de onda y velocidad de la onda.
b) Una onda en una cuerda esta descrita por $y = 25\text{sen}[1{,}25\pi\ x - 0{,}40\pi\ t]$ en el sistema

cgs. Determine la amplitud, la frecuencia, periodo, longitud de onda, la velocidad de propagación y la velocidad transversal de la onda.

Solución.

a) La ecuación de la onda es

$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$

$A = 0{,}002\ \text{m}$,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}5 \Rightarrow \lambda = 12{,}6\ \text{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 628 \Rightarrow T = 0{,}001\ \text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 100\ \text{Hz}$$

$$v = \lambda f = 1260 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La ecuación de una onda armónica, en general, es

$$y = A\text{sen}(kx - \omega t) = A\text{sen}2\pi(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T})$$

La ecuación dada en el problema se puede poner de la forma siguiente

$$y = 25\text{sen}2\pi\left[\frac{x}{\frac{2}{1{,}25}} - \frac{t}{\frac{1}{0{,}40}}\right]$$

Identificando ambas ecuaciones tenemos:

Amplitud $A = 25$ cm

Longitud de onda $\lambda = \dfrac{2}{1{,}25} = 1{,}6\ \text{cm}$

Frecuencia $f = \dfrac{1}{T} = 0{,}40\ \text{Hz}$

Velocidad de propagación

$$v = \frac{\lambda}{T} = 0{,}64\ \text{cm/s}$$

La velocidad transversal será

$$v_t = \frac{dy}{dt} = 25 \times 0{,}8\pi \cos\pi(1{,}25x - 0{,}80t)$$
$$= 20\pi(1{,}25x - 0{,}80t)\ \text{cm/s}$$

Ejemplo 4. Un foco puntual realiza un movimiento periódico representado por la ecuación.

Las unidades están en el sistema cgs.

$$y = 4\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)$$

Se pide determinar:

a) La velocidad de la onda.

b) La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 1 s

c) La diferencia de fase, en un instante dado, de dos partículas separadas 210 cm.

d) Si el desplazamiento, *y*, de una determinada partícula en un instante determinado es de 3 cm, determinar cuál será su desplazamiento 2 s más tarde

Solución.

a) La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{240}{6} = 40\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

La velocidad es de sentido contrario al positivo del eje *x*.

b) Para *t*

$$\varphi_t = 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)$$

Para *t* + 1

$$\varphi_{t+1} = 2\pi\left(\frac{t+1}{6} + \frac{x}{240}\right)$$

La diferencia de fase es

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t+1}{6} - \frac{t}{6}\right)$$
$$= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

c) En este caso para x_1

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x_1}{240}\right)$$

Para x_2

$$\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x_2}{240}\right)$$

La diferencia de fase viene dada por

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}$$
$$= 2\pi\frac{210}{240} = 2\pi\frac{7}{8} = \frac{7\pi}{4}$$

d) Sabemos que para *t'*:

$$3 = 4\cos 2\pi\left(\frac{t'}{6} + \frac{x}{240}\right)$$

$$\Rightarrow \cos 2\pi\left(\frac{t'}{6} + \frac{x}{240}\right) = \frac{3}{4}$$

El desplazamiento 2 segundos más tarde será

$$y = 4\cos 2\pi\left(\frac{t'+2}{6} + \frac{x}{240}\right)$$
$$= 4\cos 2\pi\left(\frac{t'}{6} + \frac{x}{240} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 4\cos\left[2\pi\left(\frac{t'}{6}+\frac{x}{240}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= 4\left[\cos 2\pi\left(\frac{t'}{6}+\frac{x}{240}\right)\cos\frac{2\pi}{3}\right.$$

$$\left.-\operatorname{sen}2\pi\left(\frac{t'}{6}+\frac{x}{240}\right)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right]$$

Pero

$$\cos 2\pi\left(\frac{t'}{6}+\frac{x}{240}\right)=\frac{3}{4}\ \text{y}$$

$$\operatorname{sen}2\pi\left(\frac{t'}{6}+\frac{x}{240}\right)=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Sustituyendo valores

$$y = 4\left[\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \text{-3,79 cm}$$

Ejemplo 5. Una onda sinusoidal que viaja en la dirección positiva x tiene una amplitud de 15 cm, una longitud de onda de 40 cm y una frecuencia de 8 Hz. El desplazamiento de la onda en $t = 0$ y $x = 0$ es 15 cm

a) Determinar el número de onda, el período, la frecuencia angular y la rapidez de onda.

b) Determinar la constante de fase φ, y se escribirá una expresión general para la función de onda.

Solución.

a) Utilizando las ecuaciones estudiadas obtenemos:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{40}=0{,}157\,/\,\text{cm}$$

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{8}=0{,}125\ \text{s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8) = 50{,}3\ \text{rad/s}$$

$$v=\lambda f=(40)(8)=320\ \text{cm/s}$$

b) Puesto que la amplitud A = 15 cm, y como se tiene y = 15 cm en x = 0 y t = 0, obtenemos

$$15 = 15\operatorname{sen}(-\varphi) \Rightarrow \operatorname{sen}(-\varphi)=1$$

Esto puede comprobarse por simple observación puesto que la función coseno está desplazada 90º respecto de la función seno. Sustituyendo los valores de A, k y ω en esta expresión, se obtiene

$$y = 15\cos(0{,}157t - 50{,}3x)\,\text{cm}$$

Ejemplo 6. La ecuación de una onda armónica que se propaga en una cuerda es

$$y = 25\operatorname{sen}(1{,}25\pi x - 0{,}8\pi t)$$

Donde x se expresa en cm y t en segundos.

a) Determinar cual es el desfase para dos partículas de la soga posicionadas en 2cm y 30cm

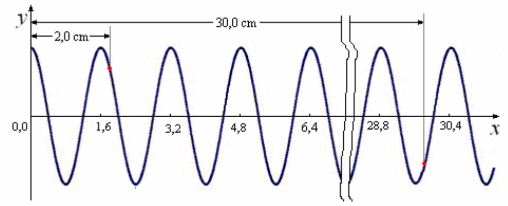
b) Cual es la distancia mínima entre 2 partículas del medio cuyo desfase es de $\pi/3$.

Solución.

a) $y = 25\operatorname{sen}(2{,}5\pi - 0{,}8\pi t) = 25\cos 0{,}8\pi t$

$y = 25\operatorname{sen}(37{,}5\pi - 0{,}8\pi t) = -25\cos 0{,}8\pi t$

El desfase es π rad



El desfase entre esos dos puntos en todo instante será igual a π rad.

b) $1{,}25\pi x_2 - 1{,}25\pi x_1 = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{3(1{,}25)} = \frac{1}{3{,}75} = 0{,}27\ \text{cm}$$

Otra forma

$$\frac{2\pi}{\lambda}=1{,}25\pi \Rightarrow \lambda = 1{,}6\,\text{cm}$$

Si 2π corresponde a 1,6 cm., cuando corresponde a $\dfrac{\pi}{3}$:

$$d=\frac{1{,}6\times\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{1{,}6}{6}=0{,}27\ \text{cm}$$

Ejemplo 7. La velocidad de propagación de una onda es de 330 m/s, y su frecuencia, 10^3 Hz. Calcúlese:

a) La diferencia de fase para dos posiciones de una misma partícula que se presentan en intervalos de tiempo separados 5 x 10^{-4} s.

b) La diferencia de fase en un determinado instante entre dos partículas que distan entre sí 2,75 cm.

c) La distancia que existe entre dos partículas que se encuentran desfasadas 120°.

Solución.

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{330}{10^3}=0{,}33\text{m}\ ,\ T=\frac{1}{f}=10^{-3}\ \text{s}$$

a) Si a un período T le corresponde una diferencia de fase 2π:

a Δt le corresponde una diferencia de fase $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \frac{2\pi 5\times 10^{-4}}{10^{-3}} = \pi\,\text{rad}$$

b) Si a una longitud de onda λ le corresponde una diferencia de fase 2π:

a Δx le corresponde una diferencia de fase $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi 2{,}75\times 10^{-2}}{33\times 10^{-2}} = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

c) $\Delta x = \dfrac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi} = \dfrac{0{,}33\times 2\pi/3}{2\pi} = 0{,}11\ \text{m}$

Ejemplo 8. Sometemos al extremo de una cuerda tensa a vibraciones sinusoidales de 10Hz. La mínima distancia entre dos puntos cuyas vibraciones tienen una diferencia de fase $\pi/5$ es de 20 cm, calcular:
a) La longitud de onda.
b) La velocidad de propagación.
Solución.
a) Si la diferencia de fase para dos puntos separados 20 cm es $\pi/5$, a diferencia de fase para una longitud de onda λ es 2π.

Luego $\lambda = \dfrac{2\pi}{\pi/5}20 = 200\ \text{cm} = 2\ \text{m}$

b) La velocidad de propagación
$v = \lambda f = 2\text{m x } 10\text{s}^{-1} = 20\ \text{m/s}$

Ejemplo 9. Una onda tiene por ecuación: $y(x,t) = 5\,\text{sen}\,\pi(4x - 20t + 0{,}25)$, expresada en el sistema CGS. Determinar la amplitud, la frecuencia, la longitud de onda, el número de onda, la frecuencia angular, la fase inicial y la velocidad de propagación.
Solución
La ecuación general de la onda es:

$$y(x,t) = y_o\,\text{sen}(kx - \omega t + \varphi)$$

$$= \quad y_o\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

Comparada con la dada:

$$y(x,t) = 5\,\text{sen}\,2\pi\left(2x - 10t + \frac{1}{8}\right)$$

Resulta: $y_0 = 5\ \text{cm}$, $T = \dfrac{1}{f}\ \text{s}$

$\Rightarrow\ f = \dfrac{1}{T} = 10\ \text{Hz}$, $\lambda = \dfrac{1}{2}\ \text{cm}$,

$k = 4\ \text{cm}^{-1}$, $\omega = 20\pi r\ \text{rad/s}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}\ \text{rad}$,

$v = \lambda f = \dfrac{1}{2}\times 10 = 5\ \text{cm/s}$

Ejemplo 10. Sometemos al extremo de una cuerda a un vibrador que le produce una onda sinusoidal. Si la ecuación de la vibración escrita en el sistema $y = 5\,\text{sen}\,0{,}2\pi t$, propagándose en la cuerda con una velocidad de 10 cm/s. Determine la ecuación de la onda producida.
Solución.
La ecuación de la onda que se propaga el sentido negativo del eje OX es:

$$y(x,t) = y_0\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} + \varphi\right)$$

$$\Rightarrow\ y(x,t) = y_0\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T} + \varphi\right)$$

Comparando con la dada: $y(0,t) = 5\,\text{sen}\,0{,}2\pi t$

$y_0 = 5\ \text{cm}$, $\dfrac{2\pi}{T} = 0{,}2\pi \rightarrow T = 10\ \text{s}$, $\varphi = 0$

Además como
$\lambda = vT \ \rightarrow\ \lambda = 10\times 10 = 100\ \text{cm}$
De aquí

$$y(x,t) = 5\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{x}{100} + \frac{t}{10}\right)$$

Ejemplo 11. Las ecuaciones de dos ondas escritas en el sistema CGS vienen dadas por:
$y_1(x,t) = 4\,\text{sen}\,2\pi(4t - 0{,}5x)$ e
$y_2(x,t) = 6\,\text{sen}(4\pi x - 5\pi t)$
Calcular en cada caso:
a) Velocidad en función del tiempo, de un punto situado a 10 cm del foco.
b) Velocidad máxima de ese punto.
c) Velocidad de fase.
d) ¿En qué instante alcanza su velocidad máxima un punto situado a 1,5 m del foco?
e) Posición de los puntos que tienen velocidad máxima en $t = 0$.
Solución.
$y_1(x,t) = 4\,\text{sen}(8\pi t - \pi x)$,
$y_2(x,t) = 6\,\text{sen}(4\pi x - 5\pi t)$

a) $v_{y1}(x,t) = \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = 32\pi\cos(8\pi t - \pi x)$

$v_{y2}(x,t) = \dfrac{\partial y_2}{\partial t} = -30\pi\cos(4\pi x - 5\pi t)$

Cuando $x = 10$ cm, entonces:
$v_{y1}(10,t) = 32\pi\cos(8\pi t - 10\pi) = 32\pi\cos 8\pi t$
$v_{y2}(10,t) = -30\pi\cos(40\pi - 5\pi t)$
$= -30\pi\cos 5\pi t$

b) En valor absoluto: $v_{y1\max} = 32\pi\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$

$v_{y2\max} = 30\pi\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$

c) $v_1 = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{8\pi}{\pi} = 8\frac{\text{cm}}{\text{s}}$,

$v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{5\pi}{4\pi} = \frac{5}{4}\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

d) Para x = 150 cm, obtenemos:

$v_{y1}(150,t) = 32\pi\cos(8\pi t - 150\pi)$

$= 32\pi\cos 8\pi t$

si v_{y1} es máxima, entonces:

$\cos 8\pi t = \pm 1 \Rightarrow 8\pi t = n\pi \Rightarrow t = \frac{n}{8} s$

En v_{y2} será:

$v_{y2}(150,t) = -30\pi\cos(600\pi - 5\pi t)$

$= -30\pi\cos 5\pi t$

En el máximo:

$\cos 5\pi t = \pm 1 \Rightarrow 5\pi t = n\pi \Rightarrow t = \frac{n}{5}\text{s}$

e) Para t = 0, entonces: $v_{y1}(x,0) = 32\pi\cos\pi x$

y para que sea máxima:

$\cos\pi x = \pm 1 \Rightarrow \pi x = n\pi \Rightarrow x = n$

Para v_{y2}, será: $v_{y2}(y,0) = -30\pi\cos 4\pi x$

y para que sea máxima:

$\cos 4\pi x = \pm 1 \Rightarrow 4\pi x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n}{4}$

Ejemplo 12. Sometemos al extremo de una cuerda tensa a un vibrador que le produce vibraciones sinusoidales. Por este efecto se propaga por la cuerda una onda transversal que tiene por ecuación:

$y(x,t) = 10\,\text{sen}\,\pi(1{,}6x - 0{,}8t)$, expresada en el sistema CGS.

a) ¿Qué condiciones iniciales nos determinan esta ecuación de onda?

b) Determínese para esta onda su amplitud, velocidad de propagación y longitud de onda.

c) Tiempo que tarda en comenzar a vibrar una partícula de la cuerda situada a 10 cm del extremo en que se encuentra el vibrador y ecuaciones horarias del movimiento de el1a [$y(t)$, $v(t)$, $a(t)$] una vez transcurrido éste.

d) Dibujar la forma que tiene la cuerda [$y(t)$] cuando han transcurrido 5,625 s del comienzo de la vibración (perfil de la onda).

Solución.

a) Si hacemos x = 0 y t = 0, tendremos:

$y(0,0) = 10\,\text{sen}\,0 = 0$

$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -8\pi\cos\pi(1{,}6x - 0{,}8t)$

$\Rightarrow v(0,0) = -8\pi < 0$

La ecuación dada nos determina que en el extremo de la cuerda en que se encuentra al vibrador x = 0 y para t = 0 es cuando comienza a actuar el vibrador con movimiento vibratorio armónico dirigido hacia abajo (en el sentido negativo del eje y. La onda se propaga en la dirección positiva del eje x.

b) Como la ecuación general de una onda sin fase inicial $(y = 0)$es:

$y(x,t) = y_0\,\text{sen}\,2\pi(kx - \omega t) = y_0\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$

Comparándola con la dada:

$y(x,t) = 10\,\text{sen}\,\pi(1{,}6x - 0{,}8t)$

$= 10\,\text{sen}\,2\pi(0{,}8x - 0{,}4t)$

De aquí

$y_0 = 10\,\text{cm}$, $\lambda = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25\text{cm}$,

$T = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5\text{s}$, $f = \frac{1}{T} = 0{,}4\text{Hz}$,

$v = \lambda f = 1{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}5\text{cm/s}$

c) La partícula comenzará a vibrar transcurrido un tiempo t, tal que:

$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v} = \frac{10}{0{,}5}$ =20 s

Pasado éste, la partícula comienza a vibrar con movimiento armónico de ecuación:

$x = 10\text{cm} \Rightarrow y(t) = 10\,\text{sen}\,2\pi(8 - 0{,}4t)$

Luego:

$v(t) = \frac{dy}{dt} = -8\pi\cos 2\pi(8 - 0{,}4t)$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -6{,}4\pi^2\,\text{sen}\,2\pi(8 - 0{,}4t)$

Obsérvese que el origen de las elongaciones para este movimiento vibratorio armónico se encuentra a 20 s del comienzo de la actuación del vibrador. El signo menos de la velocidad nos indica que comienza a moverse hacia abajo (sentido negativo del eje y), y, por tanto, la partícula se encuentra en fase con el vibrador. (El tiempo 20 s = 8 T nos indica que han transcurrido 8 períodos y, por tanto, la partícula se encuentra a

8 λ = 10 cm de distancia del origen, y la forma de la cuerda hasta esa partícula será 8 "bucles" hacia abajo del eje y y otros tantos hacia arriba).

d) t = 5,625 s $\Rightarrow y(x) = 1\,\text{sen}\,2\pi(0{,}8x - 2{,}25)$

Intersección con eje y: x = 0 $\Rightarrow$

$y(0) = -10\,\text{sen}\,4{,}5\pi = -10\text{cm}$

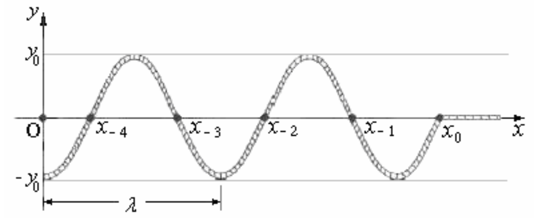
lo que nos indica que el vibrador se encuentra en su máxima elongación (amplitud) y por debajo del origen.

Intersección con eje *x:*
El trozo de cuerda que se ha puesto en movimiento en ese tiempo será:
x = *vt* = *0,5* x 5,625 = 2,8125 cm,

correspondiente a $2{,}8125\dfrac{\lambda}{1{,}25} = 2{,}25\lambda =$

$2\lambda + \dfrac{\lambda}{4}$

lo que quiere decir es que a partir de esta distancia la cuerda se encuentra en reposo, con lo que la gráfica (forma de la cuerda en ese instante) será la de



La ecuación es

$$y(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2\pi(0{,}8x - 2{,}25) = n\pi \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{n + 4{,}5}{1{,}6}$$

Hay cinco valores de x para $y(x) = 0$.

x_0 corresponde a $n = 0 \Rightarrow$

$$x_0 = \frac{0 + 4{,}5}{1{,}6} = 2{,}8125\text{cm}$$

x_{-1} corresponde a $n = -1 \Rightarrow$

$$x_{-1} = \frac{-1 + 4{,}5}{1{,}6} = 2{,}1875\text{cm}$$

x_{-2} corresponde a $n = -2 \Rightarrow$

$$x_{-2} = \frac{-2 + 4{,}5}{1{,}6} = 1{,}5625\text{cm}$$

x_{-3} corresponde a $n = -3 \Rightarrow$

$$x_{-3} = \frac{-3 + 4{,}5}{1{,}6} = 0{,}9375\text{cm}$$

x_{-4} corresponde a $n = -4 \Rightarrow$

$$x_{-4} = \frac{-4 + 4{,}5}{1{,}6} = 0{,}3125\text{cm}$$

Ejemplo 13. Dada la siguiente función de onda viajera, con *x*(m), *t*(s):

$$y_{(x,t)} = 0{,}02\text{sen}(4\pi x - 3\pi t)$$

a) Determina su amplitud, frecuencia, período y longitud de onda.
b) Calcula la velocidad de propagación de la onda y la velocidad transversal máxima de las partículas.
c) Representa la onda en forma temporal, para *x* = 2m

Solución.
a) *A* = 0,02 m

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = 4\pi,\ f = 2 \text{ Hz},\ T = 0{,}5 \text{ s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3\pi,\ \lambda = \frac{2}{3}\text{ m}$$

b) $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{4\pi}{3\pi} = 1{,}33 \text{ m/s}$

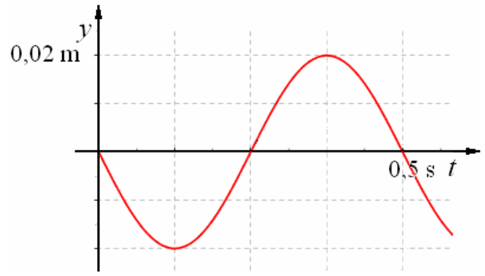
$$v_t = \frac{d}{dt}y_{(x,t)} = 0{,}02(4\pi)\cos(4\pi x - 3\pi t)$$

$$v_{tmáx} = 0{,}02(4\pi) = 0{,}25 \text{ m/s}$$

c) $y_{(x,t)} = 0{,}02\text{sen}(4\pi x - 3\pi t)$

Para *x* = 2m

$$y_{(2,t)} = 0{,}02\text{sen}(8\pi - 3\pi t) = -0{,}02\text{sen}3\pi t$$



Ejemplo 14. Por una cuerda tensa de 10 m de longitud se propagan pulsos armónicos de 2 cm de amplitud. Los pulsos llegan al punto P, situado en el centro de la cuerda cada 4 s. Se sabe además que la distancia entre las crestas (máximos) consecutivos es de 1,2 m.
a) Escribir la función de onda viajera *y*(*x*,*t*).
b) Representar gráficamente a la función de onda para *t* = 3s.
c) Determina la diferencia entre las amplitudes *y*, para dos puntos de la cuerda situados en *x* = 0,6 m y *x* = 1,8 m.
d) Determina la diferencia entre las amplitudes *y*, para el punto situado en *x* = 1m, entre *t* = 6s y *t* = 8s.
e) Determina la velocidad máxima y la aceleración máxima de una partícula de la cuerda.

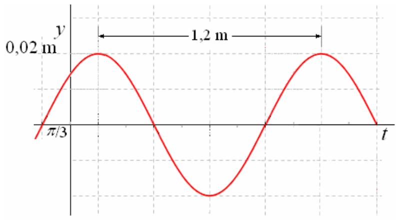
Solución.
a) *A* = 0,02 m
$T = 4\,\text{s}$, $\lambda = 1{,}2\,\text{m}$

$$y_{(x,t)} = 0{,}02\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{1{,}2} - \frac{t}{4}\right)$$
$$= 0{,}02\text{sen}\left(\frac{5\pi\, x}{3} - \frac{\pi\, t}{2}\right)$$

b) para $t = 3$s.

$$y_{(x,3)} = 0{,}02\text{sen}\left(\frac{5\pi\, x}{3} - \frac{3\pi}{2}\right)$$

El desfase $\pi/3$.



c) $y_{(x,t)} = 0{,}02\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}t\right)$

Para $x = 0{,}6$ m

$$y_{(0,6,t)} = 0{,}02\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{2}t\right)$$

Para $x = 1{,}8$ m

$$y_{(0,6,t)} = 0{,}02\text{sen}\left(3\pi - \frac{\pi}{2}t\right)$$

La diferencia de fase es 2π.
Luego no hay diferencia entre las amplitudes correspondientes.

d) $y_{(x,t)} = 0{,}02\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}t\right)$

Para $t = 6$ s

$$y_{(x,6)} = 0{,}02\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}x - 3\pi\right)$$

Para $t = 8$ s

$$y_{(x,8)} = 0{,}02\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}x - 4\pi\right)$$

La diferencia de fase es π.
Luego no hay diferencia entre las amplitudes correspondientes.

e) $y_{(x,t)} = 0{,}02\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}t\right)$

La velocidad

$$v_{(x,t)} = 0{,}02\pi\cos\left(\frac{5\pi\, x}{3} - \pi t\right)$$

Velocidad máxima

$v_{máx} = 0{,}01\pi = 0{,}0314$ m/s

La aceleración

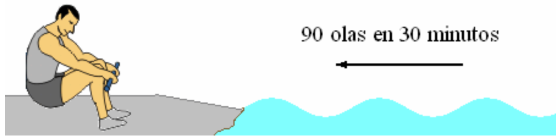
$$a_{(x,t)} = -0{,}005\pi^2\text{sen}\left(\frac{5\pi\, x}{3} - \pi\, t\right)$$

Aceleración máxima

$$a_{máx} = -0{,}005\pi^2 = 0{,}049\ \text{m/s}^2$$

Ejemplo 15. Un veraneante que descansa en la playa observa que durante los últimos 30 minutos han arribado 90 olas a la orilla. Luego se mete al mar y se dirige nadando hacia un bote anclado y ubicado a 450 m mar adentro, tomándole un total de 5 minutos en llegar. En el trayecto el nadador sorteo 60 olas.
Determine
a) La velocidad con que las olas se acercan a la orilla es:
b) La separación entre crestas de 2 olas consecutivas.

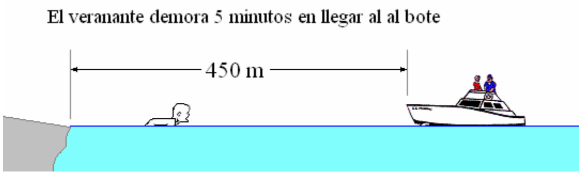
Solución.
a) Cuando el veraneante descansa en la playa observa que en 30 llegan 90 olas a la orilla



La frecuencia de las olas es

$$f = \frac{90}{30 \times 60} = \frac{1}{20}\ \text{Hz}$$

Cuando se dirige nadando hacia un bote anclado ubicado a 450 m mar adentro, le toma 5 minutos en llegar.



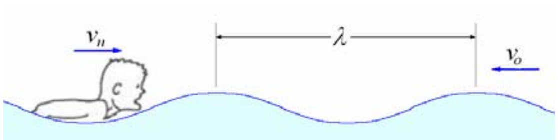
La velocidad del nadador es

$$v_n = \frac{450}{5 \times 60} = 1{,}5\ \text{m/s}$$

La longitud de onda de las olas (separación entre crestas consecutivas) es

$$\lambda = \frac{v_o}{f} = 20 v_o\ \text{m}$$

Para un nadador que se acerca con una velocidad v_n, como se muestra en la figura, las olas parecen tener una mayor velocidad $v_n + v_o$ (considerando que la velocidad de las olas relativas al aire es siempre la misma). Como resultado llegan al nadador en un determinado tiempo un mayor número de frentes de onda que si hubiera estado en reposo.



El nadador en el trayecto sortea 60 olas en 5 minutos, luego las olas tienen una frecuencia *f'*:

$f' = \dfrac{60}{5 \times 60} = \dfrac{1}{5}$ Hz, más alta que la frecuencia *f* de la fuente.

Luego

$$v_n + v_o = \lambda f' \quad \Rightarrow \quad 1{,}5 + v_o = 20 v_0 \left(\frac{1}{5}\right) \quad \Rightarrow$$

$$1{,}5 + v_o = 4 v_0 \ \Rightarrow \ v_o = 0{,}5 \text{ m/s}$$

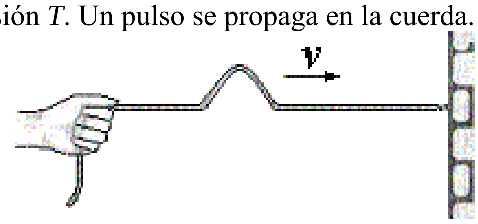
b) La separación entre crestas de 2 olas consecutivas es una longitud de onda.

Como $v_o = 0{,}5$ m/s y $f = \dfrac{1}{20}$ Hz

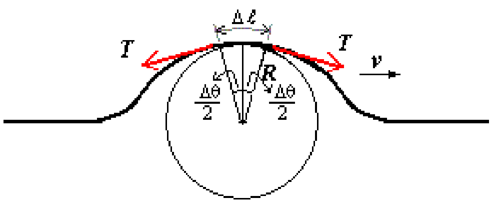
$$\lambda = \frac{v_o}{f} = \frac{0{,}5}{1/20} = 10 \text{ m.}$$

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN EN FUNCIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MEDIO.

Forma simple de calcular la velocidad de la onda en una cuerda en función de las propiedades del medio. Supongamos que tenemos una cuerda de masa por unidad de longitud μ, que esta estirada por una fuerza de tensión *T*. Un pulso se propaga en la cuerda.



Tomamos un pequeño elemento $\Delta\ell$ de la cuerda se muestra en la figura.



Este elemento, de longitud, en la parte más elevada de la onda, está sujeto a la tensión de la cuerda en los dos sentidos de propagación de la onda. Podemos dibujar una circunferencia de radio *R*, en que *R* es la amplitud de la onda. Este elemento de la cuerda, considerado bien pequeño, está en el lado de un triángulo cuyo ángulo opuesto está dado por $\Delta\theta$. Instantáneamente, es como si este elemento de cuerda estuviese en movimiento en una trayectoria circular de radio R, con velocidad *v*; la velocidad de la onda.

Aplicando la segunda ley de Newton al segmento de cuerda $\Delta\ell$

$$\sum F_x = ma_y \ \Rightarrow \ T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

$$\sum F_y = ma_y \ \Rightarrow \ -2T\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = -\Delta m a_c$$

$a_c = \dfrac{v^2}{R}$. Como $\dfrac{\Delta\theta}{2}$ es pequeño, podemos considerar $\text{sen}\dfrac{\Delta\theta}{2} \approx \dfrac{\Delta\theta}{2}$

Reemplazando:

$$2T\frac{\Delta\theta}{2} = \mu R \Delta\theta \frac{v^2}{R} \ \Rightarrow \ T = \mu v^2 \ \text{y} \ v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Obtenemos la velocidad de la onda en la cuerda en función de las propiedades de la cuerda: su tensión y su densidad lineal.

Ejemplo 16. La cuerda Si de un mandolina tiene 0,34 m de largo y tiene una densidad linear de 0,004 kg/m. El tornillo de ajuste manual unido a la cuerda se ajusta para proporcionar una tensión de 71,1 N. ¿Cuál entonces es la frecuencia fundamental de la cuerda?

Solución.

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2(0{,}34m)}\sqrt{\frac{71{,}1N}{0{,}004\,kg/m}}$$

$= 196$ Hz

Un instrumento de cuerda tal como una guitarra es templada ajustando la tensión en una cuerda por medio de un tornillo de ajuste manual. La longitud de la cuerda es fija, así que el ajuste de la tensión da la frecuencia fundamental. Otras frecuencias fundamentales pueden ser alcanzadas acortando la longitud de la cuerda presionando en un traste. Finalmente, varias cuerdas de diversas densidades se utilizan para dar una gama de las velocidades de la onda, de tal modo proporcionando el acceso a una mayor gama de frecuencias fundamentales.

Ejemplo 17. Una onda $y = A\text{sen}(k_1 x - \omega_1 t)$ viaja por una cuerda de densidad de masa lineal μ. y tensión *T*. Diga, para cada una de las ondas que se dan a continuación, si pueden viajar por la misma cuerda simultáneamente con la onda dada. ¿Por qué? ¿Bajo qué condición?

$y_1 = A\text{sen}(k_1 x + \omega_2 t)$

$y_2 = A\text{sen}(k_2 x + \omega_1 t)$
$y_3 = A\text{sen}(k_2 x + \omega_2 t)$
$y_4 = A\text{sen}(k_1 x + \omega_1 t)$
Siendo $\omega_1 \neq \omega_2$ y $k_1 \neq k_2$

Solución.
La velocidad de propagación es única;
$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\omega_1}{k_1}$, por lo tanto, la relación $\frac{\omega_1}{k_1}$ esta determinada o fija.

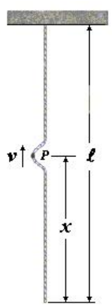
y_1. **No puede viajar**, se requiere: $\frac{\omega_2}{k_1} = \frac{\omega_1}{k_1}$, lo que nos lleva a una falsedad, contra lo supuesto, $\omega_2 = \omega_1$

y_2. **No puede viajar**, por que similar al caso anterior: $\frac{\omega_1}{k_2} = \frac{\omega_1}{k_1}$ también nos lleva a una falsedad contra lo supuesto, $k_2 = k_1$

y_3. **Si puede viajar**, bajo la condición:
$\frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega_1}{k_1}$

y_4. **Si puede viajar**, por que tienen igual ω_1 y k_1 es la misma onda que viaja en sentido contrario.

Ejemplo 18. Una cuerda de masa *M* y longitud ℓ cuelga del techo de una habitación.
a) Probar que la velocidad de pulso transversal en función de la posición cuando se propaga a lo largo de ella es $v = \sqrt{gx}$, siendo *x* la distancia al extremo libre.
b) Probar que un pulso transversal recorrerá la cuerda en un tiempo $2\sqrt{\ell/g}$.



Solución.
a) La velocidad del punto *P* es $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, la tensión *T* en ese punto es debido a la cuerda que cuelga de longitud x, cuya masa es μx y su peso $T = \mu g x$.

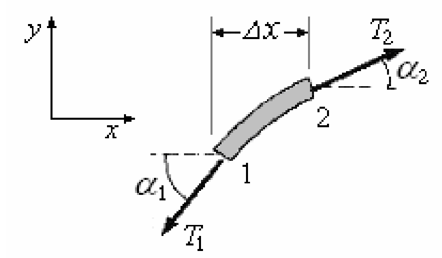
Luego $v = \sqrt{\frac{\mu g x}{\mu}} = \sqrt{gx}$

b) para encontrar el tiempo de recorrido del pulso
$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{gx} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{gx}}$

$\Rightarrow t = \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{gx}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

ECUACIÓN DE LA ONDA.

Ondas transversales en una cuerda. En esta parte trataremos la ecuación de la onda y su solución, considerando el caso particular de la onda transversal en una cuerda, resultado que es general también para los demás casos.



La cuerda tiene una masa uniforme μ por unidad de longitud y está sometida a una tensión *T*. Sobre esta cuerda esta viajando una onda transversal. Consideremos un elemento de longitud (de 1 a 2) como se muestra en la figura, sobre este elemento actúan dos fuerzas externas a él, que la jalan en cada extremo debido al resto de la cuerda. Estas fuerzas son de igual magnitud que la tensón de la cuerda.
La fuerza horizontal sobre este elemento es:
$\sum F_x = T_1 \cos\alpha_2 - T_2 \cos\alpha_1 = 0$
si la curvatura de la cuerda no es muy grande
$\cos\alpha_1 \cong \cos\ \alpha_2$
de aquí concluimos que $T_1 \approx T_2 \approx T$
La fuerza vertical sobre el elemento es:
$\sum F_y = T\,\text{sen}\,\alpha_2 - T\,\text{sen}\,\alpha_1$
Si los desplazamientos transversales de la cuerda no son muy abruptos, podemos considerar que,
Sen $\alpha \cong \tan\alpha$
Luego,
$\sum F_y = T(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1)$
Que será la fuerza total neta que actúa sobre el elemento Δx considerado.
Aplicando la segunda ley de Newton,
$\sum F_y = \Delta m a_y = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ denota la aceleración vertical del elemento de cuerda.

Como $\tan\alpha_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1$, $\tan\alpha_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2$

y, $\Delta m = \mu\Delta\ell = \mu\frac{\Delta x}{\cos\theta} \approx \mu\Delta x$

se tendrá

$$\mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right]$$

ó

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right]}{\Delta x}$$

Llevando al límite cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Ecuación diferencial del movimiento.

Como la velocidad de propagación de una onda en una cuerda tensa es $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, por lo que la ecuación diferencial de la onda la escribimos como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Cuya solución es la ecuación de la onda

$$y = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

comprobación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\text{sen}(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2\text{sen}(kx - \omega t)$$

Reemplazando

$$-A\omega^2\text{sen}(kx - \omega t) = -v^2 Ak^2\text{sen}(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

Expresión válida para toda onda, ya que ω/k corresponde a la velocidad de propagación de la onda.

De manera similar podemos encontrar la velocidad de propagación de la onda para:

a) Ondas longitudinales en una barra de metal de densidad ρ módulo de elasticidad *Y*.

$$v_L = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

b) Ondas transversales en una barra de metal de densidad ρ módulo de elasticidad cortante o de cizalladura *G*.

$$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

c) Ondas longitudinales en un gas de densidad ρ módulo de compresibilidad volumétrica *B*.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Ejemplo 19. Para el cobre el modulo de elasticidad volumétrica es 14 x 10^{10} N/m^2 y la densidad es 8920 kg/m^3. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el cobre?

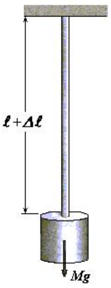
Solución.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{14\times 10^{10}}{8920}} = 3960 \text{ m/s}$$

Ejemplo 20. A un alambre de acero (Módulo de Young: Y = 2,0 x 10^{11} N/m^2, densidad del acero: ρ = 7,8 g/cm^3) que tiene un diámetro de 1 mm y 4 m de longitud, lo colgamos del techo, calcular:

a) El alargamiento del alambre cuando de su extremo libre colgamos un peso de 150 kg.

b) La velocidad de propagación de las ondas longitudinales y transversales a lo largo del alambre cuando el cuerpo está suspendido.



Solución.

a) $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{YA} \quad \Rightarrow$

$$\Delta\ell = \frac{Mg\ell}{Y\pi R^2} = \frac{150\times 9{,}8\times 4}{2\times 10^{12}\pi 25\times 10^{-8}}$$

$= 37{,}4 \times 10^{-3}$ m

b) La velocidad de propagación de las ondas longitudinales lo largo del alambre

$$v_{longitudinal} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\times 10^{11}}{7{,}8\times 10^3}} = 5{,}06\times 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo del alambre

$$v_{transversal} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\rho\pi R^2}} \Rightarrow$$

$$v_{transversal} = \sqrt{\frac{150\times 9{,}8}{7{,}8\times 10^3\times\pi 25\times 10^{-8}}}$$

$$= 490\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 21. Se tiene un alambre de acero de 1,3 mm de diámetro, sabiendo que 5 m de este alambre se alarga 0,5 mm con una carga de 2,1 kg. (Densidad del acero, 7,8 g/cm^3)
a) Calcule el módulo de Young en el acero.
b) Calcule la velocidad de propagación de una onda
Solución.
Donde ρ, la densidad es un valor conocido igual a 7,8 g/cm^3.
a) El módulo de Young *Y* puede calcularse de

$$Y = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell} = \frac{F\ell}{A\Delta\ell}$$

$$= \frac{(2{,}1\times 9{,}8)(5)}{\left[\pi\left(1{,}3\times 10^{-3}\right)^2/4\right]\left(0{,}5\times 10^{-3}\right)}$$

$= 15{,}5 \times 10^{10}$ N/m^2

b) La velocidad de propagación del sonido en el acero viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{15{,}5\times 10^{10}}{7{,}8\times 10^3}} = 4458 \text{ m/s}$$

Ejemplo 22. Una cuerda de piano de longitud 40 cm, sección 0,4 mm^2 y densidad 7,8 g/cm^3, emite un sonido fundamental cuando se aproxima un diapasón de frecuencia 218 Hz.
a) Determine la tensión a que está sometida.
b) Si la tensión se multiplica por 4, ¿cómo se modifica la frecuencia de su sonido fundamental?
Solución.
a) En este caso $\frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = 2L$ =0,8 m
La velocidad de las ondas es:
$v = \lambda f$ = 0,8 x 218 = 174,4 m/s
La velocidad de las ondas transversales en la cuerda tensa está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu v^2$$

La densidad lineal es:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{mA}{LA} = \rho A = (7{,}8 \times 10^3)(0{,}4 \times 10^{-6})$$

$= 3{,}12 \times 10^{-3}$ kg/m

Finalmente
$T = \mu v^2 = (3{,}12 \times 10^{-3})(174{,}4)^2 = 94{,}9$ N
b) En este caso la velocidad de las ondas transversales es:

$$v' = \sqrt{\frac{4T}{\mu}} = 2\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2v.$$

La longitud de onda no cambia y la nueva frecuencia será:

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{2v}{\lambda} = 2f = 2 \times 218 = 436 \text{ Hz.}$$

Ejemplo 23. A un resorte cuya masa es 200 g y cuya longitud natural cuando está colgado de un punto fijo es 4 m, se le pone una masa de 100 g unida a su extremo libre.
Cuando esta masa se encuentra en equilibrio, la longitud del resorte es 4,05 m. Determinar la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el resorte.
Solución.

Ondas longitudinales en un resorte.

$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, para un resorte $Y = \frac{k\ell_o}{A}$, $\rho = \frac{\mu}{A}$

luego para el resorte $v = \sqrt{\frac{k\ell_o}{\mu}}$

$\ell_0 = 4m$, $\Delta\ell = \ell - \ell_o$ = 4,05 – 4 = 0,05 m

$$F = k\Delta\ell \Rightarrow k = \frac{Mg}{\Delta\ell} = \frac{0{,}1\times 9{,}8}{0{,}05} = 19{,}6\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\mu = \frac{m}{\ell_o} = \frac{0{,}2}{4} = 5\times 10^{-2}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Finalmente

$$v = \sqrt{\frac{k\ell_o}{\mu}} = \sqrt{\frac{19{,}6\times 4}{5\times 10^{-2}}} = 39{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 24. Un alambre de bronce de densidad 8,5 g/cm^3 y radio 0,01 cm esta estirado entre dos puntos separados 100 cm se estira 0,05 cm. Encontrar.
a) La tensión en el alambre.
b) La velocidad de la onda transversal.
c) La frecuencia de la vibración transversal fundamental.
El módulo de Young del bronce es 9,6 x 10^{10} N/m^2.
Solución.
a) El alambre está estirado

$$\Delta L = \frac{TL}{YA}$$

La tensión del alambre es

$$T = \frac{\Delta L}{L} YA = \frac{0{,}05}{100}\left(9{,}6\times 10^{10}\right)\left(\pi 10^{-8}\right)$$

= 1,51 N

b) La densidad lineal del alambre es

$\mu = \rho A = (8500)\left(\pi 10^{-8}\right)$ = 2,67 x 10^{-4}

La velocidad de una onda transversal en el alambre será

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}51}{2{,}67\times 10^{-4}}} = 75 \text{ m/s}$$

c) Siendo $v = \lambda f$

La frecuencia de la onda es

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} = \frac{75}{2} = 37{,}5 \text{ Hz.}$$

Ejemplo 25. Suele utilizarse en clase un resorte largo y blando para mostrar las ondas longitudinales.

a) Sea un resorte de constante elástica *k*, masa *m*, longitud *L*. Si el resorte obedece la ley de Hooke, determine la rapidez de propagación de las ondas longitudinales en él, en función de *m*, *L* y *k*.

b) Evalúe la rapidez de propagación de las ondas longitudinales para un resorte con
m = 0,25 kg, *L* = 2,0 m y *k* = 1,5 N/m.

Solución.

a) La velocidad de propagación de una onda longitudinal esta dada por

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

El modulo de Young se obtiene de la siguiente manera

$$k = \frac{YA}{L} \Rightarrow Y = \frac{kL}{A}$$

La densidad es

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{AL}$$

Luego

$$v = \sqrt{\frac{\frac{kL}{A}}{\frac{m}{AL}}} = \sqrt{\frac{kL^2}{m}}$$

b) reemplazando valores tenemos

$$v = \sqrt{\frac{kL^2}{m}} = \sqrt{\frac{(1{,}5)\left(2{,}0^2\right)}{0{,}25}} = 4{,}9 \text{ m/s}$$

Ejemplo 26. Se tiene una cuerda de longitud 0,386 m que vibra en su modo fundamental, con nodos en sus extremos. El punto medio de la cuerda tiene una aceleración transversal máxima de 8,4 x 10^3 m/s^2 y una rapidez transversal máxima de 3,8 m/s.

a) ¿Cuál es la amplitud máxima de dicha onda estacionaria?

b) ¿Qué rapidez tienen las ondas viajeras transversales en esta cuerda?

Solución.

a) La aceleración máxima transversal es

$a_{ymáx} = \omega^2 A$ = 8,4 x 10^3 m/s^2

La velocidad máxima transversal es

$v_{ymáx} = \omega A =$ 3,8 m/s

Dividiendo el cuadrado de la velocidad entre la aceleración:

$$\frac{v_{ymáx}^2}{a_{ymáx}} = \frac{\omega^2 A^2}{\omega^2 A} = \frac{3{,}8^2}{8{,}4\times 10^3}$$

$\Rightarrow A$ = 1,72 x 10^{-3} m

La amplitud máxima es 1,72 x 10^{-3} m.

b) La velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \lambda f$$

El valor de la longitud de oda es

λ = 2 x 0,386 = 0,772 m

La frecuencia encontramos de la forma siguiente

$v_{ymáx} = \omega A \Rightarrow$

$$\omega = \frac{v_{ymáx}}{A} = \frac{3{,}8}{1{,}72\times 10^{-3}} = 2209 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2209}{2\pi} = 351{,}57 \text{ Hz}$$

Finalmente.

$v = \lambda f = (0{,}772)(351{,}57)$ = 271,41 m/s

Ejemplo 27. Un alambre de 2 m, fijo por ambos extremos, está vibrando en su modo fundamental. La tensión es de 40 N y la masa del alambre es 0,1 kg. El punto medio del alambre tiene una amplitud de 2 cm.

a) Hallar la energía cinética máxima del alambre.

b) En el instante en el que el desplazamiento transversal viene dado por la expresión 0,02 sen(πx/2) en metros, ¿cuál es la energía cinética del alambre?

Sugerencia: Primeramente encuentre la energía cinética de un elemento diferencial del alambre.

Solución.

El alambre vibrando presenta una onda estacionaria de longitud de onda λ = 4 m

Velocidad $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

T = 40 N, $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{0,1}{2}$ = 0,05 kg/m

$v = \sqrt{\dfrac{40}{0,05}}$ = 28,28 m/s

$y = 2A\text{sen}kx\cos\omega t$

Como la amplitud del punto central es 0,02 m

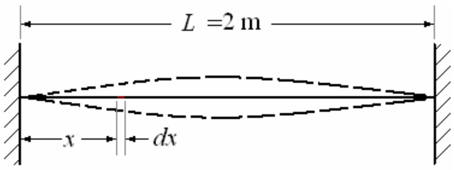
$2A = 0,02$ m

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

$v = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = kv = \dfrac{\pi}{2}\times 28,28 = 14,14\pi$

$y = 0,02\text{sen}\dfrac{\pi}{2}x\cos 14,14\pi t$

a) Tomamos un elemento diferencial *dx* del alambre



Su energía cinética

$dK = \dfrac{1}{2}dmv_y^2$

$dm = \mu dx = 0,05dx$

Siendo una onda estacionaria

$y = 0,02\text{sen}\dfrac{\pi}{2}x\cos 14,14\pi t$

$v_y = \dfrac{dy}{dy} = \dfrac{d}{dt}\left(0,02\text{sen}\dfrac{\pi}{2}x\cos 14,14\pi t\right)$

$= -0,28\pi\text{sen}\dfrac{\pi}{2}x\text{sen}14,14\pi t$

$dK = \dfrac{1}{2}(0,05dx)\left(-0,28\pi\text{sen}\dfrac{\pi}{2}x\text{sen}14,14\pi t\right)^2 dx$

$= 1,96\pi^2\times 10^{-3}\text{sen}^2 14,14\pi t\text{sen}^2\dfrac{\pi}{2}xdx$

Integrando para todo el alambre

$K = \int dK$

$= 19,3\times 10^{-3}\text{sen}^2 14,14\pi td\int_{x=0}^{x=2}\text{sen}^2\dfrac{\pi}{2}xdx$

$= 19,3\times 10^{-3}\text{sen}^2 14,14\pi t\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\text{sen}\dfrac{\pi}{2}x}{2\pi}\right)_0^2$

$= 19,3\times 10^{-3}\text{sen}^2 14,14\pi t$

El valor máximo es cuando $\text{sen}^2 14,14\pi t = 0$

$K_{máx} = 19,3\times 10^{-3}$ J

b) Siendo la ecuación de la onda estacionaria

$y = 0,02\text{sen}\dfrac{\pi}{2}x\cos\omega t$

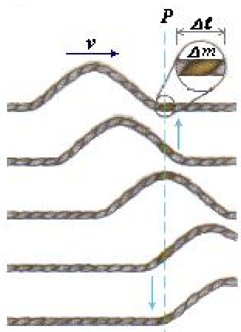
El instante en que $y = 0,02\text{sen}\dfrac{\pi}{2}x$,

corresponde a amplitud máxima y velocidad cero.

Luego la energía cinética del alambre es cero.

ENERGÍA E INFORMACIÓN TRANSFERIDA MEDIANTE ONDAS

Tenemos la experiencia de energía transferida por ondas en muchas situaciones. Sentimos la fuerza de una ola en el océano, nuestra piel siente el calor de las ondas luminosas del sol, escuchamos las ondas de sonido. Además, la mayor parte de la información que recibimos nos llega mediante ondas. El habla y la música se transmiten por ondas de sonido, la radio y la televisión por ondas electromagnéticas. La luz reflejada por la cual usted lee esta página es una onda. ¿Cómo depende la energía (y en consecuencia la información) transmitida por las ondas de las propiedades de las ondas? Para responder esta pregunta antes debemos considerar cómo es transferida la energía por un solo pulso. Luego, ampliaremos los resultados con el fin de tener una expresión para la energía de una onda armónica.



A un elemento de masa Δm en el punto P se le da una energía cinética a medida que un pulso de onda pasa con una velocidad v.

Para el tiempo t = 0, un pequeño segmento de la cuerda alrededor del punto P de la figura anterior, con masa Δm y longitud $\Delta\ell$, está en reposo y no tiene energía cinética. El movimiento hacia arriba y hacia abajo proporciona la energía requerida para iniciar el pulso a lo largo de la cuerda. A medida que el borde que encabeza el pulso alcanza P, el segmento $\Delta\ell$ comienza a moverse hacia arriba. A medida que la cresta de la onda pasa el segmento $\Delta\ell$, el segmento se mueve a su posición más alta y empieza de nuevo a bajar, teniendo energía cinética mientras está en movimiento. Cuando el pulso entero ha pasado P, el segmento $\Delta\ell$ regresa al reposo y de nuevo no tiene energía cinética. El progreso del pulso a lo largo de la cuerda corresponde al flujo de energía a lo largo de la cuerda. Otro tipo de pulso, incluyendo un pulso que viaja a través del aire, transferiría energía a lo largo de la dirección de la propagación de modo similar.

¿Cuánta energía se ha transferido al pasar P durante un tiempo t? Para una onda armónica que viaja en una cuerda, cada punto se mueve con movimiento armónico simple en la dirección transversal (y).
Como vimos anteriormente, en ausencia de amortiguamiento, la energía total de un oscilador armónico es igual a su energía potencial en el desplazamiento máximo A, es decir, $\frac{1}{2}kA^2$.
También vimos que la relación entre masa, constante k del oscilador (no es el número de onda k) y frecuencia es $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Si tratamos el segmento de la cuerda como un oscilador armónico con masa Δm que se mueve a la frecuencia *f*, podemos acomodar la ecuación para obtener una constante de salto efectiva $k = (2\pi f)^2 \Delta m$. La energía asociada con el movimiento de este segmento de la cuerda es entonces

$$\Delta E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(2\pi f)^2 \Delta m A^2$$

$$\Delta E = 2\pi^2 \Delta m f^2 A^2$$

Ahora tenemos un resultado importante: la energía de una onda depende del cuadrado de la amplitud de la onda. Así, una onda con el doble de amplitud de otra onda equivalente (con la misma frecuencia, el mismo medio) tendrá energía cuatro veces mayor.

Para encontrar la rapidez del flujo de energía, o potencia, observamos que Δm se puede escribir corno $\rho S \Delta\ell$, donde ρ es la densidad, *S* el área de la sección transversal y $\Delta\ell$ la longitud del segmento de la cuerda. En un tiempo Δt, la onda con rapidez v recorre una longitud $\Delta\ell = v\Delta t$, de manera que podemos sustituir $\Delta m = \rho S v \Delta t$ dentro de la ecuación para ΔE.
Obtenemos una expresión para la energía transportada en el tiempo Δt.

$$\Delta E = 2\pi^2 S\rho v f^2 A^2 \Delta t$$

La rapidez a la cual se propaga la energía a lo largo de la cuerda es la potencia *P*.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = 2\pi^2 S\rho v f^2 A^2$$

El parámetro más útil generalmente es la intensidad I, que se define como la potencia que fluye a través de un área unidad. Para este caso, la intensidad en watts por metro cuadrado (W/m^2) es:

$$I = \frac{P}{S} = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2$$

Aunque este resultado lo hemos derivado para el caso especifico de ondas en una cuerda, dan la dependencia correcta de la densidad del medio, la velocidad de la onda, la frecuencia y la amplitud apropiada para cualquier onda armónica viajera.

El oído humano puede acomodarse a un intervalo de intensidades sonoras bastante grande, desde 10^{-12} W/m^2 aproximadamente (que normalmente se toma como umbral de audición), hasta 1 w/m^2 aproximadamente que produce sensación dolorosa en la mayoría de las personas. Debido a este gran intervalo y a que la sensación fisiológica de fuerza sonora no varía directamente con la intensidad, se utiliza una escala logarítmica para describir el nivel de intensidad de una onda sonora.

Nivel de Intensidad.
El nivel de intensidad, β, se mide en decibelios (dB) y se define:

$\beta = \log\frac{I}{I_0}$, donde I es la intensidad del sonido, e I_0 es un nivel de referencia cuyo valor es de 10^{-12} W/m^2 que escogemos como la unidad de audición.
En esta escala, el intervalo de intensidad sonora para el oído humano es de 0 dB a 120 dB, que corresponden a intensidades a partir de 10^{-12} W/m^2 hasta cerca de 1 W/m^2. La sensación de sonido más o menos fuerte depende de la frecuencia además de la intensidad del mismo.

Ejemplo 28. Una cuerda de densidad lineal 480 g/m está bajo una tensión de 48 N. Una onda de frecuencia 200 Hz y amplitud 4,0 mm recorre la

cuerda. ¿A qué razón la onda transporta energía?
Solución.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(200) = 400\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{48N}{0,48 kg/m^3}} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$P = \frac{1}{2}\mu v \mu^2 A^2$$

$$= (0,5)(0,48)(10)(400\pi)^2(0,004)^2 = 61 \text{ W}$$

Ejemplo 29. La conversación normal se desarrolla a cerca de 60 dB. ¿A qué nivel de intensidad corresponde?
Solución.

$$60 = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}, \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^6$$

$$\Rightarrow I = 10^6 I_0 = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Ejemplo 30. Una fuente emite el sonido uniformemente en todas las direcciones en un nivel de la energía de 60 W. ¿Cuál es la intensidad una distancia de 4 m de la fuente?
Solución.
La potencia se distribuye sobre la superficie de una esfera de área $A = 4\pi r^2$.

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{60}{4\pi r(4)^2} = 0,30 \text{W/m}^2$$

Ejemplo 31. A una distancia de 5 m de una fuente el nivel de sonido es 90 dB. ¿A qué distancia el nivel ha bajado a 50 dB?
Solución.

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \text{ y } I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2} \text{ de aquí } \frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\beta_1 = 10\log_{10}\frac{I_1}{I_0} = 90dB, \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^9$$

Similarmente,

$$\beta_2 = 10\log_{10}\frac{I_2}{I_0} = 50dB, \Rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 10^5$$

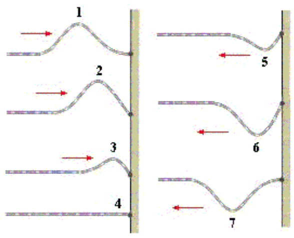
Luego $\frac{I_2}{I_1} = \frac{10^5}{10^9} = 10^{-4} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$

$$\Rightarrow r_2 = 10^2 r_1 = 500 \text{ m}$$

REFLEXIÓN DE ONDAS

Ahora veremos que sucede con una onda al llegar a un extremo que la confina; para este estudio consideraremos una perturbación en una cuerda, primero veremos cuando el extremo esta rígidamente atado a la pared y la cuerda no tienen posibilidad de desplazamiento en ese punto. Luego veremos el caso en que la cuerda tiene posibilidad de desplazamiento vertical en el punto de atadura. Esta propiedad de las ondas que aquí introducimos se aplica a todas las ondas.

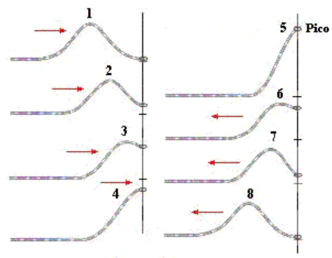
Primer Caso. Extremo fijo
Cuando el pulso de una onda llega al extremo más alejado de una cuerda que esta fija a una pared en ese extremo, la onda no se detiene repentinamente, sino que es reflejada. Si no se disipa energía en el extremo lejano de la cuerda, la onda reflejada tiene una magnitud igual a la de la onda incidente; sin embargo, la dirección de desplazamiento se invertirá.



Extremo Fijo

Esta inversión sucede porque a medida que el pulso encuentra la pared, la fuerza hacia arriba del pulso en el extremo tira hacia arriba sobre la pared. Como resultado, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la pared tira hacia abajo sobre la cuerda. Esta fuerza de reacción hace que la cuerda estalle hacia abajo, iniciando un pulso reflejado que se aleja con una amplitud invertida (o negativa).
La onda se retrasa media longitud de onda. Este es el caso de la reflexión del sonido en un obstáculo.

Segundo Caso. Extremo Libre
Si la cuerda tiene libertad para moverse en su extremo lejano. De nuevo, un pulso de onda que viaja a lo largo de la cuerda se refleja cuando alcanza ese extremo.



Extremo Libre

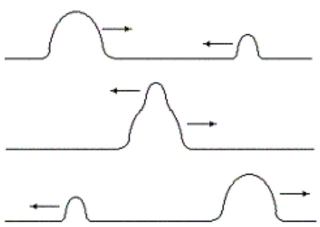
Pero en este caso vemos que la onda reflejada tiene la misma dirección de desplazamiento que la onda incidente. A medida que el pulso alcanza el extremo de la cuerda, ésta se mueve en respuesta al pulso. A medida que el extremo de la cuerda empieza a regresar a su posición, inicia un pulso inverso a lo largo de la cuerda, justamente como si el movimiento final se debiera a alguna fuerza externa. El resultado es un pulso exactamente igual al pulso de onda incidente. Pero viajando en el sentido contrario.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE ONDAS - INTERFERENCIA

Tratamos en este punto el efecto combinado de dos o más ondas que viajan en el mismo medio. En un medio lineal, esto es, en un medio en que la fuerza de recuperación es proporcional al desplazamiento del mismo, se puede aplicar el principio de superposición para obtener la perturbación resultante. Este principio es aplicable a muchos tipos de ondas, incluyendo las ondas en cuerdas, ondas sonoras, ondas superficiales en el agua y ondas electromagnéticas. El término **interferencia** se empleó para describir el efecto producido al combinar dos ondas que se desplazan simultáneamente a través de un medio.

Principio de superposición.

El principio de superposición establece que, cuando dos o más ondas se mueven en el mismo medio lineal, la onda resultante en cualquier punto es igual a la suma algebraica de los desplazamientos de todas las ondas componentes.



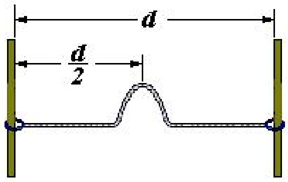
Ejemplo 32. Entre dos barras paralelas se mantiene tensa una cuerda mediante dos anillos, como se indica en la figura. Se perturba la cuerda partiendo de un desplazamiento inicial como el indicado en la figura (muy exagerado en la misma). La longitud de la cuerda es *d* y la velocidad de propagación de las ondas transversales en dicha cuerda es *v*.

Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la cuerda alcance un estado igual al representado si:

a) Los anillos pueden moverse libremente a lo largo de las barras.

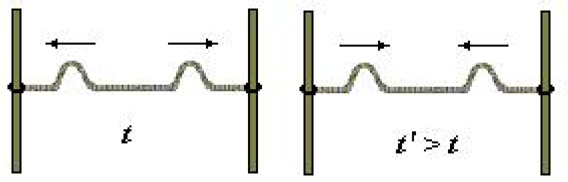
b) Un anillo está fijo.

c) Están fijos los dos anillos.

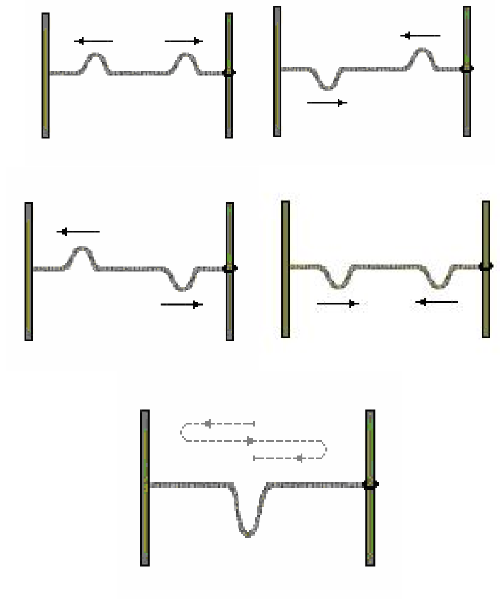


Solución.

a) Si los anillos pueden moverse a lo largo de las barras, cuando los pulsos de la figura llegan a los extremos la reflexión se realiza sin cambio de fase. El máximo central se produce en el instante t_1 tal que: $t_1 = 2\dfrac{d/2}{v} \Rightarrow t_1 = \dfrac{d}{v}$



b) En el anillo fijo se produce cambio de fase en la reflexión. La propagación sigue los pasos de la figura.

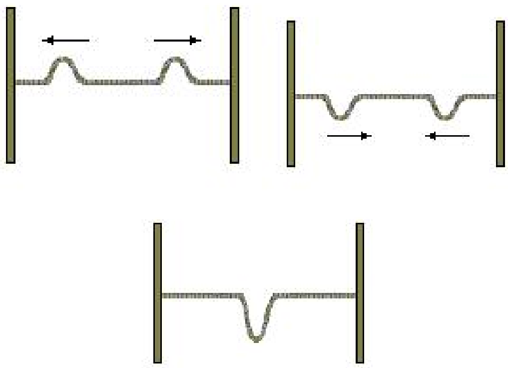


Se produce un mínimo en el centro en el instante:

$t = \dfrac{d/2}{v} + \dfrac{d}{v} + \dfrac{d/2}{v} = \dfrac{2d}{v}$ y el tiempo necesario para que se produzca el máximo en el centro es el doble que el anterior, es decir:

$t_2 = \dfrac{4d}{v}$

c) Con los dos extremos fijos hay cambio de fase en ambos. Como se aprecia en la figura el mínimo central se produce en $t = d / v$, y el máximo en un tiempo: $t_3 = \frac{2d}{v}$



ONDAS QUE VIAJAN EN LA MISMA DIRECCIÓN.

Se aplicará el principio de superposición a dos ondas armónicas que viajan en la misma dirección en cierto medio.

Ondas con la misma Amplitud y frecuencia.

Si el sentido de avance es el del semieje positivo de las *x*, y tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, pero difieren en fase se pueden expresar sus funciones de onda individuales como

$y_1 = A\text{sen}(kx - \omega t)$ e

$y_2 = A\text{sen}(kx - \omega t - \varphi)$

La función de onda resultante *y* se obtiene haciendo

$y_{total} = y_1 + y_2$

$= A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(kx - \omega t - \varphi)$

Empleando la identidad trigonométrica siguiente:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\cos\frac{(A-B)}{2}\text{sen}\frac{(A+B)}{2}$$

Se obtiene

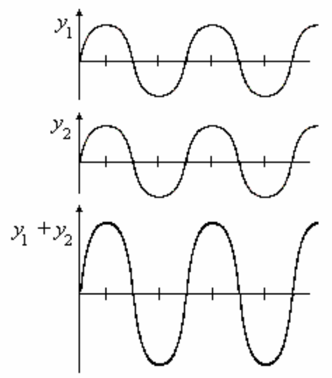
$$y_{total} = \left[2A\cos\frac{\varphi}{2}\right]\text{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Luego, observamos el movimiento resultante es nuevamente ondulatorio, pues es de la forma $f(x - vt)$ o bien $f(kx - \omega t)$.

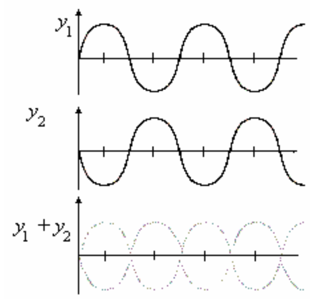
La onda resultante tiene igual frecuencia y longitud de onda que sus componentes, pero con desfase $\frac{\varphi}{2}$ respecto a y_1 y $-\frac{\varphi}{2}$ respecto a y_2

La amplitud de este movimiento ondulatorio es $\left[2A\cos\frac{\varphi}{2}\right]$, vemos que es diferente al de sus componentes y con la característica fundamental que depende de φ.

Si φ = 0, 2π, 4π..., entonces $\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 1$ y la amplitud de la onda resultante es $\pm 2A$. En otras palabras, la onda resultante es el doble de amplia que las ondas individuales. En este caso se dice que las ondas están en fase en todos los puntos, es decir, las crestas y los valles de las ondas individuales ocurren en las mismas posiciones. Este tipo de superposición se denomina **interferencia constructiva**.

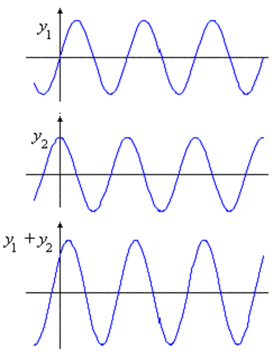


Si φ = π (o cualquier múltiplo impar de veces) π, entonces $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$, y la onda resultante tiene amplitud cero en cualquier parte. En este caso la cresta de una onda coincide con el valle de la otra y sus desplazamientos se cancelan en cada punto. Este tipo de superposición se denomina **interferencia destructiva**.



La amplitud de la onda resultante es cero

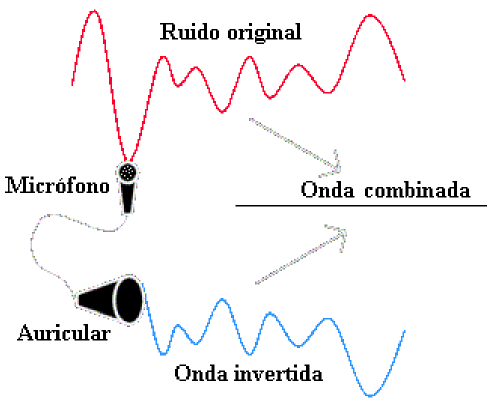
Si $0 < \varphi < \pi$ la onda resultante tiene una amplitud cuyo valor está entre 0 y *2A*. La figura muestra un desfase $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



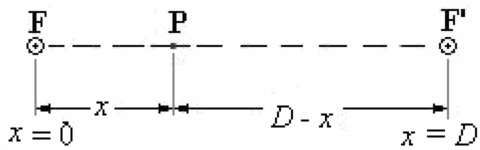
APLICACIONES:
El estetoscopio y la cancelación de ruidos.

El estetoscopio.
Este instrumento fue inventado en 1816 por el médico francés R.T.H. Laennec. A este hombre, por pudor, no le agradaba la idea de aplicar su oreja sobre el pecho de las pacientes, por lo que se acostumbró a utilizar un tubo de papel. Posteriormente perfeccionó la idea aplicando el principio de interferencia constructiva.

Cancelación de ruidos.
La interferencia destructiva puede ser muy útil. Es muy importante que el piloto de un avión oiga lo que sucede a su alrededor, pero el ruido del motor representa un problema. Por eso, los pilotos pueden usar unos auriculares especiales conectados a un micrófono que registra directamente el sonido del motor. Un sistema en los auriculares crea una onda inversa a la que llega a través del micrófono. Esta onda es emitida, de forma que neutraliza la primera. En los automóviles se está experimentando con un sistema similar.



Ejemplo 33. Dos focos puntuales F y F', separados entre si 1 m, emiten en fase sonidos de 500 Hz de frecuencia con la misma intensidad.
a) Obtener la posición de los puntos, si los hay, en los que no se registra sonido.
b) Obtener la posición de los máximos y mínimos de intensidad que se registran a lo largo del segmento FF'. (v = 340 m/s).
$x=D$



Solución.
a) Si consideramos que ambos sonidos se propagan con frentes de ondas esféricos y que por tanto la amplitud disminuye con la distancia, para que se produzca anulación total en un punto, éste deberá equidistar de *F* y *F'*, con lo que los únicos puntos serian los de la mediatriz del segmento *F F';* pero precisamente en esos puntos las dos amplitudes se suman por estar los *focos* en fase. En consecuencia, no hay ningún punto a distancia finita en el que la intensidad resultante sea nula.
b) Desde un punto P del segmento F' a distancia x de *F*, la diferencia de caminos a los focos es:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = x - (D - x) = 2x - D$$

MÁXIMOS:

$$\Delta x = n\lambda \;\Rightarrow\; 2x - D = n\frac{v}{f}$$

$$\Rightarrow x = \frac{D}{2} + \frac{n}{2}\frac{v}{f}$$

$$n = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{340}{500} = 0{,}16\text{m}$$

$$n = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0{,}50\text{m}$$

$$n = +1 \;\Rightarrow\; x_3 = 0{,}84\text{m}$$

Los máximos están en valores de x igual a 0,16; 0,50; 0,84 m
MÍNIMOS:

$$\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow 2x - D = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \; x = \frac{D}{2} + \frac{(2n+1)}{4}\frac{v}{f}$$

$$n = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{340}{500} = 0{,}33\text{m}$$

$$n = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0{,}67\text{m}$$

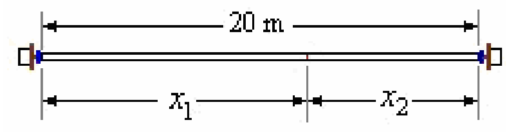
Los mínimos están en valores de *x* igual 0,33 m; 0,67 m.
Los restantes máximos y mínimos se localizan fuera del segmento F F'.

Ejemplo 34. Dos Fuentes separadas 20 m vibran de acuerdo a las ecuaciones

$y_1 = 0{,}06\,\text{sen}\,\pi t$ m $y_2 = 0{,}02\,\text{sen}\,\pi t$ m

Ellas envían ondas de velocidad 3 m/s a lo largo de una varilla. ¿Cuál es la ecuación del movimiento de una partícula a 12 m de la primera fuente y a 8 m de la segunda?

Solución.



Referido a la figura. La fuente 1 envía ondas en el sentido +x, tal que

$y_1 = A_1 \text{sen}(kx_1 - \omega t)$.

La fuente 2 envía ondas en el sentido -*x*, tal que

$y_2 = A_2 \text{sen}(kx_2 + \omega t)$

como $\omega = \pi \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, y $v = \dfrac{\omega}{k} = 3\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$\Rightarrow k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{\pi}{3}\text{m}$

También $A_1 = 0{,}06$ m y $A_2 = 0{,}02$ m

La perturbación resultante en el punto $x_1 = 12$ m, $x_2 = -8$ m es.

$$y = y_1 + y_2$$
$$= 0{,}06\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x_1 - \pi t\right) + 0{,}02\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x_2 + \pi t\right)$$
$$= 0{,}06\,\text{sen}\left(\frac{12\pi}{3} - \pi t\right) + 0{,}02\,\text{sen}\left(-\frac{8\pi}{3} + \pi t\right)$$
$$= 0{,}06\,\text{sen}\,\pi t + 0{,}02\,\text{sen}\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= 0{,}06\,\text{sen}\,\pi t + 0{,}02\left[-\frac{1}{2}\text{sen}\,\pi t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \pi t\right]$$
$$= 0{,}05\,\text{sen}\,\pi t - 0{,}0173\cos \pi t$$

Ejemplo 35. Dos fuentes F_1 y F_2, que vibran con la misma fase producen en la superficie libre del agua ondas representada por las ecuaciones:

$y_1 = 8\,\text{sen}(20\pi t - 0{,}2\pi x)$ (en cm)

$y_2 = 4\,\text{sen}(40\pi t - 0{,}4\pi x)$ (en cm)

Determine la amplitud de la onda que se produce por interferencia en un punto P que dista 25 cm de F_1 y 15 cm de F_2.

Solución.

Usando la relación

$\text{sen}(A - B) = \text{sen}A\cos B - \cos A\,\text{sen}B$:

$$y_1 = 8(\text{sen}20\pi t\cos 0{,}2\pi x - \cos 20\pi t\,\text{sen}0{,}2\pi x)$$

$$y_2 = 4(\text{sen}40\pi t\cos 0{,}4\pi x - \cos 40\pi t\,\text{sen}0{,}4\pi x)$$

En el punto P ($x_1 = 25$ cm, $x_2 = 15$ cm):

$$y_1 = 8(\text{sen}20\pi t\cos 5\pi - \cos 20\pi t\,\text{sen}5\pi)$$
$$y_2 = 4(\text{sen}40\pi t\cos 6\pi - \cos 40\pi t\,\text{sen}6\pi)$$

Con $\text{sen}5\pi = \cos\pi = 0$, $\cos 5\pi = \cos\pi = -1$

y $\text{sen}6\pi = \cos 2\pi = 0$, $\cos 6\pi = \cos 2\pi = 1$

Obtenemos:

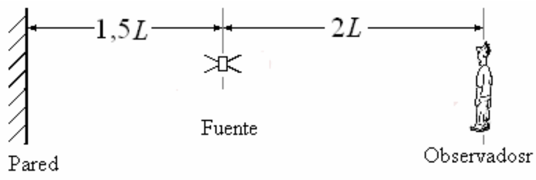
$$y_1 = 8(-\text{sen}20\pi t) = -8\,\text{sen}2\pi t$$
$$y_2 = 4(\text{sen}40\pi t) = 4\,\text{sen}2\pi t$$

La suma:

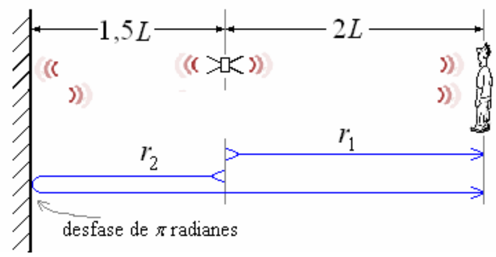
$$y = y_1 + y_2 = -8\,\text{sen}2\pi t + 4\,\text{sen}2\pi t$$
$$= -4\,\text{sen}2\pi t$$

La amplitud de la onda que se produce por interferencia en un punto P es 4 cm.

Ejemplo 36. La fuente sonora de la figura emite una onda armónica con frecuencia *f*. Considere que la onda al reflejarse en la pared mantiene su amplitud pero sufre un desfase de π radianes. Hallar todos los posibles valores de *L* para que las ondas que llegan al observador, la directa y la reflejada en la pared, interfieran destructivamente. Considere que la rapidez del sonido es *c*.



Solución.



Para que haya interferencia destructiva la diferencia de fase entre la onda directa y la reflejada debe ser de media longitud de onda (π radianes). Como este desfase ya existe debido que al reflejarse sufre un desfase de π radianes..

La diferencia de caminos debe ser un número entero de longitudes de onda.

$\Delta r = r_2 - r_1 = n\lambda$, $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$r_1 = 2L$ y $r_2 = 1{,}5L + 3{,}5L = 5L$

Luego

$$\Delta r = 5L - 2L = 3L = n\lambda = n\frac{v}{f}$$

Finalmente

$$L = n\frac{v}{3f},\ n = 1, 2, 3, \ldots\ldots.$$

Ondas que difieren tanto en Frecuencia como en Amplitud

Sean las ondas y_1 e y_2 que difieren tanto en frecuencia como en amplitud

$y_1 = A_1\text{sen}(k_1 x \pm \omega_1 t) = A_1\text{sen}\theta_1$ e

$y_2 = A_2\text{sen}(k_2 x \pm \omega_2 t) = A_2\text{sen}\theta_2$

Si las ondas componentes difieren tanto en frecuencia como en amplitud, existen varios modos de combinarse, de modo que todos ellos exigen cierta habilidad en el cálculo trigonométrico. Si ponemos $\theta_2 = \theta_1 + \delta$ y desarrollamos

$$\text{sen}(\theta_1 + \delta) = \text{sen}\theta_1 \cos\delta + \cos\theta_1 \text{sen}\delta$$

$$y = y_1 + y_2 = A_1\text{sen}\theta_1 + A_2\text{sen}\theta_2$$
$$= A_1\text{sen}\theta_1 + A_2\text{sen}(\theta_1 + \delta)$$
$$= (A_1 + A_2\cos\delta)\text{sen}\theta_1 + A_2\text{sen}\delta\cos\theta_1 \quad (1)$$

Esta expresión puede recombinarse en la forma de una sola onda

$$y = A\text{sen}(\theta_1 + \phi)$$
$$= A\cos\phi\,\text{sen}\theta_1 + A\text{sen}\phi\cos\theta_1 \qquad (2)$$

Igualando coeficientes de (1) y (2) obtenemos las ecuaciones:

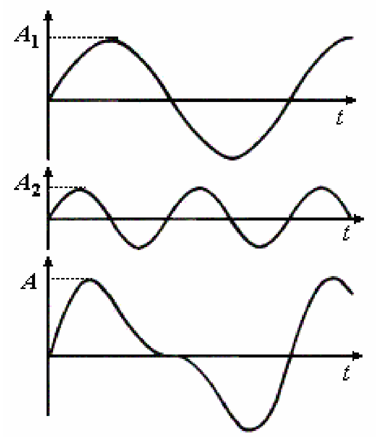
$A\cos\phi = A_1 + A_2\cos\delta$ y $A\text{sen}\phi = A_2\text{sen}\delta$

Elevándolas al cuadrado y sumando obtenemos el valor de A:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$$

Y dividiéndolas obtenemos el valor de ϕ:

$$\tan\phi = \frac{A_2\text{sen}\delta}{A_1 + A_2\cos\delta}$$



Si se desea la onda resultante puede sumarse a una tercera onda y así sucesivamente. En general esta superposición no es simple, puesto que tanto la amplitud como la fase resultante pueden ser funciones del tiempo y de la posición.

Ejemplo 37. Dos ondas armónicas de amplitudes 2 y 4 cm viajan en la misma dirección y tienen idéntica frecuencia; si su diferencia de fase es □/4, calcúlese la amplitud de la onda resultante.

Solución.

A una diferencia de fase $\delta = \frac{\pi}{4}$, le corresponde una distancia: $\Delta x = \frac{\delta}{k} = \frac{\lambda\delta}{2\pi} = \frac{\lambda}{8}$

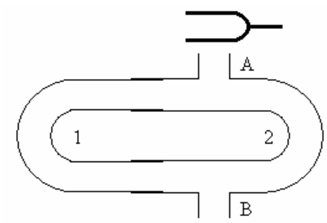
La amplitud de la onda resultante es:

$$A_o^2 = A_{o1}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{o1}A_{o2}\cos\delta$$

Sustituyendo:

$$A_o = \sqrt{A_{o1}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{o1}A_{o2}\cos\delta}$$
$$= \sqrt{4 + 16 + 16\cos\frac{\pi}{4}} = 5{,}6\ \text{cm}$$

Ejemplo 38. El aparato de Quincke consta de dos tubos en U, pudiéndose deslizar las ramas de uno de ellos dentro de las ramas del otro. En las proximidades de la ramificación A se produce un sonido que se escucha poniendo el oído en B. Deslizando el tubo 1 dentro del 2, se encuentran posiciones en las que no se percibe sonido; ¿por qué? Si el desplazamiento lateral que hay que dar al tubo 1, desde que no se percibe sonido hasta que, de nuevo, se deja de percibir, es de 25 cm, ¿cuáles son la longitud de onda, la frecuencia y el período de las ondas sonoras? Velocidad de propagación del sonido en el aire, 340 m/s.



Solución.

No se percibirá sonido cuando la diferencia de recorridos A 1 B y A 2 B sea un número impar de semi longitudes de onda. Si en tales condiciones se desplaza el tubo 1 hasta dejar de nuevo de per*cibir* sonido, el exceso de recorrido que hace el sonido, con respecto a la posición anterior, es una longitud de onda.

En la segunda posición el sonido ha recorrido en la rama A 1 B, 50 cm más que en la A 2 B (25 en la parte superior y de 1 y 25 en la inferior). Por tanto:

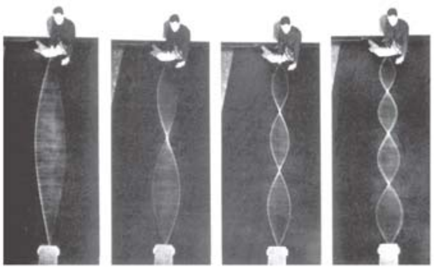
λ =50 cm

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0,5} = 680\ \text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{680}\ \text{s}$$

ONDAS IGUALES VIAJANDO EN SENTIDOS OPUESTOS. ONDAS ESTACIONARIAS

Un tipo de superposición de ondas especialmente interesante es el que tiene lugar entre dos ondas de idénticas características pero propagándose en sentido contrario. Las ondas resultantes reciben el nombre de **ondas estacionarias**, pues no implican un movimiento de avance de la perturbación



Este tipo de ondas están asociadas a reflexiones en los límites de separación de medios de propiedades diferentes. Dichos límites pueden ser básicamente de dos tipos, libres y fijos. El nudo de unión de dos cuerdas de diferente grosor sería un ejemplo de límite libre; por el contrario, el extremo de la cuerda unido a un punto fijo en una pared sería un límite fijo.

Vimos anteriormente que en un **límite libre** la onda reflejada tiene las mismas características que la onda incidente, tan sólo difieren en el sentido de avance de la perturbación. Por el contrario, en un **límite fijo** la onda reflejada posee las mismas características que la incidente, pero está desfasada π radianes respecto a la onda incidente

Consideremos en primer lugar las ondas estacionarias (que se propagan en el eje *x*) por reflexión en un límite libre. La función de onda resultante será:

$y_1 = A\text{sen}(kx - \omega t)$ e $y_2 = A\text{sen}(kx + \omega t)$, la suma de estas ondas nos da:

$$y_{total} = y_1 + y_2$$
$$= A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(kx + \omega t)$$

Haciendo uso de la suma trigonométrica

$$y_{total} = 2A\text{sen}kx\cos\omega t$$

El movimiento resultante no es ondulatorio, pues no se propaga al no ser de la forma $f(x - vt)$.

Una partícula en cualquier punto dado x ejecuta movimiento armónico simple conforme transcurre el tiempo. Nótese que todas las partículas vibran con la misma frecuencia, pero con la particularidad que la amplitud no es la misma para cada partícula del medio, con la posición (en un movimiento ondulatorio al amplitud es igual para cualquier punto).

La amplitud esta dada por 2*A* sen *kx*.

Los puntos de mínima amplitud (nula) se llaman **nodos**. En ellos se debe cumplir:

$$\text{sen}kx = 0 \;\Rightarrow\; kx = n\pi$$

$$\Rightarrow\; \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \;\Rightarrow$$

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

Para *n* = 0, 1, 2, 3, ……….

Los puntos de máxima amplitud (± 2*A*) se llaman **vientres** o **antinodos**. En ellos se debe cumplir:

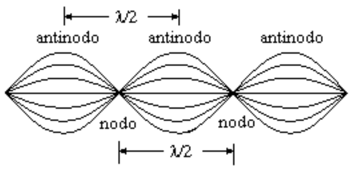
$$\text{sen}kx = \pm 1 \;\Rightarrow\; kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\; \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow$$

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Para *n* = 0, 1, 2, 3,……….

Así pues, tanto los nodos como los vientres aparecen a intervalos de longitud λ/2, mediando entre un nodo y un antinodo hay una distancia de λ/4.



La figura muestra la envolvente de una onda estacionaria.

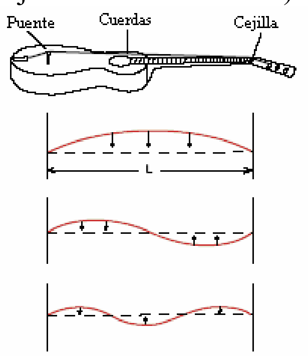
Al no propagarse las ondas estacionarias, no transportan energía.

La energía se mantiene estacionaria, alternando entre cinética vibratoria y potencial elástica. Por lo tanto el movimiento repetimos no es ondulatorio, el nombre proviene del hecho que podemos analizarlo como superposición de ondas.

Condiciones de contorno

Las condiciones en los límites, llamadas *condiciones de contorno*, imponen restricciones a la hora de formarse ondas estacionarias en el medio correspondiente. Así, si los límites son fijos, en ellos se tendrán que dar nodos necesariamente; si ambos límites son libres se darán antinodos, y si uno es libre y el otro es fijo se habrán de dar antinodo y nodo respectivamente.

Límite fijo - Límite fijo: (como en los instrumentos musicales, violín, arpa, etc., la cuerda esta fija en sus dos extremos)



En este caso las condiciones a imponer son que, si la longitud del medio es L, tanto en $x=0$ como $x=L$ se habrán de dar nodos. Aplicando la condición de nodo en un límite fijo, resulta:

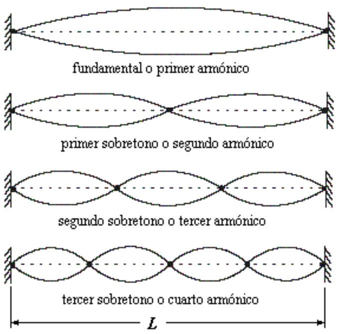
$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

o en términos de frecuencias,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = n\frac{v}{2L}$$

Para n = 1, 2, 3, 4,…………..

Por tanto, tanto la frecuencia como la longitud de onda sólo pueden tomar determinados valores, es decir, están cuantificadas. La frecuencia más baja de la serie recibe el nombre de **frecuencia fundamental**, y las restantes, que son múltiplos de la fundamental, reciben el nombre de **armónicos**.



Estas frecuencias posibles en la cavidad formada por los límites fijos, se denominan **modos** de la cavidad

Ejemplo 39. Por un medio unidimensional (dirección del eje Ox) se propagan dos ondas transversales, vibrando en el plano xOy y dadas por: $y_1 = A\text{sen}(\omega t + kx)$,
$y_2 = A\text{sen}(\omega t - kx + \varphi)$.

a) Comprobar que la superposición de ambas da lugar a una onda estacionaria.

b) Si en x = 0 ha de haber un nodo de la onda estacionaria, comprobar que el valor de φ debe ser π.

c) Calcular la velocidad de un punto del medio cuya distancia al origen sea 1/4 de la longitud de onda.

Solución.

a)

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\text{sen}(\omega t + kx) + A\text{sen}(\omega t - kx + \varphi)$$
$$= 2A\text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right) \qquad (1)$$

Llamando: $y_{o(x)} = 2A\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)$

$$\Rightarrow y = y_o \text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Por lo tanto, la expresión (1) es la ecuación de la onda estacionaria puesto que cualquier partícula en un punto dado x efectúa un movimiento armónico simple al transcurrir el tiempo, vibrando todas las partículas con idéntico periodo; y cada partícula vibra siempre con la misma amplitud, no siendo la misma para cada una sino que varia con la posición *(x)* de cada partícula.

b) $y_{o(0)} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\varphi}{2} = 0 \quad \varphi = \pi$

c) $v_y = \dfrac{\partial y}{\partial t} = y_o\omega\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -y_o\omega\text{sen}\,\omega t$

$$y_{o\left(\frac{\lambda}{4}\right)} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 2A$$

Finalmente $v_y = -2A\omega\text{sen}\,\omega t$

En tal punto existe un vientre.

Ejemplo 40. La onda $y_1 = A\text{sen}(kx - \omega t)$ viaja por una cuerda. Después de reflejarse se convierte en $y_2 = -\dfrac{A}{2}\text{sen}(kx + \omega t)$. Que es lo que se obtiene de la combinación de estas dos ondas.

Solución.

Hagamos $y = y_1 + y_2$.

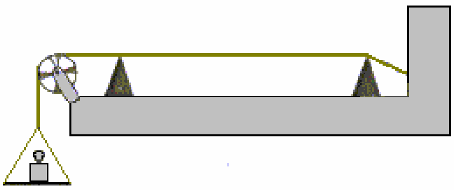
$$y = A\text{sen}(kx - \omega t) - \frac{A}{2}\text{sen}(kx + \omega t)$$

$$= \frac{A}{2}\text{sen}(kx - \omega t) + \frac{A}{2}\text{sen}(kx - \omega t) - \frac{A}{2}\text{sen}(kx + \omega t)$$

$$= \frac{A}{2}\text{sen}(kx - \omega t) - A\text{sen}\,\omega t \cos kx$$

El primer término es una onda viajera y el Segundo una onda estacionaria.

Ejemplo 41. Calcular la frecuencia del sonido fundamental emitido por una cuerda de 1 m de longitud y 1 mm de diámetro, cuya densidad es 2 g/cm^3 y está tensa por un peso de 9231,6 g.



Solución.

La frecuencia del sonido emitido por una cuerda es: $f_n = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

$$T = (9{,}2316 kg)\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right) = 90{,}47 \text{ N}$$

$$\mu = \rho A = \left(2000\frac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{10^{-6}\pi}{4}\right)$$

$$= 1{,}57\times 10^{-3}\frac{kg}{m}$$

Luego

$$f = \frac{1}{2(1)}\sqrt{\frac{90{,}47}{1{,}57\times 10^{-3}}} = 38{,}8 \text{ Hz}$$

Ejemplo 42. Se produce una onda estacionaria en un alambre tensado de longitud *L*. La vibración corresponde a su tercer armónico. Si a *t* = 0, todos los puntos de la cuerda están en su posición de equilibrio (*y* = 0, para cualquier partícula de la cuerda).

a) Cual es la función que identifica dicha onda estacionaria. (ubicar el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la cuerda).

b) En que relación están las amplitudes de oscilación de puntos de la cuerda en las posiciones $x = L/4$ y $x = L/2$.

Solución.

a) La onda estacionaria que se produce es de la forma

$$y = 2A\text{sen}(kx + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2)$$

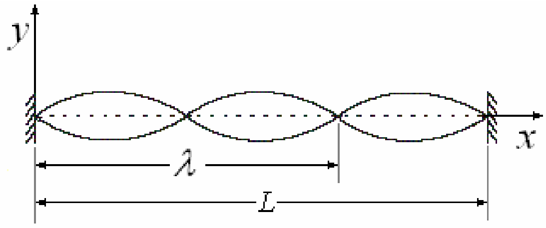
La condición que para *t* = 0, todos los puntos de la cuerda cumplen con $y = 0$.

Se cumple con $\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 = \pi/2$

Luego

$$y = 2A\text{sen}(kx + 0)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2A\text{sen}kx\text{sen}\,\omega t$$



Como $L = \dfrac{3}{2}\lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}L$

$$y = 2A\text{sen}\frac{3\pi}{L}x\cos\omega t$$

b) La amplitud está dada por:

$$A_{máx} = 2A\text{sen}\frac{3\pi}{L}x$$

Para $x = \dfrac{L}{4} \Rightarrow$

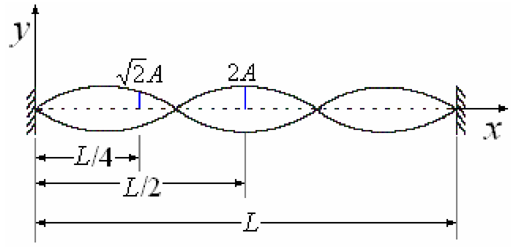
$$A_{máx1} = 2A\text{sen}\frac{3\pi}{L}\frac{L}{4} = 2A\text{sen}\frac{3}{4}\pi = \sqrt{2}A.$$

Para $x = \dfrac{L}{2} \Rightarrow$

$$A_{máx2} = 2A\text{sen}\frac{3\pi}{L}\frac{L}{2} = 2A\text{sen}\frac{3}{2}\pi = 2\text{A}.$$

Luego

$$\frac{A_{máx1}}{A_{máx2}} = \frac{\sqrt{2}A}{2A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Ejemplo 43. Una cuerda está estirada por un peso de 10 N. Calcular el peso que debe tensar a otra cuerda de la misma sustancia, la misma longitud y doble radio para que emita la octava aguda de la que produce la primera. Se supone que ambas emiten el sonido fundamental.

Solución.

$\mu = \rho A = \pi r^2 \rho$,

$$\mu' = \frac{m'}{L} = \frac{\rho\pi(2r)^2 L}{L} = 4\pi r^2 \rho = 4\mu$$

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ y}$$

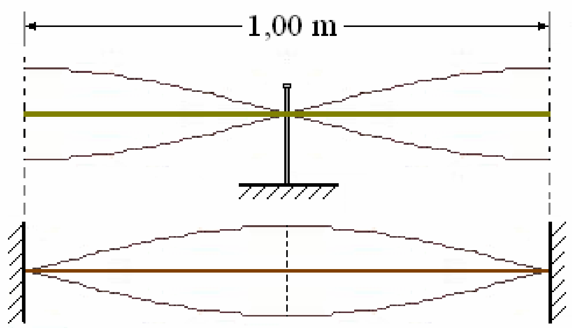
$$f' = 2f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{\mu'}} \Rightarrow f' = 2f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{4\mu}}$$

Relacionando f y f':

$$\frac{f'}{f} = \frac{2f}{f} = \frac{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{4\mu}}}{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T'}{T}} \Rightarrow \frac{T'}{T} = 16$$

Como T = 10 N, T' = 160 N

Ejemplo 44. Una varilla de bronce de densidad 8,5 g/cm^3 y longitud 100 cm esta asegurada en el centro. Cuando se hace vibrar longitudinalmente emite una nota dos octavas sobre la nota fundamental emitida por un alambre también de 100 cm de longitud de masa 0,295 g y bajo la tensión de un peso de masa 20 kg que esta vibrando transversalmente. ¿Cuál es el módulo de Young del bronce?
Nota: En música, una octava es el intervalo que separa dos sonidos cuyas frecuencias fundamentales tienen una relación de dos a uno.
Solución.



En la varilla

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \lambda f \Rightarrow f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

En el alambre

$$v' = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \lambda' f' \Rightarrow f' = \frac{1}{\lambda'}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{TL}{m}}$$

$$f' = 2f$$

La frecuencia f de la varilla es igual a 4 veces la frecuencia f' emitida por el alambre.

$$f' = 4f$$

Luego

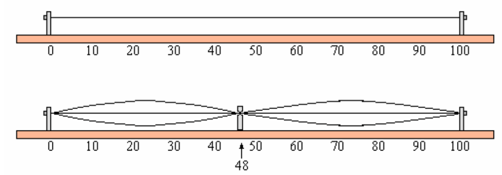
$$\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 4\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{TL}{m}}$$

Despejando Y:

$$Y = 16\frac{TL\rho}{m} = 16\frac{196\times 1{,}00\times 8500}{0{,}295\times 10^{-3}}$$

= 9,04 x 10^{10} N/m^2

Ejemplo 45. Un alambre de 1 m de longitud es estirado a una tensión de 50 N. Cuando se coloca un puente a 48 cm de un extremo y se pulsan las dos secciones del alambre, se escuchan 8 batidos por segundo.
a) Calcule la velocidad de las ondas transversales en el alambre.
b) Calcule la densidad lineal de alambre.
Solución.



a) $f_1 - f_2 = 8\text{ Hz}$

$$\frac{v}{\lambda_1} - \frac{v}{\lambda_2} = 8 \Rightarrow$$

$$v\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 8 \Rightarrow$$

$$v = \frac{8\lambda_2\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{8(1{,}04)(0{,}96)}{(1{,}04 - 0{,}96)}$$

= 99,84 m/s

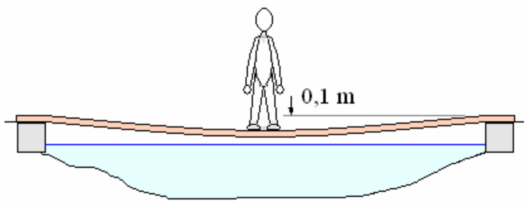
b) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow$

$$\mu = \frac{T}{v^2} = \frac{50}{99{,}84^2}$$

= 0,005016 kg/m

La densidad es 5,02 g/m.

Ejemplo 46. Una tabla flexible larga está tendida a través de un rio. Cuando el niño estaba en ella sin moverse, ésta se combaba en 0,1 m. Pero el muchacho empezó a caminar con la velocidad de 3,6 km/h, la tabla comenzó a balancearse de tal manera que él se cayó al agua. ¿De qué longitud es el paso del niño?
Solución
Cuando el niño esta sobre la tabla sin moverse, la tabla se comba 0,1 m.

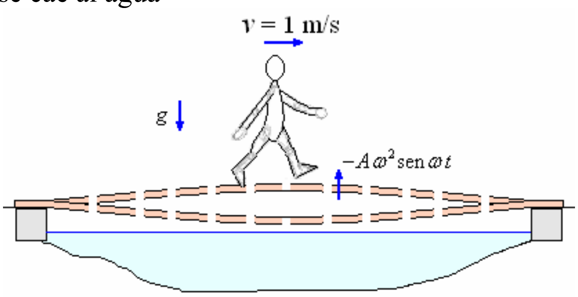


Como Para un objeto elástico, por la ley de Hooke:

$F = kx$, en este caso $F = mg$, $x = 0{,}1$ m

Luego $mg = k0{,}1 \Rightarrow k = \dfrac{mg}{0{,}1}$

Cuando el muchacho camina con la velocidad de 3,6 km/h, la tabla se balancea de tal manera que se cae al agua

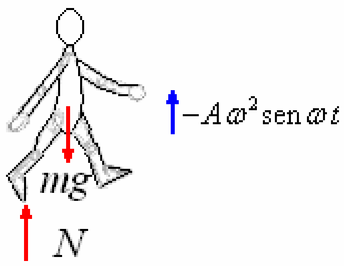


La tabla entra en resonancia y vibra de acuerdo a $y = A\text{sen}\,\omega t$

La aceleración vertical correspondiente es

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = -A\omega^2 \text{sen}\,\omega t$$

Cuando la reacción N que sujeta al muchazo al agua se anula debido a la aceleración vertical de la tabla



$$N - mg = -mA\omega^2 \text{sen}\,\omega t$$

Se cae cuando N =0 y $a = -A\omega^2 \text{sen}\,\omega t$ tiene valor máximo $\Rightarrow a_{máx} = A\omega^2$

$$mg = mA\omega^2 \Rightarrow A\omega^2 = g$$

Con A = 0,1 m y g = 9,8 m/s^2:

$$\omega^2 = \frac{9{,}8}{0{,}1} \Rightarrow \omega = \sqrt{98} = 9{,}9 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9{,}9}{2\pi} = 1{,}58 \text{ Hz}$$

Como $v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \dfrac{v}{f}$

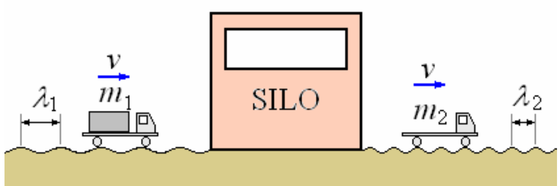
Siendo v = 3,6 km/h = 1 m/s y f = 1,58 Hz

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{1{,}58} = 0{,}634 \text{ m}$$

La longitud de los pasos es una longitud de onda, 63,4 cm.

Ejemplo 47. Los camiones entran en un silo de grano, dejan la carga y salen de allí con la misma velocidad. Por una parte del silo los baches en la carretera son más frecuentes que por la otra. ¿Cómo ateniéndose al perfil de la carretera se puede determinar dónde se encuentra la entrada y dónde la salida?

Solución



Frecuencia angular del movimiento en la entrada

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

Frecuencia angular del movimiento en la salida

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

La masa en la entrada es mayor que en la salida

$m_1 > m_2$

Luego

$f_1 < f_2$

La velocidad es igual tanto en la entrada como en la salida, por consiguiente:

$v = \lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2$

Esto hace que

$\lambda_1 > \lambda_2$

Al ser $\lambda_1 > \lambda_2$, hay menos baches en la parte de la entrada.

Ejemplo 48. Una cuerda horizontal, de longitud ℓ = 0,80 m, esta sometida en uno de sus extremos a oscilaciones sinusoidales de frecuencia f = 120 Hz, esta frecuencia corresponde a uno de los modos resonantes de la cuerda y se observa que entre sus extremos aparecen 4 antínodos ó vientres cuya amplitud de oscilación es A = 2 cm. Calcular:

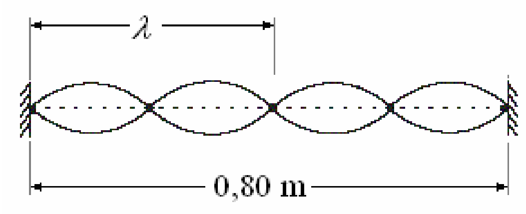
a) La velocidad de propagación de las ondas.

b) La velocidad y aceleración máxima que puede alcanzar un punto de la cuerda.

c) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,050 m de un extremo de la cuerda.

d) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,125 m de un extremo de la cuerda.

Solución.



$\lambda = 0{,}40\text{ m}$, $f = 120$ Hz,

a) La velocidad de propagación de las ondas.

$v = \lambda f = 0{,}40 \times 120 = 48\text{ m/s}$

b) La velocidad y aceleración máxima que puede alcanzar un punto de la cuerda.

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \operatorname{sen}\omega t \Rightarrow$$

$$v_{máx} = A\omega = 0{,}02 \times 240\pi = 4{,}8\pi\text{ m/s}$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}\omega t \Rightarrow$$

$$a_{máx} = A\omega^2 = 0{,}02 \times (240\pi)^2 = 1152\pi^2\text{ m/s}^2$$

c) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,050 m de un extremo de la cuerda.

Ecuación de una onda estacionaria:

$$y = 2A\operatorname{sen}kx\cos\omega t$$

La amplitud está dada por:

$$2A\operatorname{sen}kx = 2A\operatorname{sen}\frac{2\pi}{\lambda}x$$

Para 0,050 m

$$0{,}04\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}40}0{,}050\right) = 0{,}04\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}028\text{ m}$$

d) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,125 m de un extremo de la cuerda.

Para 0,125 m

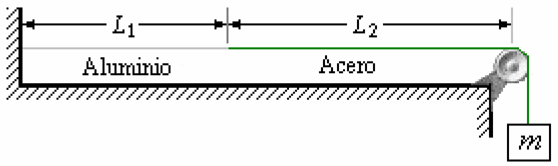
$$0{,}04\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}40}0{,}125\right) = 0{,}04\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}037\text{ m}$$

Ejemplo 49. Un alambre de aluminio de $L_1 = 60{,}0$ cm y con una superficie transversal 1,00x10^{-2} cm^2, está conectado a un alambre de acero de la misma superficie. El alambre compuesto, cargado con un bloque *m* de 10,0 kg de masa, está dispuesto como se indica en la figura, de manera que la distancia L_2 de la unión con la polea de sostén es 86,6 cm. Se crean ondas transversales en el alambre utilizando una fuente externa de frecuencia variable.

a) Determine la frecuencia más baja de excitación en que se observan las ondas estacionarias, de modo que la unión en el alambre es un nodo.

b) ¿Cuál es el número total de nodos observados en esta frecuencia, excluyendo los dos en los extremos del alambre?

La densidad del aluminio es 2,60 g/cm^3, y la del acero es 7,80 g/cm^3.



Solución.

La frecuencia para ondas estacionarias en una cuerda fija en los dos extremos es

$$f_n = n\frac{v}{2L}$$

Como para una cuerda tensa $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$\Rightarrow f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Como el punto de unión de los alambres tiene que ser un nodo, tenemos n_1 nodos para el aluminio y n_2 nodos para el acero.

Siendo la frecuencia f, la tensión T y la sección de alambre S común para los dos alambres, tenemos:

Para el aluminio $f = \frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$, para el acero

$$f = \frac{n_2}{2L_2}\sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

Luego $\frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \frac{n_2}{2L_2}\sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$

La masa por unidad de longitud

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{mS}{LS} = \left(\frac{m}{V}\right)S = \rho S$$

Reemplazando las expresiones de μ_1 y μ_2:

$$\frac{n_1}{L_1}\sqrt{\frac{T}{\rho_1}} = \frac{n_2}{L_2}\sqrt{\frac{T}{\rho_2}} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{L_1}{L_2}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

Reemplazando valores, obtenemos: $\frac{n_1}{n_2} = 0{,}4$

Como la menor es la frecuencia se obtiene con el menor valor de *n*, tenemos que buscar los menores valores de n_1 y n_2 que tengan la relación 0,4,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{5}$$

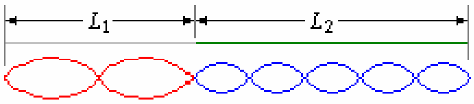
Correspondiendo $n_1 = 2$ y $n_2 = 5$.

a) Usando $n_1 = 2$, obtenemos la frecuencia que produce un nodo en la unión

$$f = \frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \frac{2}{2(0,6)}\sqrt{\frac{10(9,8)}{2,6\times 10^3(10^{-6})}}$$

= 324 Hz

b) El número total de nodos observados en esta frecuencia, excluyendo los dos en los extremos del alambre, se pueden contar en el esquema de la figura, son 6 (hay un nodo común para el aluminio y para el acero).



Ejemplo 50. Dos ondas armónicas se escriben por medio de:

$$y_1(x,t) = 0,015\cos\left(\frac{x}{2} - 40t\right),$$

$$y_2(x,t) = 0,015\cos\left(\frac{x}{2} + 40t\right)$$

Donde x, y_1 e y_2 están en metros y t en segundos. Dichas ondas se propagan en una cuerda tensa de gran longitud e interfieren para producir una onda estacionaria.

a) Determine la longitud de onda, frecuencia y rapidez de propagación de las ondas que interfieren.

b) Determine la función de la onda estacionaria.

c) Determine la posición de los nodos y antinodos en la onda estacionaria.

d) ¿Cuál es la amplitud de la onda en x = 0,4 m?

Solución.

a) La onda viajera es de la forma

$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi f t\right)$$

Luego comparando:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 4\pi = 12,56 \text{ m}$$

$$2\pi f = 40 \Rightarrow f = \frac{20}{\pi} = 6,37 \text{ Hz}$$

$$v = \lambda f = (4\pi)\left(\frac{20}{\pi}\right) = 80 \text{ m/s}$$

b) $y = y_1 + y_2$

$$y(x,t) = 0,015\cos\left(\frac{x}{2} - 40t\right) + 0,015\cos\left(\frac{x}{2} + 40t\right)$$

$\Rightarrow$

$$y(x,t) = 0,015\left[\cos\left(\frac{x}{2} - 40t\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + 40t\right)\right]$$

Aplicando

$$\cos(A-B) + \cos(A+B) = 2\cos A\cos B$$

Obtenemos

$$y(x,t) = 0,015\left(2\cos\frac{x}{2}\cos 40t\right)$$

$$= 0,030\cos\frac{x}{2}\cos 40t$$

Función de la onda estacionaria

c) Determine la posición de los nodos y antinodos en la onda estacionaria.

Los nodos son para $\cos\frac{x}{2} = 0$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, ...(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, ...\pm(2n+1)\pi$$

Para n = 0, 1, 2, 3,….

Los antinodos son para $\cos\frac{x}{2} = \pm 1$,

$$\frac{x}{2} = 0,\ 2\pi,\ 4\pi....2n\pi$$

$$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, ...\pm 2n\pi$$

Para n = 0, 1, 2, 3,….

d) Amplitud de la onda en x = 0,4 m.

$$A = 0,030\cos\frac{0,4}{2} = 0,030(0,98) = 0,0294\text{m}$$

= 2,94 cm

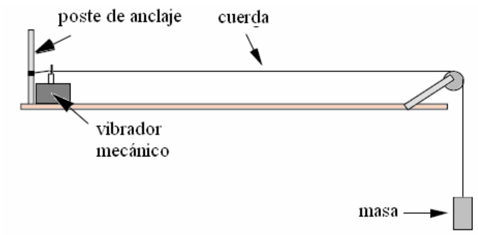
Ejemplo 51. En el dispositivo de la figura, una masa m es colgada de una cuerda que pasa sobre una polea. El otro extremo de una cuerda es conectada a un generador de frecuencia f fija. La cuerda tiene una longitud L de 2 metros y una densidad lineal de 0,002 kg/m. Se observan armónicos únicamente cuando las masas colgadas son 16 kg y 25 kg.

a) ¿Cuáles son los armónicos producidos por estas masas?

b) ¿Cuál es la relación entre las tensiones y el número armónico?

c) ¿Cuál es la frecuencia del generador?

d) ¿Cuál es el valor máximo m para que se produzca un armónico?



Solución.

a) ¿Cuáles son los armónicos producidos por estas masas?

Los armónicos se producen para m_1 = 16 kg y para m_2 = 25 kg.

$$n\frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

$$\lambda_1 f = \frac{2L}{n_1} f = \sqrt{\frac{m_1 g}{\mu}} \text{ y}$$

$$\lambda_2 f = \frac{2L}{n_2} f = \sqrt{\frac{m_2 g}{\mu}}$$

Luego: $\dfrac{n_2}{n_1} = \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

Los armónicos son el quinto y el cuarto.

b) La relación entre las tensiones y el número armónico

$T_1 = m_1 g$, $T_2 = m_2 g$

Dividiendo:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

c) La frecuencia del generador

$$f = \frac{n_1}{2L}\sqrt{\frac{m_1 g}{\mu}} \Rightarrow$$

$$f = \frac{5}{2(2)}\sqrt{\frac{16(9,8)}{0,002}} = 350 \text{ Hz}$$

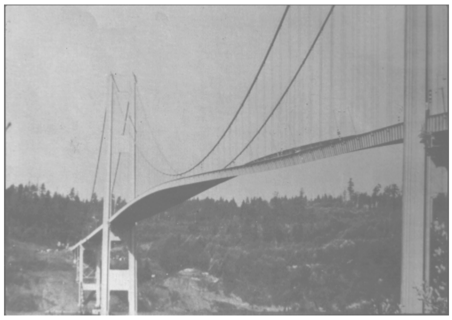
e) El valor máximo de m que produce un armónico

$$\lambda f = \frac{2L}{n} f = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} \Rightarrow m = \frac{4L^2 f^2 \mu}{n^2 g}$$

El mayor valor de m se produce con n = 1:

$$m = \frac{4(2)^2(350)^2(0,002)}{(1)^2(9,8)} = 400 \text{ kg}$$

Ejemplo 52. El puente colgante de Tacoma, de aproximadamente 1810m de longitud, fue abierto al tráfico el 1 de julio de 1940, luego de 2 años de construcción, uniendo Tacoma y Gig Harbor. 4 meses después el puente colapsó durante una tormenta el 7 de Noviembre de 1940. Durante la resonancia se observó al puente oscilando en su segundo modo de vibración a razón de 60 oscilaciones cada minuto.



Determine:

a) la longitud de onda de la onda estacionaria formada.

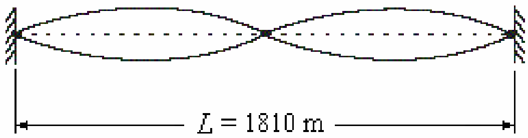
b) la velocidad de propagación de la onda.

c) el módulo de corte del puente, asumiendo que la densidad promedio del puente era de $5x10^3$kg/m^3.

d) la ley de movimiento vertical de un carro que se hallaba estacionado a un cuarto de la longitud del puente desde uno de sus extremos.

Solución.

a)



$\lambda = 1810$ m

b) $v = \lambda f = (1810\text{ m})(1/\text{s}) = 1810$ m/s

c) Como $v = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}} \Rightarrow G = v^2 \rho =$

$$(1810)^2(5\times 10^3) = 1,63805\times 10^{10}\ \frac{N}{m^2}$$

d) Para ondas estacionarias $y = 2A\,\text{sen}kx\cos\omega t$

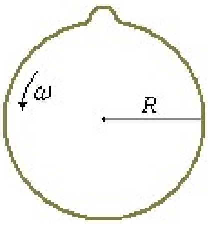
Para $x = \dfrac{\lambda}{4}$, $\text{sen}kx = 1$, luego

$y = 2A\cos\omega t \Rightarrow y = 2A\cos 2\pi f t$

Ejemplo 53. Un lazo de cuerda se gira a una alta velocidad angular ω, de modo que se forma un círculo tenso del radio R. Se forma un pulso (como se muestra en la figura) en la cuerda girante.

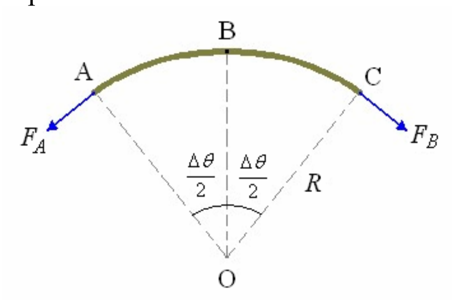
a) Demostrar que la tensión en la cuerda es $T = \mu\omega^2 R^2$, donde μ es la densidad lineal de la cuerda.

b) Bajo que condiciones el pulso permanecería estacionario relativo a un observador en tierra.



Solución.

a) Según se muestra en figura tomemos ACB una pequeña sección de la cuerda, que subtiende un ángulo $\Delta\theta$ en O, el centro del lazo. Elegimos C en el punto medio del arco.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_H = F_B \cos\frac{\Delta\theta}{2} - F_A \cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_A = F_B = T$$

$$\sum F_V = -F_B \operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - F_A \operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = -\Delta m a_c$$

De esta última ecuación:

Con $F_A = F_B = T$, $\Delta m = \mu\Delta\ell = \mu R\Delta\theta$ y $\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$:

Obtenemos:

$$2T\frac{\Delta\theta}{2} = \mu R\Delta\theta\left(\omega^2 R\right)$$

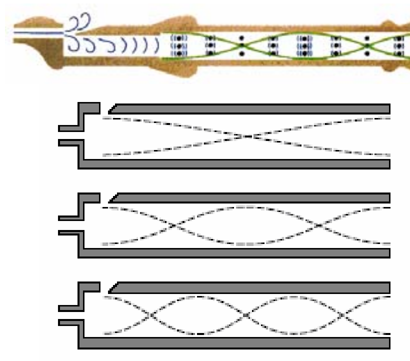
$$\Rightarrow T = \mu\omega^2 R^2$$

b) En una cuerda con densidad lineal μ y tensión T una onda viaja con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu\omega^2 R^2}{\mu}} = \omega R.$$

Luego el pulso debe viajar con una velocidad $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ relativa a la cuerda. Luego, si el pulso se mueve en sentido horario con respecto a la cuerda, permanecería estacionario con respecto a tierra.

Límite libre. Límite libre: (un tubo abierto en ambos extremos, como en los instrumentos musicales de viento, ejemplo, la flauta).



En este caso las condiciones a imponer son que, si la longitud del medio es L, tanto en $x=0$ como $x=L$ se habrán de dar antinodos. Aplicando la condición de antinodo en un límite libre, resulta:

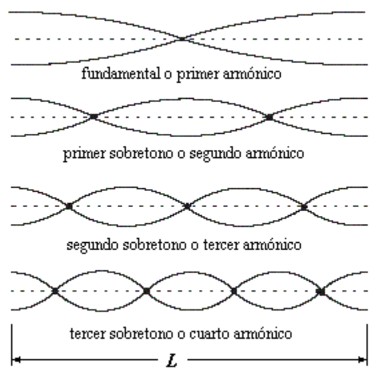
$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

o en términos de frecuencias,

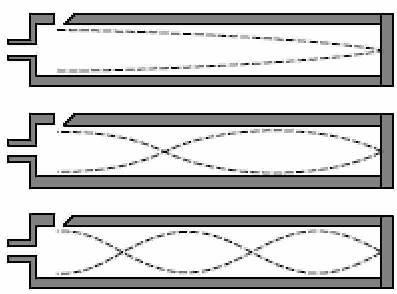
$$f_n = \frac{\lambda_n}{v} \Rightarrow f_n = n\frac{v}{2L}$$

Para n = 1, 2, 3, 4,…………..

Por tanto, igual que antes la frecuencia y la longitud de onda sólo podrán tomar determinados valores, y estarán cuantificadas. La frecuencia más baja de la serie recibe el nombre de **frecuencia fundamental**, y las restantes, que son múltiplos de la fundamental, reciben el nombre de **armónicos.** Se representan a continuación los cuatro primeros.



Limite fijo. Límite libre: (una cuerda con un extremo con libertad de movimiento y el tubo cerrado en un extremo).



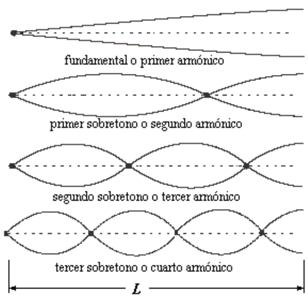
En esta situación se tendrá un nodo en $x=0$ y un antinodo en $x=L$, lo que implica que en la longitud L de la cuerda han de caber un número impar de cuartos de onda. Aplicando la condición de antinodo reflexión en un límite fijo resulta:

$$L = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4} \Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

o, en términos de frecuencias,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = (2n-1)\frac{v}{4L}$$

Para n = 1, 2, 3, 4,…………..
que representan la serie de ondas permitidas por las condiciones de contorno. Se representan a continuación los cuatro primeros.



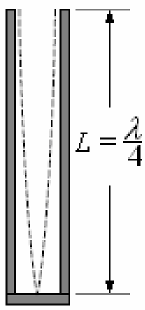
Ejemplo 54. Calcular la frecuencia de los sonidos emitidos por un tubo abierto y otro cerrado de 1 m de longitud, produciendo el sonido fundamental. Se supone .que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.
Solución.
Para tubo abierto (n = 1):

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{340}{2(1)} = 170 \text{ Hz}$$

Para un tubo cerrado (n = 1):

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{340}{4(1)} = 85 \text{ Hz}$$

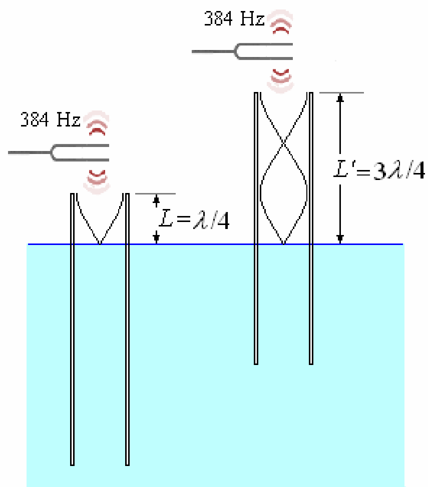
Ejemplo 55. Calcular la longitud de un tubo abierto que lleno de aire y a 0° C (v = 330 m/s) emite como sonido fundamental el DO3.
Solución.
Frecuencia del DO 3 = 264 Hz:



$$f = \frac{v}{4L} \Rightarrow$$

$$L = \frac{v}{4f} = \frac{330}{4(264)} = 0{,}3125 \text{ m}$$

Ejemplo 56. Un diapasón de frecuencia 384 Hz se sostiene vibrando sobre el extremo de un tubo de vidrio vertical, mientras que el otro extremo del tubo está introducido en agua. Dos resonancias consecutivas ocurren cuando la parte superior del tubo está a 22,8 cm y 68,4 cm sobre la superficie del agua.
a) Calcular la rapidez del sonido en el aire.
b) Si repetimos el experimento con otro diapasón de frecuencia desconocida, se encuentran dos resonancias consecutivas cuando la parte superior del tubo está a 27,6 cm y 46,0 cm sobre la superficie del agua. ¿Cuál es la frecuencia del diapasón y dónde ocurrirá la siguiente resonancia?
Solución.
a) La diferencia de longitudes entre dos resonancias consecutivas corresponde a media longitud de onda



Luego

$$L'-L = \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = 2(L'-L)$$

= 2(68,4 - 22,8) = 91,2 cm

$v = \lambda f$ = 0,912 x 384 = 350,8 m/s

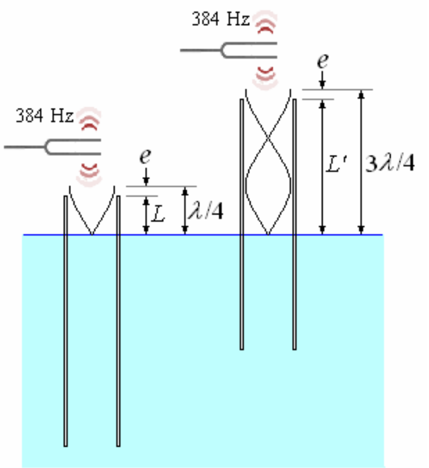
b) $L'-L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2(L'-L)$

= 2(46,0 – 27,6) = 36,8 cm

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{350{,}8}{0{,}368} = 953{,}26 \text{ Hz}$$

La siguiente resonancia ocurrirá a la longitud 0,46 + 36,8/2 = 64,4 cm

Ejemplo 57. Un diapasón de frecuencia 384 Hz se sostiene vibrando sobre el extremo de un tubo de vidrio vertical, el otro extremo está introducido en agua. La resonancia ocurre cuando la parte superior del tubo esta a 21,9 cm y también a 66,4 cm sobre la superficie del agua.
a) Calcular la velocidad del sonido en aire.
b) Calcular la corrección de extremo del tubo.
Solución.
a)



Un antinodo jamás se produce en el extremo de un tubo abierto, Su posición está más allá del extremo del tubo, el máximo desplazamiento pasa ligeramente al extremo.
Para la primera resonancia es del tubo estará a casi a un cuarto de longitud de onda,

$$\frac{\lambda}{4} = L + e$$

L es la longitud de la columna de aire y e la corrección de extremo.
Para la segunda resonancia,

$$3\frac{\lambda}{4} = L' + e$$

L' es la longitud donde ocurre la segunda resonancia.

Luego $L' - L = \dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$$\lambda = 2(L' - L) = 2(66{,}4 - 21{,}9) = 89 \text{ cm}$$

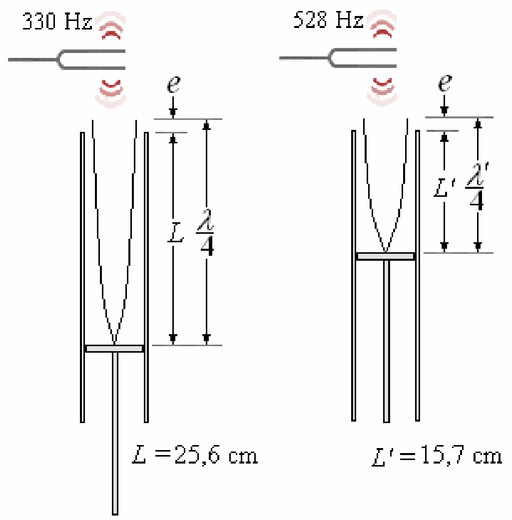
La velocidad del sonido es

$$v_s = \lambda f = 0{,}89 \times 384 = 341{,}76 \text{ m/s}$$

b) $L + e = \dfrac{\lambda}{4} \Rightarrow e = \dfrac{\lambda}{4} - L = \dfrac{89}{4} - 21{,}9 =$ 0,35 cm.

Ejemplo 58. Un tubo uniforme de 25,6 cm de longitud, cerrado en un extremo, resuena con un diapasón de frecuencia 330 Hz sostenido sobre el. La longitud del tubo se disminuye gradualmente. Cuando la longitud es 15,7 cm, un diapasón de 528 Hz produce la resonancia.
a) Encontrar la velocidad del sonido en aire.
b) Calcular la corrección de extremo del tubo.

Solución.



a) Un antinodo jamás se produce en el extremo de un tubo abierto, Su posición está más allá del extremo del tubo, el máximo desplazamiento pasa ligeramente al extremo.
Para la primera resonancia es del tubo estará a casi a un cuarto de longitud de onda,

$$\frac{\lambda}{4} = L + e$$

L es la longitud de la columna de aire y e la corrección de extremo.
Para el primer caso

$$L + e = \frac{\lambda}{4}$$

Para el segundo caso

$$L' + e = \frac{\lambda'}{4}$$

Restando

$$L - L' = \frac{1}{4}(\lambda - \lambda') = \frac{v}{4}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f'}\right) = \frac{v}{4}\left(\frac{f' - f}{f\,f'}\right)$$

Despejando v:

$$v = 4(L - L')\frac{f\,f'}{(f' - f)}$$

$$= 4(0{,}256 - 0{,}157)\frac{528 \times 330}{(528 - 330)}$$

$$= 348{,}48 \text{ m/s}$$

b)

$$L + e = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow$$

$$e = \frac{\lambda}{4} - L = \frac{348{,}48}{4 \times 330} - 0{,}256 = 0{,}008 \text{ m}$$

La corrección de extremo del tubo es 8 mm.

Ejemplo 59. Un tubo de 1 m de largo está cerrado por uno de sus extremos. Un alambre estirado se coloca cerca del extremo abierto. El alambre tiene 0,3 m de largo y una masa de 0,01 kg. Se sostiene fijo en sus dos extremos y vibra en su modo fundamental.
Pone a vibrar a la columna de aire en el tubo con su frecuencia fundamental por resonancia.
Encontrar:
a) La frecuencia de oscilación de la columna de aire.
b) La tensión del alambre.
Velocidad del sonido en el aire 340 m/s.
Solución.
a) La frecuencia fundamental (n =1) en el tubo sonoro cerrado valdrá:

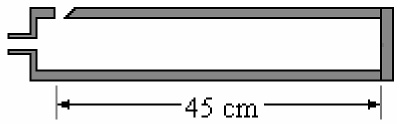
$$f = \frac{v}{4L} = \frac{340}{4(1)} = 85 \text{ Hz}$$

b) Dicha frecuencia será la fundamental que se produce en la cuerda, por lo que:

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}01}{0{,}3} = \frac{1}{30}\frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$T = 4L^2 f^2 \mu = 4(0{,}3)^2(85)^2\left(\frac{1}{30}\right) = 86{,}7 \text{ N}$$

Ejemplo 60. El tubo de un órgano representado en la figura tiene 45 cm de longitud y las onda estacionaria que se produce por el silbato en espacio libre es de una longitud de onda de 60 cm. Dicho tubo se puede considerar abierto en el extremo izquierdo y cerrado en el derecho.
a) Muéstrese en un diagrama al interior del tubo la onda estacionaria que se produce ubicando la posición de las crestas nodos y vientres de amplitud.
b).Si la máxima amplitud de oscilación de las partículas de aire al interior del tubo es de 10^{-6} cm. ¿cuál será la máxima amplitud que podrán alcanzar las partículas de aire en el centro del tubo?

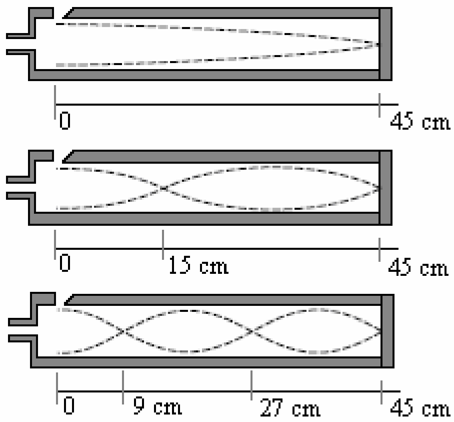


Solución.
La frecuencia libre es

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0{,}6} = 566{,}6 \text{ Hz},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}6} = 10{,}47 \text{ rad}$$

a) Diagrama al interior del tubo la onda estacionaria para las tres primeras resonancias.



b).Si la máxima amplitud de oscilación de las partículas de aire al interior del tubo es de 10^{-6} cm. ¿cuál será la máxima amplitud que podrán alcanzar las partículas de aire en el centro del tubo?

$$y_{total} = 2A\,\text{sen}kx\cos\omega t$$

La máxima amplitud de oscilación es en un vientre

$\text{sen}kx = 1$ y $\cos\omega t = 1$, luego: $10^{-8} = 2A \Rightarrow$
$A = 0{,}5\times 10^{-8}$ m

La máxima amplitud que podrán alcanzar las partículas de aire en el centro del tubo

$x = 22{,}5$ cm y $\cos\omega t = 1$

$$y_{máx(x=0,225)} = 2A\,\text{sen}kx$$
$$= 2\left(0{,}5\times 10^{-8}\right)\left[\text{sen}(10{,}7)(0{,}225)\right]$$
$$= 0{,}71 \times 10^{-8} \text{ m}$$

Ejemplo 61. Un ingeniero naval quiere averiguar si un tubo que presenta externamente una boca circular abierta está abierto o cerrado en el otro extremo que no logra ver. Para esto decide usar una fuente sonora de frecuencia variable. Tomó para ello dos frecuencias de resonancia consecutivas, que le dieron los siguientes valores: 125 y 175 Hz.
a) ¿Cuál es el razonamiento en que se basó?
b) ¿A qué conclusión llegó?
c) ¿Para qué frecuencia resonaría en estado fundamental?
d) Cree que también pudo averiguar la longitud del tubo. Si se puede ¿cuál es?
Solución.
a) Las frecuencias de resonancia están dadas:

Para tubo abierto: $f = \frac{n}{2L}v$.

Para tubo cerrado en un extremo: $f = \frac{(2n-1)}{4L}v$

Para n = 1, 2, 3, 4, 5, ……………….

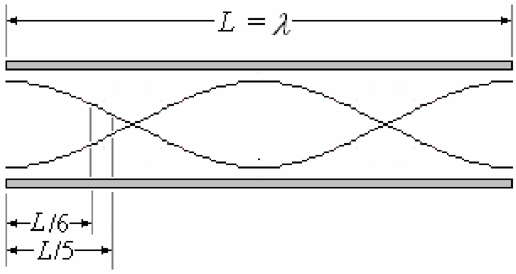
Y lo que tenemos que hacer es analizar para 125 y 175 Hz, con cuál de las condiciones concuerdan.
b) Para 125 correspondería (n – 1) y para 175 correspondería n.

De tal manera que $\frac{n-1}{125}=\frac{n}{175}$, se cumple para n = 3,5 valor que no es entero, lo que descarta esta posibilidad.
No cumple para tubo abierto
Haciendo lo mismo para el caso de tubo cerrado
$\frac{2n-3}{125}=\frac{2n-1}{175}$, se cumple para n = 4, valor entero que si cumple
EL TUBO ES CERRADO.

c) Como $f=\frac{(2n-1)}{4L}v$
La frecuencia fundamental es para n = 1
$f=\frac{1}{4L}v$, f = 25 Hz

d) Si, ya que $\frac{v}{4L}=25$, y $L=\frac{v}{100}$,
Considerando la velocidad el sonido v = 340 m/s, se obtiene L = 3,40 m.

Ejemplo 62. Un tubo de longitud L abierto en sus dos extremos resuena en su segundo armónico. Halle en qué razón están las amplitudes de oscilación de las partículas del aire dentro del tubo en las posiciones a L/5 y L/6, medidas respecto al extremo izquierdo del tubo.
Solución.
La onda estacionaria con un antinodo en x =0 y en $x = L$
$y=2A\cos kx\cos\omega t$
En el segundo armónico: $L = \lambda$.



La amplitud esta dada por $2A\cos kx$

Para $x=\frac{L}{5}=\frac{\lambda}{5}$

$$A_{\left(x=\frac{L}{5}\right)}=2A\cos\left(\frac{kL}{5}\right)=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{5}\right)$$
$$=2A\cos\frac{2\pi}{5}=2A0{,}31$$

Para $x=\frac{L}{6}=\frac{\lambda}{6}$

$$A_{\left(x=\frac{L}{6}\right)}=A\cos\left(k\frac{L}{6}\right)=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{6}\right)$$
$$=2A\cos\frac{2\pi}{6}=2A0{,}5$$

$$\frac{A_{\left(x=\frac{L}{5}\right)}}{A_{\left(x=\frac{L}{6}\right)}}=\frac{0{,}62A}{1{,}0A}=0{,}62$$

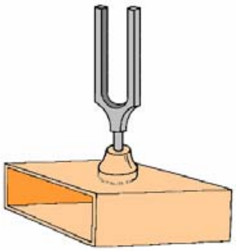
LOS INSTRUMENTOS MUSICALES
La formación de ondas estacionarias está relacionada con los instrumentos musicales tanto de cuerda como de viento. Así, el sonido generado por un arpa es consecuencia de la propagación por el aire de las ondas estacionarias que se producen, entre dos límites fijos, en las diferentes cuerdas, de modo que los graves (frecuencias bajas) se producirán en las cuerdas más largas y los agudos (frecuencias altas) en las cuerdas más cortas. En los órganos, las ondas estacionarias que se forman en los tubos se corresponden con las formadas por reflexión en dos límites, uno fijo y otro libre. Por tanto, cuanto mayor sea la longitud del órgano menor es la frecuencia: los tubos largos corresponden a frecuencias bajas (sonidos graves) y los cortos a frecuencias altas (sonidos agudos)

OSCILACIÓN DE VARILLAS. DIAPASÓN
Varilla fija por un extremo. Puesta en oscilación, al organizarse la onda estacionaria se debe tomar un nodo en el extremo fijo y un vientre en el opuesto. Los razonamientos que se realizan para un tubo cerrado son válidos para este caso; por lo tanto, una varilla que oscila fija por un extremo responde a la ley $\ell=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$

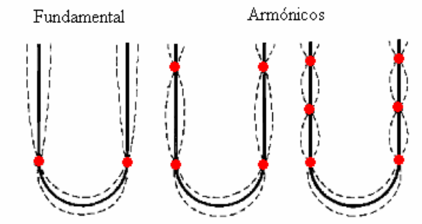
Varilla fija por un punto interior. Si se hace oscilar una varilla fija por un punto interior para que se organice una onda estacionaria, se formará allí un nodo y vientres en los extremos. Todo esto depende exclusivamente del punto por el que se sostenga. Este punto (siguiendo el razonamiento de tubos abiertos), deberá estar situado en la mitad, a $1/4$ a $1/6$, etcétera, de un extremo.
Téngase presente que varillas de igual longitud, idénticamente fijadas, pueden producir sonidos de distinta frecuencia si se varía la naturaleza de 1a sustancia, las dimensiones o la forma de excitación.
La frecuencia fundamental depende de la

velocidad de propagación. Esta observación es válida para los tubos sonoros ya que, modificando la naturaleza y las condiciones del gas, se modifica la velocidad de propagación.

DIAPASÓN
Un aparato de aplicación en acústica es el diapasón que consta de una barra metálica en forma de "U", soportada en su parte media.



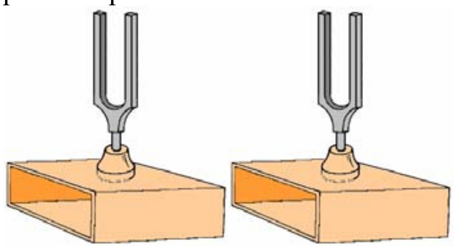
Si se lo excita, entra en vibración formándose una onda estacionaria; los nodos estarán ubicados a 2/3 de su longitud al emitirse el sonido fundamental. La frecuencia del diapasón depende de la elasticidad del material y su densidad.



Para aumentar la intensidad del sonido producido, se monta el diapasón sobre una caja. Si la caja está cerrada en un extremo, su longitud es ¼ de la longitud de onda del sonido en el aire emitido por el diapasón. Si la caja está abierta en los dos extremos la longitud de la caja es igual a la mitad de dicha longitud de onda.
Al vibrar, las .dos ramas de un diapasón se mueven en fases opuestas. Cuando las ramas se acercan, el punto más bajo del pie del diapasón baja, y sube cuando las ramas se alejan. Este pie se encuentra afectado de un movimiento vibratorio de dirección vertical lo que puede comprobarse apoyándolo en la mano. Es así finalmente, como se transmite la vibración del diapasón a la columna de aire contenida en la caja.
Los diapasones se utilizan como patrones de registro de frecuencia, pues pueden construirse de manera que no sean afectados por variaciones de temperatura. Es posible lograr diapasones capaces de mantener una frecuencia de vibración con una precisión de 1 en 100000.

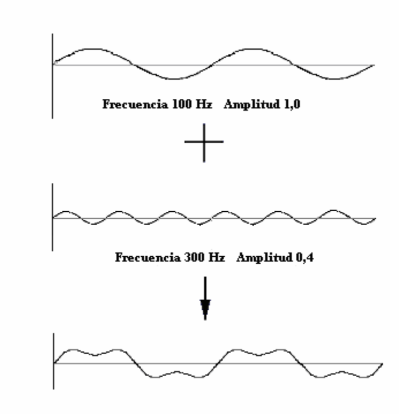
Resonancia
Se ha visto que un sistema tal como una cuerda estirada es capaz de oscilar en uno o más modos naturales de vibración. Si se aplica una fuerza periódica a este sistema, la amplitud resultante del movimiento del sistema será mayor cuando la frecuencia de la fuerza aplicada sea igual o aproximadamente igual a una de las frecuencias naturales del sistema, que cuando la fuerza excitadora se aplique en alguna otra frecuencia. Las correspondientes frecuencias naturales de oscilación de un sistema generalmente se conocen como **frecuencias resonantes**

Experimento de resonancia. En la figura se muestran dos diapasones montados en sendas cajas de igual longitud, lo que indica que ambos tienen igual frecuencia. A estas cajas se las llama de resonancia, pues tienen 1a misma longitud que un tubo sonoro capaz de emitir la misma nota que el diapasón.



Enfrentadas las aberturas de las cajas y excitado un diapasón, se comprueba que el otro entra espontáneamente en vibración, En efecto, si se detiene con la mano el diapasón excitado en un principio, se percibe nítidamente el sonido producido por el otro y, si se libera el diapasón detenido, éste vuelve a vibrar, lo que podrá percibirse acercando levemente la mano a las ramas del diapasón. Se ha producido un fenómeno de resonancia acústica.
Si existe un cristalero cerca podrá comprobar que algunas copas mantienen la vibración por más tiempo que otras y que durante algunos instantes la amplitud de la vibración va en aumento. Lo que sucede es que un cuerpo puede vibrar, entre otras razones, por la recepción de ondas. Como cada cuerpo tiene una frecuencia propia d vibración, si ésta coincide con la de la onda recibida la vibración se mantiene

ONDAS DE DIFERENTE FRECUENCIA VIAJANDO EN EL MISMO ESPACIO
La figura ilustra la suma de dos ondas sinusoidales de frecuencia y amplitud diferentes. Esta onda resultante mantiene la frecuencia del componente más grave, pero con el timbre alterado

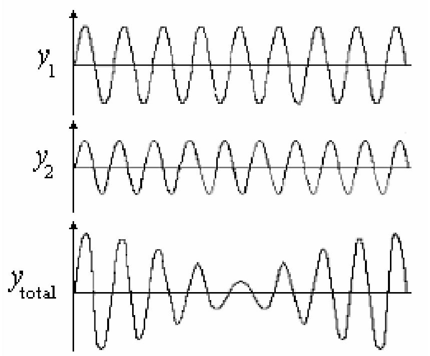


PULSACIONES O BATIDOS.

Cuando dos fuentes de sonido que tienen casi la misma frecuencia se hace sonar al mismo tiempo, ocurre un efecto interesante. Puede oír un sonido con una frecuencia que es el promedio de las dos. Sin embargo, la sonoridad de este sonido crece repetidamente y después decae, en lugar de permanecer constante. Estas variaciones repetidas en amplitud se denominan **pulsaciones** o **batidos**, y la ocurrencia de pulsaciones es una característica general de las ondas.

Si la frecuencia de una de las fuentes de ondas se cambia, hay un cambio que corresponde en el grado en que varía la amplitud. Este grado se llama frecuencia de pulsación. A medida que las frecuencias se hacen más cercanas, la frecuencia de pulsación se hace más lenta. Así, un músico puede afinar una guitarra a otra fuente de sonido escuchando las pulsaciones mientras incrementa o disminuye la tensión en cada cuerda. A la postre, las pulsaciones se hacen tan lentas que efectivamente se desvanecen, y las dos fuentes están en un tono.

Las pulsaciones se pueden explicar con facilidad considerando dos ondas sinusoidales y_1 e y_2 a partir de la misma amplitud A, pero de frecuencias diferentes f_1 y f_2. El principio de superposici6n establece que la amplitud combinada y es la suma algebraica de las amplitudes individuales.



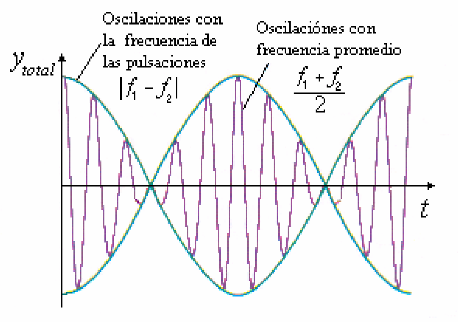
$$y = y_1 + y_2$$

$$y_{total} = A\,\text{sen}\,2\pi f_1 t + A\text{sen}\,2\pi f_2 t$$

Usando la identidad trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos, tenemos

$$y_{total} = \left[2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\text{sen}\,2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

Esta ecuación representa una onda que oscila con el promedio de sus frecuencias. La amplitud resultante también oscila con una frecuencia de pulsación igual a la diferencia entre las frecuencias de la fuente.



La primera parte de y_{total} es

$2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t$, esto da la amplitud de las pulsaciones que varían lentamente, como se indica en la figura anterior.

Como el sonido alto se escucha siempre que el término sea 2*A* o – 2*A*, la frecuencia de las pulsaciones es $f_p = |f_1 - f_2|$. Finalmente, las oscilaciones rápidas con cada pulsación son debidas a la segunda parte de y_{total},

$$\text{sen}\,2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

Estas oscilaciones tienen una frecuencia que es el promedio de las dos frecuencias de las fuentes.

Las pulsaciones se pueden escuchar hasta frecuencias de alrededor de 10 Hz. Más allá son difíciles de distinguir

Ejemplo 63. Cuando se golpea un diapasón de 440 Hz al mismo tiempo que se pulsa la cuerda de una guitarra que debe dar la nota Sol, se escuchan 3 pulsaciones por segundo. Después de que la cuerda de la guitarra se tensa un poco más para aumentar su frecuencia las pulsaciones aumentan a 6 por segundo. ¿Cuál es la frecuencia de la guitarra con la tensión final?

Solución.

En este fenómeno de interferencia de dos ondas sonoras de frecuencia parecida se producen pulsaciones que el oído percibe con un tono $\frac{f_1 + f_2}{2}$ y una amplitud que oscila con $f_p = |f_1 - f_2|$. El oído responde a la intensidad de la onda sonora que depende del cuadrado de la amplitud, es decir el sonido será fuerte tanto para amplitud máxima como para amplitud mínima. Es decir para el oído la frecuencia de batido es Δf .

En este caso y dado que la frecuencia de batido percibida por el oído es 3 s^{-1}, la frecuencia original emitida por la cuerda es 437 Hz ó 443 Hz.

La frecuencia de oscilación de la cuerda es directamente proporcional a la velocidad de transmisión de las ondas de la cuerda que a su vez depende de la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda. Por tanto al aumentar la tensión de la cuerda, aumentamos la frecuencia de oscilación. En este caso, al aumentar la tensión, aumenta la frecuenta de batidos a 6 s^{-1}. Por tanto este hecho implica que la frecuencia original de la cuerda era de 443 Hz y después de aumentar la tensión es de 446 Hz. Si hubiese sido 437 Hz se detectaría un decremento en la frecuencia de batido.

Ejemplo 64. Algunas de las notas bajas del piano tienen dos cuerdas. En una nota particular una de las cuerdas se templa correctamente a 100 Hz. Cuando las dos cuerdas suenan juntas, se oye un batido por segundo. ¿En qué porcentaje debe un afinador de piano cambiar la tensión de la cuerda desafinada para hacerla coincidir correctamente? (el batido es entre los tonos fundamentales)

Solución.

La frecuencia fundamental es $f = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

Asumimos que las dos cuerdas son de la misma longitud, composición y diámetro, tal que la diferencia Δf es debida a la diferencia de tensión ΔT .

De la ecuación anterior obtenemos.

$$\frac{df}{dT} = \frac{1}{2L}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{T\mu}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{1}{2T} = \frac{f}{2T}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{f} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

Como $|\Delta f| << f$, tenemos $\dfrac{\Delta f}{f} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Delta T}{T}\right)$.

En este caso f = 100 Hz y $|\Delta f| = 1\,\text{Hz}$.

Luego $\dfrac{\Delta T}{T} = 2\dfrac{|\Delta f|}{f} = 2\left(\dfrac{1}{100}\right)$ = 2 por ciento.

(Si la cuerda desafina es "baja" su tensión debe ser aumentada; si la cuerda es "alta" su tensión se debe bajar.)

Ejemplo 65. Un diapasón produce cinco batidos por segundo con un alambre estirado de longitud 112 cm. También produce cinco batidos por segundo cuando suena con el mismo alambre pero de 116 cm de longitud bajo la misma tensión. ¿Cuál es la frecuencia del diapasón?

Solución.

Sea f la frecuencia del diapasón y f_1 y f_2 las frecuencias de los alambres respectivamente.

Batidos con el alambre de 112 cm

$$f_1 - f = 5 \Rightarrow f_1 = f + 5 \quad (1)$$

Batidos con el alambre de 116 cm

$$f - f_2 = 5 \Rightarrow f_2 = f - 5 \quad (2)$$

Las frecuencias de los alambres son;

$$f_1 = \frac{1}{2L_1}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad f_2 = \frac{1}{2L_2}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Dividiéndolas

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1} \qquad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$\frac{f+5}{f-5} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{116}{112} \Rightarrow$$

$$112(f+5) = 116(f-5) \Rightarrow$$

$$112f + 560 = 116f - 580 \Rightarrow$$

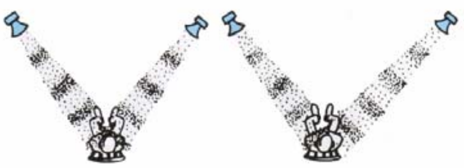
$$4f = 1140 \Rightarrow$$

$$f = \frac{1140}{4} = 285\,\text{Hz}$$

La frecuencia del diapasón es 285 Hz.

INTERFERENCIA DE DOS ONDAS QUE VIAJAN EN DISTINTAS DIRECCIONES

Una causa corriente que origina una diferencia de fase entre dos ondas sonoras, es la diferencia de longitudes de los trayectos que deben recorrer las ondas desde su fuente o foco hasta el punto donde se produce la interferencia. Supóngase que tenemos dos focos que están emitiendo ondas armónicas de la misma frecuencia y longitud de onda. En la figura a continuación, el espectador (a) recibe los dos sonidos en fase, el observador (b) recibe los sonidos con diferencia de fase.



(a) (b)

En el caso general, podemos escribir las funciones de onda como:

$y_1 = A_1 \text{sen}(kr_1 - \omega t - \varphi)$, $y_2 = A_2 \text{sen}(kr_2 - \omega t)$
La diferencia de fase para estas dos funciones de onda está dada por:

$$\delta = k(r_2 - r_1) - \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \varphi$$

Este término se debe a:
La diferencia de fase inicial entre y_1 e y_2;
Si las ondas están oscilando en fase, en $t = 0$ y $r = 0$, entonces $\varphi = 0$. .

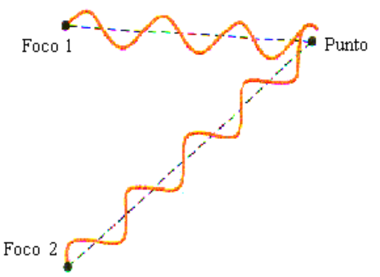
Realizando la composición de movimientos obtenemos para la amplitud de la onda resultante:

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\delta}$, siendo el término de interferencia: $2A_1A_2 \cos\delta$.

Estudiamos ahora los máximos y mínimos a partir del término de interferencia.
La diferencia para los caminos recorridos por las dos ondas es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \varphi$$

1. Interferencia constructiva: Si la diferencia entre los caminos recorridos por ambas ondas hasta un cierto punto es un número entero de longitudes de onda, la interferencia es constructiva



Para cumplir con esta condición
$\delta = 2n\pi \Rightarrow \cos\delta = 1 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \varphi = 2n\pi \Rightarrow$$

$$(r_2 - r_1) = \frac{\lambda}{2\pi}(2n\pi + \varphi)$$

En conclusión, para que ocurra la interferencia constructiva la diferencia de caminos debe ser:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \left(n + \frac{\varphi}{2\pi}\right)\lambda$$

La amplitud de la onda resultante será:

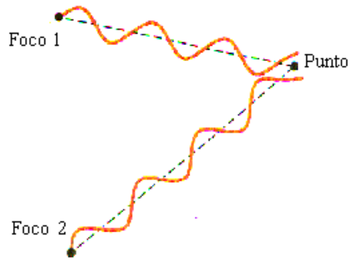
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2}$$

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$$

Si $A_1 = A_2 \Rightarrow A = 2A_1$

Por tanto se puede afirmar que una diferencia en los trayectos de una longitud de onda o de un número entero cualquiera de longitudes de onda es equivalente a que no haya ninguna diferencia en absoluto entre las trayectorias.

2. Interferencia destructiva: Si la diferencia de trayectos es una semilongitud de onda o un número impar de semilongitudes de onda, el máximo de una onda coincidirá con el mínimo de la otra y la interferencia será destructiva.



Para cumplir con esta condición
$\delta = (2n+1)\pi \Rightarrow \cos\delta = -1$
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \varphi = (2n+1)\pi \Rightarrow$$

$$(r_2 - r_1) = \frac{\lambda}{2\pi}[(2n+1)\pi + \varphi]$$

En conclusión, para que ocurra la interferencia constructiva la diferencia de caminos debe ser:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \left[(2n+1) + \frac{\varphi}{2\pi}\right]\lambda$$

La amplitud de la onda resultante será:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2}$$

$$A = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = A_1 - A_2$$

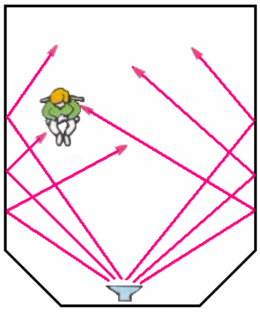
Si $A_1 = A_2 \Rightarrow A = 0$

Resumiendo, si $\varphi = 0$:

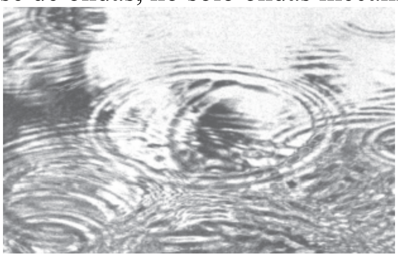
Condición de máximo: $(r_1 - r_2) = n\lambda$

Condición de mínimo: $(r_1 - r_2) = (2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$

APLICACIONES. Cuando se construye una sala de conciertos hay que tener en cuenta la interferencia entre ondas de sonido, para que una interferencia destructiva no haga que en algunas zonas de la sala no puedan oírse los sonidos emitidos desde el escenario.



Arrojando objetos al agua estancada se puede observar la interferencia de ondas de agua, que es constructiva en algunos puntos y destructiva en otros. La interferencia puede producirse con toda clase de ondas, no sólo ondas mecánicas.



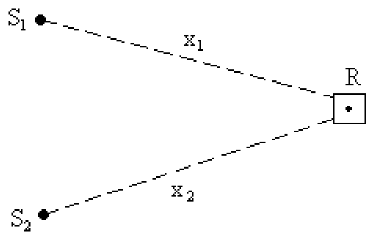
Las ondas de radio interfieren entre sí cuando se reflejan en los edificios de las ciudades, con lo que la señal se distorsiona. La luz visible está formada por ondas electromagnéticas que pueden interferir entre sí. La interferencia de ondas de luz causa, por ejemplo, las irisaciones que se ven a veces en las burbujas de jabón. La luz blanca está compuesta por ondas de luz de distintas longitudes de onda. Las ondas de luz reflejadas en la superficie interior de la burbuja interfieren con las ondas de esa misma longitud reflejadas en la superficie exterior. En algunas de las longitudes de onda, la interferencia es constructiva y en otras destructiva. Como las distintas longitudes de onda de la luz corresponden a diferentes colores, la luz reflejada por la burbuja de jabón aparece coloreada.

Ejemplo 66. Dos focos sonoros emiten simultáneamente ondas de la misma frecuencia *f* = 425 Hz, siendo la velocidad del sonido en el aire v = 340 m/s. Si colocamos un aparato registrador de sonidos a x_1 = 100 m del primer foco y a x_2 = 101,2 del segundo ¿Se registrará sonido en el aparato?

Solución.
La longitud de onda del sonido emitido por ambos focos es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{425} = 0{,}80 \text{ m}$$

Para que el aparato no registrara sonido sería preciso que en el punto donde está situado se produzca un mínimo de interferencia. De otra manera, R deberá estar situado en un punto cuya diferencia de distancias a S_1 y S_2 sea igual a un múltiplo impar de semilongitudes de onda:



$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

Según los valores dados:

$$x_2 - x_1 = 101{,}2 - 100 = 1{,}2 \text{ m}$$

y $\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{0{,}80}{2} = 0{,}40 \text{ m}$

Luego

$$x - x_1 = 1{,}2 = 3(0{,}40) = 3\frac{\lambda}{2}$$

Por tanto, el aparato no registrará el sonido

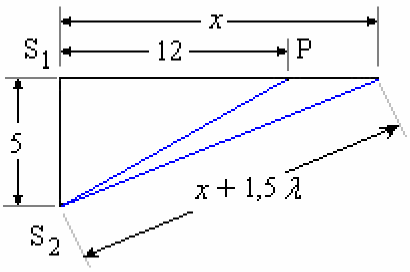
Ejemplo 67. Dos parlantes S_1 y S_2 están separados una distancia de 5m, están conectados a un oscilador de audio. Un muchacho está en el punto P, a 12,0 m de S_1 y 13,0 m de S_2: Formando un triángulo rectángulo S_1, S_2 y P. La onda de S_2 llega al punto P, 2,00 periodos después que la onda de S_1. La velocidad del sonido es 350 m/s.
a) ¿Cuál es la frecuencia del oscilador?
b) Si el muchacho camina alejándose de S_1 por la línea que pasa por P, hasta que una interferencia destructiva ocurre. ¿En qué punto medido desde S_1 la onda de S_2 llega 1,50 periodos más tarde?
Solución.

a) $2\lambda = 13 - 12 = 1\text{m} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{2} = 0{,}5\text{m}$

Luego

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{350}{0{,}5} = 700 \text{ Hz}$$

b)



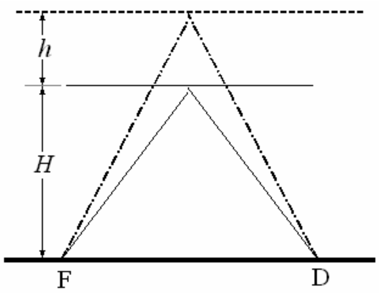
$$\left(x+1{,}5\lambda\right)^2 - x^2 = 5^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 3\lambda x + (1{,}5\lambda)^2 - x^2 = 25$$

Con $\lambda = 0{,}5\ \text{m}$: $1{,}5x + (0{,}75)^2 = 25$

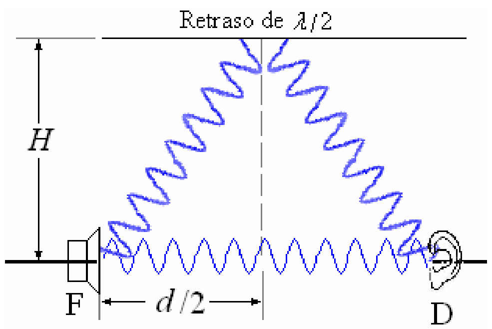
Finalmente $x = 16{,}3\ \text{m}$

Ejemplo 68. Una fuente F y un detector D de ondas de alta frecuencia están a una distancia *d* en el suelo. Se detecta que la onda dirigida desde S está en fase en D con la onda en con la onda que parte de S, que se refleja por una plataforma horizontal situada a una altura *H*. Considera que los ángulos incidente y reflejado son los mismos.
a) Determina la diferencia de caminos entre las 2 fuentes y la frecuencia, considerando que es la primera a la cual se encuentra que las ondas estén en fase.
b) Si la plataforma horizontal se eleva una altura *h*, no se detecta señal en D, encuentra ahora el valor de *h*, considerando la misma frecuencia.
d = 20m
H = 5m
v = 340 m/s



Solución

a)



Determina la diferencia de caminos entre las 2 fuentes. y la frecuencia, considerando que es la primera a la cual se encuentra que las ondas estén en fase.

Camino directo $r_1 = d = 20$ m

Longitud del camino indirecto

$$r_2 = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + H^2} = 2\sqrt{10^2 + 5^2} = 22{,}36\ \text{m}$$

La diferencia de caminos es 22,36 – 20 = 2,36 m

Como con esta frecuencia es considerando que es la primera a la cual las ondas están en fase, esta diferencia corresponde a media longitud de onda (debido al retraso de media longitud de onda en la reflexión.

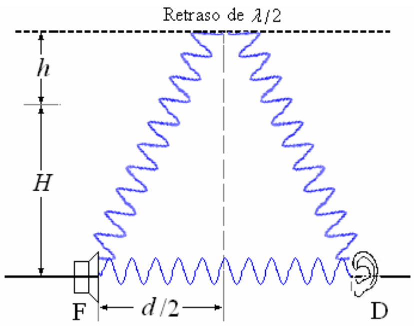
Luego

$$\frac{\lambda}{2} = 2{,}36 \Rightarrow \lambda = 4{,}72\ \text{m}$$

La frecuencia correspondiente es:

$$f = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{340}{4{,}72} = 72{,}03\ \text{Hz}$$

b) Si la plataforma horizontal se eleva una altura *h*.



Camino directo $r_1 = d = 20$ m

Longitud del camino indirecto

$$r'_2 = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(H+h\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{10^2 + \left(5+h\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{125 + 10h + h^2}$$

La diferencia de caminos es

$$2\sqrt{125 + 10h + h^2} - 20$$

Para que no detecte sonido la diferencia de caminos debe ser una longitud de onda, luego:

$$2\sqrt{125 + 10h + h^2} - 20 = \lambda = 4{,}72$$

$$\Rightarrow 24{,}72 = 2\sqrt{125 + 10h + h^2}$$

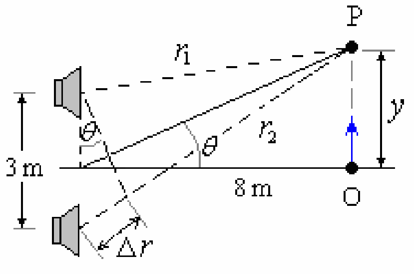
$$\Rightarrow 153 = 125 + 10h + h^2$$

$$\Rightarrow h^2 + 10h - 28 = 0$$

$$h = -5 \pm \sqrt{25 + 28} = -5 \pm 7{,}3$$

La altura que debe elevarse es h = 2,3 m

Ejemplo 69. Dos altavoces se excitan mediante el mismo oscilador a una frecuencia de 2000 Hz. La separación entre los altavoces es de 3 m, como se muestra en la figura. Un escucha está originalmente en el punto O, situado a 8 m medidos sobre el eje axial central. ¿Cuánto debe caminar el oyente perpendicularmente a ese eje, antes de alcanzar el primer mínimo en la intensidad sonora?



Solución.
Puesto que la velocidad del sonido en el aire es 330 m/s y ya que f = 2000 Hz, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{2000} = 0{,}165 \text{ m}$$

El primer mínimo ocurre cuando las ondas que alcanzan el punto P están 180º fuera de fase, o cuando la diferencia de trayectos, $r_2 - r_1$, sea igual a $\lambda/2$. Por lo tanto, la diferencia de fase se obtiene de

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2} = \frac{0{,}165}{2} = 0{,}0835 \text{ m}$$

Del pequeño triángulo rectángulo de la figura del enunciado se observa que para una buena aproximación, sen $\theta = \Delta r/3$ para pequeños valores de θ o sea

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\Delta r}{3} = \frac{0{,}0825}{3} = 0{,}0275 \Rightarrow$$

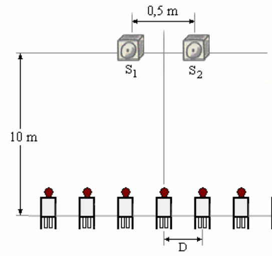
$$\theta = 1{,}58^{\circ}$$

Del triángulo rectángulo grande de la misma figura se encuentra que tan $\theta = y/8$, o sea

$$y = 8\tan\theta = 8\tan 1{,}58^{\circ} = 0{,}22 \text{ m}$$

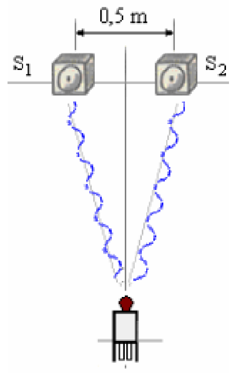
Es decir, el oyente escuchará mínimos en la intensidad sonora resultante a 22 cm desde cualquier lado de la línea central. Si el escucha permanece en estas posiciones, ¿en qué otras frecuencias se escucharán mínimos?

Ejemplo 70. Dos altoparlantes están colocados con una distancia de 0,5 m entre si emiten ambos una onda sonora. Los altoparlantes son puestos a vibrar por un amplificador que hace que emitan ondas en fase. A 10 m de distancia de los altoparlantes hay una fila de sillas y a una distancia de D = 1 m del punto central está situado el primer mínimo de intensidad.

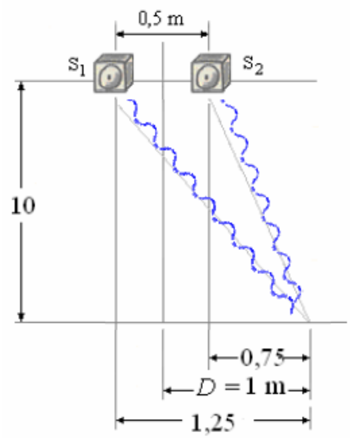


a) Diga si un oyente en la silla central escucha un máximo o un mínimo de intensidad del sonido.
b) ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia de las ondas sonoras considerando que la velocidad del sonido es 344 m/s (20 ºC)?
c) ¿Cuál es la diferencia del camino del sonido emitido por los dos altoparlantes correspondientes al máximo siguiente de intensidad?
d) Considere ahora que el amplificador hace que las ondas producidas por los dos altoparlantes estén desfasados 180º. Diga si tienen un máximo o mínimo de intensidad en el punto central y a D = 1 m del punto central.

Solución.
a) Como el recorrido de las ondas de las do fuentes son iguales para el oyente en la silla central siempre va a tener interferencia contractiva por lo tanto escuchará un máximo de intensidad del sonido.



b) Como a una distancia de D = 1 m del punto central está situado el primer mínimo de intensidad



$$\sqrt{10^2 + 1{,}25^2} - \sqrt{10^2 + 0{,}75^2} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$10{,}078 - 10{,}028 = 0{,}050 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda = 2(0{,}050) = 0{,}10 \text{ m}$$

La longitud mide 10 cm.

Como $v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{344}{0{,}10} = 3440$ Hz,

c) El máximo siguiente de intensidad se presentará cuando la diferencia entre los recorridos sea una longitud de onda.

$\Delta r = \lambda$ = 10 cm,

d) Si están desfasados 180º, esto significa media longitud de onda, luego se producirá interferencia destructiva, por lo habrá un **mínimo** de intensidad en el punto central.

A D = 1 m del punto central, se producirá un desfase de media longitud de onda, sumados los dos desfases, las ondas estarán fase nuevamente y se tendrá un **máximo**

Ejemplo 71. Dos parlantes S_1 y S_2 son activados por el mismo sistema de audio emitiendo simultáneamente ondas sonoras armónicas idénticas de frecuencia f que llegan a un observador en P.

Los parlantes S_1 y S_2 se encuentran en el origen (0, 0) m y en (7/3, 0) m, respectivamente, mientras el observador está en (16/3, 4) m, (v_s = 340 m/s).

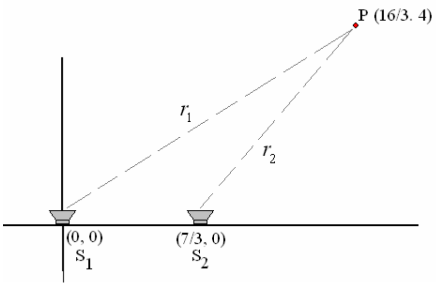
a) Si la onda emitida por S_1 llega 10 periodos más tarde que la emitida por S_2. ¿Qué frecuencia emiten los parlantes?

b) Si ahora el observador se ubica sobre el eje x, diga justificando que fenómeno ondulatorio percibe entre las regiones:

- Entre los parlantes.
- A la izquierda de S_1.
- A la derecha de S_2.

Solución.

a)



$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2} = 16\sqrt{\frac{4^2 + 3^2}{(4^2)(3^2)}}$$

$$= 16\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{20}{3}$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{16}{3} - \frac{7}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$r_1 - r_2 = \frac{20}{3} - 5 = \frac{5}{3} = 10\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}\text{m}$$

Luego la frecuencia $f = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{340}{1/6} = 2040$ Hz

b) Si ahora el observador se ubica sobre el eje x

Como la separación entre las fuentes es 7/3 m y la longitud de onda es 1/6, hay un número exacto de longitudes de onda entre las fuentes

$$\left(\frac{7/3}{1/6} = 14\right).$$

- Entre los parlantes.

$$y_1 = A\,\text{sen}(kx - \omega t),\; y_2 = A\text{sen}(kx + \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1/6} = 12\pi,\; \omega = 2\pi f = 4080\pi$$

$$y = y_1 + y_2 = A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(kx + \omega t)$$

$$= 2A\text{sen}kx\cos\omega t$$

Se forman ondas estacionarias.

- A la izquierda de S_1.

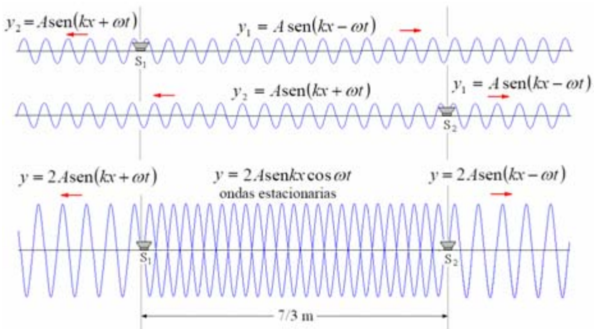
$$y = y_2 + y_2 = 2A\text{sen}(kx + \omega t)$$

Hay interferencia constructiva.

- A la derecha de S_2.

$$y = y_1 + y_1 = 2A\text{sen}(kx - \omega t)$$

Hay interferencia constructiva.

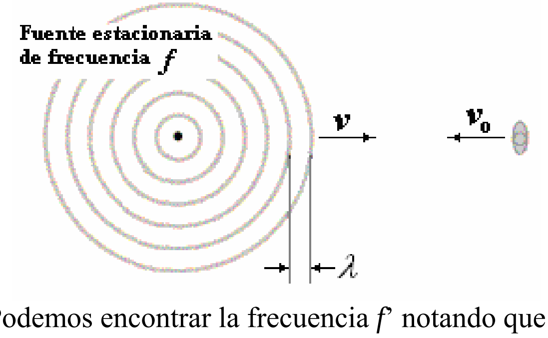


EFECTO DOPPLER

La mayoría de nosotros estamos familiarizados con la elevación y descenso posterior del tono de la sirena de una ambulancia o la bocina de un automóvil cuando éste se aproxima y cuando ha pasado**.** Este cambio en el tono, debido al movimiento relativo entre una fuente de sonido y el receptor se llama el efecto de Doppler, en honor del físico austriaco Christian Doppler (1803 -1853). Si usted escucha cuidadosamente el efecto Doppler, usted notará que el tono aumenta cuando el observador y la fuente se

acercan y disminuye cuando se alejan. Uno de los aspectos más interesantes del efecto Doppler es el hecho que se aplica a todos los fenómenos ondulatorios, no solamente al sonido. La frecuencia de la luz también experimenta el efecto Doppler cuando hay movimiento relativo entre la fuente y el receptor. Para la luz, este cambio en frecuencia significa un cambio en color. En efecto, la mayoría de las galaxias distantes se observan cambiadas a rojo lo que significa que se están moviendo alejándose de la tierra. Algunas galaxias, sin embargo, se están moviendo hacia nosotros, y su luz muestra un cambio a azul.
En el resto de esta sección, nos centramos en el efecto Doppler en ondas acústicas. Demostramos que el efecto es diferente dependiendo de si el observador o la fuente se está moviendo. Finalmente, el observador y la fuente pueden estar en el movimiento, y presentamos los resultados para tales casos también.

Observador en movimiento
Si tenemos una fuente sonora estacionaria en aire quieto. El sonido radiado es representado por frentes de onda circunferenciales que se alejan de la fuente con una velocidad *v*. La distancia entre los frentes de onda es la longitud de onda λ, y la frecuencia del sonido es *f*. Para las ondas estas cantidades están relacionadas por $v = \lambda f$.
Para un observador que se acerca con una velocidad v_o, como se muestra en la figura, el sonido parece tener una mayor velocidad $v + v_o$ (considerando que la velocidad del sonido relativa al aire es siempre la misma). Como resultado llegan al observador en un determinado tiempo un mayor número de frentes de onda que si hubiera estado en reposo. Para el observador el sonido tiene una frecuencia, *f'*, que es más alta que la frecuencia de la fuente, *f*.



Podemos encontrar la frecuencia *f'* notando que la longitud de onda del sonido no cambia, sigue siendo λ. Sin embargo la velocidad se ha incrementado a $v' = v + v_o$.

Entonces, $v' = \lambda f'$, y de aquí

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_o}{\lambda}$$

Como $\lambda = v/f$, reemplazando, tenemos

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_o}{v/f} = f\left(\frac{v + v_o}{v}\right) = f\left(1 + \frac{v_o}{v}\right)$$

Notamos que *f'* es mayor que *f*.
En el caso de alejarse de la fuente sonora el observador, para el observador el sonido parecerá tener una velocidad reducida $v' = v - v_o$, repitiendo los cálculos encontramos que

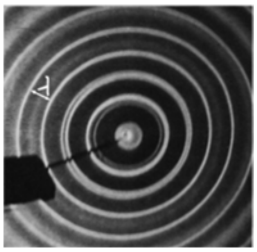
$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v/f} = f\left(\frac{v - v_o}{v}\right) = f\left(1 - \frac{v_o}{v}\right)$$

En general el Efecto Doppler para un observador en movimiento es

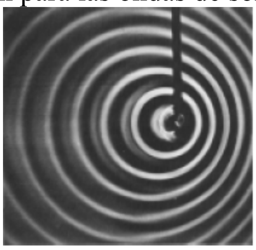
$$f' = f\left(1 \pm \frac{v_o}{v}\right)$$

El signo mas (+) corresponde cuando el observador se mueve hacia la fuente, y el signo menos (–) cuando el observador se aleja de la fuente.

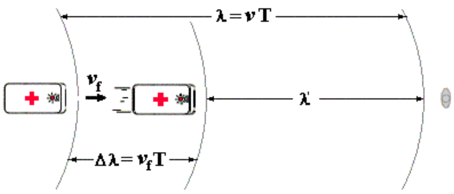
Fuente en movimiento
Con el observador estacionario y la fuente en movimiento, el efecto Doppler no se debe a que el sonido parece tener una mayor o menor velocidad como en el caso del observador en movimiento. Por el contrario, el sonido una vez que la fuente emite una onda sonora, viaja a través del medio con su velocidad característica *v*, sin importar lo que la fuente haga.
Por analogía, consideremos una onda de agua. La figura muestra una bolita oscilando hacia arriba y hacia abajo sobre la superficie de con recipiente de agua. Su movimiento causa ondas de agua circulares que se extienden alejándose del punto de contacto.



Cuanto la fuente de ondas (la bolita) es movida hacia la derecha (vea la figura), cada cresta de onda se mueve alejándose como un círculo en expansión, pero dado que la fuente se está moviendo, emite cada onda a una ubicación diferente. Como resultado, las ondas que se mueven en la misma dirección que la fuente se juntan apretándose, en tanto que las que se mueven en la dirección opuesta se separan alejándose unas de otras. La velocidad de la onda es constante si la fuente se mueve o no. Por tanto, donde la longitud de onda la frecuencia es incrementada, y donde la longitud de onda es alargada, la frecuencia es reducida. Esto es válido también para las ondas de sonido.



Consideremos Una fuente que se mueve hacia el observador con una velocidad v_f tal como muestra la figura. Si la frecuencia de la fuente es f, emite un frente de onda cada T segundos, donde $T = 1/f$. Por consiguiente, durante un periodo un frente de onda viaja una distancia vT mientras que la fuente emisora viaja una distancia $v_f T$. Como resultado el siguiente frente de onda es emitido a una distancia $vT - v_f T$ detrás del frente previo, como muestra la figura.



Esto significa que la longitud de onda hacia delante es

$$\lambda' = vT - v_f T = (v - v_f)T$$

Como mencionamos antes, la velocidad de la onda sigue siendo v, de aquí

$$v = \lambda' f'$$

La nueva frecuencia es

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_f)T}$$

Considerando que $T = 1/f$, tenemos

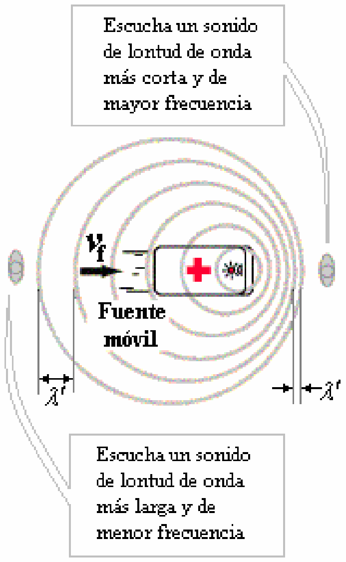
$$f' = \frac{v}{(v - v_f)(1/f)} = f\frac{v}{(v - v_f)} = f\frac{1}{\left(1 - \frac{v_f}{v}\right)}$$

f’ es mayor que *f*, como esperábamos.

En general el Efecto Doppler para una fuente en movimiento y observador estacionario es

$$f' = f\frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_f}{v}\right)}$$

El signo mas (+) corresponde cuando la fuente se mueve hacia el observador, y el signo menos (–) cuando la fuente se aleja del observador.



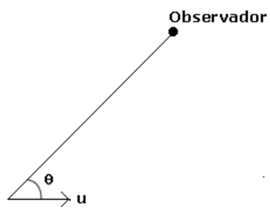
Finalmente

Si ambas se mueven:

Acercándose uno a otro $f' = f\frac{(v + v_o)}{(v - v_f)}$

Alejándose uno a otro $f' = f\frac{(v - v_o)}{v + v_f}$

La situación es más complicada para otras direcciones, pero puede analizarse sencillamente si la distancia de la fuente al punto de observación es grande comparada con la longitud de onda. En este caso se llega al resultado siguiente



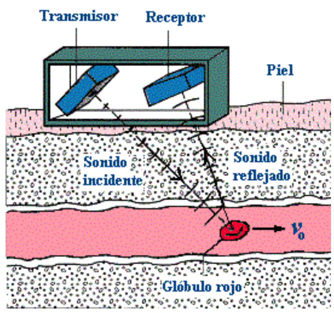
$$\lambda_{(\theta)} = \lambda_0\left(1 - \frac{u\cos\theta}{v}\right)$$

o bien

$$f_{(\theta)} = f_0\frac{1}{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{v}\right)}$$ para la frecuencia.

Estas últimas ecuaciones nos indican que el efecto Doppler depende de la componente de la velocidad de la fuente en la dirección del observador

APLICACIÓN: Medidor de flujo doppler
Este dispositivo mide la velocidad del torrente sanguíneo y constituye una aplicación interesante del efecto Doppler. El dispositivo consta de elementos transmisor y receptor colocados directamente sobre la piel, como se observa en la figura. El transmisor emite una onda sonora continua cuya frecuencia es de 5 MHz. Cuando los g1óbulos rojos reflejan el sonido su frecuencia cambia como si se presentara el efecto Doppler, debido a que se mueven las células. El elemento receptor detecta el sonido reflejado y el contador electrónico mide su frecuencia, que está corrida por el efecto Doppler con respecto a la frecuencia de transmisión. A partir del cambio en frecuencia es posible determinar la rapidez con q fluye el torrente sanguíneo. Por lo general, el cambio en frecuencia es aproximadamente 6 000 Hz para rapideces de flujo aproximadamente iguales a 0,1 m/s. El medidor de flujo Doppler puede usarse para localizar regiones en las que los vasos capilares se estrechan, ya que en tales regiones se producen mayores rapideces de flujo, según la ecuación de continuidad. Además, el medidor de flujo Doppler puede utilizarse para detectar el movimiento cardiaco de un feto de apenas 8 a 10 semanas de edad.
El efecto Doppler también se emplea en dispositivos de un radar para medir la velocidad de vehículos en movimiento. Sin embargo, se utilizan las ondas electromagnéticas, en vez de las ondas sonoras, para tales propósitos.



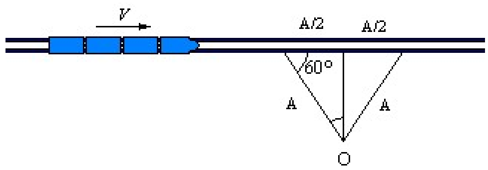
Ejemplo 72. La sirena de un auto patrullero estacionado emite un sonido de 1200 Hz. ¿Bajo condiciones en que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s, qué frecuencia oirá un peatón parado si la sirena se está acercando a 30 m/s? ¿Qué frecuencia oirá cuando la sirena está alejándose en 30 m/s?
Solución.
Acercándose

$$f' = \frac{v_f}{v_f - v} f = \left(\frac{340}{340 - 30}\right)(1200) = 1316 \text{ Hz}$$

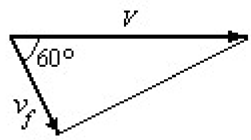
Alejándose

$$f' = \frac{v_f}{v_f + v} f = \left(\frac{340}{340 + 30}\right)(1200) = 1103 \text{ Hz}$$

Ejemplo 73. Una persona se encuentra a una distancia $\sqrt{3}A/2$ de línea férrea, por la cual viene un tren a velocidad constante V y tocando una sirena de frecuencia f. La velocidad del sonido en el aire es v_s. ¿Qué frecuencia escucha la persona? Cuando:
a) El tren esta acercándose a una distancia A de él.
b) Cuando se encuentra frente a él.
c) Cuando se ha alejado una distancia A de él.
d) ¿Qué frecuencia escucha un niño que se asoma por la ventanilla de uno de los vagones del tren?
Solución.
En el gráfico se ve fácilmente la situación geométrica planteada en el problema.



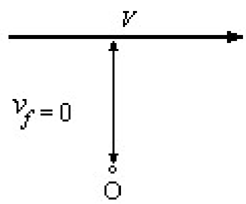
a) La velocidad de la fuente v_f respecto al observador será:



$$v_f = V\cos 60^o = \frac{V}{2}$$

Luego, $f' = f\left(\dfrac{v_s}{v_s - \dfrac{V}{2}}\right)$

Vemos que aumenta la frecuencia.
b) En este caso, la velocidad de la fuente con respecto al observador es cero.



$$f' = f$$

c) Como en el caso a) la velocidad de la fuente es: $v_f = \dfrac{V}{2}$, pero, se aleja del observador , o sea que la frecuencia disminuye :

$$f' = f\left(\frac{v_s}{v_s + \dfrac{V}{2}}\right)$$

d) En el caso del niño, la velocidad de la fuente respecto a él es nula, por lo tanto, escucha la frecuencia f.

Ejemplo 74. Una sirena que emite un sonido de 1000 Hz se aleja de un observador y se aproxima a una pared con una velocidad de 10m./seg. . ¿Cuál es la frecuencia que escucha el observador?

Solución.

El observador escucha dos frecuencias:

La frecuencia directa y la reflejada en la pared.

La frecuencia directa

$$f_1' = f\frac{1}{\left(1+\dfrac{v_f}{v_s}\right)} = 1000\frac{1}{\left(1+\dfrac{10}{330}\right)} = 971 \text{ Hz}$$

Y la frecuencia reflejada en la pared.

La frecuencia que llega a la pared es

$$f_2' = f\frac{1}{\left(1-\dfrac{v_f}{v_s}\right)} = 1000\frac{1}{\left(1-\dfrac{10}{330}\right)} = 1\,031 \text{ Hz}$$

Las que sumadas producen pulsaciones de frecuencia $f_b = f_2' - f_1' = 1031 - 971 = 60$ Hz

Que es lo que escucha el observador.

Ejemplo 75. Un automóvil se mueve hacia la izquierda con una velocidad v = 30 m/s. En dirección contraria (rebasado suficientemente el punto de cruce) va un camión a una velocidad v' = 21 m/s, con una gran superficie reflectora en su parte posterior. El automóvil emite un bocinazo (emisión instantánea) con una frecuencia de 1 000 Hz. Determinar:

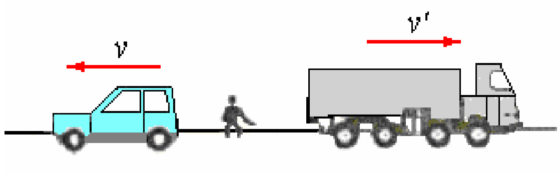
a) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas percibidas por el observador de la figura colocado a la derecha del auto?

b) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que llegan a la superficie reflectora del camión?

c) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibirá el observador después que las ondas se han reflejado en el camión?

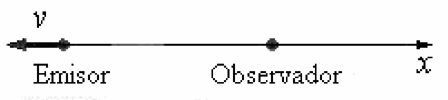
d) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibiría el conductor del auto, después de la reflexión en el camión?

Velocidad del sonido: 330 m/s. Se supone el aire en calma.



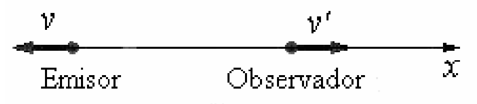
Solución.

a)



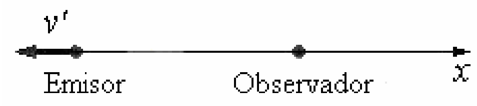
$$f_1 = f_0\frac{v_s}{v_s + v} = 1000\frac{330}{330+30} = 916{,}7\text{Hz}$$

b) La superficie reflectora es ahora el receptor auditivo.



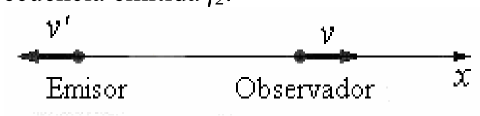
$$f_2 = f_0\frac{v_s - v'}{v_s + v} = 1000\frac{330-21}{330+30} = 858{,}3 \text{ Hz}$$

c) La superficie reflectora se vuelve foco emisor, emitirá con la frecuencia f_2.



$$f_3 = f_2\frac{v_s}{v_s + v'} = 858{,}3\frac{330}{330+21} = 806{,}9 \text{ Hz}$$

d) El receptor es el auto y el emisor el camión y la frecuencia emitida f_2:



$$f_4 = f_2\frac{v_s - v}{v_s + v'} = 858{,}3\frac{330-30}{330+21} = 733{,}6 \text{ Hz}$$

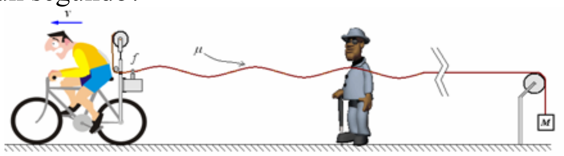
Ejemplo 76. Se tiene el montaje mostrado en la figura, una bicicleta con un vibrador mecánico se mueve hacia la derecha con velocidad constante de 2,74 m/s. Una cuerda larga de densidad lineal de 200 g/m, tensada esta atada al vibrador; el otro extremo de la cuerda después de pasar por una polea ideal, esta atada a una masa *M*.

El observador ve pasar 40 crestas cada segundo y la longitud de onda que mide es 0,30 m

a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda?

b) ¿Calcular el valor de la masa *M*?

c) ¿Calcular la frecuencia del oscilador?
d) ¿Si el ciclista estuviera estático ¿cuál sería la longitud de onda y cuántas crestas vería pasar en un segundo?



Solución.
$\lambda' = 0,30$ m, $f' = 40$ Hz

a) $v_o = \lambda' f' = 0,3 \times 40 \quad 12 \text{m/s}$

b) $v_o = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{Mg}{\mu}} \Rightarrow$

$$M = \frac{\mu v_o^2}{g} = \frac{(0,20)(12^2)}{9,80} = 2,94 \text{ kg.}$$

c) $f' = f \dfrac{v_o}{v_o + v_c} \Rightarrow$

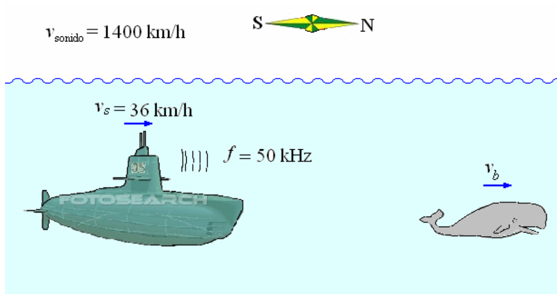
$$f = f' \frac{v_o + v_c}{v_o} = 40 \frac{12 + 2,74}{12} = 49,1 \text{ Hz}$$

d) Siendo $v_o = \lambda f \quad 12 \text{m/s} \quad f = 49,1 \text{Hz}$

$$\lambda = \frac{v_o}{f} = \frac{12}{49,1} = 0,24 \text{ cm}$$

Ve pasar 49,1 crestas por segundo y la longitud de onda es 24 cm.

Ejemplo 77. El sonar de un submarino que se dirige hacia el norte con velocidad de 36 km/h emite frontalmente ondas ultrasónicas de 50 kHz de frecuencia, las cuales luego de rebotar en una ballena retornan al submarino siendo captadas por éste con una frecuencia de 49 kHz. Determine la velocidad con que se desplaza la ballena e indique hacia dónde se dirige. (Considere la velocidad del sonido en el agua = 1400 m/s y que el movimiento del submarino y de la ballena ocurre sobre la recta que los une.)
Solución.



Si la ballena estuviera quieta recibiría

$$f' = f \frac{v}{(v - v_s)}$$

Consideremos que la ballena se mueve con velocidad v_b hacia el norte, la frecuencia que recibe es

$$f'' = f' \frac{(v - v_b)}{v}$$

$$= f \frac{v}{(v - v_s)} \frac{(v - v_b)}{v} = f \frac{(v - v_b)}{(v - v_s)}$$

El rebote vuelve al submarino y llega con frecuencia

$$f''' = f'' \frac{(v + v_s)}{v} = f \frac{(v - v_b)}{(v - v_s)} \frac{(v + v_s)}{v}$$

$$\Rightarrow f''' = f \frac{(v - v_b)}{(v - v_s)} \frac{(v + v_s)}{v}$$

Reemplazando valores

$$49 = 50 \frac{(1400 - v_b)}{(1400 - 36)} \frac{((1400 + 36))}{1400} \Rightarrow$$

$$1400 - v_b = 1303,21 \Rightarrow$$

$v_b = 96,79 \dfrac{\text{km}}{\text{s}}$, rumbo al norte.

Ejemplo 78. Una onda sonora con frecuencia *fo* y longitud de onda λo viaja horizontalmente hacia la derecha y se refleja en una gran pared vertical rígida, que se mueve hacia la izquierda con rapidez v_1.
a) ¿Cuántos frentes de onda chocan con la superficie en un intervalo de tiempo Δt?
b) Al final de este intervalo de tiempo, ¿a qué distancia a la izquierda de la superficie está la onda que se reflejó al principio del intervalo?
c) Determine la longitud de onda de las ondas reflejadas en términos de λo.
d) Calcule la frecuencia de las ondas reflejadas en términos de *fo*.
e) Un receptor está en reposo a la izquierda de la superficie móvil, ¿cuántas pulsaciones por segundo detecta como resultado del efecto combinado de las ondas incidente y reflejada?
Solución.
a)

$$f' = f_0 \frac{(\lambda_0 f_0 + v_1)}{\lambda_0 f_0} = \frac{(\lambda_0 f_0 + v_1)}{\lambda_0},$$

$$T' = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 f_0 + v_1)}$$

Frentes de onda chocan con la superficie en un intervalo de tiempo Δt

$$n = \frac{\Delta t}{T'} = \frac{(\lambda_0 f_0 + v_1)\Delta t}{\lambda_0} = \left(f_0 + \frac{v_1}{\lambda_0} \right) \Delta t$$

b) La onda que se reflejó al principio del intervalo se encuentra a la distancia d a la izquierda de la pared después del tiempo Δt.

$$d = (\lambda_0 f_0 + v_1)\Delta t$$

c) La longitud de onda de las ondas reflejadas en términos de λo.

$$f'' = f'\frac{\lambda_0 f_0}{(\lambda_0 f_0 - v_1)} = \frac{(\lambda_0 f_0 + v_1)}{\lambda_0}\frac{\lambda_0 f_0}{(\lambda_0 f_0 - v_1)}$$

$$= f_0 \frac{(\lambda_0 f_0 + v_1)}{(\lambda_0 f_0 - v_1)}$$

Como $\lambda'' f'' = \lambda_0 f_0 \Rightarrow \lambda'' = \dfrac{\lambda_0 f_0}{f''}$

Reemplazando f'':

$$\lambda'' = \frac{\lambda_0 f_0}{f_0 \dfrac{(\lambda_0 f_0 + v_1)}{(\lambda_0 f_0 - v_1)}} = \lambda_0 \frac{(\lambda_0 f_0 - v_1)}{(\lambda_0 f_0 + v_1)}$$

d) La frecuencia de las ondas reflejadas en términos de fo.

$$f'' = f'\frac{\lambda_0 f_0}{(\lambda_0 f_0 - v_1)} = \frac{(\lambda_0 f_0 + v_1)}{\lambda_0}\frac{\lambda_0 f_0}{(\lambda_0 f_0 - v_1)}$$

$$= f_0 \frac{(\lambda_0 f_0 + v_1)}{(\lambda_0 f_0 - v_1)}$$

e) Un receptor en reposo a la izquierda de la superficie móvil detecta pulsaciones como resultado del efecto combinado de las ondas incidente y reflejada

$$f_b = f'' - f_0 \Rightarrow$$

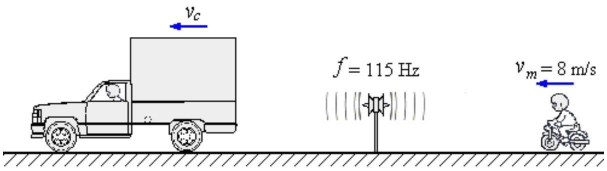
$$f_b = f_0 \frac{(\lambda_0 f_0 + v_1)}{(\lambda_0 f_0 - v_1)} - f_0 = f_0 \frac{2v_1}{(\lambda_0 f_0 - v_1)}$$

Ejemplo 79. Un motociclista se encuentra corriendo con una rapidez de 8 m/s detrás de una camioneta. Una sirena que se encuentra sentado entre el motociclista y la camioneta suena emitiendo una frecuencia de 115Hz y si el motociclista percibe 5 pulsos por segundo:

a) ¿El motociclista le dará alcance a la camioneta?, justifique su respuesta.

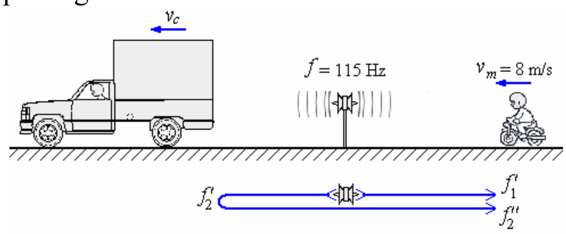
b) ¿Qué frecuencia percibe el chofer de la camioneta?

c) ¿Qué frecuencia percibe el jinete proveniente del reflejo en la camioneta?



Solución.

a) El esquema muestra las trayectorias del sonido que llega al motociclista



Sonido directo (1)

$$f'_1 = f\frac{(v_s + v_m)}{v_s} = 115\frac{(340+8)}{340}$$

= 117,7 Hz

Sonido reflejado en camioneta (2)

- Frecuencia que llega a la camioneta

$$f'_2 = f\frac{(v_s - v_c)}{v_s} = 115\frac{(340 - v_c)}{340}$$

- Frecuencia que llega al motociclista después de reflejarse en la camioneta

$$f''_2 = f'_2\frac{(v_s + v_m)}{(v_s + v_c)} = f\frac{(v_s - v_c)}{v_s}\frac{(v_s + v_m)}{(v_s + v_c)}$$

$$= 115\frac{348}{340}\frac{(340 - v_c)}{(340 + v_c)} = 117,7\frac{(340 - v_c)}{(340 + v_c)}$$

El motociclista oye 5 batidos de 5 Hz

$$f'_1 - f''_2 = 5 \Rightarrow$$

$$117,5 - 117,7\frac{(340 - v_c)}{(340 + v_c)} = 5 \Rightarrow$$

$$\frac{(340 - v_c)}{(340 + v_c)} = 0,957 \Rightarrow$$

$$v_c = \frac{14,468}{1,957} = 7,39 \text{ m/s}$$

Como 7,39 < 8, la motocicleta alcanzará a la camioneta es f'_2

b) La frecuencia que percibe el chofer de la camioneta

$$f'_2 = f\frac{(v_s - v_c)}{v_s} = 115\frac{(340 - 7,39)}{340}$$

= 112,50 Hz

c) La frecuencia que percibe el motociclista proveniente del reflejo en la camioneta es f''_2.

$$f''_2 = 117,7\frac{(340 - v_c)}{(340 + v_c)} = 117,7\frac{(340 - 7,39)}{(340 + 7,39)}$$

= 112,7 Hz

Ejemplo 80. Un murciélago que vuela con rapidez de 3,9 m/s emite sonidos de frecuencia 80,7 kHz; la frecuencia que oye reflejada de un insecto es 83,5 kHz. Considere que el movimiento del insecto y del murciélago ocurre

sobre la recta que los une y que la rapidez del sonido es de 344 m/s.
a) ¿El insecto se está acercando o alejando del murciélago?
b) ¿Cuál es la rapidez del insecto?
Solución.
a) Se acerca
Frecuencia que llega al insecto en reposo

$$f' = f\frac{v_s}{(v_s - 3{,}9)}$$

Si el insecto se acerca com velocidad v

$$f'' = f'\frac{(v_s + v)}{v_s} \Rightarrow$$

$$f'' = f\frac{v_s}{(v_s - 3{,}9)}\frac{(v_s + v)}{v_s} = f\frac{(v_s + v)}{(v_s - 3{,}9)}$$

Frecuencia que llega al murciélago

$$f''' = f''\frac{(v_s + 3{,}9)}{(v_s - v)} \Rightarrow$$

$$f''' = f\frac{(v_s + 3{,}9)}{(v_s - v)}\frac{(v_s + v)}{(v_s - 3{,}9)}$$

Reemplazando datos

$$83{,}5 = 80{,}7\frac{(344 + 3{,}9)}{(344 - v)}\frac{(344 + v)}{(344 - 3{,}9)} \Rightarrow$$

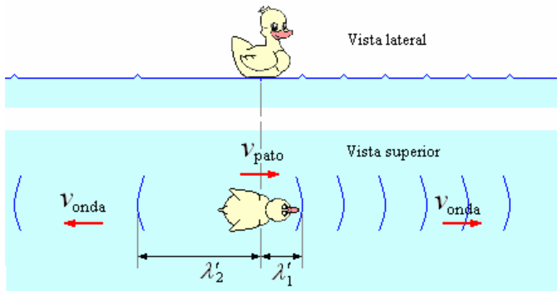
$$\frac{83{,}5}{80{,}7} = \frac{347{,}9(344 + v)}{340{,}1(344 - v)} \Rightarrow$$

$$1{,}015 = \frac{(344 + v)}{(344 - v)} \Rightarrow$$

$$347{,}96 - 1{,}015v = 344 + v \Rightarrow$$

$v = 1{,}96$ m/s
a) La rapidez del insecto es 1,96 m/s
b) Como el resultado es positivo se puede concluir que el insecto se esta acercando al murciélago

Ejemplo 81. Al nadar un pato patalea una vez cada 1,6 s produciendo ondas superficiales en el agua, el pato avanza con rapidez constante en un estanque en el que las ondas superficiales viajan a 0,4 m/s. Las crestas de las ondas están espaciadas adelante del pato 0,10m
a) Calcule la rapidez del pato.
b) ¿Cuál es el espaciamiento de las crestas detrás del pato?
Nota: En este problema las ondas son producidas por el pataleo del pato y las ondas se propagan en el agua (ondas acuáticas).
Solución.



Perturbación producida por el pataleo del pato:
$T = 1{,}6$ s. $\Rightarrow f = 1 / 1{,}6$ Hz
Para la onda: $v_{onda} = 0{,}4$ m/s.
a) Como $\lambda_1' = 0{,}1\text{m} \Rightarrow$

$$f_1' = \frac{v_{onda}}{\lambda_1'} = \frac{0{,}4}{0{,}1} = 4\text{Hz}$$

Efecto doppler de fuente que se mueve, la frecuencia hacia delante es:

$$f_1' = f\left(\frac{1}{1 - \frac{v_{pato}}{v_{onda}}}\right) \Rightarrow 1 - \frac{v_{pato}}{v_{onda}} = \frac{f}{f_1'}$$

$$\Rightarrow v_{pato} = v_{onda}\left(1 - \frac{f}{f_1'}\right)$$

Reemplazando valores:

$$v_{pato} = 0{,}4\left(1 - \frac{1/1{,}6}{4}\right) = 0{,}3375 \text{ m/s.}$$

b) La frecuencia detrás del pato

$$f_2' = f\left(\frac{1}{1 + \frac{v_{pato}}{v_{onda}}}\right)$$

$$= \frac{1}{1{,}6}\left(\frac{1}{1 + \frac{0{,}3375}{0{,}4}}\right) = 0{,}39 \text{ Hz}$$

$$\lambda_2' = \frac{v_{onda}}{f_2'} = \frac{0{,}4}{0{,}39} = 1{,}18 \text{ m}$$

El espaciamiento de las crestas detrás del pato es de 1,18 m.

Ejemplo 82. Un pato nada a velocidad constante en un estanque, pataleando a intervalos de tiempos iguales, la longitud de onda vista desde la orilla es 10% mayor detrás del pato respecto de la longitud de onda delante del pato.
Determine la relación de las velocidades v_o / v_p
donde
v_o = velocidad de la onda en el agua.

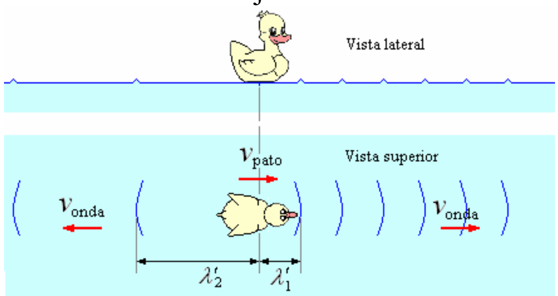
v_p = velocidad del pato.

Solución.

Efecto Doppler para una fuente en movimiento y observador estacionario es

$$f' = f\frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_p}{v_o}\right)}$$

El signo mas (+) corresponde cuando la fuente se mueve hacia el observador, y el signo menos (–) cuando la fuente se aleja del observador.



Delante del pato

$$f_1' = f\frac{v_o}{(v_o - v_p)} \Rightarrow$$

$$\lambda'_1 = \frac{v_o}{f_1'} = \frac{(v_o - v_p)}{f} \qquad (1)$$

Detrás del pato

$$f_2' = f\frac{v_o}{(v_o + v_p)} \Rightarrow$$

$$\lambda'_2 = \frac{v_o}{f_2'} = \frac{(v_o + v_p)}{f}$$

Pero $\lambda'_2 = 1{,}1\lambda'_1$

Luego

$$1{,}1\lambda'_1 = \frac{(v_o + v_p)}{f} \qquad (2)$$

Dividiendo (1) : (2)

$$\frac{\lambda'_1}{1{,}1\lambda'_1} = \frac{\frac{(v_o - v_p)}{f}}{\frac{(v_o + v_p)}{f}} \Rightarrow$$

$$1{,}1(v_o - v_p) = (v_o + v_p) \Rightarrow$$

$$1{,}1\left(\frac{v_o}{v_p} - 1\right) = \left(\frac{v_o}{v_p} + 1\right)$$

$$\Rightarrow\ 0{,}1\frac{v_o}{v_p} = 2{,}1 \Rightarrow \frac{v_o}{v_p} = 21$$

Ejemplo 83. El sonar de un patrullero estacionado al borde de una pista emite hacia delante un corto pulso de ultra sonido de frecuencia de 34 kHz .Luego de 1,5 s de haberse emitido las ondas se capta un pulso de retorno de frecuencia de 32 kHz proveniente de un automóvil.

(v_{sonido} = 340 m/s)

a) Determine la velocidad del automóvil

b) A que distancia del patrullero se encontraba el automóvil al salir el pulso

Solución.

a) Determine la velocidad del automóvil

La frecuencia que llega al automóvil

$$f_1' = f\left(1 - \frac{v_o}{v_s}\right) = 34000\left(1 - \frac{v_0}{340}\right)$$

Esta frecuencia vuelve al patrullero

$$f_2' = f_1'\frac{1}{\left(1 + \frac{v_o}{v_s}\right)}\left(1 - \frac{v_0}{v_s}\right) =$$

$$34000\left(\frac{340 - v_o}{340 + v_o}\right) = 32000 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{340 - v_o}{340 + v_o}\right) = \frac{32}{34} \Rightarrow$$

$$34(340 - v_o) = 32(340 + v_o)$$

$$\Rightarrow\ 66v_o = 340(34 - 32)$$

$$\Rightarrow\ v_o = \frac{340(2)}{33} = 10{,}3 \text{ m/s}$$

b) A que distancia del patrullero se encontraba el automóvil al salir el pulso

Cuando el pulso llega al automóvil han pasado 1,5/2 = 0,75 s

La distancia a la que se encontraba el automóvil del patrullero fue: $340(0{,}75) - 10{,}30(0{,}75)$ = 240,28 m.

Ejemplo 84. El sonar de un patrullero estacionado al borde de una pista emite hacia delante un corto pulso de ultrasonido de frecuencia 60 kHz. Luego de un corto tiempo se capta un pulso de retorno de frecuencia 62 kHz proveniente de un automóvil.

Determine: la velocidad con que se mueve el carro e indique si el carro se acerca o aleja del patrullero.

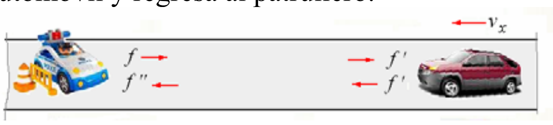
(Velocidad del sonido = 340 m/s).

Solución.

$v_s = 340$ m/s

v_x es la velocidad del automóvil.

El sonido se emite del patrullero, llega al automóvil y regresa al patrullero.



$f = 60$ Hz y $f'' = 62$ Hz

Al automóvil llega

$$f' = f\left(\frac{v_s \pm v_o}{v_s}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f' = 60\left(\frac{340 \pm v_x}{340}\right) \qquad (1)$$

+ o -, dependiendo si el automóvil se acerca o aleja del patrullero en reposo.

Al patrullero llega de retorno

$$f'' = f'\left(\frac{v_s}{v_s \mp v_f}\right)$$

$$\Rightarrow 62 = f'\left(\frac{340}{340 \mp v_x}\right) \qquad (2)$$

- o +, dependiendo si el automóvil se acerca o aleja del patrullero en reposo.

Multiplicando (1) x (2):

$$62 = \frac{60(340 \pm v_x)}{(340 \mp v_x)}$$

La única posibilidad de tener solución es en el caso que el automóvil se acerca al patrullero:

$$62 = \frac{60(340 + v_x)}{(340 - v_x)} \Rightarrow v_x = 5{,}57 \text{ m/s}$$

Luego el automóvil se está acercando al patrullero.

$v_x = 5{,}57$ m/s.

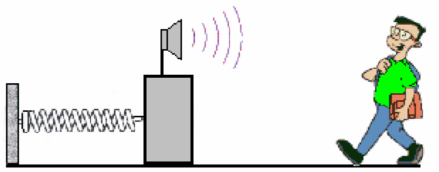
Ejemplo 85. Un altavoz es colocado sobre un bloque, conectado a un resorte (k = 50 N/m), como se muestra en la figura. La masa total (bloque y altavoz) es 0,5kg; el sistema oscila con una amplitud de 5 cm. Si el altavoz emite a 500 Hz, determinar:

a) La frecuencia máxima percibida por la persona.

b) La frecuencia mínima percibida por la persona.

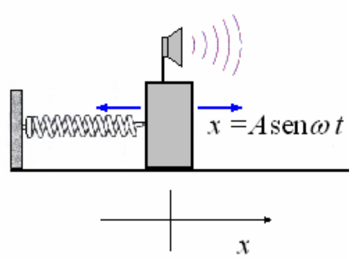
c) ¿Se perciben pulsaciones? En caso de respuesta afirmativa, ¿cuál es el número de pulsaciones?

Velocidad del sonido = 340m/s



Solución.

Oscilación de la masa:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0{,}5}} = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x = A\text{sen}\omega t = 0{,}05\text{sen}10t \Rightarrow v = 0{,}5\cos 10t$$

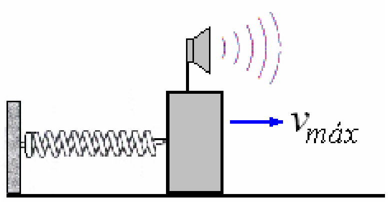
$$v_{máx} = \begin{cases} +0{,}5 \\ -0{,}5 \end{cases}$$

En general el Efecto Doppler para una fuente en movimiento y observador estacionario es

$$f' = f\frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_f}{v}\right)}$$

El signo menos (+) corresponde cuando la fuente se mueve hacia el observador, y el signo menos (-) cuando la fuente se aleja del observador.

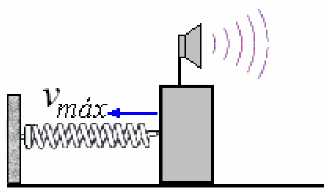
a) La frecuencia máxima percibida por la persona.



$$f' = f\frac{1}{\left(1 - \frac{v_f}{v}\right)} = 500\frac{1}{\left(1 - \frac{0{,}5}{340}\right)} = 500{,}74$$

Hz

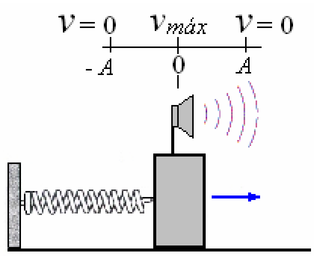
b) La frecuencia mínima percibida por la persona.



$$f' = f \frac{1}{\left(1 + \frac{v_f}{v}\right)} = 500 \frac{1}{\left(1 + \frac{0,5}{340}\right)} = 499,27$$
Hz

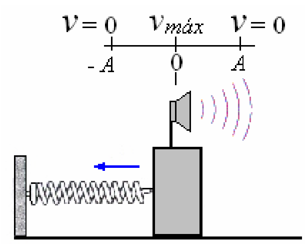
c) El moviendo de la fuente es periódico, teniendo dos etapas la ida y la vuelta, como se describe a continuación.

De $t = 0$ a $t = T/2$



La frecuencia sube de 500 Hz a 500,74 Hz y baja hasta 500.

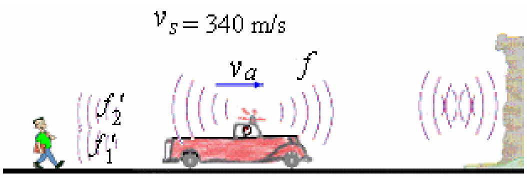
De $t = T/2$ a $t = T$



La frecuencia baja de 500 Hz a 499,27 Hz y sube hasta 500.
El cambio se repite sucesivamente.
NO se perciben pulsaciones

Ejemplo 86. El conductor de un auto hace sonar su bocina, mientras se aproxima a una pared reflectora. Un peatón inmóvil, situado detrás del auto, escucha un sonido de frecuencia 745 Hz procedente de la bocina del auto y un sonido de frecuencia 863 Hz procedente de la pared. Considere la rapidez del sonido 340 m/s.
a) ¿Cuál es la rapidez del auto?
b) ¿Cuál es la frecuencia escuchada por el conductor del auto, procedente de la reflexión del sonido en la pared?

Solución.



La frecuencia directa

$$f_1' = f \frac{v_s}{v_s - v_a}$$

$$745 = f \frac{340}{(340 + v_a)} \quad (1)$$

La frecuencia procedente la pared es igual a la frecuencia que percibiría un observador situado junto a la pared que escucha la bocina del auto.

$$f_2' = f \frac{v_s}{v_s + v_a}$$

$$863 = f \frac{340}{(340 - v_a)} \quad (2)$$

a) La rapidez del auto
Dividiendo (2) : (1)

$$\frac{863}{745} = \frac{(340 + v_a)}{(340 - v_a)} \Rightarrow$$

$$1,16(340 - v_a) = (340 + v_a) \Rightarrow$$

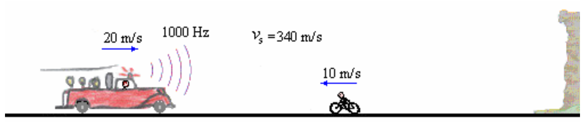
$$v_a = \frac{0,16 \times 340}{2,16} = 25,19 \text{ m/s}$$

b) La frecuencia escuchada por el conductor del auto, procedente de la reflexión del sonido en la pared es

$$f_2'' = f_2' \frac{(v_s + v_a)}{v_s}$$

$$= 863 \frac{(340 + 25,19)}{340} = 926,93 \text{ Hz}$$

Ejemplo 87 El carro de bomberos que se mueve con una velocidad de 20 m/s, hace sonar su sirena que tiene una frecuencia de 1000 Hz.
Un ciclista se acerca al carro alejándose del acantilado con una velocidad de 10 m/s,
a) ¿Qué sonido escucha el conductor del carro de bomberos?
b) ¿Qué sonido escucha el ciclista?



Solución.
a) El conductor escucha dos frecuencias f_1 que es la frecuencia f (1000 Hz) de la sirena y la frecuencia f' del eco producido por la presencia del acantilado.
La frecuencia que llega al acantilado se debe a una fuente que se acerca con $v_f = 20$ m/s

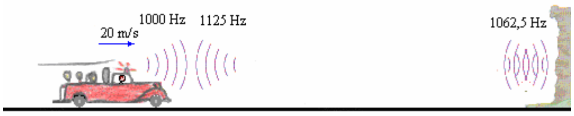
$$f' = f_0 \frac{v_s}{v_s - v_f} = 1000 \frac{340}{340 - 20} = 1062,5 \text{ Hz}$$

Esta frecuencia se refleja y llega a los oídos del conductor que se acerca con velocidad $v_o = 20$ m/s.

$$f'' = f'\frac{(v_s + v_o)}{v_s} = 1062{,}5\frac{(340+20)}{340} = 1125$$
Hz

Como las dos frecuencias que escucha son muy cercanas escuchará batidos o pulsaciones correspondientes a las frecuencia f = 1000 Hz y f' = 1125 Hz.

Es decir $f_b = 1125 - 1000$ = 125 Hz (frecuencia de los batidos).



b) Al oído del ciclista llega la frecuencia directa que es con observador y fuente acercándose

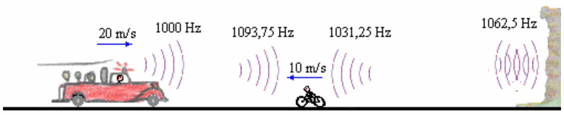
$$f_1'' = f\frac{v_s + v_o}{v_s - v_f} = 1000\frac{340+10}{340-20} = 1093{,}75$$
Hz

También llega el eco producido por el acantilado

$$f_2'' = f'\frac{(v_s - v_o)}{v_s} = 1062{,}5\frac{(340-10)}{340}$$
= 1031,25 Hz

Como las dos frecuencias que escucha son muy cercanas escuchará batidos

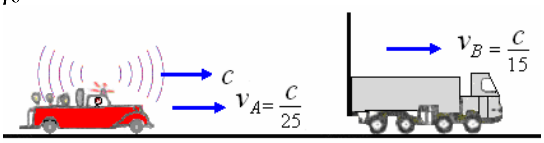
$f_b = 1093{,}75 - 1031{,}25$ = 62,5 Hz (frecuencia de los batidos).



Ejemplo 84. Las ondas sonoras emitidas por el carro de bomberos (A) se reflejan en el camión (B) y al regresar interfieren con las ondas emitidas.

Determinar el número de pulsaciones por segundo que detecta un observador sobre el móvil A.

f_0 = 400 Hz



Solución.

Frecuencia que llega a la pared

$f' = f_0$ Acercándose fuente y alejándose "observador"

$$f' = f_0\frac{(v - v_B)}{(v - v_A)} \quad (1)$$

Frecuencia que recibe el pasajero

Alejándose fuente y acercándose "observador"

$$f'' = f'\frac{(v + v_A)}{(v + v_B)} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$f'' = f_0\frac{(v - v_B)}{(v - v_A)}\frac{(v + v_A)}{(v + v_B)}$$

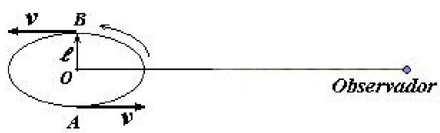
$$= 400\frac{\left(c - \frac{c}{15}\right)\left(c + \frac{c}{25}\right)}{\left(c - \frac{c}{25}\right)\left(c + \frac{c}{15}\right)}$$

$$= 400\frac{(15-1)}{(25-1)}\frac{(25+1)}{(15+1)} = 400\frac{(14)}{(24)}\frac{(26)}{(16)}$$

= 379,17 Hz.

El pasajero escucha f_p = 400 – 379,17 = 20,83 pulsaciones/s

Ejemplo 88. Una sirena de 420 Hz gira atada al extremo de una cuerda de 2 m de longitud a razón de 300 r.p.m. ¿Qué intervalo de frecuencias percibe un observador situado en el plano de rotación de la sirena y alejado de ésta? Tomar para velocidad del sonido en el aire 340 m/s.



Solución.

$$\omega = 300\frac{\text{rev}\times 2\pi\text{rad}\times\text{min}}{\text{min}\times\text{rev}\times 60\text{s}} = 10\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La velocidad de la fuente emisora es:

$v = \omega\ell = 10\pi(2) = 20\pi$ m/s

Si el observador está lo suficientemente alejado, tomamos la dirección de percepción en la misma dirección que tiene la velocidad. Cuando la sirena se encuentra en la posición A de la figura, tendremos:

$$f_1' = f\frac{v}{v - v_f} = \frac{340}{340 - 20\pi} = 515{,}2 \text{ Hz}$$

En el punto B:

$$f_2' = f\frac{v}{v + v_f} = \frac{340}{340 + 20\pi} = 354{,}2 \text{ Hz}$$

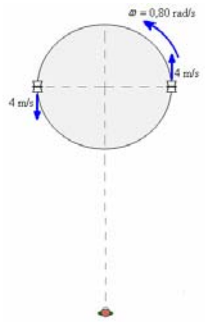
El intervalo será el comprendido entre las dos frecuencias calculadas

Ejemplo 89. Un carrusel de 5,0 m de radio, tiene un par de altoparlantes de 600 Hz montados en postes en extremos opuestos de un diámetro. El carrusel gira con una velocidad angular de 0,80 rad/s. Un observador estacionario está

colocado a cierta distancia enfrente del carrusel. La velocidad del sonido es 350 m/s.
a) Calcular la longitud de onda más larga que llega al escucha desde las sirenas.
b) Calcular la frecuencia de las sirenas más alta que escucha.
c) Calcular la frecuencia de batido máxima en la posición del escucha.
d) Un observador montado en una bicicleta que se aleja directamente del carrusel con una rapidez de 4,5 m/s. ¿Cuál es la frecuencia de las sirenas más alta que escucha?

Solución.

a)



La longitud de onda más larga es con la menor frecuencia
Y eso sucede cuando la fuente se aleja

$$f_1' = f\frac{v_s}{(v_s + v_f)} = 600\frac{350}{(350 + 0{,}80\times 5)}$$

$$= 600\frac{350}{(354)} = 593{,}2 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{350}{593{,}2} = 0{,}59 \text{ m} = 59 \text{ cm.}$$

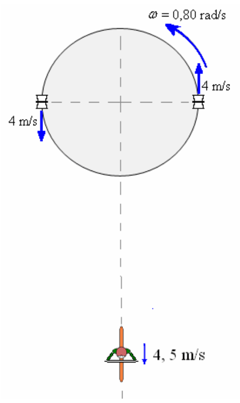
b) La frecuencia más alta sucede cuando la fuente se acerca.

$$f_2' = f\frac{v_s}{(v_s - v_f)} = 600\frac{350}{(350 - 0{,}80\times 5{,}0)}$$

$$= 600\frac{350}{(346)} = 606{,}9 \text{ Hz}$$

c) $f_b = f_2' - f_1' = 606{,}9 - 593{,}2 = 13{,}74$ Hz

d)



La fuente se acerca y el observador se aleja.

$$f'' = f\frac{(v_s - v_o)}{(v_s - v_f)} = 600\frac{(350 - 4{,}5)}{(350 - 4)}$$

$$= 600\frac{(345{,}5)}{(346{,}0)} = 599{,}2 \text{ Hz}$$

Ejemplo 90. Un buque se acerca a una costa acantilada haciendo sonar una sirena de 600 Hz. El sonido se refleja en la costa y se oye 10 s después, interfiriendo con el propio de la sirena, lo que da lugar a 12 pulsaciones por segundo. Calcule con estos datos el tiempo que el buque tardará en alcanzar la costa.

Solución.

$$f_b = f' - f \Rightarrow$$

$$f' = f + f_b = 600 + 12 = 612 \text{ Hz}$$

Como

$$f' = f\frac{(v_s + v_b)}{(v_s - v_b)}$$

Tenemos:

$$600\frac{(340 + v_b)}{(340 - v_b)} = 612$$

$$\text{Resolviendo} \Rightarrow v_b = 3{,}88\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sea d la distancia a la que se encuentra el buque cuando inicia el sonido de la sirena, 10 segundos después escucha pulsaciones, esto es el tiempo de viaje de las ondas de ida y vuelta.

Tiempo de ida: $t_1 = \dfrac{d}{v_s}$

Tiempo de vuelta: $t_2 = \dfrac{d - v_b t}{v_s}$

Tiempo total:

$$t = t_2 + t_2 = \frac{d}{v_s} + \frac{d - v_b t}{v_s} = \frac{2d - v_b t}{v_s}$$

$$\Rightarrow d = \frac{(v_s + v_b)t}{2} = \frac{(340 + 3{,}88)10}{2}$$

= 1719,4 m.

Como $t_b = \dfrac{d - v_b t}{v_b}$, obtenemos:

$$t_b = \frac{1719{,}4 - 3{,}88(10)}{3{,}88} = 433{,}14 \text{ s}$$

= 7 min 13,14 s.

El tiempo que el buque tardará en alcanzar la costa es 7 min 13,14 s.

Ejemplo 91. Un veraneante que descansa en la playa observa que durante los últimos 30 minutos han arribado 90 olas a la orilla. Luego se mete al mar y se dirige nadando hacia un bote anclado y ubicado a 450 m mar adentro, tomándole un total de 5 minutos en llegar. En el trayecto el nadador sorteo 60 olas.

Determine

a) La velocidad con que las olas se acercan a la orilla es:

b) La separación entre crestas de 2 olas consecutivas.

Solución.

a) La frecuencia de las olas es

$$f = \frac{90}{30 \times 60} = \frac{1}{20} \text{ Hz}$$

El veraneante nada hacia el bote con una velocidad

$$v_n = \frac{450}{5 \times 60} = 1{,}5 \text{ m/s}$$

Para el veraneante nadando es un receptor con movimiento de las olas que vienen, la frecuencia de olas que recibe es

$$f' = f\left(1 + \frac{v_n}{v_o}\right) = \frac{60}{5 \times 60} = \frac{1}{5} \text{ Hz}$$

La velocidad de las olas es v_o, luego

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{20}\left(1 + \frac{1{,}5}{v_o}\right) \Rightarrow 3v_o = 1{,}5 \Rightarrow$$

$$v_o = 0{,}5 \text{ m/s}$$

b) La separación entre crestas de 2 olas consecutivas es una longitud de onda

Como $v_o = 0{,}5$ m/s y $f = \dfrac{1}{20}$ Hz

$$\lambda = \frac{v_o}{f} = \frac{0{,}5}{1/20} = 10 \text{ m.}$$

Ejemplo 92. Una sirena que emite con una frecuencia *f* sube verticalmente hacia arriba, partiendo del suelo y a una velocidad constante *V*. El punto de partida de la sirena está a una distancia *d* de un observador.

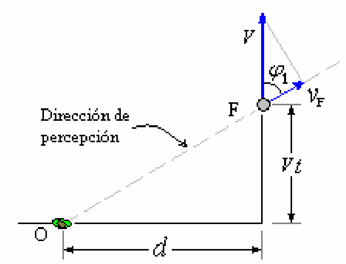
a) Supuesto el observador parado, calcular en función de los datos la frecuencia que percibiría el observador después de transcurridos *t* segundos.

b) Supuesto que el observador se aleja del punto de partida a una velocidad *V'*, y que parte del punto a esa distancia *d*, en el mismo instante que la sirena. Calcular en función de los datos la frecuencia que percibiría el observador, después de transcurridos t segundos.

(Velocidad del sonido: *v*)

Solución.

a)



Frecuencia cuando la fuente se aleja del observador:

$$f' = f\frac{v}{(v + v_F)},$$

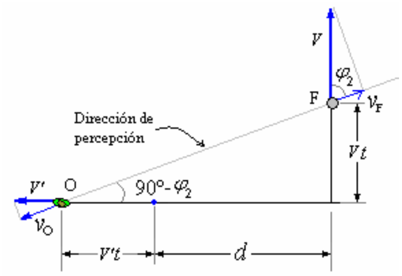
$$v_F = V\cos\varphi_1 = V\frac{Vt}{\sqrt{V^2t^2 + d^2}}$$

De aquí:

$$f' = f\frac{v}{\left(v + \dfrac{V^2t}{\sqrt{V^2t^2 + d^2}}\right)}$$

$$= f\frac{v\sqrt{V^2t^2 + d^2}}{v\sqrt{V^2t^2 + d^2} + V^2t}$$

b)



Frecuencia cuando la fuente y el observador se alejan mutuamente:

$$f' = f\frac{(v - v_O)}{(v + v_F)}$$

$$v_O = V'\cos(90º - \varphi_2) = V'sen\varphi_2$$

$$= V'\frac{V't + d}{\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2}}$$

$$v_F = V\cos\varphi_2 = V\frac{Vt}{\sqrt{V^2t^2 + (V't+d)^2}}$$

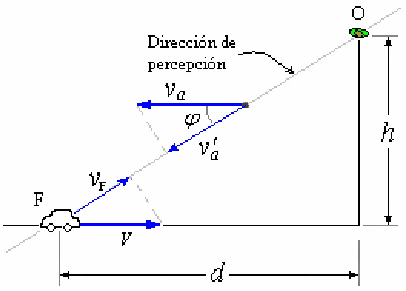
$$f' = f\frac{\left(v - V'\frac{V't+d}{\sqrt{V^2t^2+(V't+d)^2}}\right)}{\left(v + \frac{V^2t}{\sqrt{V^2t^2+(V't+d)^2}}\right)}$$

$$= f\frac{\left[v\sqrt{V^2t^2+(V't+d)^2} - V'(V't+d)\right]}{\left[v\sqrt{V^2t^2+(V't+d)^2} + V^2t\right]}$$

Ejemplo 93. Un hombre se encuentra en lo alto de una torre de altura *h*. A una distancia *d* del pie de ésta, un automóvil que se dirige hacia ella con una velocidad *V* emite un bocinazo con una frecuencia *f*. El aire se mueve con una velocidad v_a y en dirección contraria al automóvil.

Calcular en función de estos datos la frecuencia percibida por el hombre de la torre. (Velocidad del sonido: *v*).

Solución.



La velocidad del sonido en la dirección de percepción está afectada por la velocidad del viento, de tal modo que bajo estas condiciones

$$v_s = (v - v'_a)$$

La frecuencia que percibe un observador en reposo con la fuente acercándose, bajo estas condiciones es:

$$f' = f\frac{(v - v'_a)}{[(v - v'_a) - v_F]}$$

$$v'_a = v_a\cos\varphi = \frac{v_a d}{\sqrt{h^2+d^2}},$$

$$v_F = V\cos\varphi = \frac{Vd}{\sqrt{h^2+d^2}}$$

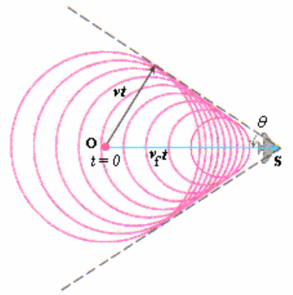
Luego:

$$f' = f\frac{\left(v - \frac{v_a d}{\sqrt{h^2+d^2}}\right)}{\left(v - \frac{v_a d}{\sqrt{h^2+d^2}} - \frac{Vd}{\sqrt{h^2+d^2}}\right)}$$

$$= f\frac{\left(v\sqrt{h^2+d^2} - v_a d\right)}{\left(v\sqrt{h^2+d^2} - v_a d - Vd\right)}$$

FORMACIÓN DE UNA ONDA DE CHOQUE

Hemos visto en el efecto Doppler que los frentes de onda producidos por una fuente de sonido en movimiento están comprimidos en la dirección hacia la cual está viajando la fuente. A medida que aumenta la velocidad de la fuente, la compresión se hace más pronunciada. ¿Qué sucede cuando la velocidad de la fuente empieza a hacerse mayor que la velocidad de la onda? En este caso, la fuente se mueve más aprisa que las ondas y los argumentos usados para describir el efecto Doppler ya no son aplicables más. En su lugar, las ondas esf6ricas expandiéndose desde la fuente t posiciones posteriores a lo largo de la trayectoria de la fuente, se combinan todas formando un frente de onda único cónico que se conoce como onda de choque (véase la figura). Como la onda de choque está compuesta por muchos frentes de onda actuando juntos, tiene una gran amplitud.

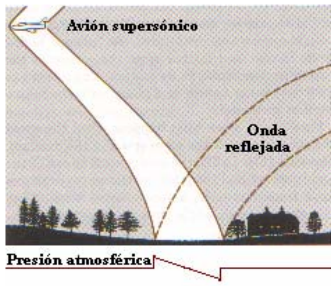


Para el tiempo *t* = 0 la fuente emite una onda desde el punto O En un tiempo posterior *t*, el frente de la onda se ha expandido a un radio *r* = *vt* y la fuente ha viajado a una distancia *v,t* para alcanzar al punto S. Frentes de onda posteriores también se expanden como se indica en la figura anterior, de manera que a ese tiempo *t* alcanzan justamente la línea tangente que se dibuja desde S al frente de onda centrado en O. La envolvente resultante de frentes de onda forma un cono con un semiángulo θ dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{vt}{v_f t} = \frac{v}{v_f}$$

La relación v_f / v, llamada número Mach, se usa frecuentemente para dar la velocidad en términos de la velocidad del sonido. Así una velocidad de 1,5 veces la velocidad del sonido se denota como Mach 1,5.
Cuando la onda de choque es producida por un aeroplano que se mueve a una velocidad mayor que la velocidad del sonido, es decir, a velocidad supersónica, la onda de choque se conoce como explosión sónica.

En la figura siguiente se muestra la onda de choque producida en el aire por un aeroplano supersónico que se mueve a Mach 1,1. Nótese que además de la onda de choque producida en el extremo frontal, en la parte posterior del aeroplano aparecen ondas de choque menores. Una nave a alta velocidad produce dos o más ondas de choque, las cuales están asociadas con la nariz, la cola y otras proyecciones de la nave. Los aviones supersónicos producen ondas de choque que se escuchan como explosiones sónicas.



El gráfico muestra que la presión de aire se eleva bruscamente a lo largo de la onda de choque formada por la parte delantera de la nave. Luego la presión cae por debajo de la presión atmosférica y nuevamente se eleva bruscamente a lo largo de las ondas de choque formadas por la parte posterior de la nave. (Los frentes de onda son curvos porque la velocidad del sonido depende de la temperatura del aire y la temperatura varía con la altura.). La segunda elevación vuelve a la normalidad a la presión. El tiempo entre los dos cambios de presión es 1/30 de segundo, de tal manera que se escucha un simple “Bum” cuando las ondas de choque pasan.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un joven en un barco mira las ondas en un lago que pasan con una pausa de medio segundo entre cada cresta, ¿Si a una onda le toma 1,5 s pasar los 4,5 m de longitud de su barco de 4,5 m, cuál es la velocidad, la frecuencia, el período, y la longitud de onda de las ondas?

2. Los delfines se comunican bajo el agua usando ondas de compresión de alta frecuencia. ¿Si la velocidad del sonido en agua es 1,4 x 10^3 m/s y la longitud de onda promedio es 1,4 centímetros, cuál es la frecuencia típica del sonido de un delfín? ¿Es esta frecuencia audible a los seres humanos?

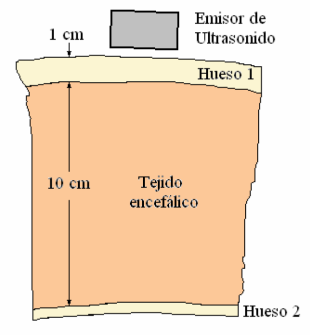
3 La cavidad del pecho de un ser humano resuena alrededor de 8 Hz. ¿qué longitud de onda causa tal vibración?

4. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es
$y = 6{,}0\,\text{cm}\,\text{sen}\left[(2{,}0\pi\ \text{rad/m})x + (4{,}0\pi\ \text{rad/s})t\right]$.
Calcule:
a) amplitud
b) longitud de onda
c) frecuencia
d) velocidad de propagación
e) dirección de propagación de la onda
f) La velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

5. Una barra de acero transmite ondas longitudinales por medio de un oscilador acoplado a uno de sus extremos. La barra tiene un diámetro de 4 mm. La amplitud de las oscilaciones es 0,1 mm y la frecuencia es 10 oscilaciones por segundo. Hallar:
a) ecuación de las ondas que se propagan a lo largo de la barra.
b) energía por unidad de volumen.
c) promedio del flujo de energía por unidad de tiempo a través de una sección cualquiera de la barra.
d) potencia requerida para operar el oscilador.

6. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es
$y = 1{,}8\,\text{mm}\,\text{sen}\left[(23{,}8\text{rad/m})x + (317\text{rad/s})t\right]$. La cuerda se encuentra sometida bajo una tensión de 16,3 N. Determinar la densidad lineal de masa.

7. En una eco encefalografía se aplica una señal de ultrasonido para detecta la respuesta de un obstáculo (hueso, tumor, etc.). Suponga la disposición de la figura. Calcule el tiempo que emplea el ultrasonido para obtener un eco en la segunda capa ósea (hueso 2). Se sabe que la velocidad de propagación de las ondas sonoras en el hueso es de 3,370 m/s y en el tejido encefálico, de 1550 m/s



Respuesta
1,35 x 10^4 m/s

8. Calcule la distancia a la cual un nadador debe encontrarse respecto del fondo (o de un obstáculo) para percibir el fenómeno del eco de un sonido producido por él mismo (velocidad del sonido en agua 1640 m/s).
Respuesta
82 m

9. La velocidad de propagación en un gas y en un líquido a la misma temperatura es de 330 m/s y 1500 m/s respectivamente. Un dispositivo, por ejemplo, un diapasón, produce ondas sonoras en ambos fluidos de 420 Hz.
Halle la relación de longitudes de onda en el líquido respecto del gas y la longitud de onda del sonido en cada medio.
Respuesta
a) $\dfrac{\lambda_{líquido}}{\lambda_{gas}} = 4{,}55$, b) $\lambda_{gas} = 0{,}786\text{m}$,
c) $\lambda_{1_{líquido}} = 3{,}57\text{m}$

10. Una ventana de 1,5 m^2 se abre en una calle donde el ruido propio produce un nivel sonoro en la ventana de 60 dB. Determine la potencia acústica que entra por la ventana mediante ondas sonoras.
Respuesta
1,5 x 10^4 W

11. Un alambre se doblado en un lazo circular del diámetro D. se asegura por medio de una abrazadera por los extremos opuestos. Se envía una onda transversal alrededor del lazo por medio de un vibrador pequeño que actúe cerca de la abrazadera. Encuentre las frecuencias de resonancia del lazo en los términos de la velocidad *v* de la onda y el diámetro D.
Respuesta
Los soportes del lazo forman nodos en dos puntos; para medio lazo $\pi \dfrac{D}{2} = n\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$\lambda = \dfrac{\pi D}{n}$, con esto se encuentra

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\left(\frac{v}{\pi D}\right)$$

12. Una cuerda vibrante sometida a una fuerza de tracción vibra con frecuencia de 220 Hz. Si la fuerza de tracción se duplica y se mantienen las otras condiciones constantes, determine la nueva frecuencia de vibración.
Respuesta
$f_2 = 311{,}13$ Hz

13. Una cuerda de 80 cm de longitud y densidad lineal de 1,69 x10^{-4} g/cm, está fija en sus dos extremos y emite un sonido fundamental cuando se la somete a una fuerza de tracción de 1,92 kg.
a) Determine la frecuencia fundamental del sonido
b) Calcule el factor por el cual debe multiplicarse la intensidad de la fuerza de tracción para que la frecuencia del nuevo sonido fundamental sea el tercer armónico del caso anterior
Respuesta
a) 481Hz, b) 9

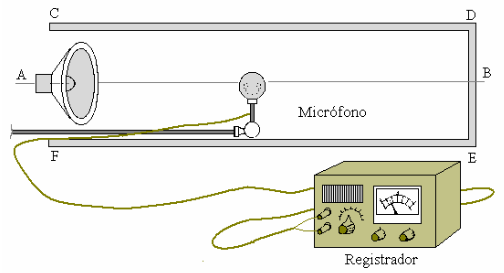
14. La cuerda de un violín de 30 cm de longitud emite un sonido de 460 Hz. Al fijarla en un punto tal que su longitud disminuya a 25 cm, emite un nuevo sonido. Calcule su frecuencia.
Respuesta
f = 552 Hz

15. Un diapasón emite un sonido de frecuencia constante. Este diapasón (vibrando) se coloca sobre un tubo cilíndrico de vidrio que contiene agua. El nivel de agua puede variar observándose que, para ciertas alturas *h* de la columna de aire en el tubo, la intensidad del sonido es mucho mayor que para otras. Las alturas para las -cuales existe resonancia son h_1 = 12 cm; h_2 = 36 cm; h_3 = 60 cm. Calcule la longitud de la onda emitida por el diapasón.
Respuesta
λ = 48 cm

16. Una probeta tiene 80 cm de profundidad y recibe la mayor cantidad de agua para que el aire

contenido en el tubo entre en resonancia con un diapasón que emite una onda sonora de período $T = 32 \times 10^{-1}$ s (valor de la velocidad del sonido en aire en las condiciones del problema, 340 m/s). Calcule la profundidad del agua.
Respuesta
0,52 m

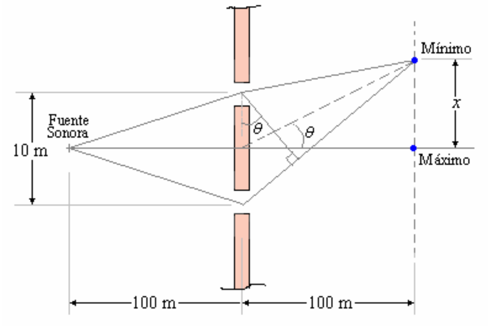
17. Un altoparlante se coloca en un punto A de una caja rectangular de sección C D E F. El sonido emitido es de 120 Hz. Suponga que un micrófono A, puede desplazarse a lo largo de la línea AB. El micrófono es conectado a un registrador de intensidad sonora.
Mediante este experimento se logra demostrar que en A y en puntos contados a partir de A hacia la derecha cada 1,20 m se registra un máximo e intensidad sonora.
a) calcule la longitud de onda sonora emitida
b) calcule la velocidad de propagación
c) ¿qué intensidad indicará el micrófono cuando llegue a B?



Respuesta
a) $\lambda = 2{,}40$ m, b) $v = 288$ m/s

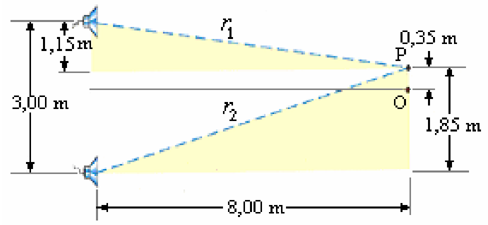
18. Sea un tubo de Kundt construido con un tubo de vidrio, un émbolo que ajusta en un extremo y un altoparlante colocado en el otro (fuente sonora en el cual se utiliza como "detector" polvo de corcho.
Ajustando, convenientemente la posición del émbolo se observa que el polvo de corcho en ciertos lugares se agita violentamente, mientras que en otros permanece en reposo. En estas condiciones se mide la distancia entre de puntos consecutivos en reposo que da 35 cm. Entonces se retira el aire atmosférico y se lo sustituye por otro gas, observándose ahora que distancia entre los puntos citados precedentemente es de 45 cm, Sabiendo que la velocidad del sonido en el aire era de 340 m/s, calcule la velocidad del sonido en el gas introducido.
Respuesta
437,14 m/s

19. Una fuente sonora F emite ondas de $\lambda = 2$ m. A 100 m de la misma encuentra una pared con dos ventanas separadas entre si. A 100 m otro lado de esta última pared un observador detecta una posición máxima intensidad de sonido. ; ¿A qué distancia mínima debe colocarse observador para dejar de percibir el sonido?



Respuesta
$$x = \frac{1}{2}\frac{D\lambda}{\sqrt{d^2 - \frac{\lambda^2}{4}}} = 5{,}03\text{m}$$

20. Dos altoparlantes están colocados como se muestra en la figura con una separación de 3 m. Los altoparlantes son puestos a vibrar sinusoidalmente por un amplificador que hace que emitan ondas sonoras en fase. Un hombre se encuentra originalmente en el punto O a 8 m de los altoparlantes en una línea perpendicular a ambos los altoparlantes y que pasa por el punto medio del segmento que une los altoparlantes donde escucha un máximo de intensidad. El hombre después se desplaza a un punto P situado a 0,350 m del punto O. En ese punto detecta el primer mínimo de la intensidad sonora.
a) Calcule la diferencia de fase de las ondas sonoras producidas por los dos altoparlantes para el punto P.
b) Calcule la longitud de onda de las ondas sinusoidales.
c) Determine la frecuencia de la fuente sabiendo que en estas condiciones (20ºC) la velocidad del sonido en el aire es de 344 m/s.
d) Si la frecuencia de la fuente de ondas se ajusta de modo que el hombre detecte el primer mínimo de intensidad sonora a 0,75 m del punto O, ¿cuál será la nueva frecuencia?



Respuesta
a) 13 cm b) 26 cm c) f =1,3 kHz d) f = 0.63 kHz

21. Una fuente sonora emite un sonido de 540 Hz y se aproxima a un observador detenido con velocidad de valor 60 km/h. Supuesto que el valor de la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, calcule la frecuencia del sonido recibido por el observador.
Respuesta.
567 Hz

22. Una fuente sonora estacionaria emite un sonido de frecuencia 680 Hz. Si el valor de la velocidad del sonido del aire es de 340 m/s, determine en qué sentido (con relación a la fuente) debe moverse un observador y con qué valor de velocidad debe hacerla si desea que la frecuencia del sonido percibido sea de 694 Hz.
Respuesta
a) Hacia la fuente, b) 6,8 m/s

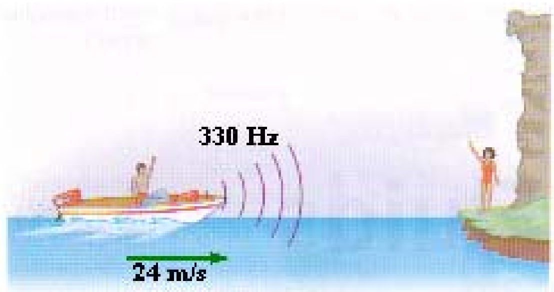
23. Una fuente sonora emite sonido con frecuencia de 840 Hz y se aproxima a un observador a velocidad de valor 40 m/s. Simultáneamente, el observador se acerca a la fuente con velocidad de valor 10 m/s, Si se acepta como valor de la velocidad del sonido 340 m/s, calcule el nuevo valor de la frecuencia percibida por el observador.
Respuesta
980 Hz

26. Una fuente sonora se aparta de un observador partiendo del reposo y con aceleración constante de valor 2 m/s^2. La velocidad del sonido en este medio vale 360 m/s. Determine el intervalo entre dos sonidos recibidos a 20 s y 30 s.
Respuesta
1,05

24. Cuatro batidos o pulsaciones por segundo se oyen cuando dos diapasones suenan simultáneamente. Después de unir un pedazo pequeño de la cinta a una rama del segundo diapasón, los dos diapasones se hacen sonar otra vez y se oyen dos batidos por segundo. Si el primer diapasón tiene una frecuencia de 180 hertzios, ¿cuál es la frecuencia original del segundo diapasón?
Respuesta
La frecuencia del segundo diapasón debe ser más alta que la del primer diapasón o al agregar la cinta habría aumentado el número de batidos. Por lo tanto, v_2 - 180 = 4 o v_2 = 184 Hz.

25. Un conductor viaja al norte en una carretera a una velocidad de 25 m/s. Un auto patrullero, conduciendo al sur a una velocidad de 40 m/s, se acerca con su sirena que suena en una frecuencia de 2500 hertz.
a) ¿Qué frecuencia escucha el conductor mientras que el patrullero se acerca?
b) ¿Qué frecuencia escucha el conductor después de pasar el patrullero?
c) ¿si hubiera estado viajando el conductor al sur, cuáles serían los resultados para (a) y (b)?
Respuesta
a) 3042 Hz b) 2072 Hz c) 2625Hz, 2401 Hz

26. Jorge se está dirigiendo hacia la isla con una velocidad de 24 m/s cuando él ve a Betty que esta en orilla en la base de un acantilado. Jorge hace sonar la bocina de frecuencia 330 Hz.
a) ¿Qué frecuencia escucha Betty?
b) Jorge puede oír el eco de su bocina reflejado por el acantilado. ¿La frecuencia de este eco mayor que o igual a la frecuencia es oída por Betty? Explique.
c) Calcule la frecuencia que escucha Jorge del eco del acantilado.



37. Dos naves en una niebla espesa están hacen sonar sus sirenas, que producen sonido con una frecuencia de 165 hertz. Una de las naves está en el reposo; la otra se mueve en una línea recta que pasa por la que está en el reposo. ¿Si la gente en la nave inmóvil oye una frecuencia de los batidos de 3,0 hertz, cuáles son las dos velocidades y direcciones posibles del movimiento de la nave móvil?
Respuesta
6,13 m/s 6,35 m/s