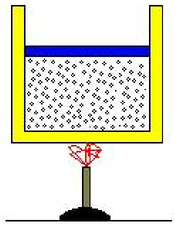
CAPÍTULO 5. TERMODINÁMICA

INTRODUCCIÓN

Sistemas Termodinámicos

Variables termodinámicas macroscópicas.

Consideremos un gas encerrado en un tubo cilíndrico cerrado a uno de sus extremos y provisto de una tapa deslizante (pistón) en el otro. Como se muestra en la figura.



El sistema descrito ocupa determinado **volumen** el cuál puede conocerse en determinado momento por la posición del pistón, otra cantidad indispensable para la descripción del sistema es la **presión** del gas en el cilindro, que también se puede conocer, mediante un manómetro. Finalmente, para tener una idea completa de lo que sucede en el cilindro hay que conocer la **temperatura**, la cual puede medirse en forma simple al igual que las otras dos cantidades. Estas cantidades obtenidas por medición directa, que describen al sistema, nos proporcionarán lo que se conoce como la **Descripción microscópica** del sistema.

Otro punto de vista de describir el sistema es asumiendo que el gas esta formado por un gran número de partículas, moléculas o átomos, todos de igual masa y cada uno moviéndose con una velocidad independiente de las otras es imposible aplicar las leyes de Newton del movimiento a cada molécula por separado e incluso tabular las coordenadas de cada molécula, en este caso es necesario usar métodos estadísticos las cantidades que lo especifican no están directamente asociadas, con nuestro sentido de percepción, esta descripción es conocida como **Descripción microscópica del Sistema.**

La descripción macroscópica o sea las propiedades apreciadas por nuestros sentidos son el punto de partida para todas las investigaciones y aplicaciones prácticas. Por ejemplo, en la mecánica do un cuerpo rígido, considerando los aspectos, externos, especificamos su centro de masa con referencia a un eje de coordenadas en un tiempo particular.

La posición y e1 tiempo y la combinación de ambos, tal como la. Velocidad, constituyen algunas de las cantidades macroscópicas usadas en mecánica y son llamadas coordenadas mecánicas y estas sirven para determinar la energía potencial y cinética del cuerpo rígido. Estos dos tipos de energía, constituyen la energía mecánica o externa del cuerpo rígido. El propósito de la mecánica es encontrar relaciones entre las coordenadas de posición y el tiempo consistentes con las leyes de Newton del movimiento.

En la termodinámica la atención se dirige al exterior del sistema. Se determinan experimentalmente: las cantidades macroscópicas que son necesarias y suficientes para describir el estado interno del sistema, estas son llamadas coordenadas termodinámicas.

El propósito de la termodinámica es encontrar las relaciones entre las coordenadas termodinámicas consistentes con las leyes fundamentales de la termodinámica.

Finalmente, puntualizaremos que dentro de la física, las leyes que relacionan las cantidades macroscópicas, se denomina termodinámica clásica o simplemente termodinámica y, las fórmulas matemáticas que relacionan las cantidades microscópicas, constituyen la Mecánica Estadística, o Teoría atómica del calor, o bien, cuando se usan técnicas simples estadístico-matemáticas se le llama teoría cinética.

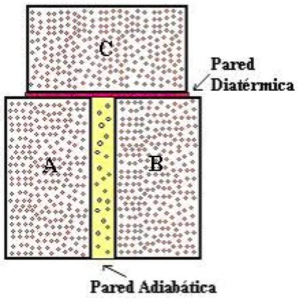
LEY CERO DE LA TERMODINÁMICA Y EQUILIBRIO TÉRMICO.

Supongamos que tenemos dos sistemas A y B, separados cada uno y definidos por las coordenadas (presión y temperatura) p, T y p', T' respectivamente.

El estado de un sistema en el cual las velocidades macroscópicas tienen valores que permanecen constantes mientras que las condiciones externas no se cambien, se conoce como estado de equilibrio térmico.

Equilibrio térmico. Los experimentos demuestran que la existencia de un estado de equilibrio depende de la proximidad de otros sistemas y de la naturaleza de la pared que los separa. Si cuando un sistema está en un estado de equilibrio y este no cambia con cualquier cambio en el ambiente, el sistema se dice que está “Aislado” o rodeado por una pared “Pared Adiabática”. Cuando las variables macroscópicas de dos sistemas que se encuentran conectadas por una pared diatérmica no varían,

se dice que se encuentran equilibrios térmicos entre ellas.
Imaginemos a los sistemas A y B separados en contacto, o separados por una pared diatérmica, con un sistema C.



El sistema A estará en equilibrio con el sistema C y el sistema B también estará en equilibrio con el sistema C, luego los sistemas A y B estarán en equilibrio térmico uno con el otro.
Esto se conoce como la **Ley cero de la termodinámica**,
"Si dos sistemas se encuentran en equilibrio térmico con un tercer sistema, los dos sistemas se encuentran en equilibrio entre sí".
Esta ley está de acuerdo a nuestra experiencia diaria de nuestros sentidos, es sencilla pero no obvia, es un hecho que sucede pero podría no haber sido así. Nos expresa la idea fundamental de temperatura. Cuando decimos que las variables macrosc6picas no varían, nos hace falta definir una propiedad que asegure esto.
Esta propiedad la llamaremos **Temperatura**.
Nosotros queremos asignar un número de cada estado de equilibrio de un sistema que tenga la propiedad que dos sistemas con el mismo número estén en equilibrio térmico entre ellos.
"La temperatura de un sistema es una propiedad que determina si un sistema está en equilibrio o no con otros sistemas".

TEMPERATURA Y ESCALAS
La temperatura se determina por la medición de alguna cantidad mecánica, eléctrica u óptica cuyo valor se correlaciona con la temperatura.
Generalmente la temperatura de una sustancia, sino en el termómetro el cual, se pone en contacto íntimo con la instancia y adquiere la misma temperatura.
Se llama TERMOMETRO, a un aparato que permite medir la temperatura por medio de su propiedad termométrica o variable macroscópica que es sensible al estado térmico de la sustancia.
Los principales termómetros y sus propiedades termométricas se muestran en la tabla.

TERMÓMETRO	PROPIEDAD TERMOMÉTRICA
Gas a volumen constante	Presión
Gas a presión constante	Volumen
Resistencia eléctrica	Resistencia eléctrica
Termocupla	Fuerza electromotriz
Columna líquida en tubo capilar	Longitud

Construyamos una escala de temperatura, para esto tomemos como termómetro una columna líquida de mercurio en un tubo capilar de vidrio, observamos que la columna de mercurio aumentará cuando aumenta la temperatura, como la compresibilidad del mercurio es tan pequeña podemos considerar como si fuera a presión constante. La relación más simple entre temperatura y longitud de la columna que podemos elegir, es una relación lineal de y.

$$t_{(y)} = ay + b$$

Donde las constantes *a* y *b* se evalúan de acuerdo a un conjunto definido de reglas. Asignemos números arbitrarios a dos puntos fijos.

Escala Celsius o centígrada.
En la escala Celsius o centígrada uno de ellos el punto de congelación del agua, es decir el punto en que el agua y el hielo están en equilibrio a la presión atmosférica, a esta temperatura le damos el valor cero grados Celsius o grados centígrados (0°C).

$$t = ay_c + b = 0^o\text{C}$$

El otro punto, el de ebullición del agua a presión atmosférica, a este le llamamos Cien grados (100°C).

$$t = ay_e + b = 100^o\text{C}$$

Al resolver las dos ecuaciones simultáneamente encontramos los valores de *a* y *b*.

$$a = \frac{100^o\text{C}}{y_e - y_c} \quad \text{y} \quad b = -\frac{100^o\text{C}}{y_e - y_c} y_c$$

Sustituyendo la expresión original

$$t = 100^o\text{C}\frac{(y - y_c)}{(y_e - y_c)}$$

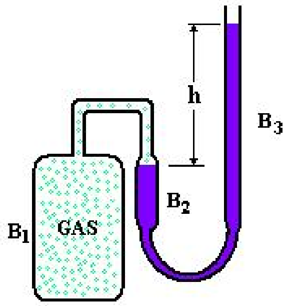
Para un termómetro a gas a Volumen Constante la expresión sería

$$t = 100^o\text{C}\frac{(p - p_c)}{(p_e - p_c)}$$

y para un termómetro a gas a presión constante la expresión sería

$$t = 100^o\text{C}\frac{(V - V_c)}{(V_e - V_c)}$$

El termómetro a gas a volumen constante consiste en un balón B_1 lleno de gas (hidrógeno por ejemplo) ligado a un tubo en forma de U lleno de mercurio, el volumen de gas en el balón se mantiene constante subiendo o bajando B_3 hasta que el mercurio en B_2 se encuentra en la marca cero.



La presión p que equilibra la presión del gas es

$p = 76 \text{ cm} + h$

La experiencia muestra que la dependencia de la presión con relación a la temperatura es lineal con esto se obtiene la escala de un termómetro colocando el balón en un baño de hielo en fusión, marcando p_c y después repitiendo la operación con vapor de agua, marcando p_e.

La distancia entre esos dos puntos se toma, por convención igual a 100°.

Medidas usando el gas hidrógeno como sustancia termométrica muestra que

$$\frac{p_e}{p_c} = 1{,}366$$

o sea que la relación con la temperatura, sería:

$$t = 100^o C \frac{\left(\dfrac{p}{p_c} - 1\right)}{\left(\dfrac{p_e}{p_c} - 1\right)} = \frac{100^o C}{(1{,}366 - 1)}\left(\frac{p}{p_c} - 1\right)$$

$$t = 273{,}15\left(\frac{p}{p_c} - 1\right)^o \text{C}$$

En esta expresión se ve que cuando la temperatura es -273.15 la presión es Cero. Como no es posible para la presión tomar valores menores que cero, a este valor de la temperatura se le torna como origen de una nueva escala de temperatura, escala ABSOLUTA de Temperaturas en grados KELVIN.

$T(\text{K}) = t(^o\text{C}) + 273{,}15^o \text{C}$

En realidad para calibrar el termómetro, no se toma como referencia el punto de fusión del hielo, sino que se especifica corno "punto fijo patrón" al llamado "Punto triple de agua", único punto en el que coexisten en equilibrio hielo, líquido y vapor de agua, dándose solamente a la presión de 4,58 mm Hg.

Obteniéndose:

t = 0,01 °C

T = 273,16 K

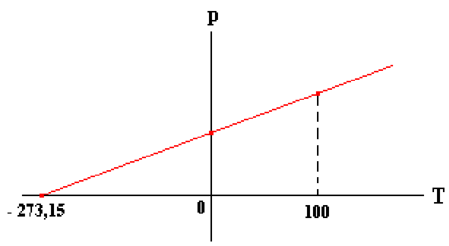
$$T = 273{,}16 \frac{p}{p_c} \text{K}$$

El termómetro de gas a volumen constante se toma como standard porque es el que experimentalmente mas nos conviene, pues es el que nos da las variaciones más pequeñas y también porque cuando el termómetro contiene gas a baja presión, la diferencia de lectura en temperatura usando diferentes gases es reducida.

Ejemplo 1. Una pieza de cobre se deja caer en un vaso de agua. Si se eleva la temperatura del agua, ¿qué pasa con la temperatura del cobre? ¿Bajo que condiciones el cobre y el agua están en equilibrio térmico?

Solución. La temperatura del cobre baja y la temperatura del agua aumenta hasta que las temperaturas son las mismas. Luego, el metal y el agua están en equilibrio térmico.

Ejemplo 2. Cuando el bulbo de un termómetro de gas a volumen constante se coloca en un recipiente con agua a 100 °C, la presión del gas es 227 mm de Hg. Cuando el bulbo se mueve a una mezcla de hielo - sal la presión del gas cae a 162 mm de Hg. Asumiendo el comportamiento ideal, como en la figura, ¿cuál es la temperatura Celsius de la mezcla de hielo – sal?



Solución.

Considerando el comportamiento del termómetro con la linealidad mostrada en la figura.

Para la presión del gas es 227 mm de Hg corresponde una temperatura 100 + 273,5 =373,15 K

Para la presión 162 mm de Hg corresponde

$$x = \frac{373{,}15}{227} 162 \;=\; 266{,}30 \text{ K o } -6{,}85°\text{C}$$

Ejemplo3. Un termómetro de gas a volumen constante está calibrado en el hielo seco (dióxido de carbono en estado sólido, tiene una temperatura de - 80,0 ° C) y en el punto de ebullición del alcohol etílico (78,0 ° C). Las dos

presiones son 0,900 atm y 1,635 atm.
a) ¿Qué valor Celsius tiene el cero absoluto?
b) ¿Cuál es la presión en el punto de congelación del agua?
c) ¿Cuál es la presión en el punto de ebullición del agua?

Solución.

a) Dado que tenemos un gráfico la presión está relacionada con la temperatura como $p = A + Bt$, donde A y B son constantes.

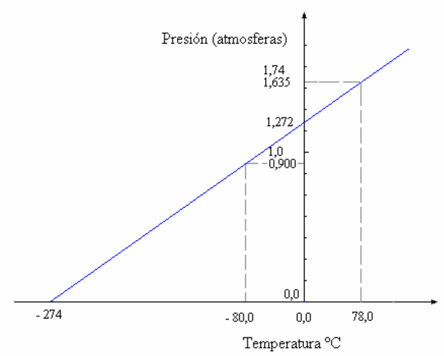
Para encontrar A y B, usamos los datos
0,900 atm = A + (- 80,0ºC)B (1)
1,635 atm = A + (78,0ºC)B (2)
Resolviendo (1) y (2) simultáneamente, encontramos
A = 1,272 atm y
B = 4,652 x 10^{-3} atm/ºC
Luego,

$$p = 1{,}272 + \left(4{,}652 \times 10^{-3}\right)t$$

En el cero absoluto

$$p = 0 = 1{,}272 + \left(4{,}652 \times 10^{-3}\right)t \Rightarrow$$

$$t = -\frac{1{,}272}{4{,}652 \times 10^{-3}} = -274\ ºC.$$



b) En punto de congelación del agua

$$p = 1{,}272 + \left(4{,}652 \times 10^{-3}\right)(0) = 1{,}272 \text{ atm.}$$

c) En el punto de ebullición del agua

$$p = 1{,}272 + \left(4{,}652 \times 10^{-3}\right)(100) = 1{,}74 \text{ atm.}$$

Ejemplo 4. En un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm de mercurio introducimos un termómetro centígrado en hielo fundente y luego en vapor de agua hirviendo. El termómetro, mal graduado, marca 2° para el primero y 102,5° para el segundo
a) ¿Qué fórmula de reducción deberemos emplear para calcular la temperatura real en todos los casos? Si el termómetro marca 50°,
b) ¿cuál es la verdadera temperatura?
c) ¿A qué temperatura sería correcta la lectura del termómetro?

Solución.

a) El cero de un termómetro correcto corresponde al 2 del mal graduado, y el 100 corresponde 102,5°.
El intervalo fundamental está, por tanto, dividido en: 102,5 - 2 = 100,5
Llamando A a la temperatura marcada por el incorrecto y C a la del centígrado perfecto, la fórmula será:

$$\frac{C}{100} = \frac{A-2}{100{,}5}$$

b) $\dfrac{C}{100} = \dfrac{50-2}{100{,}5} \Rightarrow$

$$C = \frac{48 \times 100}{100{,}5} = 47{,}76^{o}\text{C}$$

c) Si la indicación fuese correcta, se verificaría:

$$\frac{C}{100} = \frac{C-2}{100{,}5} \Rightarrow 100{,}5C = 100C - 200$$

$$\Rightarrow C = \frac{-200}{0{,}5} = -400^{o}\text{C}$$

Lo cual es imposible, puesto que el cero absoluto es - 273,16 °C, menor temperatura a la que puede aproximar un sistema.

Ejemplo 5. Un termómetro centígrado mal graduado marca 8° en el punto de fusión del hielo y 99° en el de ebullición del agua, en un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm. Resolver para este termómetro las preguntas del problema anterior.

Solución.

1) El intervalo fundamental será: 99 - 8 = 91
Luego la fórmula de reducción es:

$$\frac{C}{100} = \frac{A-8}{91}$$

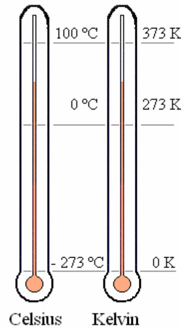
2) $\dfrac{C}{100} = \dfrac{50-8}{91} \Rightarrow C = \dfrac{4200}{91} 46{,}15^{o}C$

3) $\dfrac{C}{100} = \dfrac{C-8}{91} \Rightarrow 91C - 800 = 100C$

$$\Rightarrow C = \frac{800}{9} = 88{,}9^{o}\text{C}$$

Otras escalas de temperatura.

Así como la escala Celsius (Centígrado) y su correspondiente en la escala absoluta Kelvin, existen otras escalas en el sistema inglés.



La escala FAHRENHEIT, al cero de la escala Celsius corresponde a 32° F y los 100°C corresponden a 9 divisiones de °F, la relación de equilibrio es:

$$t(°\text{F}) = \frac{9}{5} t\,(°\text{C}) + 32°\text{F} \quad \text{y}$$

$$t(°\text{C}) = \frac{5}{9} t\,(°\text{F}) - 32°\text{F}$$

La escala absoluta correspondiente a la escala Fahrenheit es la escala RANKINE.

$$T(\text{R}) = t(^{o}\text{F}) + 459{,}67(\text{R})$$

$$\Rightarrow T(\text{R}) = \frac{9}{5} T(\text{K})$$

Ejemplo 6. a) La temperatura de la superficie del Sol es de unos 600 ºC. Exprésese esa temperatura en la escala Fahrenheit.
b) Exprese la temperatura normal del cuerpo humano 98,6 ºF, en la escala Celsius.
c) exprese la temperatura de pasteurización, 165 ºF, en la escala Celsius.
d) Exprese el punto normal de ebullición del Oxígeno –183 ºC, en la escala Fahrenheit.
Solución.
a) Como $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$ y

$T_C = T_K - 273{,}15$, igualando ambas expresiones, encontramos para la temperatura Fahrenheit:

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot (T_K - 255{,}37) = 10340{,}33^{\text{o}}\,\text{F}\,.$$

b) $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) = 37°\text{C}$

c) $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) = 73{,}89^{\text{o}}\,\text{C}.$

d) $T_F = \frac{9}{5} T_C + 32 = -297{,}4^{\text{o}}\,\text{C}\,.$

Ejemplo 7. El punto de fusión es de oro 1064 ° C, y el punto de ebullición es de 2660 ° C.
a) Exprese estas temperaturas en grados Kelvin.
b) Calcular la diferencia entre estas temperaturas en grados Celsius y grados Kelvin
Solución.
a) T = 1064 +273 = 1337 K punto de fusión
T = 2660 +273 = 2933 K punto de ebullición
b) ΔT = 1596 º C = 1596 K. Las diferencias son iguales

Ejemplo 8. En una escala especial de temperatura, el punto de congelación del agua es - 15,0 ° E y el punto de ebullición es de 60,0 ° E. Desarrollar la ecuación de conversión entre esta escala de temperatura y la escala Celsius.
Solución.

$$T_C = a \frac{^{\text{o}}\text{C}}{^{\text{o}}\text{E}} T_E + b^{\text{o}}\,\text{C}$$

Por las condiciones:
0,00 º C = a (- 15 º E) + b
100 ºC = a (60 ºE) + b
Restando:
100 ºC = a (75 ºE) $\Rightarrow$ a = 1,33 ºC/ ºE
Luego
0,00 º C = 1,33 (- 15 º E) + b $\Rightarrow$ a = 20,0 º C
La ecuación de conversión es:

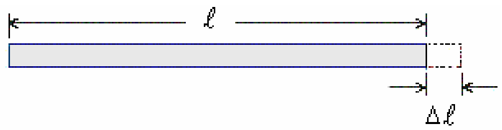
$$T_C = 1{,}33 \frac{^{\text{o}}\text{C}}{^{\text{o}}\text{E}} T_E + 20{,}0^{\text{o}}\,\text{C}$$

DILATACIÓN TÉRMICA.

Efectos frecuentes en los materiales al presentarse cambios de temperatura, son variaciones en sus dimensiones y cambios de estado. En primer lugar consideraremos aquí, las variaciones de dimensiones que ocurren sin cambios de estado.
Cuando la temperatura de un cuerpo aumenta, este por lo general se dilata. Una excepción es el agua que se contrae entre 0ºC y 4°C, este comportamiento es crítico en la manera como los lagos y los océanos polares se congelan de la superficie hacia abajo, en lugar de hacerlo del fondo hacia la superficie, ya que el agua mas fría que 4°C se eleva en lugar de hundirse y el agua a 0°C está en la superficie en lugar de estar en el fondo. (La densidad del agua a 4°C es máxima, = 1 g/cm^3).

Expansión lineal.

El cambio de una dimensión lineal de un sólido tal como el largo, el ancho, alto o una distancia entre dos marcas se conoce como la expansión lineal.



Experimentalmente se encuentra, para un amplio rango de temperaturas, que el cambio de longitudes $\Delta\ell$, es proporcional al cambio de temperatura Δt y a la longitud ℓ, de tal manera que podemos escribir: $\Delta\ell = \alpha\ell\Delta t$, donde α es el coeficiente de expansión lineal. Este coeficiente tiene diferentes valores para los diferentes materiales y tiene por unidad l/grado.

O bien,

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha\Delta t$$

Para encontrar la longitud final después de un cambio de temperatura Δt,

escribimos $\frac{d\ell}{\ell} = \alpha\, dt$, e integramos considerando la longitud ℓ para $t = t_1$, y ℓ' para $t = t_2$, siendo $t_2 - t_1 = \Delta t$

$$\int_{\ell}^{\ell'} \frac{d\ell}{\ell} = \alpha\int_{t_1}^{t_2} dt \Rightarrow \ln\ell\Big|_{\ell}^{\ell'} = \alpha t\Big|_{t_1}^{t_2} \Rightarrow$$

$$\ln\frac{\ell'}{\ell} = \alpha(t_2 - t_1) \Rightarrow \ln\frac{\ell'}{\ell} = \alpha\Delta t$$

$$\frac{\ell'}{\ell} = e^{\alpha\Delta t} \Rightarrow \ell' = \ell e^{\alpha\Delta t}$$

Desarrollando $e^{\alpha\Delta t}$ en series de Taylor

$$\left[e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... - \infty < x < \infty\right]$$

Obtenemos:

$$\ell' = \ell e^{\alpha\Delta t} = \ell\left[1 + \frac{\alpha\Delta t}{1!} + \frac{(\alpha\Delta t)^2}{2!} + \frac{(\alpha\Delta t)^3}{3!} + ...\right]$$

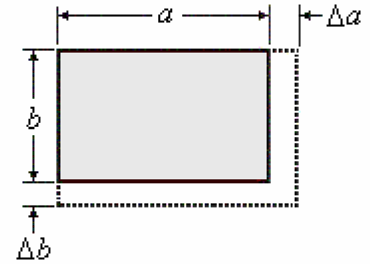
Como α es una cantidad muy pequeña podemos no considerar los términos con α^2, α^3, …..

y finalmente

$$\ell' = \ell(1 + \alpha\Delta t) = \ell + \Delta\ell$$

Expansión de superficie.

Consideremos ahora el área al elevar la temperatura Δt, para esto tomamos una superficie como se muestra en la figura, antes de la expansión su área es $A = ab$.



a se expande en $\Delta a = \alpha_1 a\Delta t$

b se expande en $\Delta b = \alpha_2 b\Delta t$

Luego $a' = a + \Delta a = a(1 + \alpha_1\Delta t)$ y

$$b' = b + \Delta b = b(1 + \alpha_2\Delta t)$$

$$A' = a'b' = a(1 + \alpha_1\Delta t)b(1 + \alpha_2\Delta t)$$

$$A' = a'b' = ab\left[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t + \alpha_1\alpha_2\Delta t^2\right]$$

En esta expresión el último término se puede despreciar ya que α_1 y α_2 son valores muy pequeños, y $A = ab$ tenemos

$$A' = A\left[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t\right]$$

En el caso de ser un cuerpo isotrópico, los coeficientes de expansión lineal α_1 y α_2 son iguales a α, luego

$$A' = A(1 + 2\alpha\Delta t)$$

Como $A' = A + \Delta A$, tenemos:

$$\Delta A = 2\alpha A\Delta t = \gamma A\Delta t$$

Donde $\gamma = 2\alpha$ es el coeficiente de expansión de área.

Expansión de volumen.

Usando el mismo argumento se demuestra que el cambio de volumen de un sólido de volumen V, al elevarse la temperatura Δt es

$$\Delta V = 3\alpha V\Delta t = \beta V\Delta t$$

Donde $\beta = 3\alpha$ es el coeficiente de expansión de volumen.

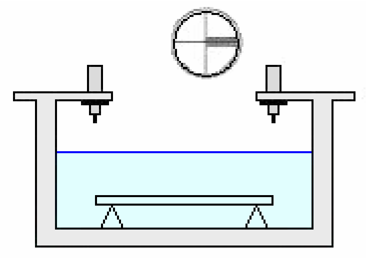
Coeficiente de dilatación lineal de algunos de los materiales más usuales.

Sólidos	α (° C^{-1})
Concreto	0,7 – 1,2 x 10^{-5}
Plata	2,0 x 10^{-5}
Oro	1,5 x 10^{-5}
Invar	0,04 x 10^{-5}
Plomo	3,0 x 10^{-5}
Zinc	2,6 x 10^{-5}
Hielo	5,1 x 10^{-5}
Aluminio	2,4 x 10^{-5}
Latón	1,8 x 10^{-5}
Cobre	1,7 x 10^{-5}
Vidrio	0,4 – 0,9 x 10^{-5}
Hierro	1,2 x 10^{-5}
Cuarzo	0,04 x 10^{-5}
Acero	1,2 x 10^{-5}

Líquidos	α (° C^{-1})
Glicerina	5,1 x 10^{-5}
Alcohol etílico	7,5 x 10^{-5}
Mercurio	1,8 x 10^{-5}
Bisulfuro de carbono	11,5 x 10^{-5}
Agua (20 ° C)	2,0 x 10^{-5}

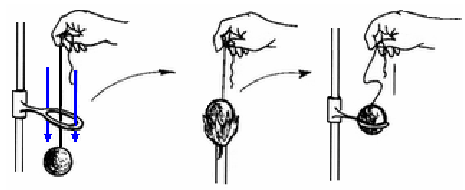
Ejemplo 9. Las tapas de metal en frascos de vidrio a menudo pueden ser aflojadas haciendo correr agua caliente sobre ellos. ¿Cómo es posible esto?
Solución. El coeficiente de dilatación del metal es mayor que la del vidrio. Cuando el agua caliente corre sobre el frasco, tanto el vidrio como la tapa se expanden, pero a ritmos diferentes. Como todas las dimensiones se expanden, habrá una cierta temperatura a la que se ha ampliado el diámetro interior de la tapa más que la parte superior del frasco, y la tapa se quitará fácilmente.

Ejemplo 10. En el comparador de la figura se mide la dilatación de una barra de hierro, de 1 m de longitud a 0 °C, obteniéndose para los 50 °C una dilatación de 0,06 cm.

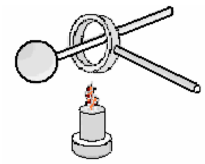


Calcular:
a) El coeficiente de dilatación lineal del hierro.
b). Si tiene una sección de 10 cm^2 a 0°C, ¿cuáles son su sección y su volumen a 100 °C?
Solución.
a) $\alpha = \dfrac{L' - L_0}{L_0 \times \Delta T} = \dfrac{0,060}{100 \times 50}$
$= 12 \times 10^{-6} °C^{-1}$
b) $\gamma = 2\alpha = 24 \times 10^{-6} °C^{-1}$
Como
$A' = A_0(1 + \gamma\Delta T) = 10(1 + 24 \times 10^{-6} \times 100)$
$= 10{,}024 \text{cm}^2$
Siendo $\beta = 3\alpha = 36 \times 10^{-6}\,{}^oC^{-1}$
Obtenemos:
$V' = V_0(1 + \beta\Delta T) = 10 \times 100(1 + 36 \times 10^{-6} \times 100)$
$= 1003{,}6 \text{cm}^3$

Ejemplo 11. Cuando el anillo de metal y la esfera de metal en la figura están a temperatura ambiente, la esfera puede pasarse por el anillo. Después que la esfera se calienta, no se puede pasar por el anillo. Explique.
¿Qué pasa si el anillo se calienta y la esfera se deja a temperatura ambiente? ¿Puede la esfera pasar por el anillo?

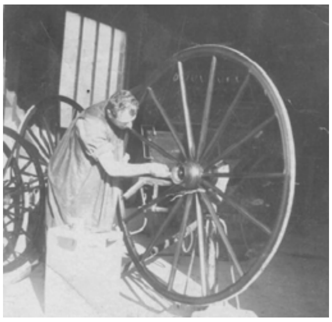


Solución. La esfera se expande cuando se calienta, por lo que ya no se ajusta a través de la anillo. Con la esfera aún caliente, se puede separar la esfera y el anillo calentando el anillo. Este resultado sorprendente se produce porque la expansión térmica del anillo no es como la inflación del medidor de presión sanguínea.
Por el contrario, es como una ampliación fotográfica; cada dimensión lineal,
incluido el diámetro del agujero, aumentan por el mismo factor. La razón
para ello es que todos los átomos, incluidos los de la circunferencia interior, se empujan hacia afuera el uno del otro.



La única manera de que los átomos pueden acomodarse a las distancias mayores es hacer crecer la circunferencia y el diámetro correspondiente.
Esta propiedad fue utilizada para colocar las llantas de metal a las ruedas de madera de los carruajes acaballo. Si el anillo se calienta y la esfera se deja a temperatura ambiente, la esfera que pasa por el anillo con más espacio.

Ejemplo 12. Un herrero ha de colocar una llanta circular de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la temperatura ambiente es de 20 °C y su coeficiente de dilatación lineal es 12,2 x 10^{-6}/°C, calcular la temperatura en grados centígrados a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.



Solución.

$\ell' = \ell(1+\alpha\Delta T) = 2\pi r'(1+\alpha\Delta T)$

$d' = d(1+\alpha\Delta T)$

Luego

$$\Delta T = \frac{d'-d}{\alpha d} = \frac{4\times 10^{-3}}{12{,}2\times 10^{-6}\times 1} = 327^o\text{C}$$

$\Rightarrow T = 20 + \Delta T = 347^o\text{C}$

Ejemplo 13. Un anillo de acero, de 75 mm de diámetro interior a 20 °C, ha de ser calentado e introducido en un eje de latón de 75,05 mm de diámetro a 20 °C.
a) ¿A qué temperatura ha de calentarse el anillo?
b) ¿A qué temperatura tendríamos que enfriar el conjunto para que el anillo salga solo del eje?
(Coeficiente de dilatación del acero: 12 x 10^{-6} °C^{-1}; coeficiente de dilatación del latón: 20 x 10^{-6} °C^{-1})

Solución.

a) $D' = D(1+\alpha\Delta T)$

$\Rightarrow 75{,}05 = 75(1 + 12\times 10^{-6}\Delta T)$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{75{,}05 - 75}{75\times 12\times 10^{-6}} = 55^o\text{C}$$

$\Rightarrow T' = T + \Delta T = 20 + 55 = 75^o\text{C}$

b) Los diámetros a la temperatura que nos piden deberán ser iguales:

$D(1+\alpha_a\Delta T') = D''(1+\alpha_l\Delta T')$

D = diámetro del anillo a 20° C;
D''= diámetro del eje a 20 °C;
α_a y α_l, coeficiente de dilatación del acero y del latón, respectivamente). Luego:

$$\Delta T' = \frac{D - D''}{D''\times 20\times 10^{-6} - 75\times 12\times 10^{-6}}$$
$$= -83{,}2^o\text{C}$$

$T'' = T + \Delta T' = 20 - 83{,}2 = -63{,}2°\text{C}$

Ejemplo 14. Un anillo de bronce de diámetro de 10,00 cm a 20,0 ° C se calienta y desliza en una varilla de aluminio de 10,01 cm de diámetro a 20,0 ° C. Suponiendo que la media de los coeficientes de expansión lineal son constantes,
a) ¿A qué temperatura esta combinación debe ser enfriada para separarlos? ¿Esto es posible?
b) ¿Qué pasa si la varilla de aluminio fuera de 10,02 cm de diámetro?

Solución.

a)

$$L_{Al}(1+\alpha_{Al}\Delta T) = L_{Bronce}(1+\alpha_{Bronce}\Delta T)$$

$$\Delta T = \frac{L_{Al} - L_{Bronce}}{L_{Bronce}\alpha_{Bronce} - L_{Al}\alpha_{Al}}$$

$$= \frac{(10{,}01 - 10{,}00)}{(10{,}00)(19{,}0\times 10^{-6}) - (10{,}01)(24{,}0\times 10^{-6})}$$

= - 199 º C

T = -179 º C, Esto es posible.

b)

$$\Delta T = \frac{L_{Al} - L_{Bronce}}{L_{Bronce}\alpha_{Bronce} - L_{Al}\alpha_{Al}}$$

$$= \frac{(10{,}02 - 10{,}00)}{(10{,}00)(19{,}0\times 10^{-6}) - (10{,}01)(24{,}0\times 10^{-6})}$$

= - 396 º C

Luego T = - 396 º C, por debajo de 0 K, que no es posible alcanzar.

Ejemplo 15. A 20,0 ° C, un anillo de aluminio tiene un diámetro interior de 5,0000 cm y una varilla de bronce tiene un diámetro de 5,0500 cm.
a) Si sólo se calienta el anillo, ¿a qué temperatura se debe llegar a fin de introducir ajustadamente la varilla?
b) Si ambos se calientan, ¿qué temperatura deben alcanzar los dos de manera que el anillo se deslice ajustadamente sobre la varilla? ¿Es posible este último proceso?

Solución.

a) $L = L_i(1+\alpha\Delta T) \Rightarrow$

$$5{,}050 = 5{,}000\left[1 + 24{,}0\times 10^{-6}(T - 20{,}0^o\text{C})\right]$$

$\Rightarrow$ T = 437 º C

b) Debemos conseguir $L_{Al} = L_{Bronce}$ para algún ΔT, o

$$L_{iAl}(1+\alpha_{Al}\Delta T) = L_{iBronce}(1+\alpha_{Bronce}\Delta T) \Rightarrow$$

$$5{,}000(1 + 24{,}0\times 10^{-6}\Delta T) = 5{,}050(1 + 19{,}0\times 10^{-6}\Delta T)$$

$\Rightarrow$ ΔT = 2080 º C

Luego T = 3000 º C

Esto no es posible porque el aluminio se funde a 660 º C.

Ejemplo 16. Un tubo de aluminio, de 0,655 m de largo a 20,0° C abierta en ambos extremos, se utiliza como una flauta. El tubo se enfría a una baja temperatura, luego se llena con aire a 20,0°

C tan pronto como se comienza a tocar. Después de eso, ¿cuánto cambia su frecuencia fundamental cuando el metal aumenta su temperatura de 5,00° C a 20,0° C?

Solución.

La frecuencia tocada con la flauta fría es

$$f_i = \frac{v}{\lambda_i} = \frac{v}{2L_i}$$

Cuando el instrumento calienta

$$f_f = \frac{v}{\lambda_f} = \frac{v}{2L_i(1+\alpha\Delta T)} = f_i\frac{1}{(1+\alpha\Delta T)}$$

La frecuencia final es más baja.

El cambio de frecuencia es

$$\Delta f = f_i - f_f = f_i\left(1 - \frac{1}{1+\alpha\Delta T}\right)$$

$$= \frac{v}{2L_i}\left(\frac{\alpha\Delta T}{1+\alpha\Delta T}\right) \approx \frac{v}{2L_i}(\alpha\Delta T)$$

$$= \frac{(340)(24,0\times10^{-6})(15,0)}{2(0,655)}$$

= 0,0943 Hz

Este cambio de frecuencia es imperceptible.

Ejemplo 17. Un estudiante mide la longitud de una varilla de bronce con una cinta de acero a 20,0 ° C. La lectura es 95,00 cm. ¿Cuál será la indicación de la cinta para la longitud de la varilla cuando la varilla y la cinta se encuentran en a) - 15,0° C y b) 55,0° C?

Solución.

El exceso de expansión del bronce es

$$\Delta L_{\text{var}\,illa} - \Delta L_{c\,\text{int}\,a} = (\alpha_{bronce} - \alpha_{acero})L_i\Delta T$$

$$= (19,0 - 11,0)\times10^{-6}(0,950)[20,0 - (-15,0)]$$

= 2,66 x 10^{-4} m

a) La varilla se contrae más que la cinta a la longitud de lectura

0,9500 – 0,000266 = 0,9497 m

b) La varilla se alarga más que la cinta a la longitud de lectura

0,9500 + 0,000266 = 0,9503 m

Ejemplo 18. La varilla de un reloj de lenteja sin compensar, que bate segundos a 0° C, es de latón. Averiguar cuánto se retrasa el reloj en un día si se introduce en un ambiente a 200° C. Coeficiente de dilatación del latón: α = 17 x 10^{-6} °C^{-1}. (Considerar el péndulo como simple, de longitud la misma que la varilla.)

Solución.

A 0° el semiperíodo (1 s) será: $1 = \pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g}}$

A 200°: $\tau = \pi\sqrt{\frac{\ell_0(1+\alpha\Delta T)}{g}}$

Dividiendo:

$$\tau = \sqrt{1+\alpha\Delta T} = \sqrt{1 + 17\times10^{-6}\times200}$$

$= \sqrt{1,0034s}$ =1,0017 s

Como un día dura 86400 segundos el péndulo dará $\frac{86400}{1,0017} = 86253$ semioscilaciones

El péndulo da en 1 día 86 400 - 86 253 = 147 semioscilaciones menos que en su marcha correcta:

El reloj se retrasará en 147 s = 2 min 27 s

Ejemplo 19. Una varilla de cobre de densidad uniforme y de sección constante oscila como un péndulo colgada de uno de sus extremos, con un periodo de 1,6 s cuando se encuentra a una determinada temperatura ambiente. Siendo el coeficiente de dilatación lineal del cobre 19 x 10^{-6} °C^{-1}, determínese el incremento de temperatura que habría que darle al ambiente para que el período aumente en 3 milésimas de s.

Solución.

El período a la temperatura inicial T es:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}M\ell^2}{Mg\frac{\ell}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

y a la temperatura T + □T será:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell(1+\alpha\Delta T)}{3g}}$$

Dividiendo los dos:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{(1+\alpha\Delta T)} \Rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - 1}{\alpha} = \frac{\left(\frac{1,603}{1,6}\right)^2 - 1}{19\times10^{-6}}$$

= 197ºC

Ejemplo 20. Un reloj con un péndulo de bronce tiene un período de 1,000 s a 20,0° C. Si la temperatura aumenta a 30,0° C,

a) ¿Cuánto cambia el período, y

b) ¿Cuánto tiempo el reloj se adelanta o atrasa en una semana

Solución.

a) $T_i = 2\pi\sqrt{\frac{L_i}{g}} \Rightarrow$

$$L_i = \frac{T_i^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1{,}000)^2(9{,}80)}{4\pi^2}$$
= 0,2482 m

Por expansión térmica

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T = 19{,}0\times10^{-6}(0{,}2842(10{,}0))$$
= 4,72 x 10^{-5} m

$$T_f = 2\pi\sqrt{\frac{L_i + \Delta L}{g}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2482 + 0{,}0000472}{9{,}80}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2482472}{9{,}80}}$$
= 1,0000207 s

ΔT = 2,07 x 10^{-5} s

b) En una semana el tiempo perdido es 1 semana por (2,07 x 10^{-5} s perdidos por segundo)

Tiempo perdido

$$= \left(\frac{7{,}00\ \text{d}}{\text{semana}}\right)\left(\frac{86400\ \text{s}}{1{,}00\ \text{d}}\right)\left(2{,}07\times10^{-5}\ \frac{\text{perdido}}{\text{s}}\right)$$
= 12,6 s perdidos

Ejemplo 21. La densidad del mercurio a 0°C es 13,6 g/cm^3; su coeficiente de dilatación, 182 x 10^{-6} °C^{-1}. Calcular la densidad del mercurio a 100 °C.

Solución.

$$\rho' = \frac{\rho}{1+\beta\Delta T} = \frac{13{,}6}{1+182\times10^{-6}100}$$
= 13,36 g/cm^3

Ejemplo 22. Un matraz aforado de pyrex se calibra a 20,0 ° C. Está lleno hasta la marca de 100 ml con acetona a 35,0° C.
a) ¿Cuál es el volumen de la acetona cuando se enfría a 20,0 ° C?
b) ¿Cuan significativo es el cambio en el volumen del frasco?

Solución.

a) $V_f = V_i(1+\beta\Delta T)$
$$= 100[1 + 1{,}50\times10^{-4}(-15{,}0)]$$
= 99,8 ml

b) $\Delta V_{acetona} = (\beta V_i \Delta T)_{acetona}$

$\Delta V_{matraz} = (\beta V_i \Delta T)_{pyrex} = (3\alpha V_i \Delta T)_{pyrex}$

Para igual Vi, ΔT,

$$\frac{\Delta V_{matraz}}{\Delta V_{acetona}} = \frac{\beta_{pyrex}}{\beta_{acetona}} = \frac{3(3{,}20\times10^{-6})}{1{,}50\times10^{-4}}$$
= 0,064

El cambio de volumen del matraz es 6,4 % del cambio de volumen de la acetona.

Ejemplo 23. La densidad de la gasolina es 730 kg /m^3 a 0 ° C. Su coeficiente medio de expansión volumétrica es 9,60 x 10^{-4} / ° C. Si 1,00 galón de gasolina ocupa 0,00380 m^3, ¿cuántos kilos extra de gasolina que se obtendría si usted compró 10,0 litros de gasolina a 0 ° C en lugar de a 20,0 ° C de una bomba que no tiene compensación de temperatura?

Solución.

Masa de 10,0 galones de gasolina a 0º C

De $\rho = \dfrac{m}{V}$ $\Rightarrow$

$$m = \rho V = 730\times\left(10{,}0\times\frac{0{,}00380}{1{,}00}\right)$$
= 27,7 kg

La gasolina se expandirá

$\Delta V = \beta V_i \Delta T$
$$= 9{,}60\times10^{-4}(10{,}0)(20{,}0-0{,}0)$$
= 0,192 gal

A 20º C,

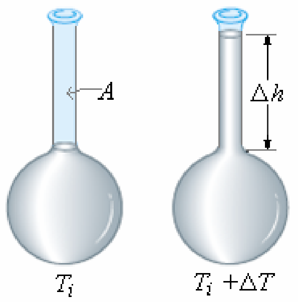
10,192 gal = 27,7 kg

$$10{,}192\ \text{gal} = 27{,}7\ \text{kg}$$
$$10{,}0\ \text{gal} = 27{,}7\ \text{kg}\left(\frac{10{,}0\ \text{gal}}{10{,}192\ \text{gal}}\right) = 27{,}2\ \text{kg}$$

La masa extra contenida en 10,0 galones a 0,0º C es

27,7 kg – 27,2 kg = 0,523 kg

Ejemplo 24. Un termómetro de mercurio se construye como se muestra en la figura . El tubo capilar tiene un diámetro de 0,00400 cm, y el bulbo tiene un diámetro de 0,250 cm. Sin tomar en cuenta la expansión del vidrio, calcular el cambio en la altura de la columna de mercurio que se produce con un cambio de temperatura de 30,0° C.



Solución.

Despreciando la expansión del vidrio,

$$\Delta h = \frac{V}{A}\beta\Delta T$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi(0{,}250)^3}{\pi(2{,}00\times10^{-3})^2}(1{,}82\times10^{-4})(30{,}0)$$
= 3,55 cm

Ejemplo 25. Considere un objeto plano de cualquier forma. ¿Cuál es el porcentaje de incremento en el momento de inercia del objeto cuando es calentado de 0º C a 100º C si está compuesto de
a) cobre?
b) aluminio?
α_{cobre} = 17,0 x 10^{-6} /ºC
$\alpha_{aluminio}$ = 24,0 x 10^{-6} /ºC
Asumir que el coeficiente promedio de expansión lineal no varía entre 0º C y 100º C.
Solución.
El momento de inercia de un objeto es
$I_{(T)} = \int r_{(T)}^2 dm$,
Con $r_{(T)} = r_{(T_i)}(1+\alpha\Delta T)$ y
$r^2{}_{(T)} = r^2{}_{(T_i)}(1+\alpha\Delta T)^2$
Para $\alpha\Delta T << 1$
$r^2{}_{(T)} \approx r^2{}_{(T_i)}(1+2\alpha\Delta T)$
El momento de inercia a la temperatura *Ti*
$I_{(T_i)} = \int r^2{}_{(T_i)} dm$ (1)
El momento de inercia a la temperatura *T*
$I_{(T)} = (1+2\alpha\Delta T)\int r^2{}_{(T_i)} dm$ (2)
(2) : (1)
$$\frac{I_{(T)}}{I_{(T_i)}} = \frac{(1+2\alpha\Delta T)\int r^2{}_{(T_i)}dm}{\int r^2{}_{(T_i)}dm} = (1+2\alpha\Delta T)$$
Restando 1 a cada lado:
$$\frac{I_{(T)} - I_{(T_i)}}{I_{(T_i)}} = 2\alpha\Delta T \Rightarrow$$
$$\frac{\Delta I}{I} = 2\alpha\Delta T$$
a) Para el cobre α_{cobre} = 17,0 x 10^{-6} /º C, ΔT = 100º C
$\frac{\Delta I}{I} = 2\alpha\Delta T$ = 2(17,0 x 10^{-6})(100) = 0,340 %

b) Para el aluminio $\alpha_{aluminio}$ = 24,0 x 10^{-6} /º C, ΔT = 100º C
$\frac{\Delta I}{I} = 2\alpha\Delta T$ = 2(24,0 x 10^{-6})(100)
= 0,480 %

Ejemplo 26. Una vasija de cinc (coeficiente de dilatación lineal: 29 x 10^{-6} °C^{-1}) está llena de mercurio a 100 °C, teniendo entonces una capacidad de 10 ℓ. Se enfría hasta 0°C. Calcular la masa de mercurio, medida a 0 °C, que hay que añadir para que la vasija quede completamente llena.
Coeficiente de dilatación del mercurio, 182 x 10^{-6} °C^{-1}
Densidad del mercurio a 0 °C, 13,6 g/cm^3.
Solución.
El volumen de la vasija a 0° quedará determinado por la ecuación:
$V' = V(1-\beta\Delta T)$
$\Rightarrow V = \frac{V'}{(1-\beta\Delta T)}$,
en la que: β= 3 x 29 x10^{-6}°C^{-1} = 87 x10^{-6} °C^{-1}
$V' = 1000$ cm^3 $\Delta T = (0-100)$ = - 100°C
Por tanto: $V = \frac{1000}{1+87\times10^{-6}\times100}$ = 991,38 cm^3

El volumen del mercurio a 0° quedará determinado por la misma ecuación en la que $\beta_{Hg} = 182\times10^{-6}\,{}^oC^{-1}$:
$$V_{Hg} = \frac{V'}{1+\beta_{Hg}\Delta T} = \frac{1000}{1+182\times10^{-6}\times100}$$
= 982,13 cm^3

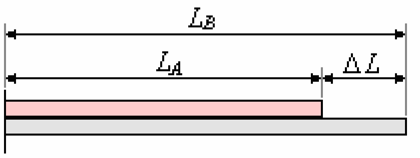
La diferencia es el volumen que queda por llenar:
V - V_{Hg} = 991,38 – 982,13 = 9,25 cm^3

La masa del mercurio que hay que agregar es:
$\Delta M = \rho_{Hg}\Delta V$ = 13,6 x 9,25 = 125,8 g

Ejemplo 27. Una vasija de Zn está llena de mercurio a 0°C, teniendo una capacidad de 5 ℓ. Calcular el volumen de mercurio que se derrama a 100 °C por efecto de la mayor dilatación de este último. (Tomar los datos necesarios del problema anterior.)
Solución.
α = 87 x10^{-6} °C^{-1}
Vasija: $V' = V(1+\beta\Delta T)$ = 5000(1 + 87x 10^{-6} x 100) = 5043,5 cm^3
El volumen del mercurio a 100 °C es:
V'_{Hg} = 5000 (1 + 182 x 10^{-6} x 100)
= 5091 cm^3
El volumen del mercurio que se derrama 100 °C es:
$V_x = V' - V'_{Hg}$ = 5091 - 5043,5
= 47,5cm^3

Ejemplo 28. Dos barras de longitudes L_A, L_B coeficientes de dilatación lineal α_A y α_B respectivamente se sujetan en un extremo, existiendo en el extremo libre una diferencia de longitud ΔL. Qué relación debe existir entre sus coeficientes de dilatación lineal tal que dicha diferencia de longitud se mantenga constante cuando el conjunto se somete a una variación de temperatura.

Solución.



Como ΔL = constante

$L_B - L_A = L'_B - L'_A$,

$L_B - L_A = L_B(1+\alpha_B\Delta T) - L_A(1+\alpha_A\Delta T)$

De aquí: $L_B\alpha_B\Delta T = L_A\alpha_A\Delta T$

Finalmente: $\dfrac{\alpha_B}{\alpha_A} = \dfrac{L_A}{L_B}$

Ejemplo 29. Una cuerda de guitarra de acero con un diámetro de 1,00 mm se estira entre los apoyos separados 80,0 cm. La temperatura es 0,0 ° C.

a) Encontrar la masa por unidad de longitud de esta cuerda. (Densidad del acero7,86 x 10^3 kg/m^3)

b) La frecuencia fundamental de las oscilaciones transversales de la cuerda es de 200 Hz. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

c) Si la temperatura se eleva a 30,0 °C, encontrar los valores resultantes de la tensión y la frecuencia fundamental. Supongamos que tanto el módulo de Young y el promedio de coeficiente de expansión tienen valores constantes entre 0,0 ° C y 30,0 ° C.

Y_{acero} = 20 x 10^{10} N/m^2, α_{acero} = 11 x 10^{-6} / ºC

Solución.

a) $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{\rho AL}{L} = \rho A$

$= (7,86\times 10^3)\pi(5,00\times 10^{-4})^2$

= 6,17 x 10^{-3} kg/m

b) $f_1 = \dfrac{v}{2L}$ y $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

De aquí $f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \Rightarrow$

$T = \mu(2Lf_1)^2$

$= (6,17\times 10^{-3})(2\times 0,800\times 200)^2 = 632$ N

c) Primero encontremos la longitud natural de la cuerda sin estirar a 0 ºC.

$$L_{natural} = L - \Delta L = L - \frac{TL}{AY} = L\left(1 - \frac{T}{AY}\right)$$

L = 0,80 m, T = 632 N, Y_{acero} = 20 x 10^{10} N/m^2,

$A = \pi(5,00\times 10^{-4})^2$ = 7,854 x 10^{-7} m^2

$$L_{natural} = 0,800\left(1 - \frac{632}{(7,8\times 10^{-7})(20,0\times 10^{10})}\right)$$

= 0,7968 m.

La longitud sin estirar a 30 ºC es

$L_{30°C} = L_{natural}[1 - \alpha(30,0 - 0,0)]$

$= (0,7968)[1 + (11,0\times 10^{-6})(30,0)]$

= 0,79706 m.

Como la longitud de la cuerda a esa temperatura sigue siendo 0,800 m, estará estirada 0,800 – 0,79706 = 0,00294 m = $\Delta L_{30°C}$.

$$\Delta L_{30°C} = \frac{T' L_{30°C}}{AY} \Rightarrow T' = \frac{AY\Delta L_{30°C}}{L_{30°C}}$$

T' es la tensión de la cuerda a 30 ºC.

Con los valores:

$$T' = \frac{(7,854\times 10^{-7})(20,0\times 10^{10})(2,94\times 10^{-3})}{(0,79706)} =$$

579,4 N

Para encontrar la frecuencia f'_1 a 30 ºC

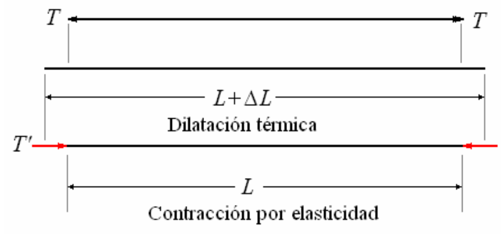
$f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ y $f'_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T'}{\mu}}$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{\dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T'}{\mu}}}{\dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}} = \sqrt{\frac{T'}{T}} \Rightarrow$$

$$f'_1 = f_1\sqrt{\frac{T'}{T}} = (200)\sqrt{\frac{579,4}{632}} = 192 \text{ Hz.}$$

Solución de aproximada de c).



Al elevar la temperatura se dilata ΔL

$\dfrac{\Delta L}{L} = \alpha\Delta\theta$

Como no se le permite expandirse conserva la misma longitud, es decir se contrae la misma cantidad ΔL

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{T'}{YA}$$

Como ambas cantidades son iguales:

$$\alpha \Delta \theta = \frac{T'}{YA} \Rightarrow$$

$$T' = \alpha YA \Delta \theta$$

$$= \left(11 \times 10^{-6}\right)\left(20 \times 10^{10}\right)\left(78,54 \times 10^{-8}\right)(30) =$$

51,4 N

La tensión final de la cuerda es el efecto combinado de las dos tensiones

$T_{final} = T - T' = 632 - 51,84 = 580,16$ N

Luego la nueva frecuencia es:

$$f_{final} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_{final}}{\mu}}$$

$$= \frac{1}{2(0,80)}\sqrt{\frac{580,16}{6,17 \times 10^{-3}}} = 191,64 \text{ Hz}$$

Ejemplo 30. Se mide la longitud de una varilla con una cinta métrica calibrada a la temperatura T_0 y su longitud resulta Lo.

a) ¿Cuál será la lectura L de la cinta para la misma varilla a la temperatura T?

b) La lectura obtenida es incorrecta. ¿Cuál sería la lectura correcta?

Solución.

a) La unidad de medida a la temperatura T_0 es

$$(1)$$

A la temperatura T_0, La varilla mide L_0 unidades

La unidad de medida a la temperatura T es:

$$(1)\left[1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right]$$

A la temperatura T, la varilla tiene una longitud

$$L'_{0v} = L_0\left[1 + \alpha_v\left(T - T_0\right)\right]$$

Contiene

$$\frac{L_0\left[1 + \alpha_v\left(T - T_0\right)\right]}{\left[1 + \alpha_c\left(T - T_0\right)\right]} = L_0\left[1 + \left(\alpha_v - v_c\right)\left(T - T_0\right)\right]$$

nuevas unidades de medida

La lectura es $L = L_0\left[1 + \left(\alpha_v - v_c\right)\left(T - T_0\right)\right]$

Si $\alpha_c > \alpha_v$, la lectura $L < L_0$

b) La lectura correcta sería la que se hiciera con una cinta métrica que continuara midiendo L_0.

$$L'_{0v} = L_0\left[1 + \alpha_v\left(T - T_0\right)\right]$$

a) Dilatación de la cinta

$$L'_{0c} = L_0\left[1 + \alpha_c\left(T - T_0\right)\right]$$

$$\Delta L'_{0c} = L_0\alpha_c\left(T - T_0\right)$$

Dilatación de la varilla

$$L'_{0v} = L_0\left[1 + \alpha_v\left(T - T_0\right)\right]$$

$$\Delta L'_{0v} = L_0\alpha_v\left(T - T_0\right)$$

La lectura L.

$$L'_{0v} = L_0\left[1 + \alpha_v\left(T - T_0\right)\right]$$

Lectura L de la cinta para la misma varilla a la temperatura T

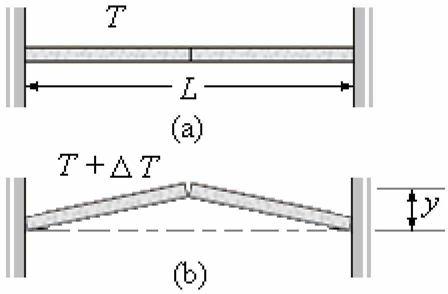
$$L = L_0 + \Delta L'_{0c} - \Delta L'_{0v}$$

$$= L_0\left[1 + \left(\alpha_c - \alpha_v\right)\left(T - T_0\right)\right]$$

b) la lectura correcta sería con una cinta que no dilate

$$L_{cor} = L_0\left[1 + \alpha_c\left(T - T_0\right)\right]$$

Ejemplo 31. Dos lozas de concreto de un puente de longitud L se colocan extremo a extremo sin dejar espacio para la expansión (figura a). Si se produce un aumento de la temperatura de ΔT, ¿qué altura se levanta el extremo de la unión (figura b)?

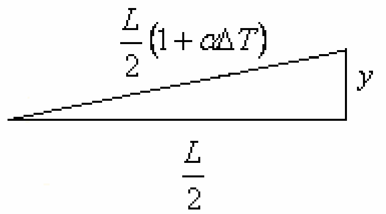


Solución.

Después de la expansión la longitud de una de las lozas es

$$L_f = L_i\left(1 + \alpha \Delta T\right) = \frac{L}{2}\left(1 + \alpha \Delta T\right)$$

El gráfico siguiente indica la altura se levanta el extremo de la unión



Utilizando el teorema de Pitágoras:

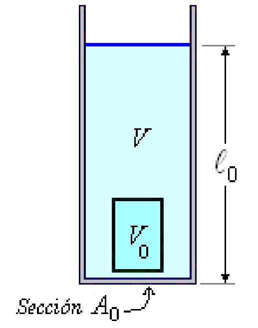
$$y = \sqrt{\left[\frac{L}{2}\left(1 + \alpha \Delta T\right)\right]^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{L}{2}\sqrt{2\alpha \Delta T + \left(\alpha \Delta T\right)^2}$$

Como $\alpha \Delta T << 1$, $y \approx \frac{L}{2}\sqrt{2\alpha \Delta T}$

Ejemplo 32. Un tubo de acero, cuyo coeficiente de expansión lineal es $\alpha = 18 \times 10^{-6}$, contiene mercurio, cuyo coeficiente de expansión de

volumen es β = 180 x 10^{-6} °C^{-1}; el volumen de mercurio contenido en el tubo es 10^{-5} m^3 a 0 °C, se desea que la columna de mercurio permanezca constante para un rango normal de temperaturas. Esto se logra insertando en la columna de mercurio una varilla de silicio, cuyo coeficiente de dilatación es despreciable.
Calcular el volumen de la varilla de silicio.



Solución.
A 0°C, sea V_o el volumen de la varilla de silicio y V el volumen de mercurio, a esta condición tenemos

$\ell_0 A_0 = V + V_0$

A una temperatura t la sección A_o se incrementa a $A_o(1 + 2\alpha t)$.
Similarmente el volumen de mercurio cambia de V a $V(1 + \beta t)$.
Como se requiere que ℓ_o permanezca constante, se tiene

$\ell_o A_o (1 + 2\alpha t) = (V + V_o)(1 + 2\alpha t)$

Por otro lado este volumen es: $V(1 + \beta t) + V_o$
Igualando ambas expresiones

$(V + V_o)(1 + 2\alpha t) = V(1 + \beta t) + V_o$

$\Rightarrow V_o (1 + 2\alpha t - 1) = V(1 + \beta t - 2\alpha t)$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{V(\beta - 2\alpha)t}{2\alpha t} = \frac{V(\beta - 2\alpha)}{2\alpha}$$

$$= \frac{V(180 - 36)10^{-6}}{36x10^{-6}} = 4V$$

$= 4 \text{ x } 10^{-5} \text{m}^3$

La varilla de silicio ocupa los 4/5 del volumen total a 0°C.

Ejemplo 33. Una barra de acero, tiene un diámetro de 3 cm a la temperatura de 25 ºC. Un anillo de bronce, tiene un diámetro interior de 2,992 cm a la misma temperatura. ¿A qué temperatura común entrará justamente el anillo en la varilla?

$\alpha_{ACERO} = 11 \times 10^{-6}$ /ºC , $\alpha_{BRONCE} = 17{,}10^{-6}$ /ºC

Solución.
Puesto que los diámetros son cantidades lineales, éstas se dilatarán con la temperatura. Como la temperatura inicial es de 25 ºC y la final T donde los diámetros deben coincidir, se tiene:

$d_A = d_{0A}\left[1 + \alpha_{ACERO}(T - 25)\right]$

$d_B = d_{0B}\left[1 + \alpha_{BRONCE}(T - 25)\right]$

Despejando T , encontramos:

$$T = \frac{d_{0A}(1 - 25\alpha_A) + d_{0B}(25\alpha_B - 1)}{(d_{0B}\alpha_B - d_{0A}\alpha_A)}$$

= 472,83 ºC.

Ejemplo 34. Una cuerda de guitarra de acero con un diámetro de 1,00 mm se estira entre los apoyos 80,0 cm. La temperatura es 0,0 ° C.
a) Encontrar la masa por unidad de longitud de esta cadena. (Densidad del acero7,86 x 10^3 kg/m^3)
b) La frecuencia fundamental de las oscilaciones transversales de la cuerda es de 200 Hz. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?
c) Si la temperatura se eleva a 30,0° C, encontrar los valores resultantes de la tensión y la frecuencia fundamental. Supongamos que tanto el módulo de Young y el promedio de coeficiente de expansión tienen valores constantes entre 0,0 ° C y 30,0 ° C.

Y_{acero} = 20 x 10^{10} N/m^2, α_{acero} = 11 x 10^{-6} / º C

Solución.

a) $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{\rho A L}{L} = \rho A$

$= (7{,}86 \times 10^3)\pi(5{,}00 \times 10^{-4})^2$

= 6,17 x 10^{-3} kg/m

b) $f_1 = \dfrac{v}{2L}$ y $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

De aquí $f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \Rightarrow$

$T = \mu(2Lf_1)^2$

$= (6{,}17 \times 10^{-3})(2 \times 0{,}800 \times 200)^2$

= 632 N

c) Primero encontremos la longitud natural de la cuerda sin estirar a 0 º C.

$L_{natural} = L - \Delta L$

$$= L - \frac{TL}{AY} = L\left(1 - \frac{T}{AY}\right)$$

L = 0,80 m, T = 632 N, Y_{acero} = 20 x 10^{10} N/m^2,

$A = \pi(5{,}00 \times 10^{-4})^2$ = 7,854 x 10^{-7} m^2

$$L_{natural} = 0{,}800\left(1 - \frac{632}{(7{,}8 \times 10^{-7})(20{,}0 \times 10^{10})}\right)$$

= 0,7968 m.

La longitud sin estirar a 30 º C es

$$L_{30°C} = L_{natural}\left[1-\alpha(30{,}0-0{,}0)\right]$$
$$= (0{,}7968)\left[1+(11{,}0\times10^{-6})(30{,}0)\right]$$
$$= 0{,}79706 \text{ m.}$$

Como la longitud de la cuerda a esa temperatura sigue siendo 0,800 m, estará estirada 0,800 – 0,79706 = 0,00294 m = $\Delta L_{30°C}$.

$$\Delta L_{30°C} = \frac{T' L_{30°C}}{AY} \Rightarrow T' = \frac{AY\Delta L_{30°C}}{L_{30°C}}$$

T' es la tensión de la cuerda a 30 º C.
Con los valores:

$$T' = \frac{(7{,}854\times10^{-7})(20{,}0\times10^{10})(2{,}94\times10^{-3})}{(0{,}79706)}$$
$$= 579{,}4 \text{ N}$$

Para encontrar la frecuencia f'_1 a 30 º C

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ y } f'_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{\mu}}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{\mu}}}{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \sqrt{\frac{T'}{T}} \Rightarrow$$

$$f'_1 = f_1\sqrt{\frac{T'}{T}} = (200)\sqrt{\frac{579{,}4}{632}}$$
$$= 192 \text{ Hz.}$$

Ejemplo 35. Un vaso de vidrio de 75 cm^3 se llena completamente de mercurio a la temperatura ambiente de 25 ºC. A la temperatura de 20 ºC, ¿Cuál será el volumen de mercurio derramado?

β_{Hg} = 18,21 x 10^{-5} / ºC,

α_V = 9,6 x 10^{-6} / ºC .

Solución.

El volumen derramado V_D corresponde a la diferencia entre el volumen de mercurio V_{Hg} menos el volumen del vaso V_V, es decir:

$$V_D = V_{Hg} - V_V$$
$$= V_0(1+\beta_{Hg}\Delta T) - V_0(1+3\alpha_V\Delta T)$$
$$= V_0\Delta T(\beta_{Hg} - 3\alpha_V)$$
$$= (75)(-5)(18{,}21-2{,}88)\times10^{-5}$$
$$= -0{,}058 \text{ cm}^3$$

Se derraman 0,058 cm^3 de mercurio

Ejemplo 36. Un estudiante quiere construir un submarino de juguete. Toma un bloque rectangular de madera y lo corta con su longitud paralela al grano y flota en alcohol a 10ºC. Eleva gradualmente la temperatura al sistema. ¿A qué temperatura el bloque comenzará a hundirse?

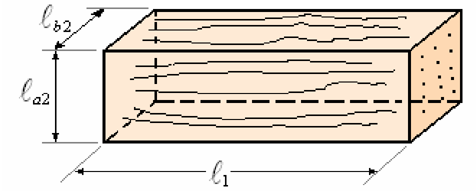
Coeficiente expansión lineal de la madera con el grano α_{m1} = 4 x 10^{-6} /º C.

Coeficiente expansión lineal de la madera contra el grano α_{m2} = 18 x 10^{-6} /º C.

Coeficiente expansión volumétrico del alcohol β_{al} = 1,1 x 10^{-3} /º C.

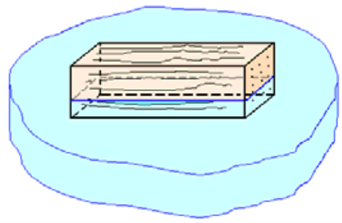
Densidad de la madera a 10ºC ρ_m = 0,75 g/cm^3.

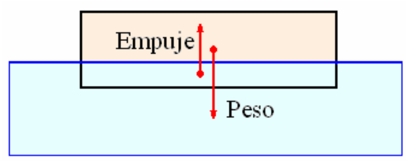
Densidad del alcohol a 10ºC ρ_{al} = 0,80 g/cm^3.



Solución.

A la temperatura de 10º C.



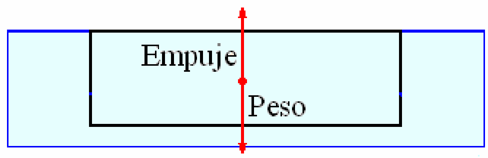


$$\rho_m g V_0 = \rho_{al} g V$$

La masa de agua del empuje es igual a la masa del bloque

$$V_0 = \ell_1 \ell_{a2} \ell_{b2}$$

A la temperatura t^o C en la que el juguete comienza a hundirse los volúmenes son iguales



$$\Delta t = t - 10° \text{ C}$$

El volumen de agua del empuje es igual volumen del bloque.

$$\ell_1\ell_{a2}\ell_{b2}(1+\alpha_{m1}\Delta t)(1+\alpha_{m2}\Delta t)^2 = V(1+\beta_{al}\Delta t)$$

$$V_0(1+\alpha_{m1}\Delta t)(1+\alpha_{m2}\Delta t)^2 = \frac{\rho_m}{\rho_{al}}V_0(1+\beta_{al}\Delta t)$$

$$(1+\alpha_{m1}\Delta t)(1+2\alpha_{m2}\Delta t) = \frac{\rho_m}{\rho_{al}}(1+\beta_{al}\Delta t)$$

$$\left(\alpha_{m1} + 2\alpha_{m2} - \frac{\rho_m}{\rho_{al}}\beta_{al}\right)\Delta t = \frac{\rho_m}{\rho_{al}} - 1$$

$$\Delta t = \frac{\dfrac{\rho_m}{\rho_{al}} - 1}{\left(\alpha_{m1} + 2\alpha_{m2} - \dfrac{\rho_m}{\rho_{al}}\beta_{al}\right)}$$

Reemplazando valores:

$$\Delta t = \frac{\dfrac{0,75}{0,8} - 1}{\left(4\times10^{-6} + 36\times10^{-6} - \dfrac{0,75}{0,8}\times1,1\times10^{-3}\right)}$$

$$= \frac{0,0625}{99,125\times10^{-5}} = 63,05^\circ\ \mathrm{C}$$

La temperatura es 63,05 + 10 = 73,05º C.

Ejemplo 37. En el centro de un disco de acero hay un orificio de diámetro d = 4,99 mm (a 0 °C). ¿Hasta que temperatura hay que calentar al disco para que por el orificio empiece a pasar una bola de diámetro D = 5,00 mm? El coeficiente de dilatación lineal del acero es α = 1,1 x 10^{-5} K^{-1}.

Solución.

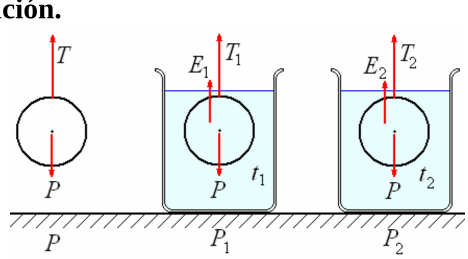
$d(1 + \alpha\Delta T) = D$, reemplazando valores:

$$4,99\left(1 + 1,1\times10^{-5}\Delta T\right) = 5,00$$

Resolviendo encontramos $\Delta T = 182$, como la temperatura inicial es 0°C, es necesario elevar la temperatura hasta 182°C.

Ejemplo 38. Una bola de vidrio de coeficiente de dilatación cúbica es β se pesa tres veces en el aire y en un líquido a las temperaturas t_1 y t_2. Las indicaciones de las balanzas para las tres pesadas son: P, P_1 y P_2. Determinar el coeficiente de dilatación cúbica del líquido β'.

Solución.



En el aire

$$P = T = \rho gV$$

En el líquido a temperatura t_1.

$$P_1 = T_1 = P - E_1$$
$$= P - \rho_1 gV$$

En el líquido a temperatura t_2.

$$P_2 = T_2 = P - E_2$$
$$= P - \rho_2 gV(1 + \beta\Delta t)$$
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Pero $\rho_2 = \dfrac{m}{V(1 + \beta'\Delta t)}$

Siendo $\rho_1 = \dfrac{m}{V} \Rightarrow \rho_2 = \dfrac{\rho_1}{(1 + \beta'\Delta t)}$

Tenemos

$$P_2 = P - \rho_1 gV\frac{(1 + \beta\Delta t)}{(1 + \beta'\Delta t)}$$

En la fórmula de P despreciamos la fuerza de empuje por ser pequeña la densidad del aire. Por eso no tiene importancia la temperatura a que hizo esta pesada.

De las tres ecuaciones se obtiene β' en función de P, P_1, P_2, t_1, t_2 y β que son conocidos:

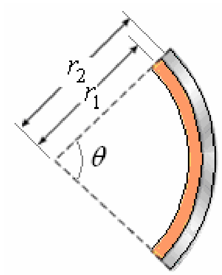
$$\beta' = \frac{(P_2 - P_1) + (P - P_1)\Delta t}{(P - P_2)\Delta t}$$

En la práctica se suele utilizar una bola de vidrio de cuarzo cuyo coeficiente de dilatación cúbica es mucho menor que el coeficiente de dilatación cúbica de la inmensa mayoría de los líquidos. En este caso la respuesta se puede simplificar:

$$\beta' = \frac{(P_2 - P_1)}{(P - P_2)\Delta t}$$

Ejemplo 39. Un par bimetálico está hecho de dos cintas de distintos metales soldados juntos.

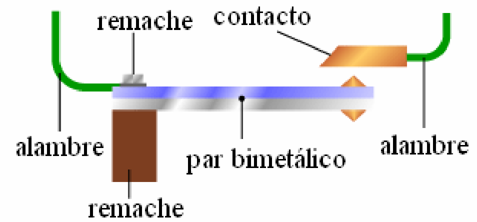
a) En primer lugar asuma que el par originalmente esta derecho. A medida que se calienta, el metal con mayor coeficiente de expansión se expande más que el otro, forzando a arquearse (ver figura). Derivar una expresión para el ángulo de flexión en función de la longitud inicial de las tiras, sus coeficientes de expansión lineal, el cambio de temperatura, y la separación de los centros de las tiras ($\Delta r = r_2 - r_1$).



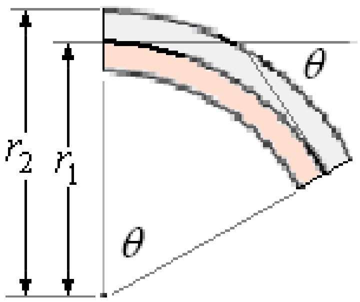
b) Demostrar que el ángulo de flexión disminuye a cero cuando el ΔT se reduce a cero y también cuando los dos coeficientes de expansión se hacen iguales.

c) ¿Qué pasa si el par se enfría?

d) La figura b muestra un par bimetálico en un termostato. La ecuación de la parte (a) aplica a ella si se interpreta como el ángulo de flexión adicional causado por un cambio en la temperatura. El interior final de la tira espiral esta fijo, y el otro extremo es libre de moverse. Supongamos que los metales son de bronce e invar, el espesor del par $2\Delta r$ = 0,500 mm, y la longitud total es 20,0 cm. Encontrar el ángulo a través de la cual el extremo libre del par se dobla cuando la temperatura cambia un grado Celsius. El extremo libre del par se aplica para abrir o cerrar el contacto eléctrico de conmutación de un horno.



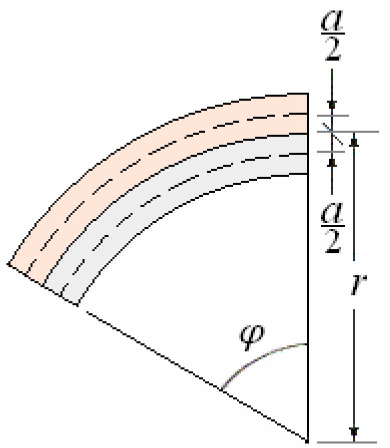
Solución.
El ángulo de doblez, entre las tangentes de los dos extremos de la tira es igual al ángulo que el par subtiende a su centro de curvatura. (Los ángulos son iguales porque sus lados son perpendiculares, lado de la derecha a lado de la derecha, lado izquierdo a lado a la izquierda.)



a) Por la definición de radian
$L_i + \Delta L_1 = \theta r_1$ y $L_i + \Delta L_2 = \theta r_2$
Restando $\Delta L_2 - \Delta L_1 = \theta(r_2 - r_1)$
$\alpha_2 L_i \Delta T - \alpha_1 L_i \Delta T = \theta \Delta r$
$$\theta = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) L_i \Delta T}{\Delta r}$$
b) En la expresión de (a), θ es directamente proporcional a ΔT y también a (α_2 - α_1). Luego θ es cero cuando alguna de estas cantidades se hace cero.
c) El material que se expande más cuando se calienta se contrae mas cuando se enfría, tal que la tira bimetálica se dobla en el otro sentido.

d)
$$\theta = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) L_i \Delta T}{\Delta r}$$
$$= \frac{2(19\times10^{-6} - 0{,}9\times10^{-6})(0{,}2)(1)}{0{,}0005}$$
$$= 1{,}45\times10^{-2} \text{ rad}$$
Convirtiendo radianes a grados:
$$1{,}45\times10^{-2} \text{ rad}\,\frac{180^{\circ}}{\pi \text{ rad}} = 0{,}831^{\circ}$$

Ejemplo 40. Dos láminas, una de acero y otra de bronce, de igual espesor a = 0,2 mm, están remachadas entre sí por sus extremos de manera que a la temperatura T_1 = 293 K forman una lámina bimetálica plana. ¿Cuál será el radio de flexión de esta lámina a la temperatura T_2 = 393 K?
El coeficiente de dilatación lineal:
Acero es $\alpha_1 = 1{,}1\times10^{-5}\,\text{K}^{-1}$ y del
Bronce es $\alpha_1 = 2\times10^{-5}\,\text{K}^{-1}$.
Solución.



Vamos a suponer que la línea medía de cada lámina conserva la longitud que tendría en estado no curvado. El radio r se determina por las condiciones
$$\varphi(r - \frac{a}{2}) = \ell + \Delta\ell_1,\quad \Delta\ell_1 = \ell\alpha_1\Delta T,$$
$$\varphi(r + \frac{a}{2}) = \ell + \Delta\ell_2,\quad \Delta\ell_2 = \ell\alpha_2\Delta T,$$

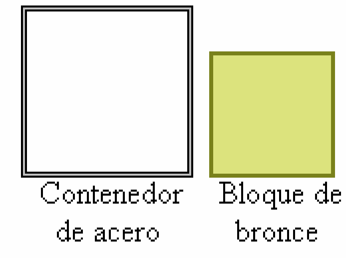
$(1+\alpha_1\Delta T)(r+\frac{a}{2}) = (1+\alpha_2\Delta T)(r-\frac{a}{2})$,

Por consiguiente

$$r = \frac{a[2+(\alpha_1+\alpha_2)\Delta T]}{2(\alpha_2-\alpha_1)\Delta T} = 22{,}5\text{cm}$$

Ejemplo 41. Un contenedor de acero tiene un volumen neto independiente de la temperatura, ya que contiene un bloque de bronce. El contenedor de acero tiene un volumen bruto de 2 x 10^{-4} m^3 a 0 ° C. Encuentre el volumen del bloque de bronce a esa temperatura. Los coeficientes de dilatación lineal de bronce y acero son de 20 x 10^{-6} y 12 x 10^{-6} /ºC, respectivamente.

Solución.



Sea V_0 el volumen del bloque de cobre a 0 ºC

El volumen del contenedor de acero sin el bloque de bronce es V.

El volumen neto del contenedor

$V - V_0$.

Cuando la temperatura se eleva ΔT

Volumen del contenedor

$V' = V(1+3\alpha_a\Delta T)$

Volumen del bloque de bronce

$V'_0 = V_0(1+3\alpha_c\Delta T)$

El volumen neto del contenedor

$V' - V'_0 = V(1+3\alpha_a\Delta T) - V_0(1+3\alpha_c\Delta T)$

Como el volumen neto independiente de la temperatura

$V(1+3\alpha_a\Delta T) - V_0(1+3\alpha_c\Delta T) = V - V_0$

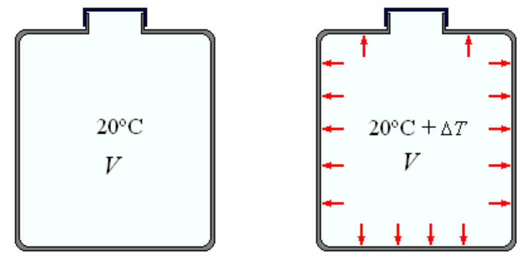
$V3\alpha_a\Delta T - V_0 3\alpha_c\Delta T = 0$

$$V_0 = \frac{\alpha_a}{\alpha_c}V = \frac{12\times10^{-6}}{20\times10^{-6}}(2\times10^{-4})$$

= 1,2 x 10^{-4} m^3

Ejemplo 42. El módulo volumétrico del alcohol es 0,013 x 10^{10} N/m^2 y su coeficiente de dilatación cúbica es de 1,1 x 10^{-3} /ºC. Alcohol a la temperatura de 20ºC se coloca en un recipiente cerrado de material de bajo coeficiente de dilatación. El recipiente puede soportar presiones solamente hasta de 120 atm. ¿A qué temperatura debe elevarse el recipiente a fin de hacerlo estallar?

Solución.



Si se eleva la temperatura del recipiente, se expande una cantidad despreciable en cambio el alcohol contenido se expandiría en libertad., si se incrementa una temperatura ΔT el volumen se incrementa $\Delta V = V\beta\Delta T$

Al no poder aumenta la presión sobre el recipiente aumenta según

$$B = \frac{\Delta p}{\Delta V/V} \Rightarrow \Delta p = B\frac{\Delta V}{V}$$

Reemplazando el volumen que no pudo expandir:

$$\Delta p = B\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \Delta p = B\beta\Delta T \Rightarrow$$

De aquí obtenemos la temperatura

$$\Delta T = \frac{\Delta p}{\beta B} = \frac{120(1{,}013\times10^5)}{(1{,}1\times10^{-3})(0{,}013\times10^{10})} = 85\ ºC$$

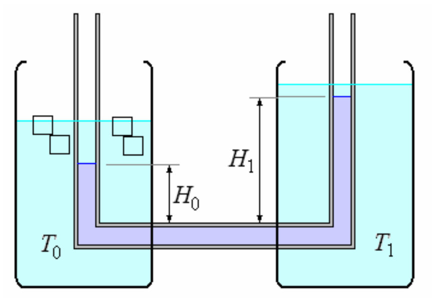
El recipiente estallará cuando la temperatura se eleve a 20 + 85 = 105 |C.

Ejemplo 43. Para determinar el coeficiente de dilatación volumétrica β de líquidos, se considera también la dilatación del recipiente, lo que puede complicar experimentalmente el procedimiento.

A fin de salvar esta dificultad, se ha diseñado el siguiente dispositivo, que consta de un tubo en U que contiene una muestra del líquido. Una rama del tubo se mantiene a 0 °C en un baño agua y hielo y la otra rama se mantiene a una temperatura T_1 en un recipiente aislado térmicamente, como se muestra en la figura. Conociendo las medidas de las alturas H_0 y H_1 de las columnas de líquido es posible determinar el coeficiente de dilatación volumétrica del líquidoβ.

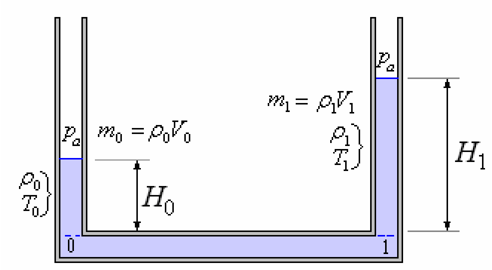
a) Determinar una relación entre las alturas y las densidades en las 2 ramas ρ_0 y ρ_1.

b) Expresar β en función de la temperatura y de las alturas medidas.



Solución

a) Consideremos los puntos 0 y 1 del tubo en U, situados al mismo nivel.



La presión en 0:

$$p_0 = p_a + \rho_0 g H_0$$

La presión en 1:

$$p_1 = p_a + \rho_1 g H_1$$

La presión en el punto 0 es igual a la presión en el punto 1.

$$p_a + \rho_0 g H_0 = p_a + \rho_1 g H_1$$

Simplificando

$$\rho_0 H_0 = \rho_1 H_1 \Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{H_1}{H_0}$$

b) Consideramos las masas de las ramas 0 y 1:

m_0 masa limitada por la altura H_0

m_0 masa limitada por la altura H_1

$$m_0 = m_1$$

$$\rho_0 V_0 = \rho_1 V_1$$

Pero por dilatación térmica

$$V_1 = V_0\left[1 + \beta\left(T_1 - T_0\right)\right]$$

Reemplazando:

$$\rho_0 V_0 = \rho_1 V_0\left[1 + \beta\left(T_1 - T_0\right)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = 1 + \beta\left(T_1 - T_0\right) \Rightarrow$$

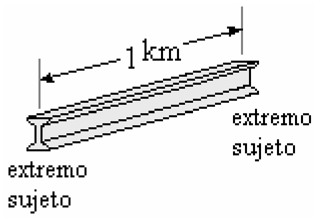
$$\beta = \frac{\left(\dfrac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)}{\left(T_1 - T_0\right)}$$

Reemplazando $\dfrac{\rho_0}{\rho_1} = \dfrac{H_1}{H_0}$, obtenemos:

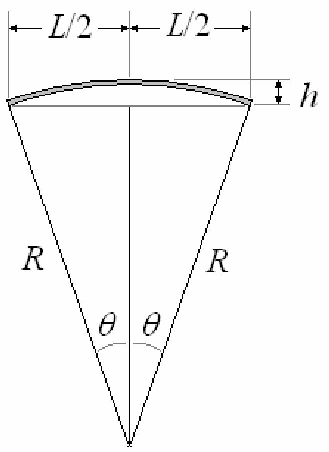
$$\beta = \frac{\left(\dfrac{H_1}{H_0} - 1\right)}{\left(T_1 - T_0\right)} = \frac{\left(H_1 - H\right)}{H_0\left(T_1 - T_0\right)}$$

Ejemplo 44. Un riel de acero de ferrocarril de 1,00 km de longitud se sujeta firmemente en ambos extremos cuando la temperatura es de 20,0 ° C. A medida que aumenta la temperatura, el riel empieza a ceder. Si su forma es un arco de un círculo vertical, encuentre la altura *h* del centro del riel cuando la temperatura es 25,0 ° C. Usted tendrá que resolver una ecuación trascendental.

α_{acero} = 11 x 10^{-6} / º C



Solución. La figura muestra esquemáticamente la situación del riel deformado por el incremente de temperatura.



Sea 2θ el ángulo subtendido por el riel curvado.

La longitud ala temperatura al elevarse la temperatura ΔT = 25 -20 = 5 º C

$$L + \Delta L = 2\theta R = L\left(1 + \alpha \Delta T\right) \quad (1)$$

Del dibujo se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{L/2}{R} = \frac{L}{2R} \quad (2)$$

De (1) se obtiene

$$\theta = \frac{L}{2R}\left(1 + \alpha \Delta T\right) \quad (1a)$$

Reemplazando (2) en (1a):

$$\theta = \left(1 + \alpha \Delta T\right)\operatorname{sen}\theta$$

Poniendo los datos

$$\theta = \left(1 + 11 \times 10^{-6} \times 5\right)\text{sen}\theta$$
$$= 1{,}0000055\text{sen}\theta \;\Rightarrow$$
$$\frac{\theta}{1{,}0000055} = \text{sen}\theta \;\Rightarrow\; 0{,}99999945\theta = \text{sen}\theta$$

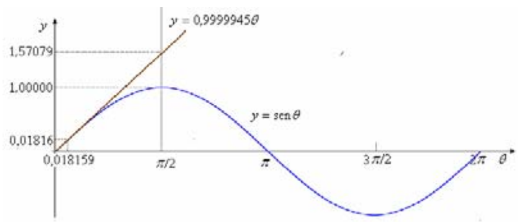
Esta es una ecuación trascendental
Una función trascendental es una función que no satisface una ecuación polinómica cuyos coeficientes son los mismos polinomios, a diferencia de una función algebraica, que cumple con tal ecuación.
Para obtener una solución gráfica, un método consiste en establecer cada lado de una ecuación con única variable trascendental igual a una variable dependiente, esto es

$$y = 0{,}99999945\theta$$
$$y = \text{sen}\theta$$

Luego graficar estas dos funciones y encontrar sus puntos de intersección que son sus soluciones.
Tabla para graficar las funciones

θ	$0{,}99999945\theta$	$\text{sen}\theta$
0	0,00000	0
0,00500	0,00499997	0,00499998
0,01000	0,00999994	0,00999983
0,01500	0,01499991	0,01499943
0,01816	**0,01815990**	**0,01815900**
0,02000	0,01999989	0,01999866
0,02500	0,02499986	0,02497395
$\pi/2$	1,57078768	1,00000000

Gráfico



El punto de intersección diferente a cero es
θ= 0,01816 rad = 1,045º

Nota: el valor es encontrado en la tabla, por interpolación, el gráfico por estar a una escala en la que nos e puede apreciar, en este caso solamente sirve para dar una idea del lugar donde se encuentra el punto de intersección.

Con este valor calculamos el punto el radio de curvatura R.

$$R = \frac{L}{2\text{sen}\theta} = \frac{1000}{2 \times 0{,}01816} = 2{,}7533 \times 10^{4}\ \text{m}$$

La altura h del centro del riel cuando la temperatura es 25,0 ° C.

$$h = R\left(1 - \cos\theta\right) = 2{,}7533 \times 10^{4}\left(1 - 0{,}99983\right) = 4{,}54\ \text{m}$$

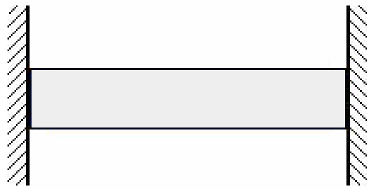
Valor bastante mayor a ΔL

$$\Delta L = \alpha L \Delta T = 11 \times 10^{-6} \times 1000 \times 5$$
$$= 0{,}055\ \text{m} = 5{,}5\ \text{cm}$$

Valor bastante menor a R.

$$R = \frac{L}{2\text{sen}\theta} = \frac{1000}{2 \times 0{,}01816}$$
$$= 2{,}7533 \times 10^{4}\ \text{m} = 27{,}533\ \text{km}$$

FATIGA DE ORIGEN TÉRMICO.
Consideremos una barra de sección A sujeta en ambos extremos



Al aumentar la temperatura Δt, debería producirse un cambio de longitud

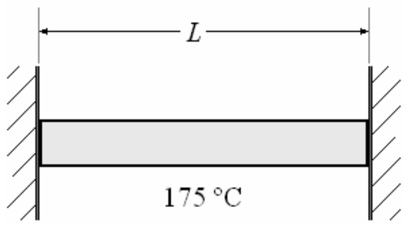
$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha\Delta t$$

Pero como no se puede dilatar por estar sujeta, la tensión debe aumentar hasta un valor suficiente para producir el mismo cambio pero de sentido inverso, este esfuerzo es:

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta\ell}{\ell}$$, reemplazando obtenemos:

$$\frac{F}{A} = Y\alpha\Delta t$$

Ejemplo 45. Una barra de hierro de 2 m de largo 2 cm^2 de área de sección transversal se calienta a 175 ºC, su extremos están fijados rígidamente. Determinar la tensión en la barra cuando se ha enfriado a 25 ºC. El coeficiente de dilatación lineal del hierro es 1,1 x l0^{-5} ºC y el módulo de Young de hierro es de 20 x 10^{10} N/m^2.
Solución.

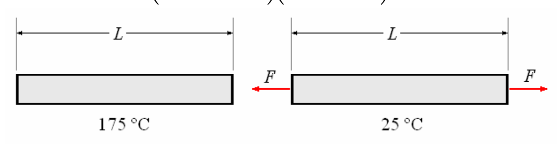


La barra a los 175 ºC tiene una longitud mayor que cuando está a 25 ºC igual a:

$$\Delta L = L\alpha\Delta T = 2\left(1{,}1 \times 10^{-5}\right)\left(175 - 25\right)$$
$$= 3{,}33 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

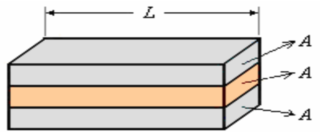
Al enfriarse hasta los 25 ºC , al estar fija rígidamente no puede disminuir su longitud queda estirada bajo tensión

$$\Delta L = \frac{FL}{YA} = \frac{F(2)}{(20\times 10^{10})(2\times 10^{-4})} = 5 \text{ x } 10^{-8} F$$

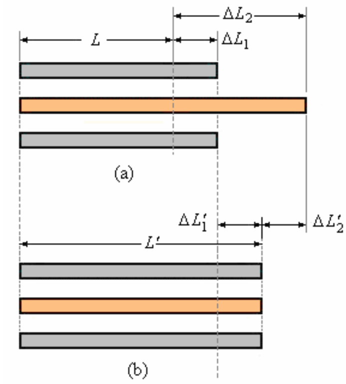


Igualando obtenemos.
$5 \text{ x } 10^{-8} F = 3{,}33 \text{ x } 10^{-2}$ m
$F = 6{,}66 \text{ x } 10^{5}$ N

Ejemplo 46. Una platina de cobre se suelda con dos platinas de acero, como se muestra en la figura. Las tres platinas son iguales, teniendo exactamente la misma longitud a temperatura ambiente. Calcular las fatigas que se producirán al aumentar la temperatura en Δt grados.



Solución.
En el esquema se muestran las dilataciones que se producirían en cada barra si no estuvieran soldadas (a) y las deformaciones por estarlo (b).



También se tiene que la distribución de fuerzas elásticas que igualan la longitud del sistema, por simetría se puede considerar de la siguiente forma siguiente:

$F_2 = 2F_1$

De este esquema tenemos las siguientes relaciones geométricas entre las deformaciones:
Dividiendo esta expresión entre L_0, tenemos una relación entre las deformaciones unitarias

$$\frac{\Delta L_2}{L} - \frac{\Delta L'_2}{L} = \frac{\Delta L_1}{L} + \frac{\Delta L'_1}{L}$$

Como:

$$\frac{\Delta L_1}{L} = \alpha_1 \Delta t \text{ y } \frac{\Delta L'_1}{L} = \frac{F_1}{AY_1}$$

$$\frac{\Delta L_2}{L} = \alpha_2 \Delta t \text{ y } \frac{\Delta L'_2}{L} = \frac{F_2}{AY_2}$$

Reemplazando se tiene:

$$\alpha_1 \Delta t - \frac{F_1}{AY_1} = \alpha_2 \Delta t + \frac{F_2}{AY_2}$$

Con $F_2 = 2F_1$

$$\alpha_1 \Delta t - \frac{F_1}{AY_1} = \alpha_2 \Delta t + \frac{2F_1}{AY_2}$$

Despejando F_1/A

$$\frac{F_1}{A} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{2}{Y_2}\right)}$$

Y las fatigas serán:

$$S_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{2}{Y_2}\right)} \text{ y}$$

$$S_2 = \frac{F_2}{A} = \frac{2F_1}{A} = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{2}{Y_2}\right)}$$

Nota: Al determinar las deformaciones unitarias $\frac{\Delta L'_1}{L}$ y $\frac{\Delta L'_2}{L}$ se han despreciado los términos de segundo orden.

$$\frac{\Delta L'_1}{L + \Delta L_1} \approx \frac{\Delta L'_1}{L} = \frac{F_1}{AY_1} \text{ y}$$

$$\frac{\Delta L'_2}{L + \Delta L_2} \approx \frac{\Delta L'_2}{L} = \frac{F_2}{AY_2}$$

Debido a $L >> \Delta L_1$ y $L >> \Delta L_2$.

Ejemplo 47. Dos varillas del mismo diámetro, una de bronce de 25 cm. de longitud, y la otra de acero de 50 cm. De longitud se colocan extremo a extremo y aseguradas entre dos soportes rígidos.
La temperatura de las varillas se eleva 40°C.
¿Cuál es el esfuerzo en cada varilla?
Módulo de Young del acero 20 x 10^{11} dina cm $^{-2}$
Módulo de Young del bronce: 10 x 10^{11} dina cm $^{-2}$
Coeficiente de dilatación térmica acero 1,2x10 $^{-5}$ por °C

Coeficiente de dilatación térmica bronce $1,8\text{x}10^{-5}$ por °C

Solución.

Al elevarse la temperatura las varillas deberían expandirse si les fuera permitido, pero al no ser así sufren esfuerzo de compresión, las fuerzas en las dos varillas debe ser la misma. Por lo tanto, la unión debe de desplazarse hasta alcanzar el equi1ibrio.

Entonces los esfuerzos son iguales.

$$\frac{F}{A} = \frac{Y_A \Delta \ell_A}{\ell_A} = \frac{Y_B \Delta \ell_B}{\ell_B} \qquad (1)$$

Pero la longitud $(\Delta \ell_A + \Delta \ell_B)$ es igual a la cantidad que no se deje expandir por dilatación

$$\Delta \ell'_A + \Delta \ell'_B = \ell_A \alpha_A \Delta t + \ell_B \alpha_B \Delta t$$

Luego:

$$\Delta \ell_A + \Delta \ell_B = (\ell_A \alpha_A + \ell_B \alpha_B)\, 40 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos

$$\Delta \ell_A = \frac{(\ell_A \alpha_A + \ell_B \alpha_B)\, 40}{(1 + \frac{\ell_B}{\ell_A}\frac{Y_A}{Y_B})}$$

$$\Delta \ell_B = \frac{(\ell_A \alpha_A + \ell_B \alpha_B)\, 40}{(1 + \frac{\ell_A}{\ell_B}\frac{Y_B}{Y_A})}$$

Reemplazando valores tenemos:

$\Delta \ell_A = 2,1 \text{ x } 10^{-2}$ cm y

$\Delta \ell_B = 2,1 \text{ x } 10^{-2}$ cm.

y el esfuerzo en cada varilla

$$\frac{F}{A} = \frac{Y_A \Delta \ell_A}{\ell_A} = \frac{Y_B \Delta \ell_B}{\ell_B}$$

$$= 10 \text{ x } 10^{11} \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} \text{ x } \frac{2,1 \text{ x } 10^{-2} \text{ cm}}{25 \text{ cm}}$$

$$= 0,84 \text{ x } 10^9 \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$$

Ejemplo 48. En el puente Golden Gate de San Francisco la luz principal tiene una longitud de 1,28 km, uno de los más largos del mundo. Imagínese que un alambre de acero tenso con esta longitud y una sección transversal de 4,00 x 10^{-6} m^2 descansa sobre el puente con sus extremos atados a las torres del puente, en un día de verano cuando la temperatura del alambre es 35,0 ° C.

a) Cuando llega el invierno, las torres permanecen a la misma distancia de separación y el puente de cubierta mantiene la misma forma por sus juntas de expansión. Cuando la temperatura baja a - 10,0 ° C, ¿cuál es la tensión en el alambre? Módulo de Young del acero 20,0 x 10^{10} N/m^2.

b) Se produce una deformación permanente cuando la tensión en el acero supera su límite elástico de 3,00 x 10^8 N/m^2. ¿A qué temperatura sucede esto?

c) ¿Cómo sería su respuesta a (a) y a (b) si el puente Golden Gate tuviera el doble de longitud?

Solución.

El alambre se contrae de acuerdo a

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T$$

y se extiende de acuerdo a

$$S = \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L_i} = \frac{Y}{L_i}\alpha L_i \Delta T = Y\alpha\Delta T$$

a) $F = YA\alpha\Delta T$

$$= \left(20\times10^{10}\right)\left(4\times10^{-6}\right)\left(11\times10^{-6}\right)(45)$$

$= 396$ N

b) $\Delta T = \dfrac{S}{Y\alpha} = \dfrac{3\times10^8}{\left(20\times10^{10}\right)\left(11\times10^{-6}\right)}$

$= 136$ º C

Para aumentar el esfuerzo la temperatura debe disminuir a 35 º C – 136 º C – 101 º C.

c) La longitud original se elimina, luego las respuestas no cambian.

Ejemplo 49. Una barra de bronce se enfría en nitrógeno líquido hasta la temperatura T_1 = 72 K. Así enfriada, esta barra se introduce ajustadamente en la abertura rectangular de una abrazadera rígida, que está a la temperatura T_2 = 293 K, de manera que la holgura entre los extremos de la barra y los planos correspondientes de la abertura de la abrazadera puede considerarse nula. ¿Qué presión ejercerá la barra sobre la abrazadera cuando se caliente hasta la temperatura T_2 = 293 K? El coeficiente de dilatación lineal del bronce es α = 1,75 x10^{-5} K^{-1} y el módulo de Young Y = 1,04 x 10^{11} Pa.

Solución.

Al enfriarse, la barra se contrae. Su longitud se hace igual a $\ell = \ell_0[1 - \alpha(T_2 - T_1)]$, de donde

$\dfrac{(\ell_0 - \ell)}{\ell_0} = \alpha(T_2 - T_1)$, Después de calentar la barra, apretada en la abrazadera, su longitud sigue siendo ℓ, y la compresión $(\ell - \ell_0)$ estará ahora motivada por las fuerzas elásticas.

Escribamos la ley de Hooke: $\dfrac{(\ell_0 - \ell)}{\ell_o} = \dfrac{p}{Y}$,

donde p es la presión que ejerce 1a abrazadera sobre la barra en la dirección del eje de ésta.

Comparando las expresiones de $\frac{(\ell_0 - \ell)}{\ell_o}$

hallamos que 1a presión que buscábamos:

$p = Y\alpha(T_2 - T_1) = 4\times 10^8$ Pa .

Conviene advertir que la presión no depende de la longitud de la barra.

Ejemplo 50. Entre dos paredes se encuentra una barra, de sección A, compuesta de dos partes de igual longitud $\ell/2$ que tienen los coeficientes de dilatación lineal α_1 y α_2 y los módulos de Young Y_1 y Y_2. A 1a temperatura T_1 los extremos de la barra apenas tocan las paredes.

¿Con qué fuerza presionará dicha barra sobre las paredes si se calienta hasta la temperatura T_2. Despréciese la deformación de las paredes.

¿Cuánto se desplazará la junta de las partes de la barra?

Solución.

Cuando la barra se calienta desde la temperatura T_1 hasta la temperatura T_2, sin paredes que la limiten, se alarga en la magnitud

$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)(\alpha_1 + \alpha_2)(T_2 - T_1).$$

Con las paredes limitadoras la barra calentada resulta comprimida en esta misma magnitud. Por la ley de Hooke (la fuerza compresora F es la misma en ambas partos de la barra)

$$\Delta\ell = \frac{\ell_1 F}{Y_1 S} + \frac{\ell_2 F}{Y_2 S} \approx \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2}\right)\frac{F}{A}$$

Esta relación, en términos generales, es aproximada, ya que las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 de !as partes de la barra a la temperatura T_2 las hemos sustituido por su longitud $\ell/2$ a la temperatura T_1. No obstante, se comprende fácilmente que el error relativo que se comete al determinar $\Delta\lambda$ por esta fórmula será del orden do $\Delta\lambda/\lambda$ y, por lo tanto, nuestra aproximación es muy buena $\Delta\lambda <<$ λ) De las relaciones antes escritas hallamos.

$$F = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{(Y_1 + Y_2)} Y_1 Y_2 A(T_2 - T_1).$$

El desplazamiento $\Delta\ell$ de la junta de las partes de la barra se puedo determinar tomando en consideración que éste se compone del desplazamiento debido a la dilatación (por ejemplo, de la primera parte de la barra) y del desplazamiento inverso causado por compresión:

$$\Delta\ell = \frac{\ell}{2}\left[\alpha_1(T_2 - T_1) - \frac{F}{Y_1 A}\right]$$

$$= \frac{\ell}{2}\frac{(\alpha_1 Y_1 - \alpha_2 Y_2)}{(Y_1 + Y_2)}(T_2 - T_1)$$

Ejemplo 51. Un alambre de acero y un alambre de cobre, cada uno de 2,0 mm de diámetro, se unen extremo a extremo. A 40,0 °C, cada uno tiene una longitud sin estirar de 2,0 m y están conectados entre dos soportes fijos, separados 4,0 m sobre una mesa, de modo que el alambre de acero se extiende desde x = - 2,0 m a x = 0,0 m y el alambre de cobre se extiende desde x = 0,0 m a x = 2,0 m. La tensión en los alambres es insignificante. La temperatura se baja a 20,0 °C. Para esta temperatura, encontrar

a) la tensión en los alambres y

b) la coordenada x de la unión entre los alambres.

$Y_{acero} = 2 \times 10^{11}$ N/m^2 y

$\alpha_{acero} = 1,1 \times 10^{-5}$ /º C.

$Y_{cobre} = 1,1 \times 10^{11}$ N/m^2 y

$\alpha_{cobre} = 1,7 \times 10^{-5}$ /º C.

Solución.

En el acero

$Y_{acero} = 2 \times 10^{11}$ N/m^2 y $\alpha_{acero} = 1,1 \times 10^{-7}$ /º C.

Dilatación térmica

a) Cálculo de la tensión en los alambres

Acortamiento por cambio de temperatura

El acero

$$\Delta L'_a = \alpha_a L\Delta\theta$$

El cobre

$$\Delta L'_c = \alpha_c L\Delta\theta$$

Acortamiento total

$$\Delta L' = \Delta L'_a + \Delta L'_c = L(\alpha_a + \alpha_c)\Delta\theta$$

Alargamientos por tensión

El acero

$$\Delta L''_a = \frac{FL(1 - \alpha_a\Delta\theta)}{AY_a} \approx \frac{FL}{AY_a}$$

El cobre

$$\Delta L''_c = \frac{FL(1\alpha_c\Delta\theta)}{AY_c} \approx \frac{FL}{AY_c}$$

Alargamiento total

$$\Delta L'' = \Delta L''_a + \Delta L''_c = \frac{F}{A}L\left(\frac{1}{Y_a} + \frac{1}{Y_c}\right)$$

Nota: No consideramos el longitud total el cambio por dilatación térmica por ser insignificante comparativamente.

La suma de los acortamientos por la baja de la temperatura es igual a la suma de los alargamientos por tensión para mantener la longitud total invariable igual a 2 + 2 = 4 metros.

$$\Delta L' = \Delta L''$$

$$L(\alpha_a + \alpha_a)\Delta\theta = \frac{F}{A}L\left(\frac{1}{Y_a} + \frac{1}{Y_c}\right)$$

$$(\alpha_a + \alpha_a)\Delta\theta = \frac{F}{A}\left(\frac{1}{Y_a} + \frac{L}{Y_c}\right)$$

$$\frac{F}{A} = \frac{(\alpha_a + \alpha_a)\Delta\theta}{\left(\frac{1}{Y_a} + \frac{1}{Y_c}\right)}$$

Reemplazando datos

$$\frac{F}{A} = \frac{(1{,}1 + 1{,}7)\times 10^{-5}(20)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1{,}1}\right)\times 10^{-11}}$$

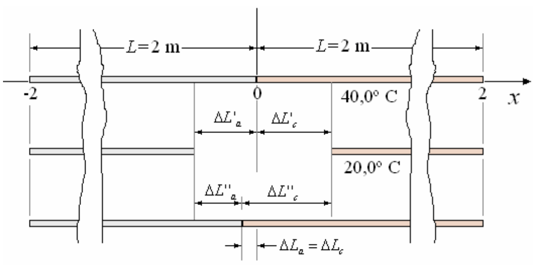
$= 39{,}74 \times 10^6\ \text{N/m}^2$

$$F = 39{,}74\times 10^4 A = 39{,}74\times 10^6\left(\pi 0{,}001^2\right)$$

$= 125$ N

La tensión en los alambres es 125 N.

b)



Cambios en el acero

Por enfriamiento

$$\Delta L'_a = \alpha_a L\Delta\theta = 1{,}1\times 10^{-5}(2)(20-40)$$

$= - 44 \times 10^{-5}$ m

Por tensión

$$\Delta L''_a = \frac{FL}{AY_a} = 39{,}74\times 10^6\left(\frac{2}{2\times 10^{11}}\right)$$

$= 39{,}74 \times 10^{-5}$ m

Cambio en longitud

$$\Delta L_a = \Delta L'_a + \Delta L''_a$$

$= - 44 \times 10^{-5} + 39{,}74 \times 10^{-5}$

$= - 4{,}26 \times 10^{-5}$ m

Ha disminuido $4{,}26 \times 10^{-5}$ m

Cambios en el cobre

Por enfriamiento

$$\Delta L'_c = \alpha_c L\Delta\theta = 1{,}7\times 10^{-5}(2)(20-40)$$

$= - 68 \times 10^{-5}$ m

Por tensión

$$\Delta L''_c = \frac{FL}{AY_c} = 39{,}74\times 10^6\left(\frac{2}{1{,}1\times 10^{11}}\right)$$

$= 72{,}26 \times 10^{-5}$ m

Cambio en longitud

$$\Delta L_c = \Delta L'_c + \Delta L''_c$$

$= - 68 \times 10^{-5} + 72{,}26 \times 10^{-5}$

$= 4{,}26 \times 10^{-5}$ m

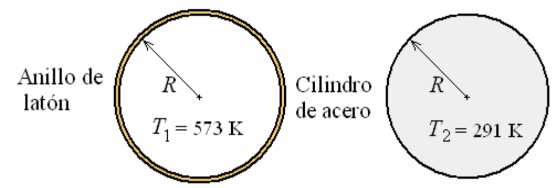
Ha aumentado $4{,}26 \times 10^{-5}$ m

La posición final de la unión es en $x = - 4{,}26 \times 10^{-5}$ m

Ejemplo 52. Un anillo de latón de varios centímetros de diámetro se calienta hasta la temperatura $T_1 = 573$ K y se encaja ajustadamente sobre un cilindro de acero cuya temperatura es $T_2 = 291$ K. ¿Qué esfuerzo experimentará el anillo una vez enfriado hasta 291 K? .

El coeficiente de dilatación lineal del latón *es* $\alpha = 1{,}84 \times 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$ y su módulo de Young $Y = 6{,}47 \times 10^{10}$ Pa.

Las dimensiones de la sección del anillo son 2 x 5 mm^2.



Solución.

Consideraciones previas

Como el grosor del anillo es pequeño en comparación con su diámetro se puede suponer que el alargamiento relativo de todas sus capas es el mismo

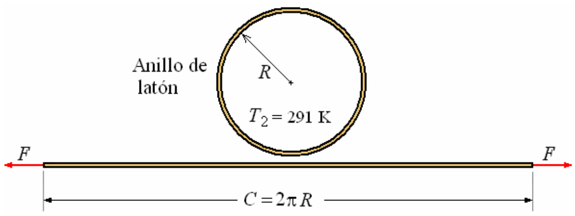
Despreciando la disminución del diámetro del cilindro de acero bajo la acción de los esfuerzos compresoras por parte del anillo,

A la temperatura $T_1 = 573$ K la longitud de la circunferencia del anillo es $C = 2\pi R$.

Al bajarse la temperatura el anillo disminuiría

$$\Delta C = \alpha_{latón} C(T_1 - T_2) \quad (1)$$

Pero no disminuye por estar introducido en el cilindro.



Esta situación produce un esfuerzo que evaluamos por deformación elástica

$$\Delta C = \frac{FC}{Y_{latón} A} \qquad (2)$$

A es la sección del anillo, $A = (2 \times 10^{-3})(5 \times 10^{-3}) = 10^{-5}\ \text{m}^2$

Igualando (1) y (2):

$$\alpha_{latón} C(T_1 - T_2) = \frac{FC}{Y_{latón} A} \Rightarrow$$

$F = \alpha_{latón} Y_{latón} A(T_1 - T_2)$

Reemplazando datos

F = (1,84 x 10^{-6})(6,47 x 10^{10})(10^{-5})(573 – 291)
 = 335,72 N

El esfuerzo experimenta el anillo una vez enfriado es 335,72 N.

Nota. Esta solución no es exacta totalmente debido o sólo a que hemos sustituido la deformación no homogénea del anillo por su alargamiento uniforme, sino también a que las tensiones radiales provocan en el anillo la variación de la longitud de su circunferencia. Cuanto menor sea el espesor del anillo en comparación con su diámetro, tanto menores serán las correcciones a introducir por estas circunstancias.

Ejemplo 53. Un tubo de acero de 28,0 m de longitud, se instaló cuando la temperatura era de 15º C, se usa para transportar vapor sobrecalentado a la temperatura e 110º C. El coeficiente de expansión lineal del acero es 1,2 x 10^{-5} K^{-1}, el módulo de Young es 2,0 x 10^{11} Pa, y el esfuerzo de ruptura es 5,0 x 10^{8} Pa.

a) El tubo puede expandirse libremente cuando transporta vapor. ¿En cuánto incrementa su longitud?

b) A la temperatura de 15º C la tubería se aseguró al piso de concreto tal que se impide la expansión lineal. ¿Cuál es la relación entre el esfuerzo térmico en el tubo y el esfuerzo de ruptura del acero, cuando se transporta el vapor?

Solución.

a)

=1,2 x 10^{-5} K^{-1}, L = 28,0 m

$\Delta\theta = 110 - 15 = 95°C$.

$\Delta L = \alpha L \Delta\theta$

$\Rightarrow \Delta L = (1{,}2 \times 10^{-5})(28)(95)$ = 3,192 x 10^{-2} m

b) $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{F}{YA} = \dfrac{S}{Y}$

$$\Rightarrow S = Y\frac{\Delta L}{L} = Y\left(\frac{\alpha L \Delta\theta}{L}\right) = Y\alpha\Delta\theta$$

Este es el esfuerzo térmico

$S = 2{,}0 \times 10^{11}(1{,}2 \times 10^{-5})(95)$ = 2,28 x 10^{8} Pa

$$\frac{\text{esfuerzo térmico}}{\text{esfuerzo de rúptura}} = \frac{2{,}28 \times 10^{8}}{5{,}0 \times 10^{8}} = 0{,}456$$

Ejemplo 54. Una esfera hueca del metal está flotando en el agua a 0 ºC. Si la temperatura del agua se eleva a θºC, la esfera se sumerge completamente en el agua sin hundirse. Desprecie la expansión de la esfera. Encuentre la expresión para determinar coeficiente de dilatación cúbica del agua.

Solución.

Dados:

ρ_e, la densidad de la esfera,

ρ_0, la densidad del líquido

β, Coeficiente de dilatación cúbica del líquido

$(\rho_\theta)_{agua} = (\rho_e)_{esfera}$

Como $V_{a\theta} = V_{a0}(1 + \beta\theta) \Rightarrow$

$$\frac{m_a}{\rho_\theta} = \frac{m_a}{\rho_0}(1 + \beta\theta) \Rightarrow \frac{1}{\rho_\theta} = \frac{1}{\rho_0}(1 + \beta\theta) \Rightarrow$$

$\rho_\theta = \rho_0(1 - \beta\theta)$

Igualando $\rho_0(1 - \beta\theta) = \rho_e$

Finalmente $\beta = \dfrac{\rho_0 - \rho_e}{\theta\rho_e}$

Ejemplo 55. Un alambre de acero y un alambre de cobre, cada uno de los 2,000 mm de diámetro, se unen extremo a extremo. A 40,0 º C, cada uno tiene una longitud sin estirar de 2,000 m, están conectados entre dos soportes fijos, separados 4,000 m sobre una mesa, de modo que el alambre de acero se extiende desde x = - 2,000 m a x = 0, el alambre de cobre se extiende desde x = 0 a x = 2,000 m, y la tensión es insignificante.

La temperatura se baja a 20,0° C. En esta temperatura, encontrar la tensión en el alambre y la coordenada x de la unión entre los alambres.

Y_{acero} = 20 x 10^{10} N/m^2, α_{acero} = 11 x 10^{-6} / ºC

Y_{cobre} = 11 x 10^{10} N/m^2, α_{cobre} = 17 x 10^{-6} / ºC

Solución.

Las longitudes de los alambres sin estirar a 20 º C son:

$L_{a(20,0\,°C)} = (2{,}000)\left[1 + 11{,}0 \times 10^{-6}(-20)\right]$
 = 1,99956 m

$L_{c(20,0\,°C)} = (2{,}000)\left[1 + 17{,}0 \times 10^{-6}(-20)\right]$
 = 1,99932 m

Bajo una tensión F, las longitudes de los alambres son

$L'_a = L_a\left(1 + \dfrac{F}{Y_a A_a}\right)$, $L'_c = L_c\left(1 + \dfrac{F}{Y_c A_c}\right)$ y su

longitud total $L'_a + L'_c$ = 4,000 m

Con esto obtenemos.

$$L_a\left(1+\frac{F}{Y_aA_a}\right)+L_c\left(1+\frac{F}{Y_cA_c}\right)=L'_a+L'_c$$

$$\Rightarrow \frac{F}{Y_aA_a}+\frac{F}{Y_cA_c}=\left(L'_a+L'_c\right)-\left(L_a+L_c\right)$$

$$\Rightarrow F=\frac{\left(L'_a+L'_c\right)-\left(L_a+L_c\right)}{\dfrac{L_a}{Y_aA_a}+\dfrac{L_c}{Y_cA_c}}$$

Las áreas de los alambres estirados son:

$$A_a=\pi\left(1{,}000\times10^{-3}\right)^2\left[1+11\times10^{-6}(-20)\right]^2$$
$= 3{,}140 \times 10^{-6}$ m^2

$$A_c=\pi\left(1{,}000\times10^{-3}\right)^2\left[1+17\times10^{-6}(-20)\right]^2$$
$= 3{,}139 \times 10^{-6}$ m^2

Reemplazando valores

$Y_{acero} = 20 \times 10^{10}$ N/m^2, $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}$ / ºC

$Y_{cobre} = 11 \times 10^{10}$ N/m^2, $\alpha_{cobre} = 17 \times 10^{-6}$ / º C

$$F=\frac{4{,}000-\left(1{,}99956+1{,}99932\right)}{\dfrac{1{,}99956}{\left(20\times10^{10}\right)\left(3{,}140\times10^{-6}\right)}+\dfrac{1{,}99932}{\left(11\times10^{10}\right)\left(3{,}139\times10^{-6}\right)}}$$
$= 125$ N

Para encontrar la coordenada *x* de la unión,

$$L'_a=\left(1{,}99956\right)\left(1+\frac{125}{\left(20\times10^{10}\right)\left(3{,}140\times10^{-6}\right)}\right)$$
$= 1{,}999958$ m

Luego la coordenada *x* es

$-2{,}000 + 1{,}999958 = -4{,}20 \times 10^{-5}$ m

Ejemplo 56. Una cuerda de guitarra de acero de un 1,00 mm de diámetro, se estira para fijarla entre dos apoyos que distan 80,0 cm. La temperatura es de 0,0° C. Considere los apoyos puntuales y rígidos. Desprecie la variación del área de la sección transversal de la cuerda por cambios de temperatura.

a) ¿Cuál es la masa por unidad de longitud de esta cuerda a 0,0° C? (Considere la densidad del acero 7,86 x kg(m^3)

b) La frecuencia fundamental de las oscilaciones transversales de la cuerda a 0,0º C es de 200 Hz. ¿Cuál es la tensión de la cuerda a esta temperatura?

c) ¿Cuál es la longitud de la cuerda sin estirar a 0,0° C?

d) Si la temperatura se eleva a 30,0 ° C, determinar la tensión en la cuerda y la frecuencia fundamental de las oscilaciones transversales de la cuerda.

Datos: $Y_{acero} = 2{,}0 \times 10^{11}$ N/m^2 y

$\alpha_{acero} = 1{,}1 \times 10^{-7}$ /C.

(Considere que tanto el módulo de Young como el coeficiente de expansión lineal del acero tienen valores constantes entre 0,0º C y 30,0º C)

Solución.

a) $\mu=\dfrac{m}{L}=\dfrac{\rho AL}{L}=\rho A$

$= \left(7{,}86\times10^3\right)\pi\left(5{,}00\times10^{-4}\right)^2$

$= 6{,}17 \times 10^{-3}$ kg/m

b) $f_1=\dfrac{v}{2L}$ y $v=\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

De aquí $f_1=\dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \Rightarrow$

$T=\mu\left(2Lf_1\right)^2$

$= \left(6{,}17\times10^{-3}\right)\left(2\times0{,}800\times200\right)^2$

$= 632$ N

c) Encontremos la longitud natural de la cuerda sin estirar a 0 º C.

$$L_{natural}=L-\Delta L$$
$$=L-\frac{TL}{AY}=L\left(1-\frac{T}{AY}\right)$$

$L = 0{,}80$ m, T = 632 N, $Y_{acero} = 20 \times 10^{10}$ N/m^2,

$A=\pi\left(5{,}00\times10^{-4}\right)^2 = 7{,}854 \times 10^{-7}$ m^2

$$L_{natural}=0{,}800\left(1-\frac{632}{\left(7{,}8\times10^{-7}\right)\left(20{,}0\times10^{10}\right)}\right)$$
$= 0{,}7968$ m.

La longitud sin estirar a 30 º C es

$$L_{30^\circ C}=L_{natural}\left[1-\alpha\left(30{,}0-0{,}0\right)\right]$$
$$=\left(0{,}7968\right)\left[1+\left(11{,}0\times10^{-6}\right)\left(30{,}0\right)\right]$$
$= 0{,}79706$ m.

d) Como la longitud de la cuerda a esa temperatura sigue siendo 0,800 m, estará estirada $0{,}800 - 0{,}79706 = 0{,}00294$ m $= \Delta L_{30^\circ C}$.

$$\Delta L_{30^\circ C}=\frac{T'L_{30^\circ C}}{AY}\Rightarrow T'=\frac{AY\Delta L_{30^\circ C}}{L_{30^\circ C}}$$

T' es la tensión de la cuerda a 30 º C.

Con los valores:

$$T'=\frac{\left(7{,}854\times10^{-7}\right)\left(20{,}0\times10^{10}\right)\left(2{,}94\times10^{-3}\right)}{\left(0{,}79706\right)}$$
$= 579{,}4$ N

Para encontrar la frecuencia f'_1 a 30 º C

$$f_1=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ y } f'_1=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{\mu}}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{\mu}}}{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \sqrt{\frac{T'}{T}} \Rightarrow$$

$$f'_1 = f_1\sqrt{\frac{T'}{T}} = (200)\sqrt{\frac{579,4}{632}}$$

= 192 Hz.

CALOR Y TRABAJO

Cuando dos sistemas a diferente temperatura se hallan en contacto térmico, el calor fluye del sistema mas caliente al más frío, hasta que alcanzan el equilibrio a una temperatura común, la cantidad de calor que sale de un cuerpo es igual a la cantidad de calor que entra en el otro. Inicialmente se elaboró la teoría del calórico, para explicar este flujo, esta sustancia no podía ser creada ni destruida, pero si transferida de un cuerpo a otro. La teoría del calórico servía para describir la transferencia de calor, pero se descartó al observar que el calórico se creaba por fricción y no habría una desaparición correspondiente de ca1órico en ningún otro sitio.

En 1778 el Conde Rumford, como punto de sus observaciones en el taladro de cañones propuso que él calor debe estar asociado con el movimiento. Pero no se estableció sino hasta medio siglo después de esta observación que había una relación definida entre la cantidad de trabajo hecho contra la fricción y el calor producido.

En 1843 James Prescott Joule empleó un aparato en el cual el agua se agitaba por un conjunto de paletas giratorias y la energía mecánica suministrada para rotar las paletas podía medirse con aproximación. El efecto térmico del trabajo mecánico hecho sobre el agua, era la elevación de la temperatura. El experimento de Joule demostró que la elevación de la temperatura era proporcional a la cantidad de trabajo hecho sobre el agua. Por consiguiente el trabajo realizado en agitar el agua es equivalente al calor añadido al agua.

A pesar de que no necesitamos unidades especiales para el calor, una vez reconocido que es una forma de energía medible en Joules, o cualquier otra unidad de energía, se sigue utilizando la unidad histórica del calor, es decir la CALORIA. La caloría se define cuantitativamente como la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua desde 14,5°C a 15,5°C. La cantidad de energía para elevar la temperatura de un kilogramo de agua desde 14,5°C a 15,5°C es la kilocaloría. La “caloría” utilizada para medir el equivalente energético de los alimentos es realmente la kilocaloría. En el sistema ingles la unidad es el British thermal unit (BTU)

1 BTU = 252 calorías

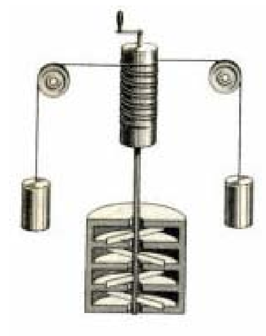
El equivalente exacto entre el trabajo realizado y el calor añadido está dado por la relación experimental.

1 cal = 4,186 Joules

1 BTU = 778 libra pie

Esta relación es conocida como el EQUIVALENTE MECÁNICO DE CALOR

Ejemplo 57. Considere el aparato de Joule. La masa de cada una de los dos bloques es 1,50 kg, y el tanque aislado se llena con 200 g de agua. ¿Cuál es el aumento de la temperatura del agua después de la caída bloques una distancia de 3,00 m?



Solución.

El recipiente está un térmicamente aislado, por lo que no hay flujo de calor:

$Q = 0$ **y** $\Delta E_{int} = Q + W = 0 + 2mgh$

El trabajo sobre los bloques que bajan es igual al trabajo realizado en el agua del recipiente por las hojas rotativas. Este trabajo produce un aumento de la energía interna del agua:

$$2mgh = \Delta E_{int} = m_{agua} c\Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{2mgh}{m_{agua}c}$$

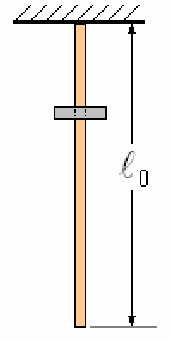
$$= \frac{2\times 1,50(9,80)(3,00)}{0,200(4186)} = \frac{88,2}{837}$$

= 0,105 ºC

Ejemplo 58. Problema de elasticidad y calor.

A lo largo de una barra de jebe de masa despreciable, de longitud ℓ_0, se desliza una arandela de hierro de masa *m*. La fuerza de fricción que actúa entre el cordón y la arandela, es constante e igual a F_f. El constante de elasticidad del cordón es igual a *k*. a) Encontrar

la cantidad de calor Q que se desprende en este caso.
b) Encontrar la cantidad la velocidad de la arandela al momento de abandonar la arandela.

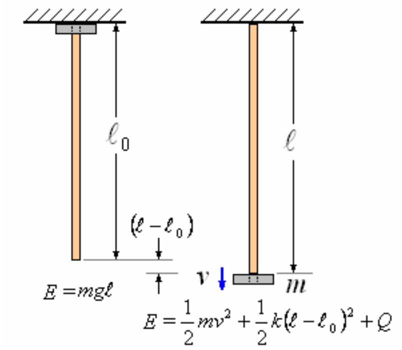


Solución.
a) El trabajo realizado por las fuerzas de fricción que actúan entre el cordón y la arandela, son constantes e igual a F_f, tenemos:

$W_{F_f} = F_f \ell$, este trabajo se disipa en forma de calor

$Q = W_{F_f} = F_f \ell$

b) La figura muestra la arandela en el momento en que se la suelta la arandela y el momento en el que la arandela deja a la barra de jebe.



Por el principio de conservación de la energía podemos escribir

$E_{inicial} = E_{final}$

$$mg\ell = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + W_{F_f}$$

m es la masa de la arandela
ℓ la longitud de la barra de jebe en el momento en que la arandela abandona la barra.
v la velocidad de la arandela en el momento en que abandona la barra.

$W_{F_f} = F_f \ell$

De aquí

$$mg\ell = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + F_{F_f}\ell$$

Despejando v:

$$v = \sqrt{2g\ell - \frac{k}{m}(\ell - \ell_0)^2 - \frac{2F_{F_f}\ell}{m}}$$

CAPACIDAD CALORÍFICA. CALOR ESPECÍFICO
La cantidad de calor necesario para producir un aumento de temperatura en una cierta masa depende de la sustancia. Definamos primero:
La CAPACIDAD CALORIFICA. (C) de un cuerpo es la cantidad de calor requerido para elevar la temperatura de un cuerpo en un grado,

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

Sus unidades son: Caloría/°C, BTU/°F.
Luego, definamos:
El CALOR ESPECIFICO (c) es la capacidad calorífica por unidad de masa:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{dQ/dT}{m} = \frac{dQ}{mdt}$$

Sus unidades son cal/gr x °C ó BTU/libra x °F

Observe que: $1\ \frac{\text{kcal}}{\text{kg°C}} = 1\frac{\text{cal}}{\text{g°C}}$

Y que:

$$\frac{1\ \text{BTU}}{1\ \text{libra°F}} = \frac{250\ \text{cal}}{453{,}6\ \text{g}\ \ 5/9\text{°C}} = 1\frac{\text{cal}}{\text{g°C}} = 1\frac{\text{kcal}}{\text{kg°C}}$$

O sea que el valor numérico del calor específico es el mismo en esas tres unidades.

A pesar que el calor específico de la sustancias varía ligeramente con la temperatura, será adecuado para nuestra discusión, asumir que el calor específico es constante independiente de la temperatura. Luego podemos determinara el calor Q necesario para elevar la temperatura de la masa m de una sustancia Δt grados, de la siguiente manera:

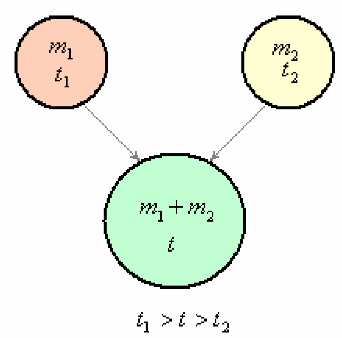
$$Q = m\int_{T_i}^{T_f} cdt = mc(T_f - T_i)mc\Delta T$$

CALOR ESPECÍFICO			
Aluminio	0,212	Hielo	0,48
Acero	0,11	Carbón	0,3
Bronce	0,090	Concreto	0.16
Cobre	0,094	Vidrio	0,12 - 0,20
Oro	0,031	Parafina	0,69
Plata	0,056	Caucho	0,48
Platino	0,032	Madera	0,3 – 0,7
Plomo	0,031	Agua	1,00
Tungsteno	0,032	Alcohol	0,6
Zinc	0,094	Petróleo	0,51
		Agua de mar	0,93

La capacidad calorífica depende del tipo de proceso que se realiza durante la transferencia de calor. Tiene valores definidos solamente para procesos definidos.

En particular manteniendo la presión constante se denomina capacidad calorífica a presión constante *Cp* y si se mantiene el volumen constante se denomina capacidad calorífica a volumen constante *Cv*. En general *Cp* y *Cv* son diferentes y se analizarán con algún detalle más adelante.

Ejemplo 59. Dos sustancias m_1 y m_2 de calores específicos c_1 y c_2 están a temperatura t_1 y t_2 respectivamente ($t_1 > t_2$).
Calcular la temperatura final que alcanzan al ponerlos en contacto, sabiendo que no se presentan cambios de estado.
Solución.



Por conservación de energía:

$$\sum Q = 0$$

Como: $Q = mc\,(t_f - t_f)$

Se tiene:

$$m_1 c_1 (t - t_1) = m_2 c_2 (t - t_2)$$

o bien

$$-m_1 c_1 (t - t_1) + m_2 c_2 (t - t_2) = 0$$

o sea: Calor perdido = calor ganado

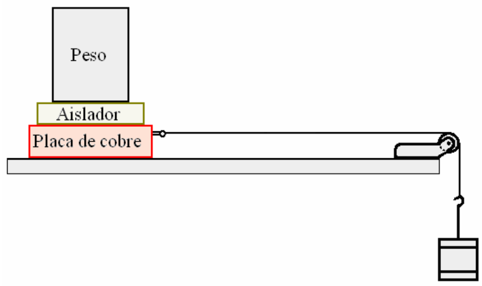
$$m_1 c_1 t_1 - m_1 c_1 t = m_2 c_2 t - m_2 c_2 t_2$$

$$m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 = (m_1 c_1 + m_2 c_2) t$$

Despejando el valor de la temperatura final t:

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

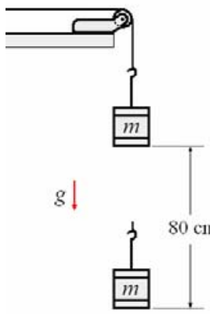
Ejemplo 60. Una placa de cobre con una masa de 30 g se jala a través de una superficie de acero a una velocidad constante de 5 cm/s por medio de una polea y un peso que cae, como se ilustra en la figura. Un bloque pesado está colocado en la parte superior de la placa de cobre. Un aislante de alta calidad entre la placa de cobre y el peso para evitar que el calor deje la superficie superior. La fuerza normal que presiona la pieza de cobre contra la superficie de acero es de 90 N. El coeficiente de fricción cinética entre la placa de cobre y la superficie de acero es 0,4.
Suponiendo que el 50% del calor generado por la fricción entre las dos superficies es absorbido por la pieza de cobre, ¿calcule el aumento de la temperatura del cobre si se jala una distancia horizontal de 80 cm.



Solución.
Primero calculemos la fuerza de fricción.

$$F_f = \mu_k N$$

Siendo $\mu_k = 0{,}4$ y $N = 90$ N, obtenemos:
$F_f = 0{,}4\ (90\ \text{N}) = 36\ \text{N}$
Calculemos el trabajo realizado por el peso cayendo.
Como la placa se mueve a velocidad constante la masa colgante debe pesar igual a la fuerza de fricción cinética.
$Mg = F_f = 36\ \text{N}$
Cuando la placa de cobre recorre 80 cm, el peso colgante baja la misma distancia.



El trabajo realizado por el peso cayendo es igual a la energía potencial perdida por la masa colgante es:

$$E_P = mgh = (36\ \text{N})(0{,}80\ \text{m}) = 28{,}8\ \text{J}$$

Calculemos el calor añadido a la placa de cobre

$$Q = 0{,}5 P_E = (0{,}5)(28{,}8\ \text{J}) = 14{,}4\ \text{J}$$

En calorías

$$(14{,}4\ \text{J})\left(\frac{1\ \text{cal}}{4{,}184\ \text{J}}\right) = 3{,}44\ \text{cal}$$

Para calcular el incremento de temperatura, tenemos

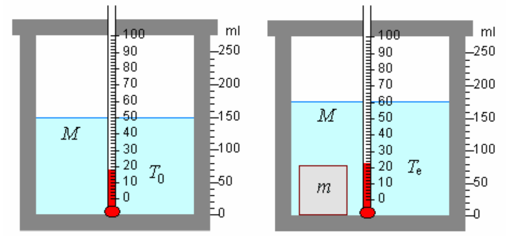
$$Q = mc\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{mc}$$

Reemplazando valores

$$\Delta T = \frac{3{,}44 \text{ cal}}{(30 \text{ g})\left(0{,}093 \dfrac{\text{cal}}{\text{g °C}}\right)} = 1{,}23^\circ \text{ C}$$

Determinación del calor específico de un sólido

La experiencia se realiza en un calorímetro consistente en un vaso (Dewar) o en su defecto convenientemente aislado. El vaso se cierra con una tapa hecha de material aislante, con dos orificios por los que salen un termómetro y el agitador.



Se pesa una pieza de material sólido de calor específico c desconocido, resultando m su masa. Se pone la pieza en agua casi hirviendo a la temperatura T.

Se ponen M gramos de agua en el calorímetro, se agita, y después de un poco de tiempo, se mide su temperatura T_0. A continuación, se deposita la pieza de sólido rápidamente en el calorímetro. Se agita, y después de un cierto tiempo se alcanza la temperatura de equilibrio T_e.

m_c es la masa del vaso del calorímetro y c_c su calor específico.

m_t la masa de la parte sumergida del termómetro y c_t su calor específico

m_a la masa de la parte sumergida del agitador y c_a su calor específico

M la masa de agua que contiene el vaso, su calor específico es la unidad

Por otra parte:

Sean m y c las masa y el calor específico del cuerpo problema a la temperatura inicial T.

En el equilibrio a la temperatura T_e se tendrá la siguiente relación.

$$(M + k)(T_e - T_0) + mc(T_e - T) = 0$$

La capacidad del calorímetro dada por $k = m_c c_c + m_t c_t + m_a c_a$, se le denomina equivalente en agua del calorímetro, y se expresa en gramos de agua, y es una constante para cada calorímetro.

El calor específico desconocido del será por tanto

$$c = \frac{(M + k)(T_e - T_0)}{m(T - T_e)}$$

En esta fórmula tenemos una cantidad desconocida k, que debemos determinar experimentalmente.

Determinación del equivalente en agua del calorímetro

Se ponen M gramos de agua en el calorímetro, se agita, y después de un poco de tiempo, se mide su temperatura T_0. A continuación se vierten m gramos de agua a la temperatura T. Se agita la mezcla y después de un poco de tiempo, se mide la temperatura de equilibrio T_e.

Como el calorímetro es un sistema aislado tendremos que

$$(M + k)(T_e - T_0) + m(T_e - T)$$

$$\Rightarrow k = \frac{(T - T_e)}{(T_e - T_0)} m - M$$

Ejemplo 61. Calcule el calor específico de un metal con los siguientes datos. Un recipiente (calorímetro) hecho de metal cuya masa es 3,64 kg contiene 13,6 kg de agua. Un pedazo de metal de 1,82 kg de masa, del mismo material del recipiente y con temperatura de 176,7 ºC se echa en el agua. El agua y el recipiente tienen inicialmente una temperatura de 15,5 ºC y la temperatura final de todo el sistema llega a ser de 18,33 ºC.

Solución.

Debido a que se trata de un problema de intercambio de calor, el calor entregado por el metal = calor recibido por el (agua y recipiente).

Llamando Q_1 al calor liberado por el metal, Q_2, Q_3 a los recibidos por el agua y recipiente respectivamente:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.$$

Considerando que el metal y recipiente tienen un calor específico c_m, reemplazando en la expresión anterior:

$$Q_1 = m_{metal} c_m (T_{final} - T_{metal}),$$

$$Q_2 = m_{agua} c_{agua} (T_{final} - T_{agua}) \text{ y}$$

$$Q_3 = m_{recipiente} c_m (T_{final} - T_{recipiente})$$

$$m_m c_m (T_f - T_m) + m_a c_a (T_f - T_a) + m_r c_m (T_f - T_r) = 0,$$

Es decir:

$$c_m = \frac{-m_a c_a (T_f - T_a)}{m_m (T_f - T_m) + m_r (T_f - T_r)}$$

$$= 1{,}38 \times 10^{-2} \left[\frac{\text{cal}}{\text{g °C}}\right].$$

Ejemplo 62. ¿Cuántas calorías se requieren para elevar la temperatura de 3 kg de aluminio de 20ºC a 50ºC?
Solución.
Tomemos como calor específico del aluminio
c = 0,215 cal/g ºC, entonces
$Q = mc\Delta t$ = 3000 x 0,215 x (50 - 20)
= 1,935 x 10^4 cal

Ejemplo 63. Un trozo de 300 g de cobre se calienta en un horno y en seguida se deja caer en un calorímetro de 500 g de aluminio que contiene 300 g de agua. Si la temperatura del agua se eleva de 15ºC a 30ºC ¿cuál era la temperatura inicial del cobre? (Suponga que no se pierde calor.) ¿Cuánto calor se debe agregar a 20 g de aluminio a 20ºC para fundirlo completamente?
Solución.
c_{Al} = 0,215 cal/g.ºC
c_{H2O} = 1 cal/g.ºC
c_{Cu} = 0,0924 cal/g.ºC
$Q_{\text{absorbido}}$ = 300 x 1 x (30 - 15) + 500 x 0,215 x (30 - 15)
Q_{cedido} = 300 x 0,0924 x (t_i - 30)
Entonces
300 x 1 x (30 - 15) + 500 x 0,215 x (30 - 15) = 300 x 0,0924 x (t_i - 30), de donde la temperatura inicial del Cobre resulta ser t_i = 250,51 ºC.
Para saber las calorías necesarias para fundir 20 gramos de aluminio a 20 ºC, de las tablas obtenemos para el calor de fusión:
$L_{f(Al)} = 3{,}97\text{x}10^5$ J/kg a t = 660 ºC, de modo que el calor necesario será
Como 1 J = 0,24 cal de modo que
$L_{f(Al)}$ = 3,97 x 102 x 0,24 = 95,28 cal/g
Entonces $Q = mc\Delta t + mL_f$
Q = 20 x 0,215(660 - 20) + 20 x 95,28
= 4657,6 cal

Ejemplo 64. Una moneda de cobre de masa 3,00 g a 25,0º C cae atierra.
a) Asumiendo que el 60,0 % del cambio de energía potencial del sistema moneda tierra incrementa la energía interna de la moneda, determine la temperatura final?
b) ¿El resultado depende de la masa de almoneda? Explique.
Solución.
a) El 60,0 % del cambio de energía potencial del sistema moneda tierra incrementa la energía interna de la moneda

$$\Delta U = f(mgh),\quad \Delta Q = mc_{Cu}\Delta T$$

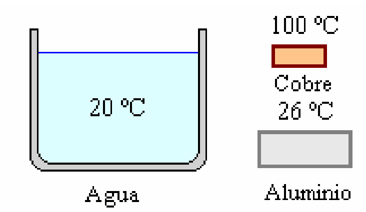
$$\Delta U = \Delta Q$$

$$c_{Cu} = 0{,}0924\frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}\times\frac{4{,}186\ \text{J}}{\text{cal}}\times\frac{1000\,\text{g}}{\text{kg}} = 386{,}79\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$$

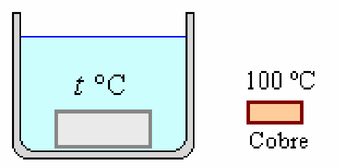
$$\Delta T = \frac{f(mgh)}{mc_{Cu}} = \frac{fgh}{c_{Cu}} = \frac{(0{,}6)(9{,}8)(50{,}0)}{386{,}79} = 0{,}760^\circ\ \text{C}$$

La temperatura final de la moneda es 25 + 0,76 = 25,76º C
b) No. Tanto la energía potencial como el calor absorbido son proporcionales a la masa; luego la masa se cancela en la relación de la energía.

Ejemplo 65. Una combinación de 0,250 kg de agua a 20,0° C, 0,400 kg de aluminio a 26,0° C, y 0,100 kg de cobre a 100° C se mezcla en un recipiente aislado y se deja llegar a un equilibrio térmico. Ignore cualquier transferencia de energía hacia o desde el contenedor y determine la temperatura final de la mezcla.
Datos del agua:
L_f = 3,33 x 105 J/kg,
c_{H_2O} = 4186 J/kg º C,
L_e = 2,26 x 10^6 J/kg
c_{Al} = 900 J/kg ºC,
c_{Cu} = 387 J/kg ºC,
Solución.



Como la temperatura final puede ser mayor o menor que la del aluminio, eso depende del la cantidad de calor que hay en jugo. Para evitar tanteos, comencemos por buscar el equilibrio térmico del agua y el aluminio y luego pongamos cobre.
Agua y aluminio alcanzan el equilibrio térmico a la temperatura t.



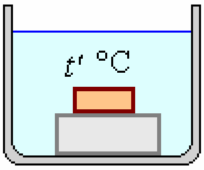
$$m_{H_2O}c_{H_2O}(t-20) = m_{Al}c_{Al}(26{,}0-t)$$

$$(0{,}250)(4186)(t-20) = (0{,}400)(900)(26{,}0-t) \Rightarrow$$

$$1046{,}5(t-20) = 360(26{,}0-t)$$

$$2{,}9(t-20) = (26{,}0-t)\ \Rightarrow$$

$t = 21,54$ º C
Ahora colocamos el cobre y alcanzan el equilibrio térmico a la temperatura t'.



$$m_{H_2O}c_{H_2O}(t'-21,54) + m_{Al}c_{Al}(t'-21,54) = m_{Cu}c_{Cu}(100-t') \Rightarrow$$

$$[(0,250)(4186) + (0,400)(900)](t'-21,54) = (0,100)(387)(100-t') \Rightarrow$$

$$36,34(t'-21,54) = (100-t') \Rightarrow$$

$t' = 23,64$ º C.

Ejemplo 66. Para medir el calor específico de un líquido se emplea un calorímetro de flujo. Se añade calor en una cantidad conocida a una corriente del líquido que pasa por el calorímetro con un volumen conocido. Entonces, una medición de la diferencia de temperatura resultante entre los puntos de entrada y salida de la corriente de líquido nos permite calcular el calor específico del líquido. Un líquido de 0,85 g/cm^3 de densidad fluye a través de un calorímetro a razón de 8,2 cm^3/s. Se añade calor por medio de un calentador eléctrico en espiral de 250 W, y se establece una diferencia de temperatura de 15^{o}C en condiciones de estado estacionario entre los puntos de entrada y salida del flujo. Halle el calor específico (c) del líquido.

Solución.

El flujo de calor $\dot{Q} = 250\text{W}$ que se pone produce una elevación de temperatura ΔT = 15^{o}C.

El calor absorbido por una masa m es

$Q = mc\Delta T$,

Como es masa que fluye y la entrada de calor es estacionariamente

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \frac{dm}{dt}c\Delta T .$$

De aquí

$$c = \frac{\dot{Q}}{\Delta T\frac{dm}{dt}}, \text{ como } m = \rho V ,$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = 0,85 \times 8,2 = 6,97\frac{\text{g}}{\text{s}}$$

Reemplazando valores, tenemos:

$$c = \frac{250}{15^o C \times 6,97 \times 10^{-3}} = 2391\frac{\text{J}}{\text{kg}^o\text{C}}$$

FASES DE LA MATERIA

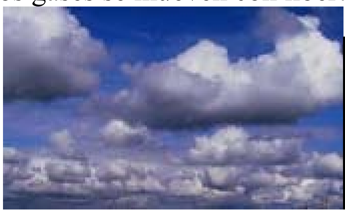
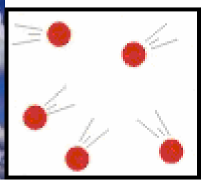
Otro de los efectos comunes de los cambios de temperatura son los cambios de estado de los materiales (sólido, líquido, gaseoso, plasma y CBE).

SÓLIDO. Manteniendo constante la presión, a baja temperatura los cuerpos se presentan en forma sólida tal que los átomos se encuentran entrelazados formando generalmente estructuras cristalinas, lo que confiere al cuerpo la capacidad de soportar fuerzas sin deformación aparente. Son, por tanto, agregados generalmente rígidos, duros y resistentes. El estado sólido presenta las siguientes características:
Fuerza de cohesión (atracción).
Vibración.
Tiene forma propia.
Los sólidos no se pueden comprimir.
Resistentes a fragmentarse.
Volumen definido.
Puede ser orgánico o inorgánico

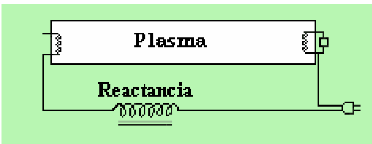
LÍQUIDO. Incrementando la temperatura el sólido se va "descomponiendo" hasta desaparecer la estructura cristalina alcanzándose el estado líquido, cuya característica principal es la capacidad de fluir y adaptarse a la forma del recipiente que lo contiene. En este caso, aún existe una cierta ligazón entre los átomos del cuerpo, aunque de mucha menor intensidad que en el caso de los sólidos. El estado líquido presenta las siguientes características:
Fuerza de cohesión menor (regular)
Movimiento-energía cinética.
Sin forma definida.
Toma el volumen del envase que lo contiene.
En frío se comprime.
Posee fluidez.
Puede presentar fenómeno de difusión.

GASEOSO. Por último, incrementando aún más la temperatura se alcanza el estado gaseoso. Los

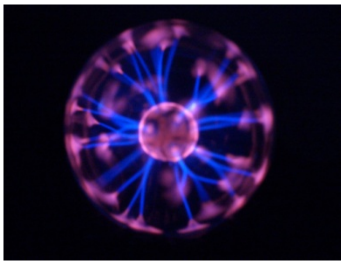
átomos o moléculas del gas se encuentran virtualmente libres de modo que son capaces de ocupar todo el espacio del recipiente que lo contiene, aunque con mayor propiedad debería decirse que se distribuye o reparte por todo el espacio disponible. El estado gaseoso presenta las siguientes características:
Fuerza de cohesión casi nula.
Sin forma definida.
Sin volumen definido.
Se puede comprimir fácilmente.
Ejerce presión sobre las paredes del recipiente que los contiene.
Los gases se mueven con libertad.

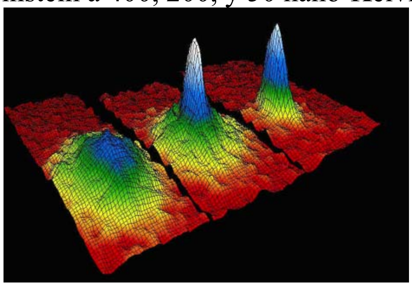
PLASMA. Al plasma se le llama a veces "el cuarto estado de la materia", además de los tres "clásicos", sólido, líquido y gas. Es un gas en el que los átomos se han roto, que está formado por electrones negativos y por iones positivos, átomos que han perdido electrones y han quedado con una carga eléctrica positiva y que están moviéndose libremente.
La lámpara fluorescente, muy usada en el hogar y en el trabajo, contiene plasma (su componente principal es el vapor de mercurio) que calienta y agita la electricidad, mediante la línea de fuerza a la que está conectada la lámpara.



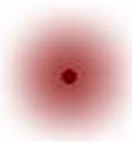
La línea hace positivo eléctricamente a un extremo y el otro negativo causa que los iones (+) se aceleren hacia el extremo (-), y que los electrones (-) vayan hacia el extremo (+). Las partículas aceleradas ganan energía, colisionan con los átomos, expulsan electrones adicionales y así mantienen el plasma, incluso aunque se recombinen partículas. Las colisiones también hacen que los átomos emitan luz y, de hecho, esta forma de luz es más eficiente que las lámparas tradicionales. Los letreros de neón y las luces urbanas funcionan por un principio similar y también se usan (o usaron) en electrónica.
La lámpara de plasma (también llamada "globo de plasma" o "esfera de plasma") es un objeto novedoso, que alcanzó su popularidad en los años 1980. Fue inventada por Nikola Tesla tras su experimentación con corrientes de alta frecuencia en un tubo de cristal vacío con el propósito de investigar el fenómeno del alto voltaje.



CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN (CBE). Otro estado de la materia es el condensado de Bose-Einstein (CBE), predicho en 1924 por Satyendra Nath Bose y Albert Einstein, y obtenido en 1995 (los físicos Eric A. Cornell, Carl E. Wieman y Wolfgang Ketterle compartieron el Premio Nobel de Física de 2001 por este hecho). Este estado se consigue a temperaturas cercanas al cero absoluto y se caracteriza porque los átomos se encuentran todos en el mismo lugar, formando un superátomo.
La figura siguiente muestra la Condensación de Bose-Einstein a 400, 200, y 50 nano-Kelvins



El Condensado de Bose-Einstein se ve como una pequeña masa en el fondo de una trampa magnética. Esta masa de condensado es como una gota de agua que se condensa del aire cuando éste es enfriado. Cuando se forma inicialmente, el condensado está rodeado todavía de átomos normales de gas, así que parece la semilla dentro de una cereza.



¿Para qué sirve la Condensación de Bose-Einstein?
Es muy reciente y sabemos muy poco a cerca de ella para dar una respuesta. Es algo así como si viviéramos en una isla tropical hace 400 años y un pedazo de iceberg llegara a la costa. Sin que nadie hubiera visto hielo antes, pasaría algún

tiempo antes de que alguien se diera cuenta de que puede usarse para hacer helados.

También hay ciertos problemas de ingeniería que deben ser resueltos antes de que la CBE pueda usarse para mucho.
Sin embargo las similitudes entre CBE y la luz de láser sugieren que probablemente lo sea.

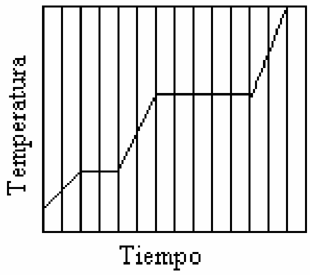
CAMBIOS DE ESTADO - CALOR LATENTE

Cuando la temperatura de un cuerpo aumenta por causa de un calor suministrado, se origina un aumento de la energía cinética del movimiento de las moléculas. Cuando un material pasa de la forma líquida a la fase gaseosa, las moléculas, que, por causa de sus atracciones naturales se mantenían originalmente en contacto, se alejan más de las otras. Esto requiere se realice un trabajo en contra de las fuerzas de atracción, es decir hace falta que se suministre una energía a las moléculas para separarlas. De este modelo podemos deducir que un cambio de fase de líquido a gas requiere calor aún cuando no se produzca elevación de la temperatura, lo mismo sucede para sólido a líquido.
Para sustancias puras", los cambios de fase se producen a cualquier presión, pero a determinadas temperaturas. Se requiere una determinada cantidad de calor para cambios de fase de una cantidad de sustancia dada.
Esto es, el calor es proporcional a la masa de la sustancia.
$Q = mL$
Donde L es una constante característica de la sustancia y de cambio de fase que se produce.
Si el cambio es de sólido a líquido, será L_f (calor latente de fusión) y si el cambio el de líquido a gas, será L_v (calor latente de vaporización).

En el caso del agua a presión atmosférica la fusión se produce a 0°C y L_f vale 79,7 cal/gr. Y la vaporización se produce a 100°C y L_v vale 539.2 cal/gr.
Similarmente ocurre para los procesos inversos de solidificación y condensación.

Sublimación.
También bajo ciertas condiciones de temperatura y presión se puede pasar directamente de sólido a gas son pasar por líquido y se denomina sublimación, L_s (calor de sublimación).

Ejemplo 67. Se añade calor a una sustancia pura en un recipiente cerrado a una razón constante. El gráfico muestra la temperatura de la sustancia como una función del tiempo. Si L_f es el calor latente de fusión y L_v es el calor latente de vaporización. ¿Cuál es el valor de la relación L_v/L_f para esta sustancia?



Solución.
La relación de los tiempos empleados en absorber calor para la vaporización y la fusión es 5/2, como se trata de la misma masa en ambos casos, esta relación será igual a la relación de los calores latentes; esto es: $\dfrac{L_V}{L_F} = \dfrac{5}{2}$

Ejemplo 68. Determinar el calor necesario para vaporizar 200 gr. De hielo que se encuentra a la temperatura de –5°C.
Solución.
Como ocurren cambios de estado debemos calcular las calorías requeridas en cada proceso.
Utilicemos los siguientes valores:
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g°C
Calor específico del agua: 1 cal/g°C
Calor de fusión del agua: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g

Calor para elevar la temperatura del hielo de –5°C a 0°C
$Q_1 = m \text{ x } c \text{ x} \Delta t = m \text{ x } 0{,}5 \text{ x } [0 - (-5)]$
$= m \text{ x } 2{,}5$ cal

Calor para pasar de hielo a agua (fusión)

$Q_2 = m \text{ x } L = \ m \text{ x } 80$ cal

Calor para elevar la temperatura del Agua de 0°C a 100°C
$Q_3 = m \text{ x } c \text{ x} \Delta t \ = \ m \text{ x } 1 \text{ x } (100\text{-}0)$
$= \ m \text{ x } 100$ cal

Calor para pasar de Agua a Vapor (vaporización)
$Q_4 = m \text{ x } 540$ cal

Finalmente,
$Q = \sum Q \ = \ Q_2 + Q_2 + Q_3 + Q_4$
$= m(2{,}5+80+100+540) = 200 \text{ x}722{,}5$
$= 144500$ cal.

Ejemplo 69. Calcular la temperatura final cuando se mezclan 2 kg. de hielo a -20°C con 10 kg. de agua a 60°C.
Solución.
Como ocurren cambios de estados es preciso primero, hacer un balance de energía para determinar si el agua se convierte en hielo o el hielo en agua, u ocurre una conversión parcial.
Trabajemos en Kilocalorías utilizando los siguientes valores:
Calor específico del hielo : 0,55 kcal/kg °C
Calor específico del agua : 1 kcal/kg °C
Calor de fusión del agua : 80 kcal/kg

Calor necesario para convertir el hielo en agua a 0 °C.
$Q_1 \ = \ m_H \ \text{ x } c_H \text{x} \Delta t \ = \ 2 \text{ x } 20 \ = \ 22$ kcal
$Q_2 \ = \ m_{\text{H}} \ \text{ x } \ L \qquad = \ 2 \text{ x } 80 \ = \ 160$ kcal
$Q_H \ = \ \sum Q = Q_1 + Q_2 = \ 182$ kcal (1)

Calor liberado al llevar el agua de 60°C a 0ºC.
$Q_1' \ = \ m_a \text{x} \ c_H \Delta \text{t} \ = \ 10 \text{ x } 1 \text{ x } 60 \ = \ 600$ kcal
$Q_a \ = \ \sum Q' = Q'_1 = \ 600$ kcal (2)

Comparando (1) y (2), como $Q_{\text{a}} > Q_{\text{H}}$, nos indica que el agua dispone de las calorías necesarias para convertir todo el hielo en agua y más aún elevar su temperatura a más de 0°C. Esto es, la temperatura final t estará entre, $0°\text{C} < t < 60°\text{C}$ y se determinará igualando el calor ganado al calor perdido.

Calor ganado
$Q_1 = 22$ (valor ya determinado)
$Q_2 = 160$ (valor ya determinado)
$Q_3 \ = m \ c \Delta \ t = 2 \text{ x } 1 \text{ x } (t\text{-}0) = 2t$
$Q_G \ = \ Q_1 + Q_2 + Q_3$
$= \ 22 + 160 + 2t \ = \ 182 + 2t$ (3)

Calor perdido
$Q_P = m \ c \Delta \ t$
$= 10 \text{ x } 1\text{x } (60\text{-}t) \ = \ 10(60 \text{ - } t)$ (4)

Finalmente, igualando (3) y (4)
$Q_G = Q_P$
$182 + \ 2t \ = \ 10(60 \text{ - } t)$
Despejando t, se obtiene la temperatura final de la mezcla (agua)
$T \ = \ 34{,}8°\text{C}$

Ejemplo 70. Determinar la temperatura final cuando se mezclan 1/2 kg de hielo a -16°C con 1 kg de agua a 20°C que se encuentra contenida en un recipiente o calorímetro de cobre de 1/2 kg.
Solución.
Como en el ejemplo anterior es necesario hacer un balance de energía.
Nuevamente trabajando en kilocalorías y con Calor específico del cobre = 0,09 kcal/kg °C

Calor necesario para convertir el Hielo en Agua a 0 °C.
$Q_1 \ = m_H \text{ x } c_H \ \text{ x } \ \Delta \ t \ = \ 0{,}55 \text{ x } 16 \ = \ 4{,}4$ kcal
$Q_2 \ = m_H \text{ x } L \ = \ 0{,}5 \text{ x } 80 \ = 40{,}0$ kcal
$Q_{\text{H}} \ = \ \sum \ Q \ = \ Q_1 + \ Q_2 \ = 44{,}4$ kcal (1)
Calor liberado para llevar el Agua de 0ºC a 20 °C (incluyendo el recipiente)
$Q'_1 \ = m_a \text{ x } c_a \text{ x } \ \Delta \ t \ = \ 1 \text{ x } 1 \text{ x } 20 \ = \ 20{,}0$ kcal
$Q'_2 \ = m_{\text{c}} \text{ x } c_{\text{c}} \text{ x } \ \Delta \ t \ = \ 0{,}5 \text{ x } 0{,}09 \text{ x } 20 = 0{,}9$ kcal
$Q_{ac} = \sum \ Q' \ = \ Q'_1 \ + \ Q'_2 \ = 20{,}9$ kcal (2)
Comparando (1) y (2), como $Q_{\text{ac}} < \text{Q}_{\text{H}}$, nos indica que no se dispone de las calorías necesarias para convertir el hielo en agua a °C. Pero, como $Q_{\text{ac}} > Q_1$ si se elevara la temperatura del hielo a 0°C y solo parte del hielo se podrá convertir en agua.
Luego, la temperatura final es 0°C, $t \ = \ 0°\text{C}$
¿Cuáles serán las masas finales de hielo y Agua?
La energía que resta después de elevar la temperatura del hielo a 0°C es:
$Q_{ac} \text{ - } \ Q_1 \ = \ 20{,}9 – 4{,}4 \ = 16{,}5$ kcal.
Con estas calorías se convertirá en agua:
$Q \ = \ M \text{ x } L$
$\Rightarrow 16{,}5 = \ M \text{ x } 80 \Rightarrow M \ = \ 0{,}21$ Kg.
y se quedarán como hielo a 0°C:
$(0{,}50 – 0{,}21) = 0{,}29$ kg.
Por lo tanto, se tendrá finalmente,
1,21 kg de Agua y 0,29 kg de Hielo
Por supuesto todo a 0°C, incluyendo el calorímetro.

Ejemplo 71. Un trozo de hielo de 10 g y temperatura –10 ºC se introducen en 1,5 kg de agua a 75 ºC. Determine la temperatura final de la mezcla. $c_{hielo} = 0{,}45\,\text{cal/g}^\circ\text{C}$,

$L_{fusión,\,hielo} = 80\,\text{cal/g}$

Solución.

El calor cedido por el agua es igual al ganado por el hielo. El hielo gana una porción calor desde la temperatura –10 ºC hasta 0 ºC, otra para cambiar de estado manteniendo la temperatura constante de 0 ºC y otra cuando se ha convertido en agua al cambiar la temperatura de 0 ºC hasta la temperatura de equilibrio T_e. De este modo:

$$m_h c_h[0-(-10)] + m_h L_f$$
$$+ m_h c_a (T_e - 0) + m_a c_a (T_e - 75) = 0.$$

Despejando T_e encontramos:

$T_e = 73{,}94^\circ C$

Ejemplo 72. Un recipiente de cobre de masa 0.5 kg contiene 1 kg de agua a 20°**C** se le añade 0,5 kg de hielo a –16°C

a) encontrar la temperatura de equilibrio

b) Cuanto hielo y cuanta agua quedan.

$$c_{cobre} = 390\frac{\text{J}}{\text{kg K}},\ c_{agua} = 4190\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$c_{hielo} = 2100\frac{\text{J}}{\text{kg K}},\ L_{fusión\ hielo} = 334x10^3\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Solución.

Calor cedido por el agua y el calorímetro al llevarlo de 20ºC a 0ºC

$$Q_1 = (m_c c_c + m_a c_a)\Delta\theta$$
$$= (0{,}5\times 390 + 1{,}0\times 4190)20 = 87700\ \text{J}$$

Calor para llevar el hielo -18ªC a 0ºC

$Q_2 = m_h c_h \Delta\theta$ = 0,5x2100x16 = 16800 J

Calor para fundir el hielo

$Q_3 = L_f m_h$ = 334x10^{3}x0,5 = 167x10^3 J

Análisis:

Tenemos 87700 J , esa cantidad puede elevar la temperatura del hielo hasta los 0ºC

Nos quedan 87700 -16800 = 70900 J

Esto no puede fundir todo el hielo, solamente alcanza para fundir $\dfrac{70{,}900\times 10^3\,\text{J}}{334\times 10^3\,\text{J/kg}} = 0{,}212$ kg

a) Temperatura de equilibrio 0ºC

b) Finalmente quedan 1 + 0,212 = 1,212 kg de agua y 0,5 – 0,212 = 0,288 kg de hielo

Ejemplo 73. Un recipiente metálico de masa 200 g, aislado del exterior, contiene 100 g de agua en equilibrio térmico a 22º C. Un cubo de hielo de 10 g, en el punto de fusión, se suelta en el agua, cuando se alcanza el equilibrio térmico la temperatura es 15º C. Asumir que no hay intercambio de calor con el exterior.

Para el agua el calor específico es 4190 J/kg K y el calor de fusión es 3,34 x 10^5 J/kg.

¿Cuál es el calor específico del metal?

Solución.

Calor cedido = Calor ganado

$$c_x(0{,}2)(22-15) + 4190(0{,}1)(22-15)$$
$$= 0{,}01(3{,}34\times 10^5) + 4190(0{,}01)(15-0)$$

$$\Rightarrow c_x = 739{,}64\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Ejemplo 74. Un vaso de vidrio de 25 gramos contiene 200 gramos de agua. El vaso con el agua se encuentran en equilibrio térmico a 24° C. Si echamos en el vaso dos cubos de hielo de 15 gramos cada uno a la temperatura de - 3° C, ¿cuál será la temperatura final del sistema? (Considere que no hay intercambio de calor con el medio exterior)

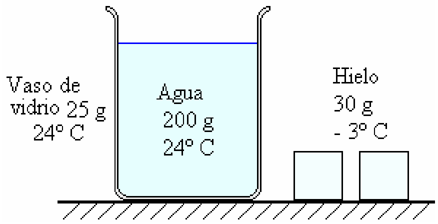
Datos:

Calor específico del hielo = 0,49 cal/g °C

Calor específico del vidrio = 0,2 cal/g °C

Calor latente de fusión (agua) 79,6 cal/g

Solución.



Calor necesario para fundir al hielo:

Calor para llevar al hielo de – 3º C a 0º C →

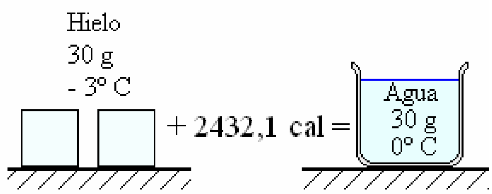
$Q_{Hielo1} = m_{hielo} c_{hielo} \Delta t = 30\times 0{,}49\times 3$ = 44,1 cal

Calor necesario para fundir al hielo →

$Q_{Hielo2} = m_{hielo} L_f = 30\times 79{,}6$ = 2388 cal

El calor necesario total →

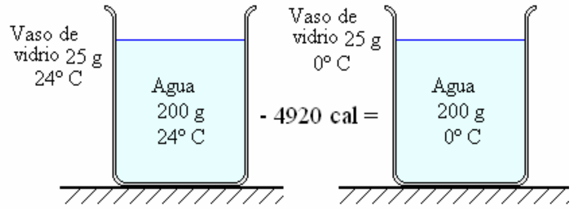
Q_{Hielo} = 44,1 + 2388 = 2432,1 cal



Calor cedido cuando se enfría al agua y vaso de 24º c a 0º C

El vaso de vidrio es equivalente a 25 x 0,2 = 5 g de agua.

$Q_{H_2O1} = m_{H_2O} c_{H_2O} \Delta t = (200+5)\times 1{,}0\times 24$ = 4920 cal

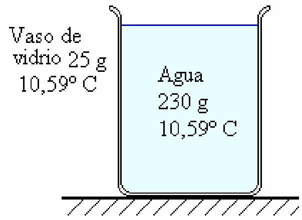


De estas calorías empleamos 2432,1 para convertir al hielo en agua, nos quedan 4920 – 2432,1 = 2487,9 cal.
Estas 3487,9 calorías elevan la temperatura del conjunto (200 +5 +30) gramos de agua una temperatura Δt.

$$2487{,}9 = 235 \times 1{,}0 \times \Delta t \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{2487{,}9}{235} = 10{,}59^\circ \text{ C}$$

La temperatura final del sistema es 10,59º C.



Ejemplo 75. Determine el estado final cuando se mezclan 20 g de hielo a 0 ºC con 10 g de vapor a 100 ºC.
Solución.
C_{agua} = 1 cal/g. ºC
L_f = 3,33 x 10^5 J/kg = 80 cal/g
L_v = 2,26 x 10^6 J/kg = 542,4 cal/g
M_{hielo} = 20 g
M_{vapor} = 10 g
Si se condensa todo el vapor cede 5424 cal.
Si se funde todo el Hielo absorbe 80x20 = 1600 cal quedando agua que para ser llevada a 100 ºC absorbería a lo más 20 x 100 = 2000 cal.
De aquí se concluye que no puede condensarse todo el vapor, pero sí fundirse todo el Hielo. De modo que la temperatura final, en presencia de vapor debe ser t_F = 100 ºC: Supongamos entonces que condensa m gramos de vapor
Q_{cedido} = 542,4 x m cal
$Q_{absorbido}$ = 20 x 80 + 20 x 1 x 100 = 3600 cal

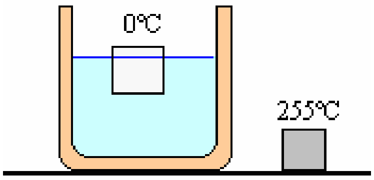
$$542{,}4 \text{ x } m = 3600 \Rightarrow m = \frac{3600}{542{,}4} = 6{,}6 \text{ g}$$

Luego el estado final consiste en una mezcla a 100 ºC de 4,4 g de vapor y 26,6 g de agua líquida.

Ejemplo 76. Un recipiente de cobre de 0,1 kg contiene 0,16 kg de agua y 0,018 kg de hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica. Si se introduce un trozo de plomo de 0,75 kg de masa a 255°C, ¿qué temperatura final de equilibrio se alcanza? (Considere que no hay intercambio de calor con el entorno)

c_{Pb} = 130 J/kgK
c_{Cu} = 390 J/kgK
c_{agua} = 4190 J/kgK
$c_{fusión\ agua} = 334 \times 10^3$ J/kg

Solución.



Cobre $\begin{cases} m_{cu} = 0{,}1 \text{kg} \\ t_{cu} = 0^\circ \text{C} \end{cases}$, Agua $\begin{cases} m_{agua} = 0{,}16 \text{kg} \\ t_{cu} = 0^\circ \text{C} \end{cases}$,

Hielo $\begin{cases} m_{hielo} = 0{,}018 \text{kg} \\ t_{cu} = 0^\circ \text{C} \end{cases}$

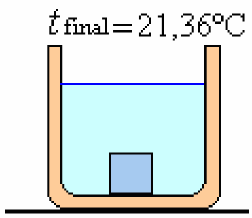
Plomo $\begin{cases} m_{Pb} = 0{,}75 \text{kg} \\ t_{Pb} = 255^\circ \text{C} \end{cases}$

Para fundir el hielo = 334x10^3 (0,018) = 6012 J
m_{agua} = 0,16 + 0,018 = 0,178 kg
El plomo puesto a 0ºC nos proporciona = 130 (0,75)(255) = 24862,5 J
Nos quedarían 24862,5 – 6012 = 18850,5 J
Los que se emplearía para elevar la temperatura del sistema:

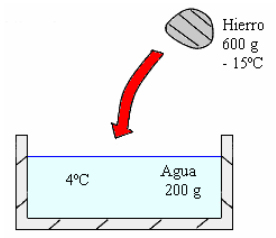
$$(mc + mc + mc)\Delta t = Q_{disponible}$$

$$(0{,}178 \times 4190 + 0{,}1 \times 390 + 0{,}75 \times 130)\Delta t = 18850{,}5$$

$$\Delta t = \frac{18850{,}5}{(745{,}82 + 39 + 97{,}5)} = \frac{18850{,}5}{882{,}32} = 21{,}36^\circ \text{C}$$



Ejemplo 77. Un trozo de hierro se deja caer en agua tal como se muestra en la figura. Determine la temperatura y fase del agua en el equilibrio. En caso de coexistir 2 fases del agua determine la masa final en cada fase.
c_{hierro} = 0,107 cal/g ºC, $c_{recipiente} \approx 0$

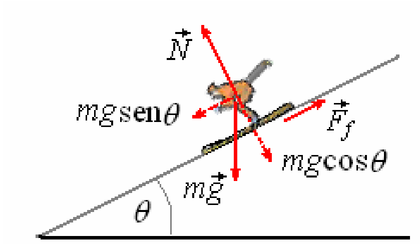


Solución.
Agua de 4ºC a 0ºC $\Rightarrow$
$Q_1 = 200 \times 1 \times 4 = 800$ calorías
Hierro de – 15ºC a 0ºC $\Rightarrow$
$Q_2 = 600 \times 0{,}107 \times 15 = 963$ calorías
En el balance 963 – 800 = 163 calorías, las que convertirán en hielo a una parte del agua

$$m = \frac{163}{80} = 2{,}04 \text{ gramos}$$

La temperatura de equilibrio es 0ºC, 2,04 gramos de hielo y 197,6 gramos de agua.

Ejemplo 78. Un esquiador desciende una pendiente de 30º con una velocidad constante de 15 m/s. Su masa total es 80 kg. ¿Cuánta nieve se disuelve bajo sus esquíes en 1 minuto, si el calor latente de fusión de la nieve es 340 J/g y se asume que toda la fricción disuelve a la nieve?
Solución.



$$F_f = mg\text{sen}30° = 80(9{,}8)\left(\frac{1}{2}\right) = 392 \text{ N}$$

$$P = Fv = (392)(15) = 5880 \text{ W}$$

Energía gastada por la fricción en 1 minuto = 58880 J/s x 60 s = 352800 J
Esta energía se emplea en derretir a la nieve.

$$Q = mL_f \Rightarrow m = \frac{Q}{L_f}$$

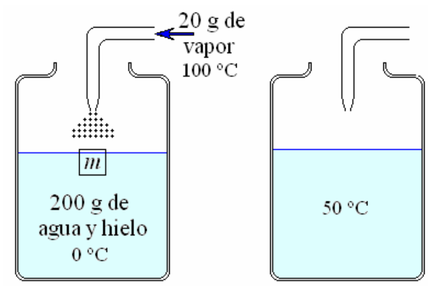
Luego la masa derretida es:

$$\frac{352800}{340000} = 1{,}037 \text{ kg.}$$

Ejemplo 79. El catálogo de un fabricante establece que su calentador de inmersión de 500 W hace hervir una pinta de agua en 6 min y hervirá 25 pintas de agua con 1 kWh de electricidad. Demostrar que con una temperatura normal de inicio para el agua de 20 ° C, ninguna de las afirmaciones es verdadera.
Una pinta de agua tiene una masa de 567 g.
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g°C
Calor específico del agua: 1 cal/g°C
Calor de fusión del agua: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g
1 cal = 4,186 Joules
Solución.
Calor necesario para hacer hervir una pinta de agua (567 g).
$Q = mc\Delta T$
= 567(1 x 100 - 20) = 0,453 x 10^5 = 1,8988 x 10^5 W
Primera afirmación.
El calentador de inmersión de 500 W hace hervir una pinta de agua en 6 min.
$Q = 500(6 \times 60)$ = 1,8 x 10^5 W
Como:
1,8 x 10^5 W < 1,8988 x 10^5 W
La afirmación es falsa.
Segunda afirmación
Hacer hervir 25 pintas de agua con 1 kWh de electricidad.
Para hacer hervir 25 pintas de agua se necesitan
Q = 25 x 1,8988 x 10^5 W = 4,77 x 10^6 W
La segunda afirmación dice " hervirá 25 pintas de agua con 1 kWh de electricidad.
El calor obtenido con un kWh de electricidad es:
Q = 1000 x 60 x 60 = 3,60 x 10^6 W
Como:
3,60 x 10^6 W < 4,77 x 10^6 W
La afirmación es falsa.

Ejemplo 80. Un calorímetro de cobre de 50 g de masa y calor específico 0,09 cal/g º C contiene una mezcla de 200 g de hielo y agua. Veinte g de vapor de agua se introducen en el calorímetro y se condensa allí, la temperatura final de equilibrio es 50 ° C. ¿Cuánto hielo se tuvo originalmente?
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g°C
Calor específico del agua: 1 cal/g°C
Calor de fusión del agua: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g
1 cal = 4,186 Joules

Solución.



Calor cedido por el vapor hasta convertirse en agua 50 ºC.

$Q_{ce} = 20 \times 540 + 20 \times 1 \times 50 = 11800$ calorías

Calor recibido la mezcla agua hielo hasta convertirse en agua a 50 ºC.

Sea m la masa de hielo

$Q_{re} = 50 \times 0,09 \times 50 + m \times 80 + 200 \times 1 \times 50$

$= 225 + 80m + 10000$ calorias

Calor cedido = Calor recibido

$225 + 80m + 10000 = 11800 \Rightarrow$

$80m = 1575 \Rightarrow$

$m = \dfrac{1575}{80}$ 11,69 g

Ejemplo 81. 10 g de agua son super enfriados cuidadosamente a - 3 ºC antes de que comience la congelación. ¿Cuánto hielo se forma entonces?

Solución.

Sea m la masa de hielo formada.

El calor cedido por la formación de hielo elevará la temperatura del agua, y el hielo continuará formándose hasta que el hielo y el agua estén a 0 ºC.

El calor cedido por la formación de la masa m de hielo es equivalente al calor requerido para elevar 10 g de agua a 0 º C.

Luego:

$mL = 10 \times 1 \times 3 \quad m = \dfrac{30}{L} = \dfrac{30}{80} = 0,375$ g

Ejemplo 82. En un recipiente se mezclan 4,5 kg de agua a 20 ºC y 500 g de hielo a 0 ºC. Se introduce en el recipiente una barra de metal, de capacidad calorífica despreciable.

a) ¿Cuál es la temperatura en el equilibrio?

b) El conjunto se calienta en un hornillo que proporciona 5,000 cal/s, ¿cuál es la temperatura a los 100 s?

c) La longitud de la barra a 10 ºC es de 10 cm y su coeficiente de dilatación lineal es de 2×10^{-5} $ºC^{-1}$.

Obtener una expresión de la longitud de la barra en función del tiempo hasta t = 100 s.

Solución.

a) 0,5 kg de hielo a 0 ºC para convertir en agua a 0 ºC

$Q = 0,5 \times 80 = 40$ kcal

4,5 kg de agua 20 ºC al bajar a 0 ºC

$Q = 4,5 \times 1 \times 20 = 90$ kcal

Se emplean 40 kcal para fundir al hielo y quedan 90 – 40 = 50 kcal

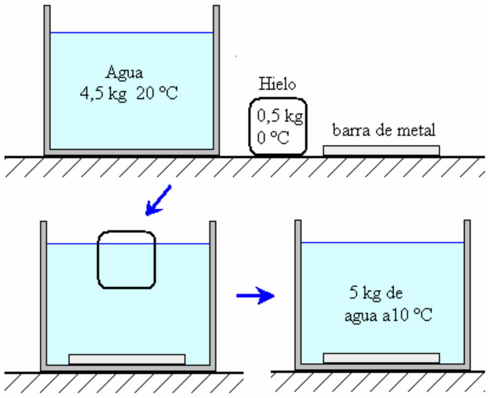
Estas 50 kcal elevan la temperatura de 4,5 + 0,5 = 5,0 kg de agua

$50 = 5,0 \times 1 \times \Delta\theta$

$\Delta\theta = \dfrac{50}{5,0} = 10$ ºC

La temperatura de equilibrio es 0 ºC + 10 ºC = 10 ºC

No se tomó en cuenta la barra de metal por tener capacidad calorífica despreciable.



b) El calor proporcionado por el hornillo en 100 s es

$Q = 5,0 \dfrac{\text{kcal}}{\text{s}} \times 100\,\text{s} = 500$ kcal

Para elevar la temperatura de 5 kg de agua de 0 ºC a 100 ºC se necesita

$5,0\text{kg} \times 1 \dfrac{\text{kcal}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}} \times (100 - 10)^{\circ}\text{C} = 450$ kcal

Se emplean 450 kcal para elevar la temperatura del agua a 100 ºC y nos quedan

500 – 450 = 50 kcal

Estas 50 kcal evaporan

$\dfrac{50\,\text{kcal}}{540\,\text{kcal/kg}} = 0,09$ kg de agua

Esta situación se produce a los

$\dfrac{dQ}{dt} = 5 \dfrac{\text{kcal}}{\text{s}} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{5} dQ$

Integrando

$\int_0^t dt = \dfrac{1}{5} \int_0^{450} dQ \Rightarrow t = \dfrac{450}{5} = 90$ s

Después de los 90 s el calor comienza a evaporar el agua permaneciendo la temperatura en 100 ºC.

La temperatura a los 100 s es 100 ºC y tenemos 49,91 kg de agua y 0,09 kg de vapor

c) El cambio de longitud con la temperatura es

Para 10 ºC , t = 0 s

$\ell = 0,10$ m

Se dilata hasta los 100 ºC, t = 90 s

La longitud es

$\ell' = \ell(1 + \alpha\Delta\theta)$

$\ell' = 0,1(1 + 2 \times 10^{-5} \times 100) = 0,1002$ m

Para obtener una expresión de la longitud de la barra en función del tiempo

$\ell' = \ell(1 + \alpha\Delta\theta) = \ell[1 + \alpha(\theta - 10)]$

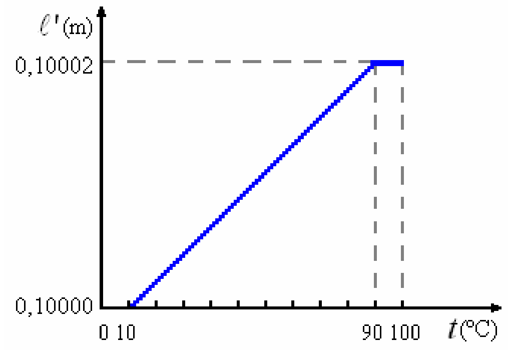
$$\frac{dQ}{dt} = 5\frac{\text{kcal}}{\text{s}} \quad \Rightarrow$$

$$dt = \frac{dQ}{5} = \frac{mc}{5}d\theta = \frac{5\times 1}{5}d\theta = d\theta$$

$$\int_{10}^{\theta} d\theta = \int_{0}^{t} dt \Rightarrow (\theta - 10) = t$$

$$\ell' = \ell(1+\alpha t) = 0{,}1002\left(1 + 2\times 10^{-5} t\right)$$

La longitud cambia durante los primeros 90 s, los 10 segundos restantes permanece con la misma longitud porque la temperatura no cambia.



Ejemplo 83. Vapor a 100 ° C, se añade al hielo a 0° C.

a) Encontrar la cantidad de hielo derretido y la temperatura final cuando la masa de vapor es 10,0 g y la masa de hielo es 50,0 g.

b) Repita cuando la masa de vapor es 1,00 g y la masa de hielo es 50,0 g.

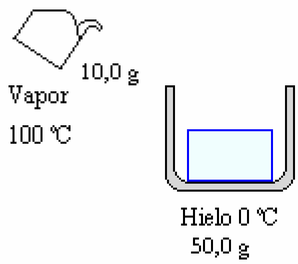
Datos del agua:

L_f = 3,33 x 10^5 J/kg, c_{agua} = 4186 kcal/kg º C,

L_e = 2,26 x 10^6 J/kg

Solución.

a) Para el caso de la masa de agua 10,0 g y la masa de hielo 50,0 g.



Q_1 = calor para fundir el hielo = $m_h L_f$

$= \left(50{,}0\times 10^{-3}\right)\left(3{,}33\times 10^{5}\right)$

= 1,67 x 10^4 J

Q_3 = calor de la condensación del vapor = $m_v L_v$

$= \left(10{,}0\times 10^{-3}\right)\left(2{,}26\times 10^{6}\right)$

= 2,26 x 10^4 J

Nos quedan

2,26 x 10^4 J - 1,67 x 10^4 J = 0,59 x 10^4 J

Con este calor podemos llevar los 50,0 g de agua hasta la temperatura *t*.

$m_h c_a (t - 0) = m_v c_a (100 - t) + 0{,}59\times 10^4 \Rightarrow$

$\left(50\times 10^{-3}\right)(4186)t^4$

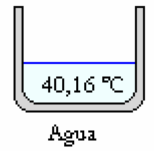
$= \left(10\times 10^{-3}\right)(4186)(100 - t) + 0{,}59\times 10$

$\Rightarrow \left(60\times 10^{-3}\right)(4186)t = 4186 + 0{,}59\times 10^4$

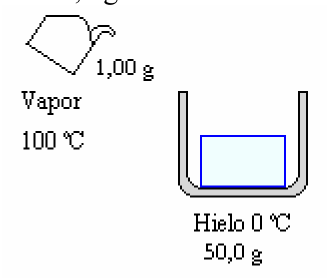
$\Rightarrow \left(60\times 10^{-3}\right)(4186)t = 10086$

$\Rightarrow$ t = 40,16 º C

La temperatura fina es 40,16 º C.



b) Para el caso de la masa de vapor 1,00 g y la masa de hielo 50,0 g.



Q_1 = calor para fundir el hielo

$= m_h L_f = \left(50{,}0\times 10^{-3}\right)\left(3{,}33\times 10^{5}\right)$

= 1,67 x 10^4 J

Q_2 = calor de la condensación del vapor

$= m_v L_v = \left(10^{-3}\right)\left(2{,}26\times 10^{6}\right)$

= 0,226 x 10^4 J

Q_3 = calor del vapor condensado baja a 0 º C

$= m_v c_a (100 - 0) = \left(10^{-3}\right)(4186)(100)$

= 0,0418,6 x 10^4 J

Como

$Q_2 + Q_3$ = 0,226 x 10^4 J + 0,04186 x 10^4 J

= 0,26786 x 10^4 J

No tenemos calor suficiente para fundir todo el hiel, la temperatura final será 0 º C parte agua y parte hielo.

Nos quedan

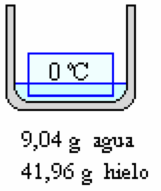
2,26 x 10^4 J - 1,67 x 10^4 J = 0,59 x 10^4 J

Con 0,26786 x 10^4 J fundiremos

$$m = \frac{Q}{L_f} = \frac{0{,}26786\times 10^4}{3{,}33\times 10^5}$$

= 8,04 10^3 kg = 8,04 g

La temperatura final es 0 º C,
$(8,04+1)$= 9,04 g de agua y
$(50,0-8,04)$= 41,96 g de hielo



Ejemplo 84. Un calorímetro de cobre de 2 kg está a una temperatura de 150° C. Si se vierte dentro de él 10 gramos de agua a 25° C y rápidamente se tapa para que no pueda escapar el vapor, determine la temperatura final de equilibrio del sistema. Considere que no hay intercambio de calor con el medio exterior.
Datos:
Calor específico del cobre = 390 J/kg°C
Calor específico del agua = 4,19 x 10^3 J/kg°C
Calor específico del vapor de agua 2,01 x 10^3 J/kg.°C
Calor latente de vaporización (agua) = 2,26 x 10^6 J/kg
Solución.
Primeramente vamos a poner todo a a la situación de vapor de agua a 100ºC.
El agua
Para ponerla a 100º C
$Q_1=(0,010)(4,19\times10^3)(100-25)$ = 3142,5 J
Para hacerla vapor a 100º C
$Q_2=(0,010)(2,26\times10^6)$ = 22600 J
Se precisan 3142,5 + 22600 = 24542,5 J

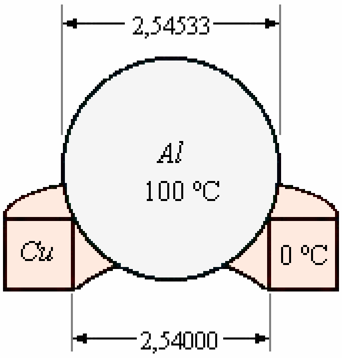
El calorímetro
Para bajarlo de 150ºC a 100ºC, cede
$Q_3=(2)(390)(150-100)$ = 39000 J

Balance térmico
39000 – 24542,5 = 13257,5 J
Quedan 13257,5 J

Este calor servirá para elevar la temperatura del conjunto
$13257,5=[(0,010)(2,01\times10^3)+(2,0)(390)]\Delta\theta$
$13257,5=800,1\Delta\theta$
$\Delta\theta=\dfrac{13257,5}{800,1}$ = 16,57º C.

La temperatura final de equilibrio del sistema es 100 + 16,57 = 116,57º C.

Ejemplo 85. Dilatación térmica y equilibrio térmico.
Un anillo de cobre de 21,6 g tiene un diámetro de 2,54000 cm a la temperatura de 0ºC. Una esfera de aluminio tiene un diámetro de 2,54533 cm a la temperatura de 100ºC. La esfera se sitúa sobre el anillo, y se deja que ambos lleguen al equilibrio térmico, sin que se disipe calor alguno al entorno. La esfera pasa justamente a través del anillo a la temperatura de equilibrio. Halle la masa de la esfera.
Calor específico del aluminio: 0,212 cal/gºC
Calor específico del cobre: 0,094 cal/gºC
Coeficiente de dilatación del aluminio: 24 x 10^{-6} °C^{-1}
Coeficiente de dilatación del cobre: 17 x 10^{-6} °C^{-1}



Solución.
La temperatura final de equilibrio del sistema es t.
Calor cedido por el aluminio = Calor ganado por el cobre
$m_{aluminio}\times c_{aluminio}(100-t)=m_{cobre}\times c_{cobre}(t-0)$
Poniendo valores
$m_{aluminio}\times0,212(100-t)=21,6\times0,094t$
Diámetro final de la esfera de aluminio = diámetro final del anillo de cobre
$D_{aluminio}[1-\alpha_{aluminio}(100-t)]$
$=D_{cobre}[1+\alpha_{cobre}(t-0)]$
Poniendo valores
$2,5433[1-24\times10^{-6}(100-t)]$
$=2,54[1+17\times10^{-6}t]$
$\Rightarrow\dfrac{2,5433}{2,54}=\dfrac{[1+17\times10^{-6}t]}{[1-24\times10^{-6}(100-t)]}$
El primer término por el binomio de Newton se puede escribir como:
$\dfrac{2,5433}{2,54}=\dfrac{2,54}{2,54}+\dfrac{0,0033}{2,54}=1+2,1\times10^{-3}$
El segundo término por el binomio de Newton se puede escribir como:

$$\left[1+17\times10^{-6}t\right]\left[1+24\times10^{-6}(100-t)\right]$$
$$= 1+2,4\times10^{-3}-7\times10^{-6}t$$

Luego:

$$1+2,1\times10^{-3} = 1+2,4\times10^{-3}-7\times10^{-6}t$$

Resolviendo t:

$$t=\frac{0,3\times10^{-3}}{7\times10^{-6}}=42,2^{o}\text{C}$$

Finalmente la masa de la esfera de aluminio será

$$m_{aluminio}=\frac{21,6\times0,094t}{0,212\times(100-42,8)}=7,17\text{ gramos}$$

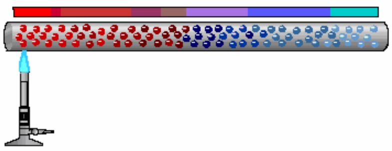
Es una esfera hueca.

TRANSFERENCIA DE CALOR

En este capítulo veremos en forma breve las formas en la cual la energía térmica fluye de u punto a otro en un medio dado, existen tres modos de transferencia, conducción, convección y radiación.

CONDUCCIÓN.

Cuando hay transporte de energía entre elementos de volumen adyacentes en virtud a la diferencia de temperatura entre ellas, se conoce como conducción de calor.



La expresión matemática fundamental de la conducción de calor es la generalización de los resultados de los experimentos en el flujo lineal de calor a través de una lámina de material de espesor Δx y de área A, una de las caras se mantienen a temperatura $\theta + \Delta\theta$, los resultado muestran que Q es proporcional al tiempo Δt.

$$Q \propto A\frac{\Delta\theta}{\Delta x}\Delta t$$

Este resultado podemos generalizar, en el límite:

$$\frac{dQ}{dt}=\dot{Q}=-kA\frac{d\theta}{dx}$$

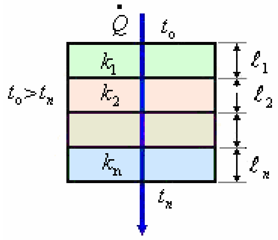
Donde k es la CONDUCTIVIDAD TERMICA del material.

El signo menos se introduce dado que Q fluye en la dirección de la disminución de la temperatura (del lado caliente al lado frío).

VALORES DE LA CONDUCTIVIDAD TERMICA	
Sustancias	k en $\dfrac{\text{kilocal}}{\text{s m °C}}$
Acero	0,011
Bronce	0,026
Aluminio	0,040
Ladrillo	1,7 x 10^{-4}
Concreto	4,1 x 10^{-4}
Madera	0,3 x 10^{-4}
Vidrio	1,4 x 10^{-4}
Hielo	5,3 x 10^{-4}
Lana de vidrio o mineral	0,09 x 10^{-4}
Caucho	0,10 x 10^{-4}
Agua	1,43 x 10^{-4}
Aire	0,056 x 10^{-4}

Ejemplo 86. Flujo estacionario a través de una pared compuesta. Capas en "serie"

Determinación de la cantidad de calor que fluye en la dirección normal a través de un medio de capas múltiples entre las temperaturas externas t_0 y t_n constantes, como se muestra en la figura.



Solución.

Sea t_1 la temperatura entre la capa 1 y 2, t_2 la temperatura entre las capas 2 y 3 y así sucesivamente, luego tenemos:

En la primera capa

$$\dot{Q}=-k_1 A\frac{(t_1-t_0)}{\ell_1} \Rightarrow t_0-t_1=\frac{\ell_1\dot{Q}}{k_1 A}$$

En la segunda capa

$$\dot{Q}=-k_2 A\frac{(t_2-t_1)}{\ell_2} \Rightarrow t_1-t_2=\frac{\ell_2\dot{Q}}{k_2 A}$$

En la Capa n

$$\dot{Q}=-k_n A\frac{(t_n-t_{n-1})}{\ell_n} \Rightarrow t_{n-1}-t_n=\frac{\ell_n\dot{Q}}{k_n A}$$

Sumando miembro a miembro

$$t_0-t_n=\left(\frac{\ell_1}{k_1}+\frac{\ell_2}{k_2}+.....\frac{\ell_n}{k_n}\right)\frac{\dot{Q}}{A}$$

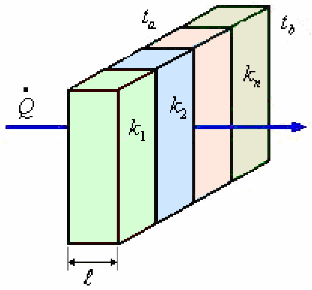
Luego

$$\dot{Q}=\frac{A(t_0-t_n)}{\dfrac{\ell_1}{k_1}+\dfrac{\ell_2}{k_2}+...+\dfrac{\ell_n}{k_n}}$$

$$\dot{Q}=\frac{A(t_0-t_n)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\ell_i}{k_i}\right)}$$

Ejemplo 87. Flujo estacionario a través de una pared compuesta. Capas en "paralelo"

Determinación de la cantidad de calor $\dot{Q}$ que fluye en la dirección normal a un medio múltiple formado por placas paralelas como se muestra en la figura.



Solución.

El Flujo $\dot{Q}$ es la suma de los flujos $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_2$, ...$\dot{Q}_n$ a través de cada una de las placas, de tal modo

$$\dot{Q} = -\frac{(k_1 A_1 + k_2 A_2 + ...k_n A_n)(t_b - t_a)}{\ell}$$

$$\dot{Q} = -\frac{(t_b - t_a)\sum_{i=1}^{n} k_i A_i}{\ell}$$

Ejemplo 88. Dos cuartos comparten una pared de ladrillos de 12 cm de grosor, pero están perfectamente aislados en las demás paredes. Cada cuarto es un cubo de 4,0 m de arista. Si el aire de uno de los cuartos está a 10 ºC y el otro a 30 ºC. ¿Cuántos focos de 100 W se necesitarán tener encendidas en el cuarto más caliente para mantener la misma diferencia de temperatura?

Solución.

Coeficiente de conductividad térmica del ladrillo k= 1,0 W/(m K).

$$\dot{Q} = -kA\frac{\Delta\theta}{L} = (1)(4,0\times 4,0)\frac{(30-10)}{0,12}$$

$$= (1)(4,0\times 4,0)\frac{20}{0,12} = 2666,67 \text{ W}$$

Número de focos de 100 W que se necesitarán tener encendidos en el cuarto más caliente para mantener la misma diferencia de temperatura

$$\frac{2666,67}{100} = 26,7$$

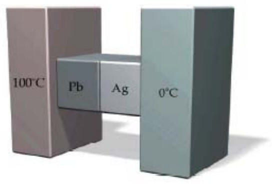
Se necesitan 27 focos de 100 W.

Ejemplo 89. Dos barras metálicas, cada una de longitud 5 cm y sección transversal rectangular de lados 2 y 3 cm, están encajadas entre dos paredes una a 100 ºC y otra a 0 ºC. Las barras son de Plomo y Plata. Determinar:

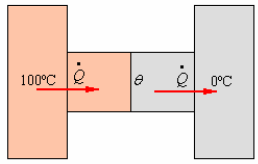
a) El flujo térmico total a través de las barras y

b) La temperatura en la interfase.

DATOS: $k(Pb)$ = 353 W/m K; $k(Ag)$ = 430 W/m K.



Solución.



Plomo

$A = 6 \times 10^{-4}$ m, $L = 5\text{x}10^{-2}$ m k = 353 W/m K;

Plata

$A = 6 \text{ x}10^{-4}$ m, $L = 5\text{x}10^{-2}$ m k = 453 W/m K;

Flujo de calor en el plomo

$$\dot{Q} = 353\left(\frac{6\times 10^{-4}}{5\times 10^{-2}}\right)(100-\theta)$$

$$= 4,236(100-\theta)$$

Flujo de calor en la plata.

$$\dot{Q} = 453\left(\frac{6\times 10^{-4}}{5\times 10^{-2}}\right)(\theta - 0)$$

$$= 5,436\theta$$

Igualando los flujos

$$4,236(100-\theta) = 5,436\theta$$

$$423,6 - 4,236\theta = 5,436\theta$$

$$9,672\theta = 423,6$$

$$\theta = 43,79^\circ \text{C}$$

El flujo es;

$$\dot{Q} = 5,436\theta = 5,436 \text{ x } 43,79 = 238,1 \text{ W}$$

Ejemplo 90. Un excursionista usa prendas de vestir de 3,5 cm de grueso, cuya área superficial total es de 1,7 m^2. La temperatura de la superficie de las prendas es de –20 ºC y la de la piel de 34 ºC. Calcular el flujo de calor por conducción a través de la ropa

a) Suponiendo que ésta está seca y que la conductividad térmica k es la del plumón igual a $0,06\text{x}10^{-4}$ kcal/s m K

b) Suponiendo que la ropa está mojada, de modo que k es la del agua ($1,4\text{x}10^{-4}$ kcal/s m K) y que la ropa se ha comprimido hasta un espesor de 0,50 cm.

Solución.

a) $\overset{\bullet}{Q} = -kA\dfrac{\Delta\theta}{L} = 0{,}06\times10^{-4}(1{,}7)\dfrac{(34+20)}{3{,}5\times10^{-2}}$

$= 0{,}01{,}5737\ \text{W}$

b) $\overset{\bullet}{Q} = -kA\dfrac{\Delta\theta}{L} = 1{,}4\times10^{-4}(1{,}7)\dfrac{(34+20)}{0{,}50\times10^{-2}}$

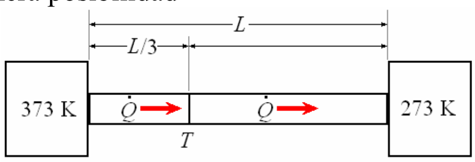
$= 2{,}5704\ \text{W}$

Ejemplo 91. Una varilla de longitud L cuyos extremos están en contacto con reservorios de temperaturas de 273 K y 373 K conduce calor entre los extremos. Determine a que temperatura están los puntos de la barra a $L/3$ de los extremos si el flujo es estacionario. Justifique su procedimiento.

Solución.

Vamos a utilizar la propiedad que el flujo de calor es constante a lo largo de la varilla

Primera posibilidad



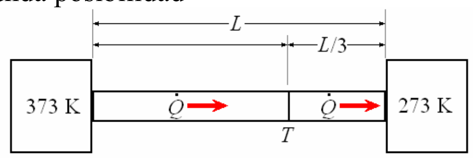
$$\overset{\bullet}{Q} = kA\frac{(373-T)}{L/3} = kA\frac{(T-273)}{2L/3}$$

$2(373-T) = (T-273) \Rightarrow$

$746 - 2T = T - 273$

$\Rightarrow 3T = 1019 \Rightarrow T = 339{,}67\ \text{K}$

Segunda posibilidad



$$\overset{\bullet}{Q} = kA\frac{(373-T)}{2L/3} = kA\frac{(T-273)}{L/3}$$

$(373-T) = 2(T-273) \Rightarrow$

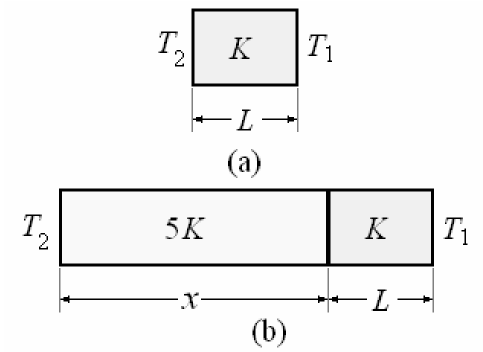
$373 - T = 2T - 546 \Rightarrow 3T = 919 \Rightarrow$

$T = 303{,}33\ \text{K}$

Ejemplo 92. En la figura (a) se muestra una barra de conductividad térmica K, longitud L y área transversal A. El extremo izquierdo de la barra se encuentra a la temperatura T_2 y el extremo derecho a la temperatura T_1, siendo $T_2 > T_1$. En la figura (b) se muestran dos barras de igual área transversal A, unidas por sus extremos. La barra de la izquierda tiene conductividad térmica $5K$, longitud X y su extremo libre está a la temperatura T_2. La barra de la derecha tiene conductividad térmica K, longitud L y su extremo libre está a la temperatura T_1. Considere flujo de calor estacionario y desprecie las pérdidas de calor por los costados de las barras.

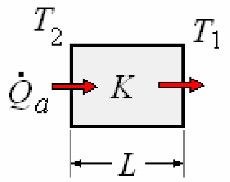
a) Hallar X para que la corriente de calor por conducción en (a) sea el doble que en (b).

b) En (b), hallar la temperatura T en la unión de las barras.



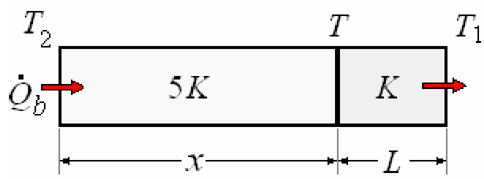
Solución.

El flujo de calor en (a):



$$\overset{\bullet}{Q}_a = KA\frac{(T_2-T_1)}{L}$$

Flujo de calor en (b)



Flujo en la primera parte

$$\overset{\bullet}{Q}_b = 5KA\frac{(T_2-T)}{x} \Rightarrow (T_2-T) = \frac{\overset{\bullet}{Q}_b}{KA}\frac{x}{5} \quad (1)$$

Flujo en la segunda parte

$$\overset{\bullet}{Q}_b = KA\frac{(T-T_1)}{L} \Rightarrow (T-T_1) = \frac{\overset{\bullet}{Q}_b}{KA}L \quad (2)$$

Sumando (1) + (2)

$$(T_2-T_1) = \frac{\overset{\bullet}{Q}_b}{KA}\left(\frac{x}{5}+L\right)$$

$$\overset{\bullet}{Q}_b = \frac{KA}{\left(\frac{x}{5}+L\right)}(T_2-T_1) \Rightarrow$$

Como $\overset{\bullet}{Q}_a = 2\overset{\bullet}{Q}_b$:

$$KA\frac{(T_2-T_1)}{L} = 2\frac{KA}{\left(\frac{x}{5}+L\right)}(T_2-T_1) \Rightarrow$$

$$\frac{x}{5}+L=2L \Rightarrow$$

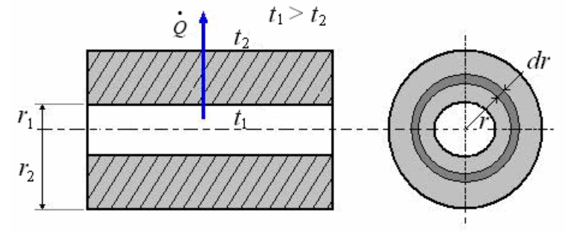
$$x=5L$$

La longitud de x es igual a $5L$.

Ejemplo 93. Flujo a través de un cilindro de radio interior r_1 y radio exterior r_2, conductividad térmica k, temperatura interior t_1 y temperatura exterior t_2.

Solución.

Tomemos una longitud L, y a una distancia r un elemento diferencial dr como se muestra en la figura,



El flujo a través del elemento diferencial es

$$\dot{Q}=-kA\frac{dt}{dr}$$

$\dot{Q}$ es constante a través de cualquier sección cilíndrica coaxial.

$A = 2\pi r L$

Luego

$$\dot{Q}=-k2\pi rL\frac{dt}{dr}$$

Despejando dt

$$dt=-\frac{\dot{Q}}{2\pi kL}\frac{dr}{r}$$

Integrando

$$\int_{t_1}^{t_2}dt=-\frac{\dot{Q}}{2\pi kL}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

$$t_1-t_2=-\frac{\dot{Q}}{2\pi kL}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

De aquí

$$\dot{Q}=\frac{2\pi kL}{\ln\frac{r_2}{r_1}}(t_1-t_2)$$

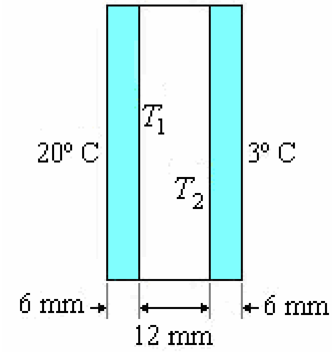
Ejemplo 94. Una ventana de un metro de alto por 2 de ancho tiene un vidrio cuyo espesor es de 0,006 m, conduce calor desde el interior a 20 ºC al exterior de 3 ºC. Encuentre la diferencia porcentual de la conducción del calor, cuando se pone dos vidrios del mismo espesor anterior, dejando una separación de aire entre los vidrios de 0,012 m. Considere que:

$k_{Vidrio} = k_V = 2\times10^{-6}$ kcal/smº C ,

$k_{Aire} = k_A = 6\times10^{-6}$ kcal/smº C .

Solución.

a) Al poner los dos vidrios:



Sean T_1 y T_2 las temperaturas a la derecha del vidrio izquierdo e izquierda del vidrio derecho, respectivamente:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t}=k_V A\frac{(20-T_1)}{0,006}, \quad (1)$$

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t}=k_A A\frac{(T_1-T_2)}{0,012}, \quad (2)$$

$$\frac{\Delta Q_3}{\Delta t}=k_V A\frac{(T_2-3)}{0,006}. \quad (3)$$

En el estado de régimen estable, es decir, cuándo la temperatura en cada punto es constante en el transcurso del tiempo, por lo cuál $\Delta Q/\Delta t$ es la misma en todas las secciones transversales:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{\Delta Q_1}{\Delta t}=\frac{\Delta Q_2}{\Delta t}=\frac{\Delta Q_3}{\Delta t}.$$

Igualando ecuaciones (1) y (2), encontramos:

$$T_2=T_1\left(1+\frac{2}{3}\right)-\frac{40}{3}. \quad (4)$$

De la igualación de (2) y (3) tenemos:

$$T_2=\frac{\frac{3}{2}T_1+3}{5/2}. \quad (5)$$

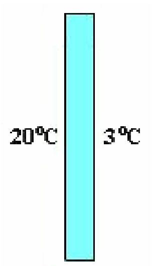
Por otro lado, de la diferencia de las ecuaciones (4) y (5), hallamos:

$T_1 = 13,63^\circ C$ y $T_2 = 13,63^\circ C$.

Reemplazando en ecuación (1):

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=k_V A\frac{(20-T_1)}{0,006}=4,25\frac{\text{cal}}{\text{s}}$$

b) Si la ventana está formada por un solo vidrio:



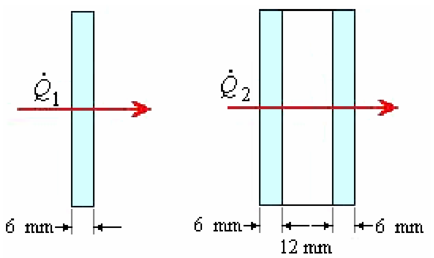
$$\frac{\Delta Q'}{\Delta t} = k_V A \frac{(30-3)}{\Delta X} = 11{,}3 \frac{\text{cal}}{\text{s}},$$

Es decir, la diferencia con respecto a $\Delta Q/\Delta t = 7{,}05\ \text{cal/s}$. De este modo hay una diferencia de un 62,4%, con lo cuál, cuándo se coloca aire entre los dos vidrios se pierde un 62,4% menos de energía calórico que cuándo se usa un solo vidrio.

Ejemplo 95. Una ventana de un metro de alto por dos de ancho, está construida con láminas de vidrio cuyo espesor es de 0,006 m. La ventana puede ser ensamblada con un solo vidrio en ese caso el flujo de calor es $\dot{Q}_1$ o puede construirse con dos vidrios dejando una separación de 0,012 m de aire confinado entre las dos láminas de vidrio, en este caso el flujo de calor es $\dot{Q}_2$.
Encontrar la relación entre los flujos de calor.

$k_{vidrio} = 2\times 10^{-6}\text{kcal / s m°C}$,

$k_{\text{aire confinado}} = 6\times 10^{-6}\text{kcal / s m°C}$



Solución.
Al poner los dos vidrios:

$$\dot{Q}_1 = -\frac{A}{\left(2\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}\right)}\Delta\theta$$

Al poner un solo vidrio

$$\dot{Q}_2 = -\frac{A}{\left(\frac{L_1}{k_1}\right)}\Delta\theta$$

La relación entre los flujos de calor es:

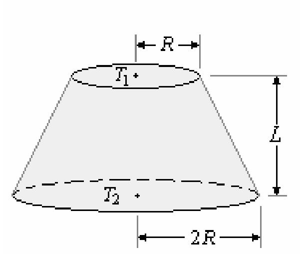
$$\frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} = \frac{-\frac{A}{\left(\frac{L_1}{k_1}\right)}\Delta\theta}{-\frac{A}{\left(2\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}\right)}\Delta\theta}$$

$$\frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} = \frac{\left(2\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}\right)}{\left(\frac{L_1}{k_1}\right)} = 2 + \frac{L_2 k_1}{L_1 k_2}$$

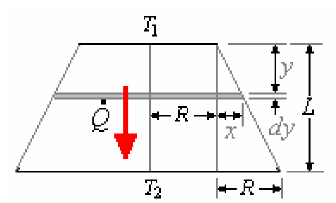
$$= 2 + \left(\frac{12}{6}\right)\left(\frac{2\times 10^{-6}}{6\times 10^{-6}}\right)$$

$$= 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}66$$

Ejemplo 96. El sólido de la figura tiene bases circulares de radio R y $2R$, altura L y conductividad térmica k. Si las bases se ponen en contacto con reservorios de temperatura T_1 y T_2 .Determine la corriente calorífica cuando el flujo es estacionario. Considere las paredes laterales forradas con un aislante térmico.



Solución.



El flujo a través de la porción de ancho dy y área

$A = \pi r^2 = \pi(R+x)^2$, es también igual a $\dot{Q}$

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dy} = -k\pi(R+x)^2\frac{dT}{dy}$$

Por semejanza de triángulos: $\dfrac{x}{R} = \dfrac{y}{L}$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{L}y$$

Luego: $\dot{Q} = -k\pi\left(R+\frac{R}{L}y\right)^2\dfrac{dT}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{(y+L)^2} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2} dT$$

Integrando $\int_0^L \frac{dy}{(y+L)^2} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2} \int_{T_1}^{T_2} dT$

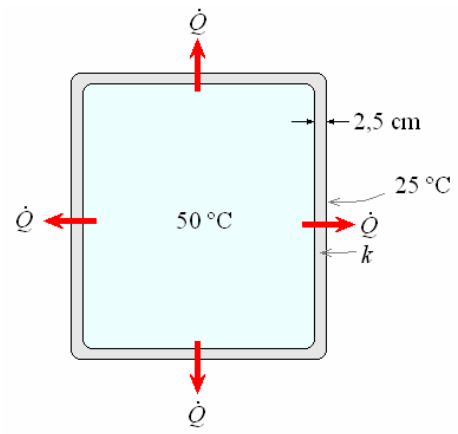
$$\Rightarrow -\left.\frac{1}{(y+L)}\right|_0^L = -\frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2} T\Big|_{T_1}^{T_2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(L+L)} + \frac{1}{(0+L)} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2}(T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2L} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2}(T_1 - T_2)$$

Finalmente: $\dot{Q} = \frac{2k\pi R^2}{L}(T_1 - T_2)$

Ejemplo 97. Un tanque para agua de hierro se mantiene a 50 ºC, tiene un espesor de 2,5 cm y el calor que pasa al exterior a través de las paredes mantiene la superficie a una temperatura de 25 ºC. ¿Cuánto calor sale por hora de cada metro cuadrado de superficie por hora?
La conductividad térmica del hierro es 0,11 cal/cm s ºC.
Solución.



Flujo de calor al exterior

$$\dot{Q} = kA\frac{\Delta T}{L}$$

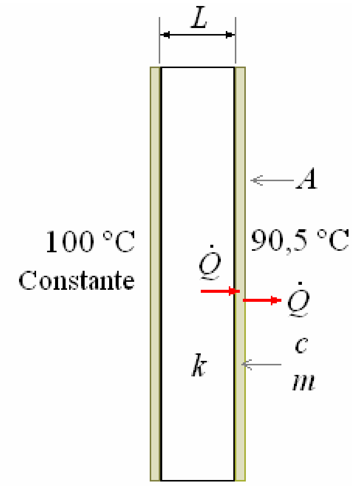
k = 0,11 cal/cm s ºC
A = 1 m^2 =10^4 cm^2
ΔT = 50 – 25 = 25 ºC
L = 2,5 cm
Reemplazando valores

$$\dot{Q} = (11\times 10^{-2})(10^4)\frac{(25)}{2,5} = 1,10 \text{ x } 10^4 \text{ cal/s}$$

Calor sale por hora de cada metro cuadrado de superficie por hora

Q = 1,10 x 10^4 cal/s x 3600 s = 3,96 x 10^7 calorías

Ejemplo 98. La conductividad térmica de un disco de vidrio de 100 cm^2 de superficie y espesor 0,5 cm se mide asegurando entre dos discos de bronce del mismo diámetro y masa 250 g cada uno. Cuando un disco se mantiene a 100 °C, el otro llega al equilibrio a una temperatura de 90,5 °C. La tasa de enfriamiento de este último disco a 90,5 °C es 10 ºC por minuto. ¿Cuál es la conductividad térmica del vidrio?
El calor específico del bronce es de 0,38 J/g ºC.
Solución.



El bronce se enfría a una razón de

$$\dot{Q} = mc\frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Donde
c = 0,38 J/g ºC, m = 250 g

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{10\,^\circ\text{C}}{60\text{ s}}$$

Reemplazando valores

$$\dot{Q} = 0,38\times 250\times\frac{10}{60} = 15,83 \text{ calorías}$$

Este flujo de calor se conduce en el vidrio de la superficie a 100 ºC a la superficie a 90,5 ºC , según:

$$\dot{Q} = kA\frac{\Delta T}{L}$$

Donde
k es la conductividad térmica del vidrio, A = 100 cm^2, L = 0,5 cm

$\Delta T = 100 - 90,5 = 9,5\,^\circ\text{C}$ y $\dot{Q}$ = 15,83 calorías
Reemplazando valores

$$15,83 = k(100)\frac{(9,5)}{0,5} \Rightarrow$$

$$k = \frac{15,83\times 0,5}{100\times 9,5} = 8,33 \text{ x}10^{-3} \text{ J / s cm ºC}$$

La conductividad térmica del vidrio es 8,33 x10^{-3} J / s cm ºC

Ejemplo 99. En un día frío de invierno compras castañas asadas de un vendedor ambulante. En el bolsillo de tu abrigo pones el cambio que constituye en monedas de cobre de 9,00 g a -12,0 ° C. Tu bolsillo ya contiene 14,0 g de monedas de plata a 30,0 ° C. Poco tiempo después la temperatura de las monedas de cobre es 4,00 ° C y está aumentando a una razón de 0,500 °C/s. En este momento,
a) ¿cuál es la temperatura de las monedas de plata, y
b) ¿a qué razón es el cambio?
c_{Cu} = 387 J/kg ºC, c_{Ag} = 234 J/ kg ºC
Solución.
a) El abrigo es un excelente aislador.
La energía ganada por el cobre es igual a la energía perdida por la plata.

$$m_{Cu}c_{Cu}\Delta\theta_{Cu} = m_{Ag}c_{Ag}\Delta\theta_{Ag} \qquad (1)$$

$$m_{Cu}c_{Cu}[4-(-12)] = m_{Ag}c_{Ag}(30{,}0-\theta) \Rightarrow$$

$$(9{,}0\times10^{-3})(387)(16) = (14{,}0\times10^{-3})(234)(30-\theta) \Rightarrow$$

$$17 = (30-\theta) \Rightarrow$$

$$\theta = 13{,}0^{\circ}\,\mathrm{C}$$

b) De (1):

$$m_{Cu}c_{Cu}\Delta\theta_{Cu} = m_{Ag}c_{Ag}\Delta\theta_{Ag}$$

$$m_{Cu}c_{Cu}(\theta+12)_{Cu} = m_{Ag}c_{Ag}(30-\theta)_{Ag}$$

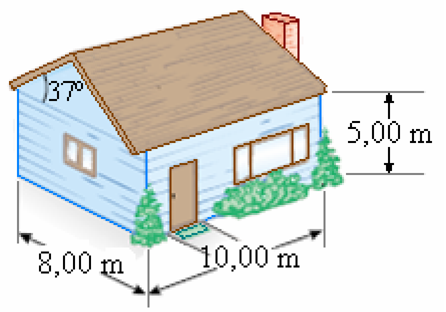
Derivando con respecto al tiempo

$$m_{Cu}c_{Cu}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{Cu} = m_{Ag}c_{Ag}\left(-\frac{d\theta}{dt}\right)_{Ag} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{Ag} = -\frac{m_{Cu}c_{Cu}}{m_{Ag}c_{Ag}}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{Cu} = -\frac{9{,}00(387)}{14{,}0(234)}(+0{,}500)$$

= - 0,532 ºC/s

Ejemplo 100. La conductividad térmica promedio de las paredes (incluidas las ventanas) y el techo de la casa mostrada en la figura es 0,480 W/m °C, y su grosor medio es 21,0 cm. La casa se calienta con gas natural con un calor de combustión (es decir, la energía proporcionada por metro cúbico de gas quemado), de 9 300 kcal/m^3. ¿Cuántos metros cúbicos de gas debe quemarse cada día para mantener una temperatura interior de 25,0 °C si la temperatura exterior es 0,0 °C? No considere la radiación y la energía perdida a través del piso.



Solución.

$$A = A_{laterales} + A_{ático} + A_{techo}$$

$$= 2(8\times5+10\times5) + 2\left(\frac{8\times4\tan37^{\circ}}{2}\right) + 2\left(10\times\frac{4}{\cos37^{\circ}}\right)$$

= 180 + 24 + 100 = 304 m^2

$$\dot{Q} = \frac{kA\Delta\theta}{L} = \frac{(4{,}80\times10^{-4})(304)(25{,}0)}{0{,}210}$$

= 17,4 kW = 4,15 kcal/s

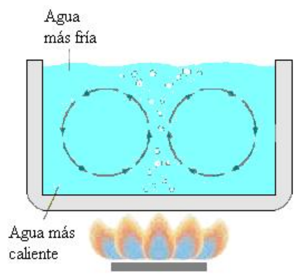
Le energía perdida por día es

$$\left(4{,}15\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{s}}\right)(86400\,\mathrm{s}) = 3{,}59\times10^{5}\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{día}}.$$

El gas necesario para reemplazar esta pérdida es

$$\frac{3{,}59\times10^{5}\ \mathrm{kcal/día}}{9300\ \mathrm{kcal/m^3}} = 38{,}6\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{día}}$$

CONVECCIÓN.
Es el proceso de transferencia de calor de un lugar a otro por el movimiento de la masa calentada.



Las leyes que rigen el flujo de calor por convección son muy complejas porque involucra fenómenos de fluidos en movimiento y el cual todavía puede ser forzado o natural por diferencia de densidades. Sin embargo, se tiene una relación empírica dada por Newton, para un cuerpo dado:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = hA\Delta\theta$$

Donde h es el coeficiente de convección, A es el área de la pared, $\Delta\theta$ es la diferencia de temperatura entre la superficie de la pared y el fluido.

EL COEFICIENTE DE CONVECCIÓN h depende de la posición de la pared y de las características del fluido y su movimiento.

COEFICIENTE DE CONVECCIÓN EN AIRE A PRESIÓN ATMOSFÉRICA	
DISPOSICION	$h\left(\dfrac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\ °\text{C}}\right)$
Pared horizontal Mirando arriba	$0{,}576\text{x}10^{-3}\left(\Delta t\right)^{1/4}$
Pared horizontal Mirando abajo	$0{,}314\text{x}10^{-3}\left(\Delta t\right)^{1/4}$
Pared vertical	$0{,}424\text{x}10^{-3}\left(\Delta t\right)^{1/4}$
Tubo horizontal o vertical	$1{,}00\text{x}10^{-3}\left(\dfrac{\Delta t}{D}\right)^{1/4}$

Ejemplo 101. Una pared plana se mantiene a temperatura constante de 100°C, y el aire sobre ambas cara está a la presión atmosférica y a 20°C. ¿Cuánto calor se pierde por convección de un metro cuadrado de superficie en ambas caras en 1 hora?
a) Si la pared es vertical
b) Si la pared e horizontal
Solución.
a) Si la pared es vertical.
El flujo de calor de ambas caras es

$$\dot{Q} = -2hA\Delta t$$

Donde

$$h = 0{,}42\times10^{-3}\left(\Delta t\right)^{1/4}\frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,{}^\circ C}$$

$\Delta t = 80$ y $\left(\Delta t\right)^{1/4} = 2{,}98$
$A = 1\ \text{m}^2$
de aquí

$$h = 0{,}42\times10^{-3}\times2{,}98$$

$$= 1{,}12\times10^{-3}\frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,{}^\circ C}$$

$$\dot{Q} = 2\times1{,}12\times10^{-3}\times80$$

$$= 0{,}179\frac{\text{kcal}}{\text{s}}$$

EL calor que se pierde en una hora será
Q = 0,179 x 3600 = 645 kcal
b) Si la pared es horizontal.
En este caso tenemos los valores para h:
Para la cara que mira arriba

$$h_1 = 0{,}596\text{ x }10^{-3}\ (\Delta t)^{1/4}$$

$$= 1{,}77\text{ x }10^{-3}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,{}^\circ C}$$

Para la cara que mira abajo

$$h_2 = 0{,}314\text{ x }10^{-3}\ (\Delta t)^{1/4}$$

$$= 0{,}94\text{ x }10^{-3}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,{}^\circ C}$$

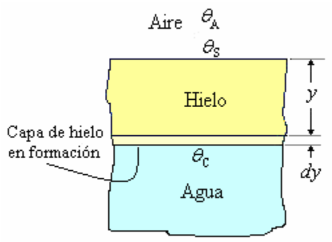
Luego: $\dot{Q} = -h_1\ A\,\Delta t\ - h_2\ A\,\Delta t$

$$\Rightarrow \dot{Q} = -(h_1 + h_2)\ A\,\Delta t$$

$$\dot{Q} = \left(2{,}71\times10^{-3}\right)(1)(80) = 0{,}217\frac{\text{kcal}}{\text{s}}$$

y el calor que se pierde en una hora será:
Q = 0,217 x 3600 = 782 cal

Ejemplo 102. El aire sobre la superficie de un lago está a una temperatura θ_A mientras que el agua está en su punto de congelación θ_c ($\theta_A < \theta_C$).
¿Cuál es el tiempo T que ha de transcurrir para que se forme una capa de hielo de espesor y
Asumir que el calor liberado cuando el agua se congela fluye a través del hielo por conducción y de la superficie al aire por convección natural.
DATOS:
h = coeficiente de convección del hielo
ρ = densidad del hielo
L = calor de fusión del hielo
k = conductividad térmica del hielo
Solución.



En la figura observamos como se va formando la capa de hielo
Calor de solidificación de la capa de hielo en formación de área A y espesor dy.

$$dQ = dmL = \rho AdyL \qquad (1)$$

Éste calor se conduce a la superficie

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{\left(\theta_C - \theta_S\right)}{y}$$

$$dQ = kA\frac{\left(\theta_S - \theta_C\right)}{y}dt \qquad (2)$$

Igualando calores (1) y (2)

$$\rho AdyL = kA\frac{\left(\theta_S - \theta_C\right)}{y}dt$$

$$\int_0^Y ydy = \frac{k}{\rho L}(\theta_S - \theta_C)\int_0^T dt$$

$$\frac{Y^2}{2} = \frac{k}{\rho L}(\theta_S - \theta_C)T$$

$$\frac{Y^2 \rho L}{2k} = (\theta_S - \theta_C)T \qquad (3)$$

El flujo de calor de la superficie al medio ambiente se produce por convección, o sea

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = -hA(\theta_S - \theta_A)$$

$$dQ = hA(\theta_A - \theta_S)dt$$

Este es el mismo calor y por lo tanto

$$\rho AdyL = hA(\theta_A - \theta_S)dt$$

$$dy = \frac{h}{\rho L}(\theta_A - \theta_S)dt$$

Integrando

$$\int_0^Y dy = \frac{h}{\rho L}(\theta_A - \theta_S)\int_0^T dt$$

$$Y = \frac{h}{\rho L}(\theta_A - \theta_S)T$$

$$\frac{Y\rho L}{h} = (\theta_A - \theta_S)T \qquad (4)$$

Sumando las expresiones (3) y (4) obtenemos

$$\left(\frac{Y^2}{2k} + \frac{Y}{h}\right)\rho L = (\theta_A - \theta_C)T$$

Finalmente,

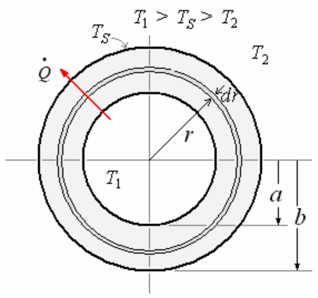
$$T = \frac{\rho L}{(\theta_A - \theta_C)}\left(\frac{Y^2}{2k} + \frac{Y}{h}\right)$$

Ejemplo 103. Un recipiente en la forma de un cascarón esférico tiene un radio interior a y un radio exterior b. La pared tiene una conductividad térmica *k*, la superficie tiene una constante de convección *h*. Si el interior se mantiene a una temperatura T_1, El ambiente exterior se encuentra a una temperatura inferior, T_2.

a) Encuentre el flujo de calor

b) Calcule la temperatura de la superficie de la esfera.

Solución



La corriente de calor por conducción a través del cascarón esférico es constante:

Del interior a la superficie de la esfera por conducción

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dr} \Rightarrow \dot{Q} = -k(4\pi r^2)\frac{dT}{dr} \Rightarrow$$

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dr} \Rightarrow \dot{Q} = -k(4\pi r^2)\frac{dT}{dr} \Rightarrow$$

$$\dot{Q}\frac{dr}{r^2} = -4\pi kdT \Rightarrow \dot{Q}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = -4\pi k\int_{T_1}^{T_S} dT$$

Finalmente

$$\dot{Q} = \frac{4\pi kab(T_1 - T_S)}{b-a} \Rightarrow (T_1 - T_S) = \dot{Q}\frac{(b-a)}{4\pi kab}$$

(1)

De la superficie de la esfera al ambiente.

$$\dot{Q} = hA\Delta T = h4\pi b^2(T_S - T_2)$$

$$\Rightarrow (T_S - T_2) = \dot{Q}\frac{1}{h4\pi b^2} \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$(T_1 - T_2) = \frac{\dot{Q}}{4\pi}\left[\frac{(b-a)}{kab} + \frac{1}{hb^2}\right]$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = \frac{4\pi(T_1 - T_2)}{\left[\frac{(b-a)}{kab} + \frac{1}{hb^2}\right]}$$

b) Reemplazando $\dot{Q}$ en (1):

$$T_1 - T_S = \frac{4\pi(T_1 - T_2)}{\left[\frac{(b-a)}{kab} + \frac{1}{hb^2}\right]}\frac{(b-a)}{4\pi kab} \Rightarrow$$

$$T_S = T_1 - \frac{4\pi(T_1 - T_2)}{\left[\frac{(b-a)}{kab} + \frac{1}{hb^2}\right]}\frac{(b-a)}{4\pi kab}$$

Ejemplo 104. El interior del ser humano se encuentra a 37°C, el espesor efectivo de la piel puede considerarse como de 3cm.

a) Para una persona cubierta de pies a cabeza por un vestido de lana de 0,5cm de espesor. Calcular

el flujo de calor que pierde en Lima (t_{amb} = 15°C) y en las madrugadas de Puno (t_{amb} = -20°C).
b) ¿Cuál debería ser el grosor de su vestido de la persona en Puno para tener la misma pérdida de calor que una persona en Lima?
Datos:
k_{piel} = 0,01W/m°C
Área del cuerpo humano persona promedio = 1,5m^2
k_{lana} = 0,0209 W/ºC
h (del cuerpo vestido) = 9 W/m^2·K,
Solución.
a) El flujo de calor atraviesa la piel y el vestido por conducción y de la superficie del vestido al ambiente por convección.
Este flujo a través de este conjunto es:

$$\dot{Q} = \frac{A\left(t_{piel} - t_{ambiente}\right)}{\frac{L_{piel}}{k_{piel}} + \frac{L_{lana}}{k_{lana}} + \frac{1}{h}}$$

En Lima:

$$\dot{Q} = \frac{1{,}5(37-15)}{\frac{0{,}03}{0{,}01} + \frac{0{,}005}{0{,}0209} + \frac{1}{9}} = 9{,}85 \text{ W}$$

En Puno:

$$\dot{Q} = \frac{1{,}5(37+20)}{\frac{0{,}03}{0{,}01} + \frac{0{,}05}{0{,}0209} + \frac{1}{9}} = 23{,}74 \text{ W}$$

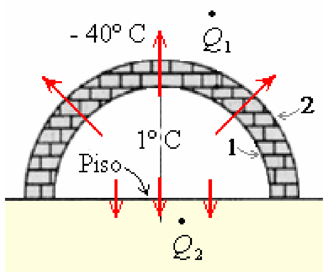
c) Para encontrar el grosor de su vestido de la persona en Puno para que tenga la misma pérdida de calor que una persona en Lima, aplicamos la misma ecuación.

$$9{,}85 = \frac{1{,}5(37+20)}{\frac{0{,}03}{0{,}01} + \frac{e}{0{,}0209} + \frac{1}{9}} \Rightarrow$$

$$e = 0{,}0209\left[\frac{1{,}5(57)}{9.85} - \frac{0{,}03}{0{,}01} - \frac{1}{9}\right] = 0{,}116 \text{ m}$$

Ejemplo 105. Se construye un iglú en forma de hemisferio con un radio interno de 1,8 m y paredes de nieve compactada de 0,5 m de espesor. En el interior del iglú el coeficiente de transferencia de calor por convección es 6 W/m^2·K; en el exterior, en condiciones normales de viento, es 15 W/m^{2}K. La conductividad térmica de la nieve compactada es 2,33 W/m K. La temperatura de la capa de hielo sobre la que se asienta el iglú es de -20 ºC y tiene la misma conductividad térmica que la nieve compactada.
a) Que calor debe proporcionar una fuente continua dentro del iglú, para que la temperatura del aire interior sea 1º C cuando la del aire exterior es - 40 ºC. Considere las pérdidas de calor a través del suelo.
b) ¿Cómo afecta el duplicar el espesor de las paredes?

Solución.
a)



Pérdida por convección en el piso

$$\dot{Q}_2 = -h_i A_p\left(\theta_p - \theta_i\right),\ A_p = \pi R_1^2$$

$$\dot{Q}_2 = -h_i\left(\pi R_1^2\right)\left(\theta_p - \theta_i\right)$$

$$\dot{Q}_2 = -[6]\left(\pi 1{,}8^2\right)(-20-1) = 1388{,}02\text{W}$$

Pérdida de calor por el domo

Por convección del aire interior a la pared interior

$$\dot{Q}_1 = -h_i A_1\left(\theta_1 - \theta_i\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}4\pi R_1^2$$

$$\dot{Q}_1 = -h_i\left(2\pi R_1^2\right)\left(\theta_1 - \theta_i\right)$$

$$\dot{Q}_1 = -6\left(2\pi 1{,}8^2\right)\left(\theta_1 - 1\right) = -122{,}08\left(\theta_1 - 1\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - 1\right) = \frac{\dot{Q}_1}{122{,}08} \qquad (1)$$

Por conducción en la pared del iglú:

$$A = \frac{1}{2}4\pi r^2$$

$$\dot{Q}_1 = -k 2\pi r^2 \frac{d\theta}{dr} \Rightarrow d\theta = -\frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = -\frac{\dot{Q}}{2\pi k}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi(2{,}33)}\left(\frac{1}{1{,}8} - \frac{1}{2{,}3}\right)$$

$$\Rightarrow (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\dot{Q}_1}{120{,}93} \qquad (2)$$

Por convección de la pared exterior al aire exterior

$$\dot{Q}_1 = -h_e A_2(\theta_e - \theta_2)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}4\pi R_2^2.$$

$$\dot{Q}_1 = -h_e(2\pi R_2^2)(\theta_e - \theta_2)$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_1 = -(15)(2\pi 2{,}3^2)(-40 - \theta_2)$$
$$= (15)(2\pi 2{,}3^2)(\theta_2 + 40)$$
$$= 498{,}32(\theta_2 + 40)$$

$$\Rightarrow (\theta_2 + 40) = \frac{\dot{Q}_1}{498{,}32} \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3):

$$(40 - 1) = \frac{\dot{Q}_1}{122{,}08} + \frac{\dot{Q}_1}{120{,}93} + \frac{\dot{Q}_1}{498{,}32}$$

$$\Rightarrow 39 = \dot{Q}_1(0{,}008 + 0{,}008 + 0{,}002)$$
$$= 0{,}018\dot{Q}_1$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_1 = \frac{39}{0{,}029} = 2166{,}67 \text{ W}$$

Salida total de calor
1388,02 + 2166.67 = 3554,69 W

La fuente debe proporcionar 3,554 kW

b) Si se duplica el espesor de la pared del domo

$$(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi(2{,}33)}\left(\frac{1}{1{,}8} - \frac{1}{2{,}8}\right)$$

$$\Rightarrow (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\dot{Q}_1}{31{,}65} \qquad (2a)$$

Sumando (1), (2a) y (3):

$$(40 - 1) = \frac{\dot{Q}_1}{122{,}08} + \frac{\dot{Q}_1}{31{,}65} + \frac{\dot{Q}_1}{498{,}32} \Rightarrow$$

$$39 = \dot{Q}_1(0{,}008 + 0{,}032 + 0{,}002) = 0{,}042\,\dot{Q}_1$$

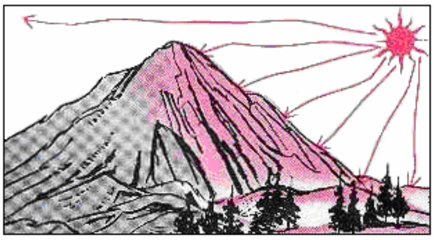
$$\Rightarrow \dot{Q}_1 = \frac{39}{0{,}042} = 928{,}57 \text{ W}$$

Salida total de calor 1388,02 + 928,57 = 2316,59 W

La fuente debe proporcionar 2,316 kW

RADIACIÓN.

Es el proceso de transferencia de calor por medio de ondas electromagnéticas durante el cual la masa del medio no interviene puesto que no se refiere a la convección, ni a la conducción, por ejemplo la transferencia de energía del sol de la tierra.



Una sustancia puede ser estimulada a emitir radiación electromagnética en varias formas, como por ejemplo un conductor eléctrico con corriente alterna de alta frecuencia emite ondas de radio, una placa bombardeada por electrones con alta velocidad emite rayos X, un líquido o sólido caliente emite radiación térmica, etc.
En esta parte trataremos solamente la radiación térmica.
Experimentalmente STEFAN y BOLTZMAN encontraron la ley que rige la radiación, mostraron que la radiación emitida, energía por unidad de tiempo y por unidad de área, por un cuerpo negro (Sustancia Capaz de absorber toda la energía que llega a él) a una temperatura T (Temperatura absoluta) θ es $R = \sigma T^4$
Donde σ es la llamada constante de Boltzman.

$$\sigma = 4{,}88 \times 10^{-8} \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{ hora K}^4}$$
$$= 5{,}67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4}$$

El calor transferido por radiación de un cuerpo a una temperatura T al medio que lo rodea a una temperatura T_0, es:

$$\dot{Q} = Ae\sigma(T^4 - T_0^4)$$

Donde e es el factor de emisividad del cuerpo a temperatura T , siendo igual a 1 para el cuerpo negro.

Ejemplo 106. La temperatura de trabajo del filamento de tungsteno de una lámpara incandescente es 2450 K, y su emisividad es 0,30. ¿Cuál es la superficie del filamento de una lámpara de 25 watts?
Solución.

Como $\dot{Q} = Ae\sigma T^4 \Rightarrow A = \dfrac{\dot{Q}}{e\sigma T^4}$

Donde: $\dot{Q} = 25\,W$, $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\dfrac{W}{m^2.K}$,

$e = 0{,}30$ y $T = 2450$ K

Reemplazando valores obtenemos la superficie:

$A = \dfrac{25}{5{,}67 \times 10^{-8}(2450)^4}$ = 0,408 x 10^{-4} m^2
= 0,408 cm^2

Ejemplo 107. Una persona desvestida tiene una superficie de 1,5 m^2 expuesta a un ambiente y a unos alrededores de 27 ºC. La temperatura de su piel es de 33 ºC y se puede considerar un emisor de radiación perfecto. Si el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 9 W/m^{2}K, hállese:
a) Las pérdidas de calor por convección y por radiación.
b) El gasto energético en kcal/día.
Solución.

a) $\dot{Q}_{conv} = -hA\Delta\theta$
= (9)(1,5)(33-27) = 81 W.

$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$
= (5,67x10^{-8})(1)(1,5)(306^4-300^4)
= (5,67x10^{-8})(1)(1,5)(6,68x10^8)
= 56,8 W

b) 2,846 kcal/día.
El gasto energético por día es:
(56,8 + 81) J/s x 3600x24 s/día = 4907520 J
Como 1 kcal = 4186 J
El gasto energético en kcal/día:
4907520 J/día x 1 kcal /4186 J = 2,846 kcal/día.

Ejemplo 108. Calcular la pérdida neta de energía radiante de una persona desnuda en una habitación a 20 ºC, suponiendo que la persona se comporta como un cuerpo negro. El área del cuerpo es igual a 1,4 m^2 y la temperatura de su superficie es de 33 ºC.
Solución.

$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$ = (5,67x10^{-8} W/m^2·K^4)(1)(1,4 m^2)(306^{4}K-293^{4}K) = (5,67x10^{-8} W/m^2·K^4)(1)(1,4 m^2)(13,98x10^8K) = 110, 97 W

Ejemplo 109. Los cables de calefacción de una estufa eléctrica de 1kW se encuentran al rojo a una temperatura de 900 K. Suponiendo que el 100% del calor emitido es debido a la radiación y que los cables actúan como radiadores ideales. ¿Cuál es el área efectiva de la superficie radiante? Suponer la temperatura ambiente de 20 ºC.
Solución.

$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$
1000 = (5,67 x 10^{-8})(1)(A)(1173^4-293^4) $\Rightarrow$
1000 = (5,67 x 10^{-8})(1)(A)(1885 x 10^8) $\Rightarrow$
1000 = 10687,95 A $\Rightarrow$
$A = \dfrac{1000}{10687{,}95}$ = 0,094 m^2

Ejemplo 110. a) ¿Cuánta potencia irradia una esfera de tungsteno (emisividad = 0,35) de 18 cm de radio a una temperatura de 25 º?
b) Si la esfera está encerrada en un recinto cuyas paredes se mantienen a –5 ºC ¿Cuál es el flujo neto de la energía liberada de la esfera?
Solución.

a) $A = \pi R^2 = \pi(0{,}18)^2 = 0{,}101736\ \text{m}^2$

$\dot{Q}_{rad} = \sigma eAT^4$
= (5,67x10^{-8})(0,35)(0,10173)(298^4)
= 15,92 W

b)
$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$
= (5,67x10^{-8})(0,35)(0,10173)(298^{4}K-278^4)
= 3,86 W

Ejemplo 111. La Tierra recibe aproximadamente 430 W/m^2 del Sol, promediados sobre toda su superficie, e irradia una cantidad igual de regreso al espacio (es decir la Tierra está en equilibrio). Suponiendo nuestro planeta un emisor perfecto (e = 1,00), estime su temperatura superficial promedio.
Solución.

$A = \pi R^2 = \pi(0{,}18)^2 = 0{,}101736\ \text{m}^2$

$\dfrac{\dot{Q}_{rad}}{A} = \sigma eT^4$ = (5,67x10^{-8})(1)(T^4) = 430

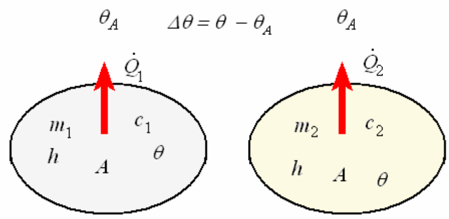
$$T = \sqrt[4]{\frac{430}{5,67 \times 10^{-8}}} = 295K \text{ , } t = 22,1\text{ºC}$$

Ejemplo 112. a) Encontrar la potencia total radiada al espacio por el Sol. Suponiendo que éste es un emisor perfecto con T = 5500 K. El radio del Sol es 7,0x10^8 m.
b) A partir del resultado anterior, determinar la potencia por unidad de área que llega a la Tierra, que se encuentra a una distancia del Sol de 1,5x10^{11} m.
Solución.
a) $A = \pi R^2 = \pi (7,0 \times 10^8)^2 = 153,86 \times 10^{16}\ \text{m}^2$

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma e A T^4$$
= (5,67x10^{-8})(1)(153,86x10^{16})(5500^4)
= 79,83x10^{24} W

b) $$\frac{Potencia}{Area} = \frac{79,83 \times 10^{24}}{4\pi (1,5 \times 10^{11})^2}$$
= 282,48 W/m^2

Ejemplo 113. Un estudiante de física observa que dos cuerpos de materiales diferentes pero con superficies iguales, se enfrían de 75 ºC a 30 ºC en 9 min y 12 min bajo las mismas condiciones. Las masas de los cuerpos son 30 g y 80 g, respectivamente. ¿Cuál es la relación entre sus calores específicos?
Solución.
La perdida de calor de los cuerpos se produce por convección y por radiación.



Por convección:
$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = hA\Delta\theta$$
h es el coeficiente de convección
A es el área de la pared
$\Delta\theta$ es la diferencia de temperatura entre la superficie de la pared y el medio.
Como los dos cuerpos tienen superficies iguales y los otros términos por estar en las mismas condiciones son iguales, nos lleva a la conclusión la pérdida por convección es igual para los dos cuerpos.
Por radiación:
$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \sigma e(\theta + 273)^4$$
Considerando que los dos cuerpos tuvieran igual facto de emisividad e, también nos lleva a la conclusión la pérdida por radiación es igual para los dos cuerpos.
Finalmente se puede decir que
$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$$

Por otra parte en el cuerpo 1:
$\Delta Q_1 = m_1 c_1 \Delta T$, la razón de la perdida de calor es
$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t_1} = \dot{Q}_1 = m_1 c_1 \frac{\Delta T}{\Delta t_1} \qquad (1)$$
En el cuerpo 2
$\Delta Q_2 = m_2 c_2 \Delta T$, la razón de la perdida de calor es
$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t_2} = \dot{Q}_2 = m_2 c_2 \frac{\Delta T}{\Delta t_2} \qquad (2)$$
Igualando (1) : (2), obtenemos:

$$m_1 c_1 \frac{\Delta T}{\Delta t_1} = m_2 c_2 \frac{\Delta T}{\Delta t_2}$$
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{m_2}{m_1}\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{80}{30}\frac{9}{12} = 2$$
La relación de sus calores especificaos es dos

DEFINICIÓN DE UN GAS IDEAL.
Los gases juegan un rol muy importante en muchos procesos termodinámicos, y antes de ir más allá, es importante considerar una forma ingeniosa de comprender las propiedades de los gases. Esta idea es llamada la teoría cinética de los gases, trata de explicar las propiedades macroscópicas de un gas examinando el comportamiento de los átomos y moléculas que forman un gas. A simple vista esto parece ser imposible porque el número de átomos involucrados es demasiado grande, alrededor de 10^{27} átomos llenan una habitación. Sin embargo utilizando la estadística, se puede predecir con mucha precisión las características de un gas. En lo siguiente asumiremos que estamos trabajando con un **gas ideal** con las propiedades siguientes:
Un gas está formado por partículas llamadas moléculas.
Las moléculas se mueven irregularmente y obedecen las leyes de Newton del movimiento.
El número total de moléculas es grande.
El volumen de las moléculas mismas es una fracción inapreciablemente pequeña del volumen ocupado por el gas.
Entre moléculas no obran fuerzas de consideración, salvo durante los choques.

Los choques son perfectamente elásticos y de duración insignificante.
Los gases reales no siguen exactamente este comportamiento, pero es una buena forma para comenzar.
El comportamiento de las masas encerradas de gases ideales se determina por las relaciones entre p, V o p, T, o V, T cuando la tercera cantidad T o V o p respectivamente, es mantenida constante; estas relaciones fueron obtenidas experimental por Boyle, Gay-Lussac y Charles respectivamente.

LEY DE BOYLE. La presión (p) de un gas ideal varía inversamente a su volumen (V) si la temperatura (T) se mantiene constante.

$$p \propto \frac{1}{V} \text{ con } T \text{ constante} \Rightarrow pV = \text{Constante}$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

LEY DE GAY-LUSSAC. La presión (p) de un gas ideal varía directamente a su temperatura (T) si el volumen (V) se mantiene constante.

$$p \propto T \text{ con } V \text{ constante} \Rightarrow \frac{p}{T} = \text{Constante}$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Nota: Esta ley se deduce con el termómetro de gas a volumen constante

$$t = 273{,}15\left(\frac{p}{p_C} - 1\right)^o C \Rightarrow \frac{t}{273{,}15} + 1 = \frac{p}{p_C}$$

$$\Rightarrow \frac{t + 273{,}15}{273{,}15} = \frac{p}{p_C} \Rightarrow \frac{T}{T_C} = \frac{p}{p_C}$$

o $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$

LEY DE CHARLES. El volumen (V) de un gas ideal varía directamente a su temperatura (T) si la presión (p) se mantiene constante.

$$V \propto T \text{ con } p \text{ constante} \Rightarrow \frac{V}{T} = \text{Constante}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Nota: Esta ley se deduce con el termómetro de gas a presión constante

$$t = 273{,}15\left(\frac{V}{V_C} - 1\right)^o C \Rightarrow \frac{t}{273{,}15} + 1 = \frac{V}{V_C} \Rightarrow$$

$$\frac{t + 273{,}15}{273{,}15} = \frac{V}{V_C} \Rightarrow \frac{T}{T_C} = \frac{V}{V_C}$$

o $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL.

El comportamiento de gases ideales se caracteriza en términos de p, V y T. Tal ecuación se llama la ecuación del gas ideal. El comportamiento de cualquier estado de la materia se puede caracterizar generalmente por una cierta relación entre la presión (p) y la densidad (ρ) que por supuesto corresponde al volumen (V). La ecuación de los gases ideales puede obtenerse por la combinación de dos de las tres leyes de los gases indicadas anteriormente.
Sea el gas encerrado con condiciones iniciales p_1, V_1 y T_1, llevado a un estado final p_2, V_2 y T_2 como sigue:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

o $\frac{pV}{T} = \text{Constante}$

Nota: Se encontró que el valor de la constante es dependiente en la masa del gas dado y también se encontró que no es igual para una unidad de masa de diferentes gases. Sin embargo, se encuentra que si lo es para 1 mol de masa (la masa numéricamente equivalente en gramos al peso molecular, ejemplo, 2 g para H_2, 32 g para el O_2, 28 g para el N_2, etc.) de cualquier gas ideal entonces el valor de la constante es igual para todos los gases. Esta constante igual para todos los gases es denotada generalmente por "R" y llamada la constante universal de los gases.

$$R = 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 1{,}986 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

La ecuación del gas ideal por lo tanto se escribe normalmente como

$$pV = nRT$$

Donde n = número de moles.
El número de moles se define como, el cociente de la masa de gas M a su masa molecular (M_0)

$$n = \frac{M}{M_0}$$

Si es m la masa de cada molécula de un gas y N es el número de las moléculas que hacen la masa total M.
N_A = número de Avogadro = número de moléculas en 1 mol de gas (cualquier gas).
Entonces $M = mN$ y $M_0 = mN_A$.

Por lo tanto $n = \dfrac{N}{N_a}$

Luego $pV = nRT = \dfrac{M}{M_0}RT = \dfrac{N}{N_a}RT$

Ahora, $pV = \dfrac{M}{M_0}RT \Rightarrow pV = \dfrac{mN}{mN_A}RT \Rightarrow$

$pV = N\dfrac{R}{N_A}T$

El cociente entre las dos constantes R y N_A es la constante que designamos por k_B, la constante de Boltzmann.

$$k_B = \frac{8{,}314\,\text{J/mol K}}{6{,}022\times 10^{23}\,/\text{mol}} = 1{,}38\times 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Ejemplo 114. Una llanta de automóvil se infla con aire inicialmente en 10,0 ° C y la presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire es comprimido a 28,0% de su volumen original y la temperatura aumenta a 40,0 º C.

a) ¿Cuál es la presión de las llantas?

b) Después de que el automóvil viaja a alta velocidad, la temperatura del aire se eleva a 85,0 ° C y el volumen interior de la llanta aumenta en 2,00%. ¿Cuál es la nueva presión de las llantas (absoluta) en pascales?

Solución.

a) Inicialmente $p_iV_i = n_iRT_i \Rightarrow$

$(1{,}00\,\text{atm})V_i = n_iR(10{,}0 + 273{,}15)\,\text{K}$

Finalmente $p_fV_f = n_fRT_f \Rightarrow$

$p_f(0{,}280V_i) = n_iR(40{,}0 + 273{,}15)\,\text{K}$

Dividiendo estas ecuaciones,

$$\frac{0{,}280\,p_f}{1{,}00\,\text{atm}} = \frac{313{,}15\,\text{K}}{283{,}15\,\text{K}} \Rightarrow$$

$p_f = 4{,}00 \times 10^5$ Pa (absoluta)

b) Después de manejado

$p_m(1{,}02)(0{,}280V_i) = n_iR(85{,}0 + 273{,}15)\,\text{K}$

Dividiendo con

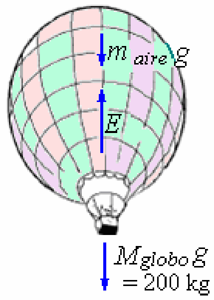
$p_f(0{,}280V_i) = n_iR(40{,}0 + 273{,}15)\,\text{K}$

$$\frac{p_m}{p_f}(1{,}02) = \frac{358{,}15}{313{,}15} \Rightarrow$$

$p_m = 1{,}121\,p_f = 4{,}49 \times 10^5$ Pa

Ejemplo 115. La masa de un globo de aire caliente y su carga (sin incluir el aire interior) es de 200 kg. El aire exterior esta a 10,0 ° C y 101 kPa. El volumen del globo es de 400 m^3. ¿A qué temperatura el aire en el globo se calienta antes de que el globo despegue? (La densidad del aire a 10,0° C es 1,25 kg/m^3.

Solución.



$\sum F_y = 0:\; E - m_{aire}g - M_{globo}g = 0$

$\Rightarrow \;\rho_{ext}gV - \rho_{int}gV - (200)g = 0$

$\Rightarrow \;(\rho_{ext} - \rho_{int})V = 200$ kg

La densidad del aire exterior es 1,25 kg/m^3.

De $pV = nRT \Rightarrow \dfrac{n}{V} = \dfrac{p}{RT}$

La densidad es inversamente proporcional a la temperatura, y la densidad del aire caliente es:

$$\rho_{int} = (1{,}25)\frac{(10 + 273)\,\text{K}}{T_{int}}$$

Luego $(1{,}25)\left(1 - \dfrac{283}{T_{int}}\right)(400) = 200$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{283}{T_{int}} = 0{,}400 \Rightarrow \dfrac{283}{T_{int}} = 0{,}600$

$\Rightarrow T_{int} = 472$ K

Ejemplo 116. Un tubo cilíndrico de medio metro de longitud se introduce en mercurio hasta su mitad; después se tapa el extremo superior y se retira. Calcular

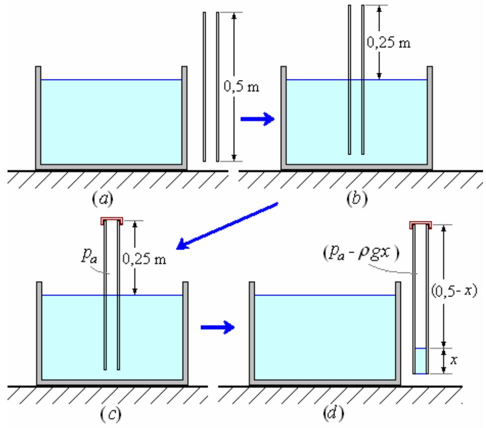
a) la longitud de mercurio que quedará en el tubo

b) La presión del aire encerrado sobre él.

La presión atmosférica es de 76 cm de mercurio.

Solución.

a) El gráfico muestra las diversas etapas del proceso.



Aplicando la ley de los Boyle entre las etapas (*c*) y (*d*):

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$p_a 0{,}25 A = (p_a - \rho_{Hg} g x)(0{,}5 - x) A$$

$$p_a 0{,}25 = p_a 0{,}5 - p_a x - \rho_{Hg} g 0{,}5 x + \rho_{Hg} g x^2$$

$$\rho_{Hg} g x^2 - (p_a + \rho_{Hg} g 0{,}5) x + p_a 0{,}25 = 0$$

$$x^2 - (0{,}76 + 0{,}5) x + 0{,}76 \times 0{,}25 = 0$$

$$x^2 - 1{,}26 x + 0{,}19 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$x = 0{,}63 \pm \sqrt{0{,}63^2 - 0{,}19}$$

$$x = 0{,}63 \pm 0{,}45$$

$$x = \begin{cases} 1{,}08 \\ 0{,}18 \end{cases}$$

La longitud de mercurio que queda en el tubo es 0,18 m.

b) La presión del aire encerrado sobre él.

$$p = p_a - \rho_{Hg} g x$$

$$= \rho_{Hg} g 0{,}76 - \rho_{Hg} g x = \rho_{Hg} g (0{,}76 - x)$$

$$= 13600 \times 9{,}8 (0{,}76 - 0{,}18)$$

$= 0{,}773 \times 10^5$ Pa

Ejemplo 117. Un conductor inicia su viaje en una mañana fría cuando la temperatura es 4ºC, y mide la presión de la llanta y ve que el manómetro lee 32 psi (2,2 x 10^5 Pa). Después de manejar todo el día, las llantas se han calentado, y por la tarde la temperatura de las llantas se ha elevado a 50ºC. Asumiendo que el volumen es constante, ¿a que presión se habrá elevado el aire en las llantas?

1 atm = 1,013 Pa = 14,7 psi

Solución.

Tomar en cuenta que un manómetro mide la presión manométrica ($p_m = p - p_a$). Luego la presión inicial es

$$p_1 = p_m + p_a \Rightarrow p_1 = 32 + 14{,}7 = 46{,}7 \text{ psi}$$

$$T_1 = 4 + 273{,}15 = 277{,}15 \text{ K} \text{ y}$$

$$T_2 = 50 + 273{,}15 = 323{,}15 \text{ K}$$

$$p_1 V_1 = nRT_1 \text{ y } p_2 V_2 = nRT_2,\ V_1 = V_2$$

Dividiendo estas ecuaciones:

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{nRT_1}{nRT_2} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \left(\frac{323{,}15}{277{,}15}\right)(46{,}7) = 54{,}5 \text{ psi}$$

absoluta

o 54,5 – 14,7 = 39,8 psi, presión manométrica.

Ejemplo 118. Un gas ideal ocupa un volumen de 100 cm^3 a 20 ºC y a una presión de 100 Pa. Determine el número de moles de gas en el recipiente.

Solución.

p = 100 Pa = 9,8692 x 10^{-4} atm

V = 100 x 10^{-6}m^3 = 0,1 litros

t = 20 °C

T = 293,15 K

R = 0,082 litro atm/mol K = 8,31 J/mol K

Se puede hacer el cálculo en los dos sistemas de unidades usando

$$n = \frac{pV}{RT}$$

$$n = \frac{9{,}8692 \times 10^{-4} \times 0{,}1}{00{,}082 \times 293{,}15} = 4{,}11 \times 10^{-6} \text{ mol}$$

$$n = \frac{100 \times 100 \times 10^{-6}}{8{,}31 \times 293{,}15} = 4{,}11 \times 10^{-6} \text{ mol}$$

Ejemplo 119. Se mantiene un gas ideal en un recipiente a volumen constante.

Inicialmente, su temperatura es 10ºC y su presión es 2,5 atmósferas ¿Cuál será la presión cuando la temperatura sea de 80ºC?

Solución.

p_1 = 2,5 atm, t_1 = 10 ºC, T_1 = 283,15K,

t_2 = 80 ºC, T_2 = 353,15 K

$$n = \frac{p_1 V}{RT_1} = \frac{p_2 V}{RT_2} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1}$$

$$= \frac{2{,}5 \times 353{,}15}{283{,}15} = 3{,}118 \text{ atm}$$

Ejemplo 120. Un cilindro con un émbolo móvil contiene un gas a una temperatura de 127 ºC, una presión de 30 kPa y un volumen de 4 m^3 ¿Cuál será su temperatura final si el gas se comprime a 2,5 m^3 la presión aumenta a 90 kPa?

Solución.

p_1 = 30 x 10^3 Pa, V_1 = 4m^3, t_1 = 127 ºC,

T_1 = 400,15K

p_2 = 90 x 10^3 Pa, V_2 = 2,5m^3

De $n = \dfrac{p_1 V_1}{RT_1} = \dfrac{p_2 V_2}{RT_2}$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = \frac{90 \times 10^3 \times 2{,}5}{30 \times 10^3 \times 4} 400{,}15$$

$= 750{,}28\text{K} = 477{,}13$ ºC

Ejemplo 121. Se encuentra contenido un gas en una vasija de 8 L, a una temperatura de

20ºC y a una presión de 9 atmósferas:
a) Determine el número de moles en la vasija.
b) ¿Cuántas moléculas hay en la vasija?
Solución.
p = 9 atm, V = 8 litros, t = 20 ºC, T = 293,15K
a) $n = \dfrac{pV}{RT} = \dfrac{9 \times 8}{0{,}082 \times 293{,}15}$
= 3,0 mol
b) N_A = 6,0221367 x 10^{23} / mol
$N = n\, N_A$ = 3 x 6,0221367 x 10^{23}
= 1,81 x 10^{24} moléculas

Ejemplo 122. Se infla la llanta de un automóvil con aire inicialmente a 10 ºC y a presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime a 28% de su volumen inicial y su temperatura aumenta a 40 ºC. ¿Cuál es la presión del aire?
Después de manejar el automóvil a altas velocidades, la temperatura del aire de las ruedas aumenta a 85 ºC y el volumen interior de la rueda aumenta 2 %. ¿Cuál es la nueva presión en la rueda? Exprese su respuesta en Pa (absoluta) y en psi (lb/pulg^2) (manométrica).
(1 atm = 14,70 psi)
Solución.
Primera parte
p_1 = 1 atm, $V_1 = V$, t_1 = 10 ºC, T_1 = 283,15K
V_2 = 0,28V, t_2 = 40 ºC, T_2 = 313,15K
De $pV = nRT$ como la masa no varía

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow\ p_2 = p_1\frac{V_1T_2}{V_2T_1} = 1 \times \frac{V \times 313{,}15}{0{,}28V \times 283{,}15}$$

= 3,95 atm = 4,0 x 10^5 Pa
Nota la presión manométrica p'_2, es la presión relativa a la atmosférica, es decir
p'_2 = 3,95 – 1 = 2,95 atm
= 2,95 x 14,7 = 43,365 psi

Segunda parte
t_2 = 85 ºC, T_2 = 358,15 K, V_2 = 1,02 x 0,28V

$$p_2 = p_1\frac{V_1T_2}{V_2T_1} = 1 \times \frac{V \times 358{,}15}{1{,}02 \times 0{,}28V \times 283{,}15}$$

= 4,43 atm = 4,42884 x 10^5 Pa
y la manométrica será
p'_2 = 4,43 -1 = 3,43 atm = 3,43 x 14,7 = 50,42 psi

Ejemplo 123. Una caja cúbica metálica de 20 cm de lado, contiene aire a la presión de 1 atm y a 300 K de temperatura. Se cierra herméticamente, de forma que el volumen sea constante y se calienta hasta 400 K. Hallar la fuerza neta desarrollada sobre cada pared de la caja.
Solución.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_a}{300} = \frac{p_2}{400} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{400}{300}p_a = \frac{4}{3}\left(1{,}013x10^5\right) = 1{,}35 \text{ x } 10^5 \text{ Pa}$$

Fuerza neta desarrollada sobre cada pared de la caja $(p_1 - p_a)A$ =
$\left(1{,}35x10^5 - 1{,}013x10^5\right)(0{,}2)^2$
= 1,348x10^3 = 1348 N

Ejemplo 124. Una campana de buzo cilíndrica de 3 m de diámetro y 4 m de altura con el fondo abierto se sumerge a una profundidad de 220 m en el océano. La temperatura en la superficie es de 25 ºC y en el fondo, a los 220 m, es de 5 ºC. La densidad del agua de mar es de 1025 kg/m^3. ¿Cuánto subirá el nivel del agua adentro de la campana cuando se sumerge?
Solución.
Sea h esa altura.
p_1 = 1 atm = 101325 Pa,
$V_1 = \pi r^2 H$, r = 1,5m, H = 4m
t_1 = 25 ºC, T_1 = 298,15 K
t_2 = 5 ºC, T_2 = 278,15 K
$V_2 = \pi r^2(H - h)$
La campana está a una profundidad h' = 220m
El nivel del agua en la campana está a profundidad
$h' - h$
La presión es $p_2 = p_1 + \rho g(h' - h)$
g = 9,8 m/s^2
ρ = 1025 kg/m^3
Donde tenemos $\dfrac{p_1V_1}{RT_1} = \dfrac{p_2V_2}{RT_2}$
o sea

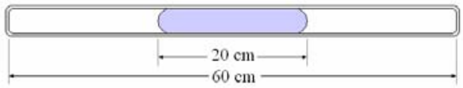
$$\frac{p_1H}{T_1} = \frac{(p_1 + \rho g)(h' - h)(H - h)}{T_2}$$

Poniendo los valores:

$$\frac{101325 \times 4}{298{,}15} = \frac{[101325 + 1025 \times 9{,}8(220 - h)(4 - h)]}{278{,}15}$$

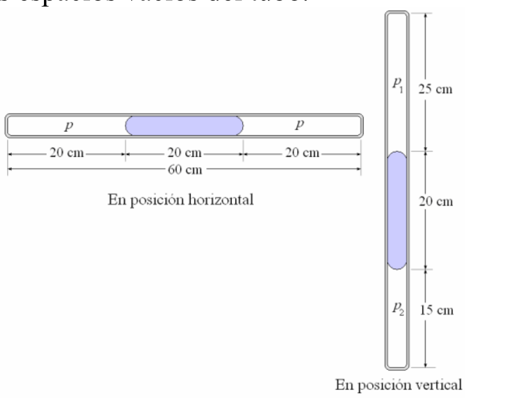
Ecuación que tiene por solución
h = 3,834m

Ejemplo 125. En el centro de un tubo horizontal de longitud 60 cm, cerrado en ambos extremos, se encuentra una columna de mercurio de longitud 20 cm.

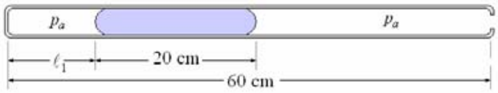


Si ponemos el tubo en posición vertical, la columna de mercurio se traslada a una distancia 5 cm de la posición inicial. ¿A qué distancia del extremo cerrado del tubo quedará el inicio de la columna de mercurio?
a) Si abrimos uno de los extremos del tubo en posición horizontal,
b) Si abrimos el extremo superior en posición vertical.
c) Si abrimos el extremo inferior en posición vertical.
La presión atmosférica es igual a la presión de la columna de mercurio de altura 76 cm. La temperatura permanece constante.

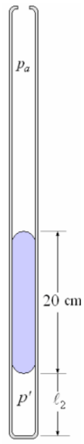
Solución.
Como paso previo vamos a calcular la presión p en los espacios vacíos del tubo.



Lado derecho
En posición horizontal: Presión p , volumen $20A$
En posición vertical: p_1, volumen $25A$
Por la ley de los gases: $p20A = p_2 25A$ (1)
Lado derecho
En posición horizontal:
Presión p , volumen $20A$
En posición vertical:
Presión p_2, volumen $15A$
Por la ley de los gases:
$p20A = p_1 15A$ (2)
Por el principio de Pascal:
$p_2 = p_1 + \rho_{Hg} g 20$ (3)
De (1) y (2):
$p_1 = 0{,}6 p_2$
Reemplazando p_1 en (3):
$p_2 = 0{,}6 p_2 + \rho_{Hg} g 20 \Rightarrow$
$$p_2 = \frac{\rho_{Hg} g 20}{0{,}4} = \rho_{Hg} g 50$$
Reemplazando p_2 en (1):
$p 20A = (\rho_{Hg} g 50) 25A \Rightarrow$
$p = 62{,}5 \rho_{Hg} g$
a) El tubo en posición horizontal con un extremo abierto.
Como un lado esta abierto se encuentra a presión atmosférica, el equilibrio se logra cuando la presión en el otro lado se iguala.

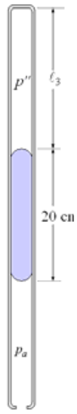


Aplicando la ley de los gases al extremo derecho para antes y después de abrir el extremo
$p20A = p_a \ell_1 A \Rightarrow 62{,}5 \rho_{Hg} g 20A = 76 \rho_{Hg} g \ell_1 A$
$\Rightarrow$
$$\ell_1 = \frac{62{,}5 \times 20}{76} = 16{,}44 \text{ cm}$$
La columna de mercurio se encuentra a 16,44 cm del extremo cerrado del tubo.
b) El tubo en posición vertical con el extremo superior abierto.



$p' = p_a + \rho_{Hg} g 20 = (76 + 20)\rho_{Hg} g$
Aplicando la ley de los gases al extremo derecho para antes de abrir en posición horizontal y después de abrir el extremo superior.
$p20A = p' \ell_2 A \Rightarrow$
$62{,}5 \rho_{Hg} g 20A = (76 + 20)\rho_{Hg} g \ell_2 A$
$$\Rightarrow \ell_2 = \frac{62{,}5 \times 20}{96} = 13{,}02 \text{ cm}$$
La columna de mercurio se encuentra a 13,02 cm del extremo cerrado.

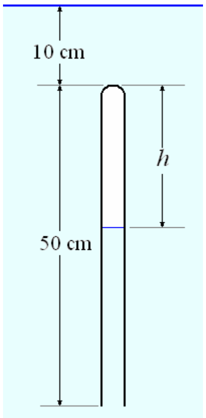
c) El tubo en posición vertical con el extremo inferior abierto.



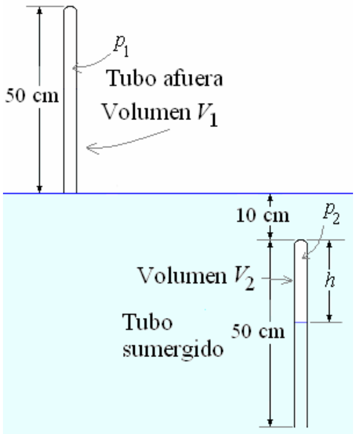
$p'' = p_a - \rho_{Hg} g 20 = (76 - 20)\rho_{Hg} g$
Aplicando la ley de los gases al extremo derecho para antes de abrir en posición horizontal y después de abrir el extremo inferior.
$p20A = p'' \ell_3 A \Rightarrow$
$62{,}5 \rho_{Hg} g 20A = (76 - 20)\rho_{Hg} g \ell_3 A$
$$\Rightarrow \ell_3 = \frac{62{,}5 \times 20}{56} = 22{,}32 \text{ cm}$$

La columna de mercurio se encuentra a 22,32 cm del extremo cerrado.

Ejemplo 126. Un tubo de vidrio cerrado en uno de sus extremos tiene 50 cm de longitud y una sección transversal de 0,5 cm^2. El tubo se sumerge en agua como se muestra en la figura. Siendo la distancia entre la superficie del agua y el extremo cerrado igual a 10 cm.
a) Calcular la altura *h*.
b) ¿Qué fuerza *F* es necesaria aplicar al tubo, para mantenerlo debajo del agua.
La masa del tubo es 15 gramos.
La presión atmosférica igual a 760 mm de mercurio?



Solución.
a) Cálculo de la altura *h*.
La figura muestra al tubo antes de sumergirlo y sumergido.



Por la ley de los gases

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

$$p_1 = p_a,\ V_1 = \left(0,5\times10^{-4}\right)0,5\ \text{m}^3$$

$$p_2 = p_a + \rho g(0,10 + h)\ ,\ V_2 = 0,5\times10^{-4}h\ \text{m}^3$$

Reemplazando:

$$p_a\left(0,5\times10^{-4}\right)0,5 = \left[p_a + \rho g(0,01 + h)\right]0,5\times10^{-4}h$$

$$0,5\frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g}h + 0,01h + h^2$$

$$h^2 + \left(\frac{p_a}{\rho g} + 0,01\right)h - 0,5\frac{p_a}{\rho g} = 0$$

Siendo $\dfrac{p_a}{\rho g} = \dfrac{1,013\times10^5}{1000\times9,8} = 10,34\ \text{m}$

Tenemos:

$$h^2 + 10,35h - 5,17 = 0$$

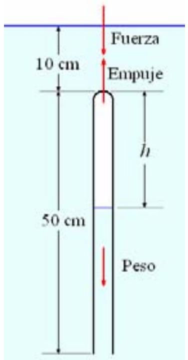
$$h = -5,17 \pm \sqrt{26,71 + 5,17} = -5,17 \pm 5,64$$

Las soluciones son

$h = 0,47$ m y $h = -10,81$ m

La solución con significado es $h = 0,47$ m

b) Cálculo de la fuerza F para mantener al tubo debajo del agua.
Aplicamos la segunda ley de Newton
En la posición de equilibrio tenemos



E = fuerza de empuje.
mg = Peso

$$E = \rho g\left(0,5\times10^{-4}h\right) = 0,235$$

$$mg = 0,015g = 0,147$$

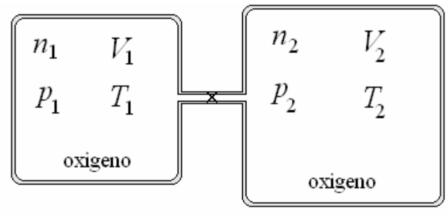
$$E - mg - F = 0 \Rightarrow$$

$$F = E - mg = 0,2352 - 0,147 = 0,0882$$

La fuerza es 0,0882 N

Ejemplo 127. Dos recipientes aislados térmicamente están conectados por medio de un tubo delgado que tiene una válvula inicialmente cerrada. El recipiente 1, de volumen 16,8 litros, contiene oxigeno a una temperatura de 300 K y una presión de 1,75 atm. El recipiente 2, de volumen 22,4 litros, contiene oxigeno a la temperatura de 450 K y a presión de 2,25 atm. Cuando la válvula se abre, los gases de en los dos recipientes se mezclan, y la temperatura y presión se uniformiza.
a) ¿Cuál es la temperatura final?
b) ¿Cuál es la presión final?
Solución.

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$



El recipiente 1

p_1 = 1,75(1,013 x 10^5) = 1,773 x 10^5 Pa,

T_1 = 300 K, R = 8,314 Nm/mol K

V_1 = 16,8 x 10^{-3} m^3

Contiene

$$n_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{\left(1{,}773\times 10^5\right)\left(16{,}8\times 10^{-3}\right)}{8{,}314(300)}$$

= 1,194 mol.

El recipiente 2

p_2 = 2,25(1,013 x 10^5) = 2,279 x 10^5 Pa,

T_2 = 450 K, R = 8,314 Nm/mol K

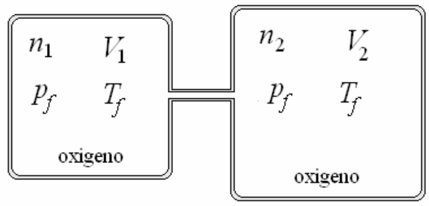
V_2 = 22,4 x 10^{-3} m^3

Contiene

$$n_2 = \frac{p_2V_2}{RT_2} = \frac{\left(2{,}279\times 10^5\right)\left(22{,}4\times 10^{-3}\right)}{8{,}314(450)}$$

= 1,365 mol.

a)



Calor que recibe 1 + calor que cede 2 = 0

$$m_1c\left(T_f - T_1\right) + m_2c\left(T_f - T_2\right) = 0$$

Siendo

$$m_1 = n_1M \ , \ m_2 = n_{\circ 2}M$$

Tenemos

$$n_1Mc\left(T_f - T_1\right) + n_2Mc\left(T_f - T_2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$n_1\left(T_f - T_1\right) + n_2\left(T_f - T_2\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$1{,}194\left(T_f - 300\right) + 1{,}365\left(T_f - 450\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$1{,}194T_f - 358{,}2 + 1{,}365T_f - 614{,}25 = 0 \ \Rightarrow$$

$$T_f = \frac{358{,}2 + 614{,}25}{1{,}194 + 1{,}365} = \frac{972{,}45}{2{,}559} = 380{,}01\text{ K}$$

La temperatura final del gas es 380,1 K.

b) La presión final

$$p_f = \frac{\left(n_1 + n_2\right)RT_f}{\left(V_1 + V_2\right)} = \frac{2{,}559\times 8{,}314\times 380}{\left(16{,}8 + 22{,}4\right)\times 10^{-3}}$$

= 2,06 x 10^5 Pa

La presión final del gas es 2,06 x 10^5 Pa o 2,036 atm

Ejemplo 128. Dos ampollas de volúmenes iguales unidas por medio de un tubo delgado de volumen muy pequeño contienen hidrogeno a 0º C y a una atmosfera de presión.

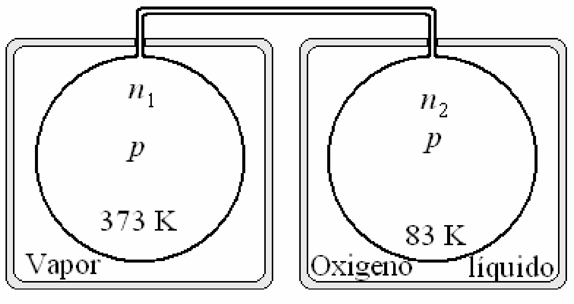
a) ¿Cuál será la presión del gas cuando se sumerge una de las ampollas en vapor a 100º C y la otra a oxigeno líquido a – 190º C?

El volumen de cada ampolla es 10^{-3} m^3 y la densidad del hidrogeno es 0,09 kg/m^3 a 0º C y 1 atmosfera.

b) ¿Qué masa de hidrogeno pasa a lo largo del tubo de conexión?

Solución.

La figura muestra cuando las ampollas están a diferentes temperaturas



Ampolla en vapor a 100º C

Volumen V, presión p, temperatura T_1 y número de moles n_1.

$$pV = n_1RT_1 \qquad (1)$$

Ampolla en vapor a - 190º C

Volumen V, presión p, temperatura T_2 y número de moles n_2.

$$pV = n_2RT_2 \qquad (2)$$

Dividiendo (1) y (2):

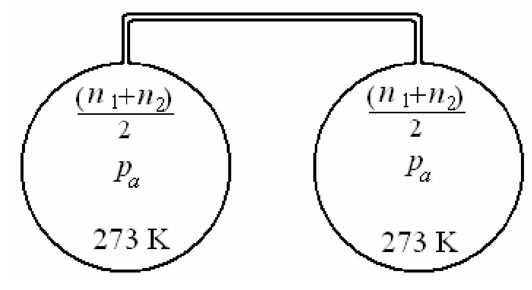
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$T_1 = 273 + 100 = 373\text{ K}$$

$$T_2 = 273 - 190 = 83\text{ K}$$

En la situación antes de calentar una y enfriar la otra, el número de moles en las ampollas son iguales, luego:

El número de moles en cada una es el promedio $\frac{\left(n_1 + n_2\right)}{2}$



La presión es la atmosférica y la temperatura 0º C.

$T_0 = 273$ K

Aplicando la ley del gas ideal:

$$p_a V = \frac{(n_1 + n_2)}{2} R T_0 \qquad (3)$$

Dividiendo (1) entre (3):

$$\frac{pV}{p_a V} = \frac{n_1 R T_1}{\frac{(n_1 + n_2)}{2} R T_0} \Rightarrow$$

$$\frac{p}{p_a} = \frac{2 n_1 T_1}{(n_1 + n_2) T_0} = \frac{2T_1}{\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) T_0}$$

$$= \frac{2T_1}{\left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right) T_0} \Rightarrow$$

$$p = \frac{2T_1}{\left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right) T_0} p_a = \frac{2(373)}{\left(1 + \frac{373}{83}\right)(273)} p_a$$

= 0,497 atm

b) Restando 1 a cada lado de

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$\frac{n_1}{n_2} - 1 = \frac{T_2}{T_1} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_2} = \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_1}{T_1} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} - 1 = \frac{T_2}{T_1} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n_1 - n_2)}{n_2} = \frac{(T_2 - T_1)}{T_2} \qquad (4)$$

De igual manera obtenemos

$$\Rightarrow \frac{n_1 + n_2}{n_2} = \frac{T_2 + T_1}{T_1} \qquad (5)$$

(4) entre (5) $\dfrac{(n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)} = \dfrac{(T_2 - T_1)}{(T_2 + T_1)}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{(n_1 - n_2)}{2}}{\frac{(n_1 + n_2)}{2}} = \frac{(T_2 - T_1)}{(T_2 + T_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{(n_1 - n_2)}{2}}{\frac{(n_1 + n_2)}{2}} = \frac{(T_2 - T_1)}{(T_2 + T_1)}$$

La relación entre la masa que pasa de una a otra con respecto a la masa inicial de una ampolla es igual a la relación del numero de moles que pasa de una a otra con relación al numero de moles inicial en una ampolla.

La masa en cada ampolla es

$$m = \rho V = \left(0{,}09 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(10^{-3}\,\text{m}^3\right) = 9 \text{ x } 10^{-5} \text{ kg}$$

Luego:

$$\frac{\text{masa que pasa}}{\text{masa de una ampolla}} = \frac{\frac{(n_1 - n_2)}{2}}{\frac{(n_1 + n_2)}{2}} = \frac{(T_2 - T_1)}{(T_2 + T_1)}$$

$$\frac{\text{masa que pasa}}{9 \times 10^{-5}\ kg} = \frac{(373 - 83)}{(373 + 83)} = \frac{290}{456} = 0{,}64$$

$$\text{Masa que pasa} = 0{,}64\left(9 \times 10^{-5}\right)$$
$$= 5{,}72 \text{ x } 10^{-5} \text{ kg}$$

Ejemplo 129. Una campana de buceo de forma cilíndrica con una altura de 2,50 m cerrada en el extremo superior y abierta en el extremo inferior. La campana se baja del aire en el agua de mar (ρ = 1,025 g/cm^3). El aire en la campana inicialmente a 20,0 ° C. La campana se baja a una profundidad (medido en la parte inferior de la campana), de 45,0 brazas o 82,3 m. En esta profundidad la temperatura del agua es 4,0 ° C, y la campana se encuentra en equilibrio térmico con el agua.

a) ¿Qué altura tiene el agua de mar dentro de la campana?

b) ¿Cuál es la mínima presión del aire debe elevarse en la campana para expulsar el agua que entró?

Solución.

a) Inicialmente el aire en la campana satisface

$$p_a V_{canpana} = nRT_i \Rightarrow$$

$$p_0 (2{,}50A) = nRT_i \qquad (1)$$

Cuando se baja la campana, el aire en la campana satisface

$$p_{campana}(2{,}50 - x)A = nRT_f \qquad (2)$$

x es la altura de agua en la campana. También, la presión en la campana, una vez bajada, es igual a la presión del agua de mar a la profundidad del nivel del agua en la campana.

$$p_{campana} = p_a + \rho g(82{,}3 - x) \approx p_a + \rho g(82{,}3) \qquad (3)$$

La aproximación es buena, porque $x < 2{,}50$ m.

Sustituyendo (3) en (2) y sustituyendo *nR* de (1) en (2)

$$[p_a + \rho g(82{,}3)](2{,}50 - x)A = p_a V_{campana} \frac{T_f}{T_i}$$

Con p_a = 1 atm = 1,013 x 10^5 Pa y

ρ = 1,025 x 10^3 kg/m^3

$$x = 2{,}50\left[1 - \frac{T_f}{T_i}\left(1 + \frac{\rho g 82{,}3}{p_a}\right)^{-1}\right]$$

$$= 2{,}50\left[1 - \frac{277{,}15}{293{,}15}\left(1 + \frac{(1000)(9{,}80)82{,}3}{1{,}013 \times 10^5}\right)^{-1}\right]$$

$= 2{,}24$ m

b) Si se saca el agua de la campana, la presión de aire en la campana debe elevarse a la presión del agua en la base de la campana, esto es,

$p_{campana} = p_a + \rho g(82{,}3)$

$= 1{,}013 \times 10^5 + (1{,}025 \times 10^3)(9{,}80)(82{,}3)$

$= 9{,}28 \times 10^5$ Pa $= 9{,}16$ atm

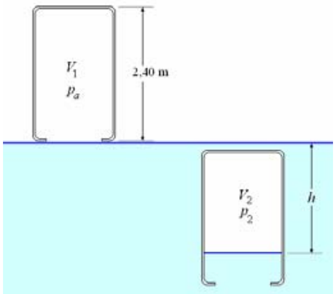
Ejemplo 130- Un cilindro de sección transversal 9 m^2 y altura 2,40 m cerrado en la parte superior y abierto en la base se usa como campana de buceo.

a) ¿A qué profundidad debe bajarse en agua tal que el aire en su interior se comprima 5/6 de su volumen original, si la presión atmosférica en aquel instante es 76 cm de mercurio?

b) Se bombea aire desde la superficie para mantiene a la campana llena con aire. ¿Cuántos moles de aire han pasado a través de la bomba cuando esta a la profundidad calculada, si la temperatura es 10º C?

Solución.

a) Sea h la profundidad en la que se encuentra el nivel del agua dentro de la campana



$p_a V_1 = p_2 V_2$

p_1 = presión atmosférica.

$V_1 = V$ $= 2{,}40 \times 9 = 21{,}6$ m^2

$p_2 = p_a + \rho g h$ = presión atmosférica.

$V_2 = \dfrac{5}{6}V$ $= 18$ m^2

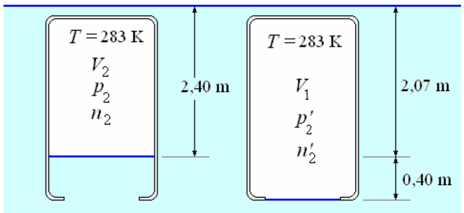
$$p_2 = \frac{V_1}{V_2} p_a = \frac{6}{5} p_a = 1{,}2 p_a$$

Por el principio de Pascal

$$p_2 = p_a + \rho g h \Rightarrow \rho g h = p_2 - p_a = \frac{p_a}{5}$$

$$\Rightarrow h = \frac{p_a}{5\rho g} = \frac{1{,}013 \times 10^5}{5(1000)(9{,}8)} = 2{,}07 \text{ m}$$

b)



El número de moles dentro de la campana lo encontramos usando la ley del gas ideal.

$p_2 V_2 = n_2 R T \Rightarrow$

$$n_2 = \frac{p_2 V_2}{RT} = \frac{1{,}2(1{,}013 \times 10^5)(18)}{(8{,}31)(283)}$$

$= 930{,}4$ moles

Cuando se llena de aire a la campana el volumen es $V_1 = V$ $= 2{,}40 \times 9 = 21{,}6$ m^2

La presión es

$$p'_2 = p_a + \rho g\left(h + \frac{2{,}40}{6}\right)$$

$= 1{,}013 \times 10^5 + 1000(9{,}8)(2{,}47)$

$= 1{,}25506 \times 10^5$ N/m^2

$p'_2 V_1 = n'_2 R T \Rightarrow$

$$n'_2 = \frac{p'_2 V_1}{RT} = \frac{(1{,}25506 \times 10^5)(21{,}6)}{(8{,}31)(283)}$$

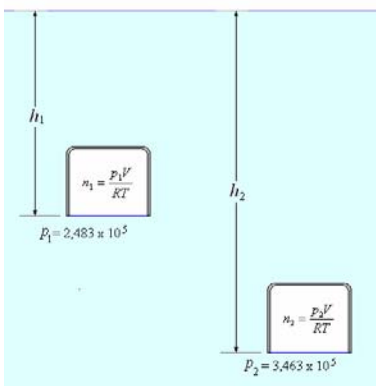
$= 1152{,}74$ moles

El número de moles de aire que han pasado a través de la bomba es:

1152,74 moles - 930,4 moles = 222,34 moles

Ejemplo 131. Una campana de buceo se introduce en un lago de agua dulce en un día en que la presión es de 760 mm de mercurio, el aire que se bombea para mantener el nivel de agua en la campana constante. Encontrar la relación entre las masas de aire en la campana cuando el nivel del agua en la campana está a 15 m y 25 m por debajo de la superficie

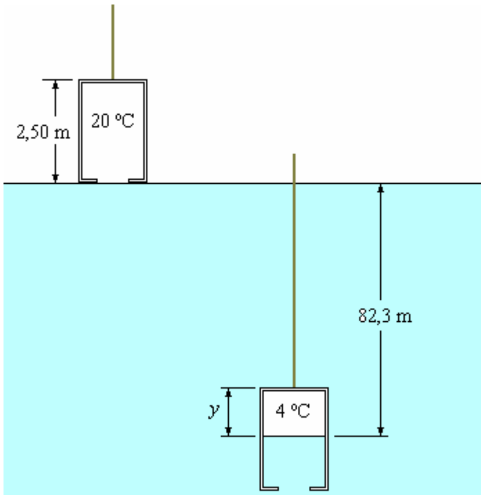
Solución.



La presión atmosférica es:
$pa = 13600 \times 9,8 \times 0,76 = 1,013 \times 105$ N/m^2
Cuando se sumerge a la profundidad $h_1 = 15$ m
$p_1 = p_a + \rho g h_1 = 1,013 \times 10^5 + 1000 \times 9,8 \times 15 = 1,013 \times 10^5 + 1,47 \times 10^5$
$= 2,483 \times 10^5$
El número de moles es:
$$n_1 = \frac{p_1 V}{RT} = \frac{\left(2,483\times 10^5\right)V}{RT}$$
Cuando se sumerge a la profundidad $h_2 = 25$ m
$p_2 = p_a + \rho g h_2 = 1,013 \times 10^5 + 1000 \times 9,8 \times 25 = 1,013 \times 10^5 + 2,45 \times 10^5$
$= 3,463 \times 10^5$
El número de moles es:
$$n_2 = \frac{p_2 V}{RT} = \frac{\left(3,463\times 10^5\right)V}{RT}$$
Dividiendo n_1 entre n_2:
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\frac{p_1 V}{RT}}{\frac{p_2 V}{RT}} = \frac{2,483\times 10^5}{3,463\times 10^5} = 0,717$$
El número de moles se define como, el cociente de la masa de gas M a su masa molecular (M_0), luego:
$$n_1 = \frac{M_1}{M_0} \text{ y } n_2 = \frac{M_2}{M_0}$$
Dividiendo entre si:
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{M_1/M_0}{M_2/M_0} = \frac{M_1}{M_2}$$
Finalmente
$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{n_1}{n_2} = 0,717$$

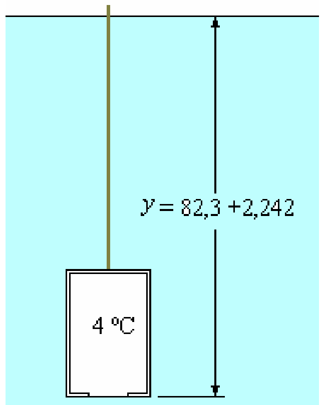
Ejemplo 132. Una campana de buzo en forma de cilindro con una altura de 2,50 m está cerrada en la parte superior y abierta en la parte inferior. La campana se baja desde el aire al agua de mar (ρ = 1,025 gm/cm^3). El aire encerrado en la campana inicialmente está a 20ºC. La campana se baja a una profundidad (medida desde el nivel del agua dentro de la campana) de 82,3 m. A esta profundidad la temperatura del agua es de 4ºC, y la campana está en equilibrio térmico con el agua.(sugerencia: trate al aire como un gas ideal y al mar como un líquido en reposo)
a) ¿Cuánto subirá el nivel del agua dentro de la campana?
b) ¿A qué presión se deberá someter el aire dentro de la campana para sacar el agua que entró?
Dato: la presión atmosférica es 1,013x10^5 Pa.
Solución.

a)



$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} V_1$$
$p_1 = 1,013\text{x}10^5$ Pa.
$p_2 = 1,013\text{x}10^5 + 1025\text{x}9,8\text{x}82,3 = 9,28\text{x}10^5$ Pa
$T_1 = 20 + 273 = 293$ K,
$T_2 = 4 + 273 = 277$ K
Con los datos:
$$V_2 = \frac{\left(1,013x10^5\right)(277)}{\left(9,28x10^5\right)(293)} V_1 = 0,103 V_1$$
Como también $V_2 = Ay$:
$Ay = 0,103A(2,5) \Rightarrow y = 0,258$ m
El nivel del agua dentro de la campana subirá (2,50 – 0,258) = 2,242 m

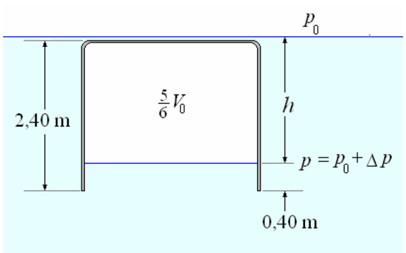
b)



Para que el volumen sea igual que en la superficie la presión interior debe de igualar a la presión en esa profundidad
$p = 1,013\text{x}10^5 + 1025\text{x}9,8\text{x}(82,3 + 2,242)$
$= 9,505\text{x}10^5$ Pa

Ejemplo 133. Un cilindro de sección 9 m^2 y altura 2,40 m cerrado en la parte superior y abierto en la inferior se usa como campana de inmersión.

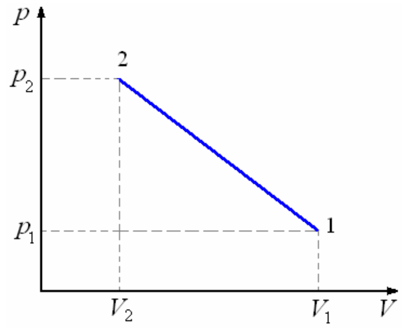
a) ¿A qué profundidad debe bajarse en el agua tal que el aire interior se comprima a 5/6 de su volumen original, si la presión atmosférica es 76 cm de mercurio?
b) Se bombea aire de la superficie para mantener la campana llena de aire. ¿Cuantos moles de aire pasaron por la bomba cuando esta en la profundidad calculada. Si la temperatura es 10ºC?
Agua de mar (ρ = 1,025 gm/cm^3).
Solución.
a)



$$p_0 V_0 = p\frac{5}{6}V_0 \Rightarrow p = 1{,}2p_0$$
$$p = p_0 + \rho gh$$
$$\rho gh = 0{,}2p_0$$
$$h = 0{,}2\frac{p_0}{\rho g} = 0{,}2\frac{\rho_{Hg}g(0{,}76)}{\rho g}$$
$$= 0{,}2\frac{13600(0{,}76)}{1025}$$
= 2,02 m
$$h_1 = 2{,}02 + \frac{2{,}40}{6} = 2{,}42 \text{ m}$$
b) $R = 8{,}314\dfrac{\text{J}}{\text{mol K}} = 1{,}986\dfrac{\text{cal}}{\text{mol K}}$
$$p' = p_0 + \rho g(2{,}42)$$
= 1,013 x 10^5 + 0,242 x 10^5
= 1,255 x 10^5 N/m^2
$$n = \frac{p_0V_0}{RT} = \frac{(1{,}013\times10^5)(21{,}6)}{(8{,}314)(283)}$$
= 930 moles
$$n' = \frac{p'V_0}{RT} = \frac{(1{,}255\times10^5)(21{,}6)}{(8{,}314)(283)}$$
= 1152 moles
El número de moles que pasaron por la bomba es 1152 – 930 = 222 moles.

Ejemplo 134. Sube una burbuja de gas desde el fondo en un lago con agua limpia a una profundidad de 4,2 m y a una temperatura de 5 ºC hasta la superficie donde la temperatura del agua es de 12ºC. ¿Cuál es el cociente de los diámetros de la burbuja en los dos puntos? (Suponga que la burbuja de gas está en equilibrio térmico con el agua en los dos puntos.)
Solución.
Si p_a indica la presión atmosférica
h = 4,2m
$$p_1 = p_a + \rho gh$$
t_1 = 5 ºC, T_1 = 278,15 K
$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$$
$$p_2 = p_a$$
t_2 = 12 ºC, T_2 = 285,15 K
$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$$
$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T} \Rightarrow \frac{(p_a + \rho gh)d_1^2}{T_1} = \frac{bd_2^2}{T}$$
Supondremos que
p_a = 1 atm = 101325 Pa
ρ = 1025 kg/m^3
g = 9,8m/s^2
Entonces
$$\frac{(101325 + 1025\times9{,}8\times4{,}2)d_1^2}{278{,}15} = \frac{101325d_2^2}{285{,}15}$$
$$\Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = 1{,}13$$

Ejemplo 135. Cinco moles de un gas, encerrados en un cilindro por un pistón. Se transforma de un modo infinitamente lento del estado con volumen V_1 = 32 litros y presión p_1 = 4,1 atm al estado con volumen V_2 = 9 litros y p_2 = 15,5 atm.
¿Cuál será la mayor temperatura alcanzada por el gas en este proceso, si en el gráfico de la dependencia de la presión en función del volumen del gas el proceso está representado por una línea recta?
R = 0,082 litro atm/mol K



Solución.
La relación entre p y V se puede escribir:
$$p = aV + b$$

Para encontrar los valores de las constantes *a* y *b*, usamos los datos dados.

$p_1 = aV_1 + b$ y $p_2 = aV_2 + b$

De sta dos ecuaciones obtenemos:

$$a = \frac{(p_1 - p_2)}{(V_1 - V_2)} = \frac{(4{,}1 - 15{,}5)}{(32 - 9)} = \frac{-11{,}4}{23}$$

$$= -0{,}5 \frac{\text{atm}}{\text{litro}}$$

$$b = p_2 - aV_2 = 15{,}5 - (-5)9 = 19{,}5 \text{ atm}$$

Luego tenemos:

$p = -0{,}5V + 19{,}5$

Multiplicando por V:

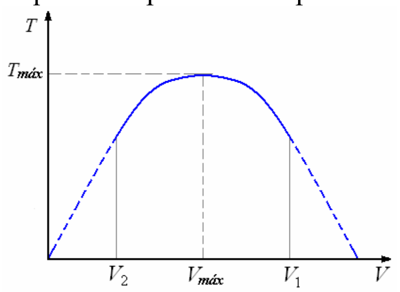
$pV = -0{,}5V^2 + 19{,}5V$

Con la ecuación del gas ideal $pV = nRT$, obtenemos

$nRT = -0{,}5V^2 + 19{,}5V$

$$T = \frac{-0{,}5V^2 + 19{,}5V}{nR}$$

Ecuación que corresponde a una parábola



El valor máximo de T lo hallamos derivando esta ecuación e igualándola a ceo.

$$\frac{dT}{dV} = \frac{-V + 19{,}5}{nR}$$

$$\frac{-V + 19{,}5}{nR} = 0 \Rightarrow V_{máx} = 19{,}5 \text{ litros}$$

Con este valor encontramos

$$T_{máx} = \frac{-0{,}5V_{máx}^2 + 19{,}5V_{máx}}{nR}$$

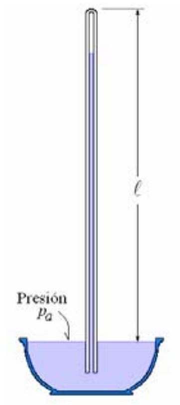
Siendo n = 5 moles, R = 0,082 litro atm/mol K:

$$T_{máx} = \frac{-0{,}5(19{,}5)^2 + 19{,}5(19{,}5)}{5(0{,}082)}$$

$$= 463{,}5 \text{ K}$$

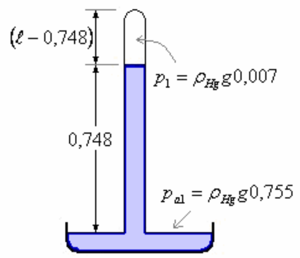
La temperatura máxima alcanzada por el gas en el proceso es 463,5 K.

Ejemplo 136. Un barómetro muestra indicaciones falsas debido a la presencia de una pequeña cantidad de aire sobre la columna de mercurio. A presión p_{a1} = 755 mm de la mercurio, el barómetro indica p_1 = 748 mm y a p_{a2} =740 mm, p_2 = 736 mm de mercurio. Encontrar la longitud ℓ del tubo del barómetro.



Solución.

Caso 1



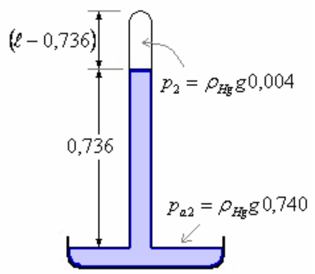
$$p_{a1} = \rho_{Hg} g 0{,}755$$

$$p_1 = p_{a1} - \rho_{Hg} g 0{,}748 \Rightarrow$$

$$p_1 = \rho_{Hg} g (0{,}755 - 0{,}748) = \rho_{Hg} g 0{,}007$$

$$V_1 = (\ell - 0{,}748)A$$

Caso 2



$$p_{a2} = \rho_{Hg} g 0{,}740$$

$$p_2 = p_{a2} - \rho_{Hg} g 0{,}736 \Rightarrow$$

$$p_2 = \rho_{Hg} g (0{,}740 - 0{,}736) = \rho_{Hg} g 0{,}004$$

$$V_2 = (\ell - 0{,}736)A$$

Aplicando la ley de los gases

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

$$\rho_{Hg} g 0{,}007 (\ell - 0{,}748)A = \rho_{Hg} g 0{,}004 (\ell - 0{,}736)A$$

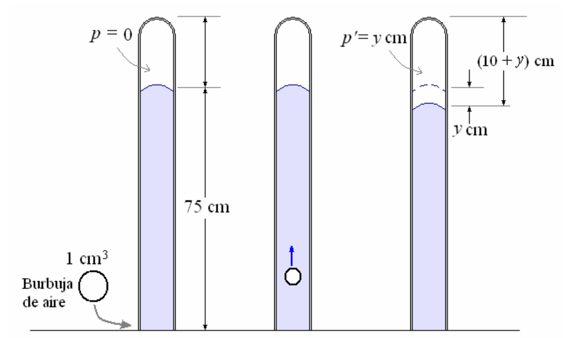
$$7(\ell - 0{,}748) = 4(\ell - 0{,}736)$$

$$\ell = \frac{7 \times 0{,}748 - 4 \times 0{,}736}{3} = 0{,}764 \text{ m}$$

La longitud de ℓ es 764 mm.

Ejemplo 137. Una burbuja de aire ingresa al tubo de un barómetro perfecto, el volumen de la burbuja a la presión atmosférica de 75 cm de mercurio tiene un volumen de 1 cm^3. El tubo del barómetro tiene una sección transversal de 1 cm^2 y una longitud de vacío de 10 cm. ¿En cuánto desciende el nivel del mercurio?

Solución.



La burbuja de aire a la presión atmosférica de 75 cm de mercurio

V= 1 cm^3, p = 75 cm de mercurio

La burbuja de aire cuando llega a la parte del vacío

$V' = \left[1\text{cm}^2 \times (10 + y)\text{cm}\right]$, $p' = y$ cm de mercurio.

Aplicando la ley ideal de los gases a la burbuja cuando esta a presión atmosférica y cuando esta confinada en el espacio del tubo

$$pV = p'V'$$

$$(\rho_{Hg} g 75)(1) = (\rho_{Hg} g y)(10 + y)$$

$$75 = y^2 + 10y$$

$$y^2 + 10y - 75 = 0$$

$$y = -5 \pm \sqrt{25 + 75}$$

$$y = 5\,\text{cm} \text{ y } y = -15\,\text{cm}$$

La respuesta significativa es 5 cm

El nivel del mercurio desciende 5 cm.

Ejemplo 138. Una masa de aire se extiende hasta una altura de 500m sobre un área en una zona de campo de 10^4 m^2 tiene un punto de rocío de 15 ºC, su temperatura es 20 ºC. ¿Cuántos centímetros de lluvia caerá si la temperatura del aire desciende a 10 ° C?

Las presiones de vapor de agua saturado a 15 ° C y 10 ° C, son 12,8 mm de mercurio y 9,2 mm de mercurio, respectivamente.

1 mol de agua H_2O equivale a 18,0157 g (15,99994 +2 x 1,0079) y contiene 6,022 x 10^{23} moléculas de agua.

R = 0,082 litro atm/mol K = 8,31 J/mol K

Solución.

Presión del vapor saturado

15 ° C 12,8 mm de mercurio

$$p_{15} = \rho_{Hg} g \left(12,8 \times 10^{-3}\right) = 1639,344 \text{ Pa}$$

$$T_{20} = 20 + 273 = 293 \text{ K}$$

10 ° C, 9,2 mm de mercurio

$$p_{10} = \rho_{Hg} g \left(9,2 \times 10^{-3}\right) = 1178,278 \text{ Pa}$$

$$T_{10} = 10 + 273 = 283 \text{ K}$$

Número de moles de aire a la temperatura de 20 ºC = 293 K

Las presión de vapor de agua saturado a 15 ° (punto de rocío), es 12,8 mm de mercurio

$$n_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{(1639,24)(5 \times 10^6)}{(8,31)(293)}$$

$= 3,394 \times 10^6$

Número de moles de aire cuando baja la temperatura a 10 ºC = 283 K

$$n_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2} = \frac{(1178,27)(5 \times 10^6)}{(8,31)(283)}$$

$= 2,505 \times 10^6$

Se han precipitado

$n_1 - n_2 = 8,89 \times 10^5$ moles

Correspondiente a una más de agua

$m = 8,89 \times 10^5$ moles x 18,0157 g/mol = 160,16 x 10^5 g

Esto es igual

$V = 160,16 \times 10^5$ cm^3 de agua que caen sobre $A = 10^4$ m^2

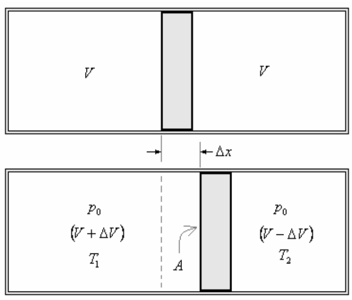
Como $V = Ah \Rightarrow$

$$h = \frac{V}{A} = \frac{160,16 \times 10^5}{10^8} = 0,16 \text{ cm}$$

Caen 0,16 cm de lluvia

Ejemplo 139. Un cilindro que contiene un gas a 27ºC se divide en dos partes de volúmenes iguales cada uno de 100cm^3, y presiones iguales, por medio de un pistón de sección transversal de área 15 cm^2. El gas en una parte se eleva la temperatura 100ºC; en el otro volumen se mantiene la temperatura original. El pistón y las paredes son aisladores perfectos. ¿Cuánto se moverá el pistón durante el cambio de temperatura?

Solución.



Aplicando la ley de los gases al lado 1

$$p_0 (V + \Delta V) = nRT_1$$

Aplicando la ley de los gases al lado 2

$$p_0 (V - \Delta V) = nRT_2$$

Dividiéndolas entre si:

$$\frac{(V+\Delta V)}{(V-\Delta V)}=\frac{T_1}{T_2}$$

Sumando a cada lado

$$1+\frac{(V+\Delta V)}{(V-\Delta V)}=1+\frac{T_1}{T_2}\Rightarrow$$

$$\frac{2V}{(V-\Delta V)}=\frac{T_2+T_1}{T_2} \qquad (1)$$

Restando 1 a cada lado

$$1-\frac{(V+\Delta V)}{(V-\Delta V)}=1-\frac{T_1}{T_2}\Rightarrow$$

$$\frac{2\Delta V}{(V-\Delta V)}=\frac{T_2-T_1}{T_2} \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1):

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{T_2-T_1}{T_2+T_1}\Rightarrow \Delta V=\frac{(T_2-T_1)}{(T_2+T_1)}V$$

Reemplazando valores;

$$\Delta V=\frac{(373-300)}{(373+300)}\times 100\text{cm}^3$$

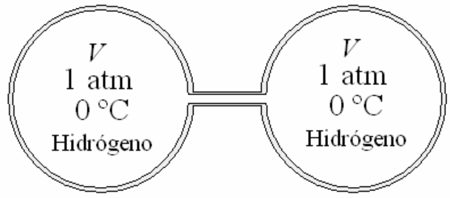
$= 10,85$ cm^3

Siendo $\Delta V = A\Delta x \Rightarrow$

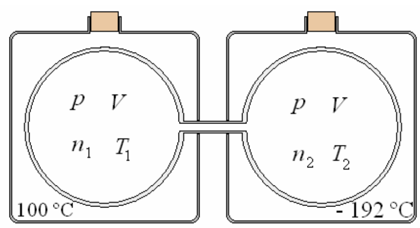
$$\Delta x=\frac{\Delta V}{A}=\frac{10,85\text{ cm}^3}{15\text{ cm}^2}=0,723\text{ cm}$$

El pistón durante el cambio de temperatura se mueve 0,723 cm.

Ejemplo 140. Dos bulbos de igual volumen unidos por medio de un tubo delgado de volumen despreciable contienen hidrógeno a la presión de una atmósfera. ¿Cuál es la presión del gas cuando uno de los bulbos se sumerge en vapor a 100ºC y el otro a oxigeno líquido a – 190ºC? El volumen de cada bulbo es 10^{-2} m^3 y la densidad del hidrógeno es 0,09 kg/m^3 a 0ºC y 1 atm. ¿Qué masa de hidrógeno pasa por el tubo de conexión?



Solución.



Vapor Oxigeno liquido

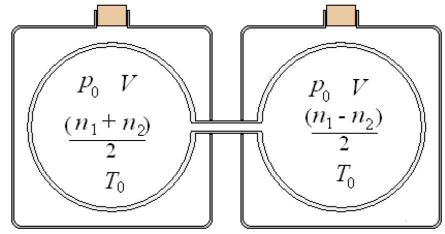
Cuando los bulbos están a diferentes temperaturas

Bulbo 1: p, V, n_1, T_1,

Bulbo 2: p, V, n_2, T_2,

Luego por la ley del gas ideal

$$pV=n_1RT_1=n_2RT_2$$



Equilibrio

Una vez obtenido el equilibrio, la temperatura es T_0 y la presión p_0 y por simetría cada bulbo de volumen V debe contener $\frac{1}{2}(n_1+n_2)$ moles.

Luego por la ley del gas ideal

$$p_0V=\frac{(n_1+n_2)}{2}RT_0$$

$$\frac{p}{p_0}=\frac{2n_1T_1}{(n_1+n_2)T_0}=\frac{2T_1}{\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)T_0}$$

$$=\frac{2T_1}{\left(1+\frac{T_1}{T_2}\right)T_0}=\frac{2(83)}{\left(1+\frac{83}{373}\right)273}=0,497$$

$p=0,497\,p_0$ = 0,497 atm

Un bulbo contiene $\frac{1}{2}(n_1+n_2)$ moles a la temperatura T_0 y n_1 a la temperatura T_1. Luego $\frac{1}{2}(n_1-n_2)$ moles pasaron por el tubo conector durante el cambio de temperatura.

De $\frac{n_1}{n_2}=\frac{T_2}{T_1}=\frac{373}{83}$ obtenemos:

$$\frac{\frac{1}{2}(n_1-n_2)}{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}=\frac{373-83}{373+83}=\frac{290}{456}$$

$= 0,636$

$\Delta V = 0,636V$ = 0,636 x 10^{-3} m^3

La masa que pasa por el tubo es:

$\Delta m = \rho\Delta V$ = 0,09 (0,636 x 10^{-3})

= 5,72 x 10^{-5} kg

Ejemplo 141. Un globo poroso tiene un volumen de 2 m^3 a una temperatura de 10ºC y a una presión de 1,1 atm. Cuando se calienta a 150ºC el volumen se expande a 2,3 m^3 y se observa que se escapa el 5% del gas.
a) ¿Cuánto gas había en el globo a 10ºC?
b) ¿Cuál es la presión en el globo a 150ºC?

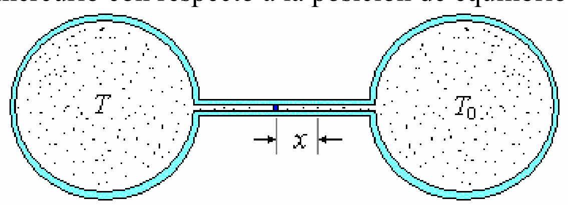
$$R = 0{,}082\frac{\text{atm litro}}{\text{mol K}}$$

Solución.
$p_1 = 1{,}1\text{atm}$, $V_1 = 2$ m^3,
$t_1 = 10^{\circ}$C, $T_1 = 283{,}15$K, $n_1 = ?$
$p_2 = ?$, $V_2 = 2{,}3$ m^3,
$t_2 = 150^{\circ}$C, $T_2 = 423{,}15$ K, $n_2 = 0{,}95\ n_1$.

a) $n_1 = \dfrac{p_1V_1}{RT_1} = \dfrac{1{,}1\times 2000}{0{,}082\times 283{,}15} = 94{,}8$ mol

b) $p_2 = \dfrac{n_2RT_2}{V_2}$
$= \dfrac{0{,}95\times 94{,}8\times 0{,}082\times 423{,}15}{2300}$
$= 1{,}387$ atm

Ejemplo 142. El termómetro de gases consta de dos recipientes idénticos con gas de volumen V_o cada uno, unidos por un tubo do longitud ℓ y sección A. Una gota de mercurio obstruye el tubo. Si las temperaturas do los gases en los volúmenes son iguales, el mercurio se encontrará en el centro del tubo. El volumen derecho se coloca un termostato con temperatura T_o. Gradúese el termómetro, buscando la dependencia entre la temperatura del gas en el volumen izquierdo y el desplazamiento x del mercurio con respecto a la posición de equilibrio.



Solución.
Como la cantidad de gas en los dos lados es igual, podemos escribir, cuando la temperatura del lado izquierdo sea T. La gota de mercurio se desplaza x, hasta que las presiones en ambos depósitos sea igual (p_o).

$$\frac{p_o\left[V_o + A\left(\frac{\ell}{2}+x\right)\right]}{T} = \frac{p_o\left[V_o + A\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\right]}{T_o}$$

$$\Rightarrow T = T_o\frac{2V_o + S(\ell+2x)}{2V_o + S(\ell-2x)}$$

Ejemplo 143. Un pez que se encuentra a 63,25m de profundidad en el mar donde la temperatura es 2° C produce burbujas de aire de 1 cm de radio aproximadamente. Determine el radio de las burbujas al llegar estas a la superficie del mar donde la temperatura es de 27° C. Considere que la densidad del agua de mar no varía con la profundidad y tiene un valor de 1,035 g/cm^3.

Solución.
$h = 63{,}25$ m
$p_1 = p_a + \rho gh$
$t_1 = 2$ ºC, $T_1 = 275{,}15$ K
$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$
$p_2 = p_a$
$t_2 = 27$ ºC, $T_2 = 300{,}15$ K
$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$

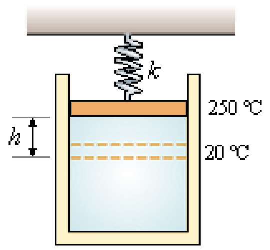
$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T} \Rightarrow \frac{(b+\rho gh)r_1^3}{T_1} = \frac{br_2^3}{T}$$

Supondremos que
$p_a = 1$ atm $= 101325$ Pa
$\rho = 1035$ kg/m^3
$g = 9{,}8$m/s^2
Entonces

$$\frac{(101325 + 1035\times 9{,}8\times 63{,}25)r_1^3}{275{,}15} = \frac{101325 r_2^3}{300{,}15}$$

$$\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 2 \Rightarrow r_2 = 2 \text{ cm}$$

Ejemplo 144. Un cilindro está cerrado por un pistón conectado a un resorte de constante de 2,00 x 10^3 N/m. Con el resorte sin esfuerzo, el cilindro está lleno con 5,00 litros de gas a una presión de 1,00 atm y una temperatura de 20,0 ° C.
a) Si el pistón tiene una sección transversal de 0,0100 m^2 y masa despreciable, qué tan alto se va a subir cuando la temperatura se eleva a 250° C?
b) ¿Cuál es la presión del gas a 250° C?



Solución.
a) Por la ley de los gases ideales

$$\frac{p_a V}{T} = \frac{p' V'}{T'}$$

Donde $V' = V + Ah$ y $p' = p_a + \frac{kh}{A}$

Luego:

$$\left(p_a + \frac{kh}{A}\right)(V + Ah) = p_a V\left(\frac{T'}{T}\right)$$

$$(1{,}013\times 10^5 + 2{,}00\times 10^5 h)(5{,}00\times 10^3 + 0{,}010h)$$

$$= (1{,}013\times 10^5)(5{,}00\times 10^3)\left(\frac{250+273}{20+273}\right)$$

$$\Rightarrow 2000h^2 + 2013h - 397 = 0$$

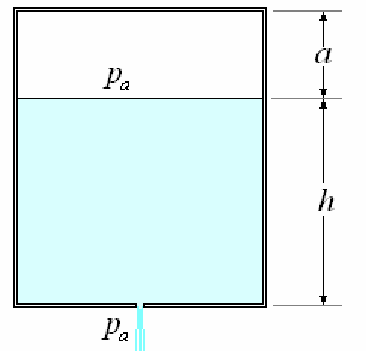
$$\Rightarrow h = \frac{-2013 \pm 2689}{4000} = 0{,}169$$

b) $p' = p_a + \frac{kh}{A}$

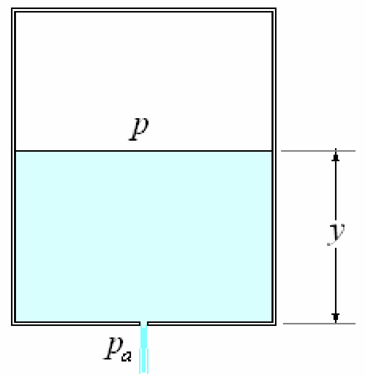
$$= 1{,}013\times 10^5 + \frac{(2{,}00\times 10^3)(0{,}169)}{0{,}0100}$$

$= 1{,}35$ x 10^5 Pa

Ejemplo 145. Un depósito cerrado contiene agua hasta una altura h = 2,24 m, y por encima a = 1m, aire a la presión del exterior p_a = 1 atm. Por un pequeño orificio de fondo se deja salir el agua. Calcular el descenso de nivel, suponiendo invariable la temperatura del agua.



Solución.
Sea y la distancia desde la superficie de nivel al fondo y p la presión del aire; se tiene:



$$p_a a = p(a + h - y)$$

Transformación isotérmica

El equilibrio se establecerá cuando

$$p + \rho g y = p_a \Rightarrow p = p_a - \rho g y$$

De aquí resulta

$$p_a a = (p_a - \rho g y)(a + h - y)$$

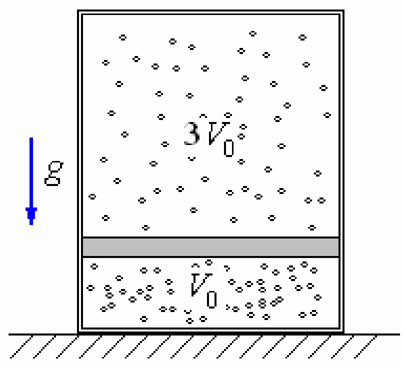
Reemplazando valores:

$$(1{,}033\times 10^4)(1) = (1{,}033\times 10^4 - 0{,}98\times 10^4 y)(3{,}24 - y)$$

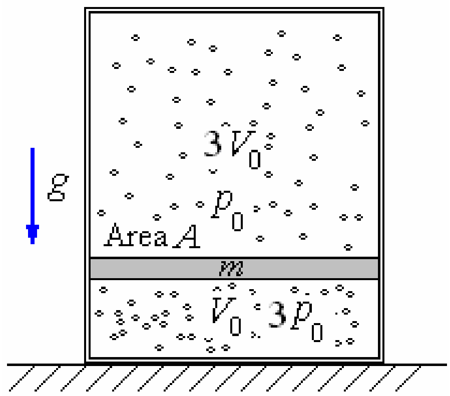
$$y = \begin{cases} 0{,}64 \\ 3{,}64 \end{cases}$$

La respuesta posible es y = 0,64 m.

Ejemplo 146. En un recipiente cilíndrico se encuentra en equilibrio un émbolo pesado. Por encima del émbolo y por debajo de él se hallan masas iguales de gas a temperatura idéntica. La relación entre el volumen superior y el inferior es igual a 3. ¿Cuál será la relación de los volúmenes si aumentamos la temperatura del gas al doble?



Solución.
Inicialmente



Arriba : $3V_0$, T_0, p_0

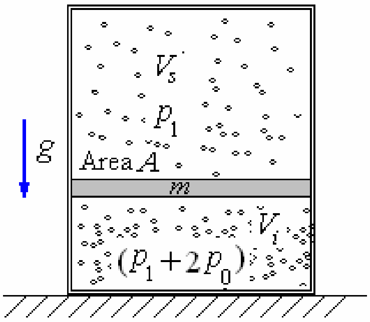
Abajo: V_0, T_0, $p_0 + \frac{mg}{A}$

Como las masas son iguales

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)V_0}{T_0} \Rightarrow \frac{mg}{A} = 2p_0$$

Luego $p_0 + \frac{mg}{A} = 3p_0$

Después de doblar la temperatura



Arriba : $V_s,\ 2T_0,\ p_1$

Abajo: $V_i,\ 2T_0,\ p_1 + 2p_0$

El volumen total es el mismo

$V_i + V_s = 3V_0 + V_0 = 4V_0$

En la parte superior

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_s}{2T_0} \Rightarrow p_1 = \frac{6p_0V_0}{V_s}$$

En la parte inferior

$$\frac{3p_0V_0}{T_0} = \frac{(p_1 + 2p_0)V_i}{2T_0} \Rightarrow V_i = \frac{6p_0V_0}{(p_1 + 2p_0)}$$

$$V_i = \frac{6p_0V_0}{\left(\frac{6p_0V_0}{V_s} + 2p_0\right)} = \frac{3p_0V_0V_s}{(3V_0 + V_s)}$$

Como $V_i = 4V_0 - V_s$

Tenemos:

$$4V_0 - V_s = \frac{3p_0V_0V_s}{(3V_0 + V_s)}$$

$$\Rightarrow (4V_0 - V_s)(3V_0 + V_s) = 3p_0V_0V_s$$

$$\Rightarrow 12V_0^2 + 4V_0V_s - 3V_0V_s - V_s^2 = 3p_0V_0V_s$$

$$\Rightarrow 12V_0^2 - 2V_0V_s - V_s^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_s^2 + 2V_0V_s - 12V_0^2 = 0$$

Resolviendo:

$$V_s = -V_0 \pm \sqrt{V_0^2 + 12V_0^2} =$$

$$-V_0 \pm 3{,}6V_0 = \begin{cases} -4{,}6V_0 \\ 2{,}6V_0 \end{cases}$$

La respuesta posible es $V_S = 2{,}6V_0$, luego

$V_i = 4V_0 - 2{,}6V_0 = 1{,}4V_0$

Finalmente:

$$\frac{V_s}{V_i} = \frac{2{,}6V_0}{1{,}4V} = 1{,}86$$

Ejemplo 147. Una esfera de 20 cm de diámetro contiene un gas ideal a una presión de 1 atm y a 20 ºC. A medida que se calienta la esfera hasta 100 ºC se permite el escape de gas. Se cierra la válvula y se coloca la esfera en un baño de hielo a 0 ºC.

a) ¿cuántos moles de gas se escapan de la esfera al calentarse?

b) ¿Cuál es la presión en la esfera cuando está en el hielo?

Constante de los gases R = 0,082 litro atm/mol K

Solución.

a) 0,04 moles

$$V = \frac{4}{3}\pi(0{,}10)^3 = 4{,}19\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

p_1 = 1 atm = 1,033 x 10^5 Pa

T_1 = 20 ºC + 273,15 ºC = 293,15 K

$$n_1 = \frac{p_1V}{RT_1} = \frac{(1{,}033\times10^5)(4{,}19\times10^{-3})}{(8{,}314)(293{,}15)}$$

= 0,178 moles

$p_2 = p_1$ = 1 atm = 1,033 x 10^5 Pa

T_2 = 100 ºC + 273,15 ºC = 373,15 K

$$n_2 = \frac{p_1V}{RT_2} = \frac{(1{,}033\times10^5)(4{,}19\times10^{-3})}{(8{,}314)(373{,}15)}$$

= 0,139 moles

Escapan 0,1788 – 0,139 = 0,04 moles.

b) 0,695 atm

T_3 = 0 ºC + 273,15 ºC = 273,15 K

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \Rightarrow p_3 = \frac{T_3}{T_2}p_2$$

$$= \frac{273{,}15}{373{,}15}1{,}033\times10^5$$

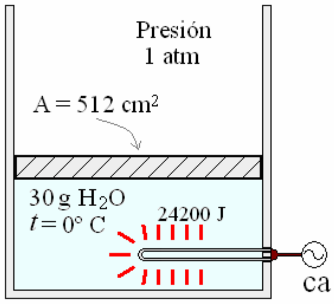
= 0,756 x 10^5 = 0,732 atm

Ejemplo 148. Problema de calor y ley del gas ideal. En un cilindro aislado térmicamente se encuentran, bajo un pistón de peso despreciable, 30 gramos de agua a una temperatura de 0º C. El área del pistón es 512 cm^2, la presión externa es 1 atmósfera. El calentador eléctrico que se encuentra en el cilindro, desprende 24200 J de calor.

a) ¿Cuántos gramos de agua se evaporan?

b) Calcular el número de moles de vapor producidos.

c) ¿A qué altura se elevará el pistón?



Datos útiles.

$$R = 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 1{,}986 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

1 cal/°Cg, que es igual a 4,1840 J/g K.
Calor específico del hielo c_h = 2,090 J/g K
Calor de fusión del hielo L_f = 334 J/g
Calor específico del agua c = 4,180 J/g K
Calor de vaporización del agua L_v = 2260 x10^3 J/kg

La masa molecular se calcula sumando las masas atómicas de los elementos que componen la molécula. En el caso de la molécula de agua, H_2O, su masa molecular sería:
2 x 1,0079 + 15,99994 = 18,0157
(Masa atómica del H: 1,0079, masa atómica del O: 15,99994)

Solución.

a) Calor necesario para llevar al agua de 0º C a 100º C

$$Q_1 = mc_{agua}\Delta t$$
$$= (30 \text{ g})\left(4{,}180 \frac{\text{J}}{\text{g °C}}\right)(100° \text{C} - 0° \text{C})$$
$$= 12540 \text{ J}$$

Quedan 24200 J – 12540 J = 11660 J
Este calor se emplea para vaporizar una cantidad de agua
Masa de agua vaporizada

$$m_{vapor} = \frac{\Delta Q}{L_v} = \frac{11660 \text{ J}}{2260 \text{ J/g}} = 5{,}16 \text{ g}$$

Se evaporan 5,16 gramos de agua.

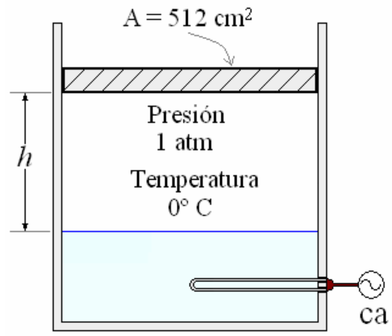
b) Número de moles de vapor producido
El número de moles se define como, el cociente de la masa de gas M a su masa molecular M_0

$$n = \frac{M}{M_0}$$

M = 5,16 g
M_0 = 18,016 g/mol

$$n = \frac{M}{M_0} = \frac{5{,}16 \text{ g}}{18{,}016 \text{ g/mol}}$$
$$= 0{,}286 \text{ moles}$$

c) El volumen del vapor producido se encuentra mediante la ley del gas ideal



$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow$$
$$V = \frac{0{,}286 \text{ mol}(8{,}31 \text{ J/mol K})(373 \text{ K})}{1{,}013\times 10^5 \text{ N/m}^2}$$
$$= 8751{,}17 \text{ x } 10^{-6} \text{ m}^3 = 8751{,}17 \text{ cm}^3$$

Siendo $V = Ah \Rightarrow h = \dfrac{V}{A}$

$$\Rightarrow h = \frac{8751{,}17 \text{ cm}^3}{512 \text{ cm}^2} = 17{,}09 \text{ cm}$$

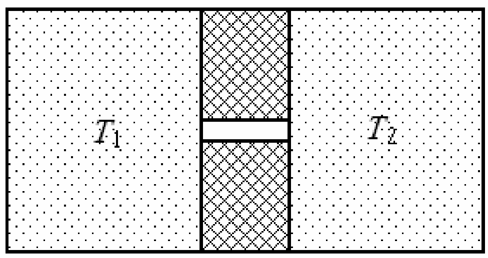
El dibujo no está a escala, la altura del agua inicial del agua es 30cm^3/512cm^2 = 0,06 cm y cuando evapora parte, baja a 0,05 cm.
El cambio es 0,01 cm luego el cambio de altura del pistón es 17,09 – 0,01 = 17,08 cm.

Ejemplo 149. Dos volúmenes iguales V se unen mediante un canal estrecho. En los volúmenes hay una cantidad pequeña de partículas N (son tan pocas partículas que casi no chocan unas con otras).

a) ¿Qué presiones habrá en estos volúmenes, si la temperatura del primer volumen es T_1 y del segundo, $T_2 > T_1$?

b) ¿Cuántas partículas contendrá cada uno de los volúmenes?

c) En el canal colocamos una banderita ligera. ¿Hacia donde desviará?



Solución.

a) De la ley del gas ideal

$$pV = Nk_BT$$

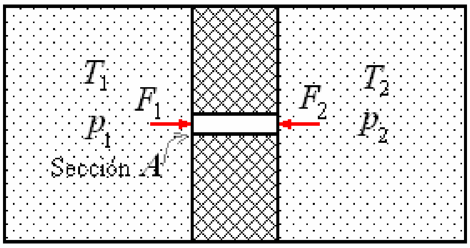
Aplicando a cada lado:

$$p_1 = \frac{N_1k_BT_1}{V} \text{ y } p_2 = \frac{N_2k_BT_2}{V}$$

b) Dividiendo las presiones obtenemos:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \qquad (1)$$

Por otra parte



$$F = \frac{dmv}{dt} = v\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt}$$

Considerando que hay un flujo de partículas $\frac{dm}{dt}$ del lado de mayor presión al de menor presión a velocidad constante, $\frac{dv}{dt} = 0$, tenemos:

Siendo A la sección del canal, la presión es

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dm}{dt}v$$

Por la teoría cinética de los gases

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T \;\Rightarrow\; \bar{v} = C\sqrt{T}$$

$$p = \frac{1}{A}\frac{dm}{dt}v = \frac{1}{A}\frac{dm}{dt}C\sqrt{T} = C'\sqrt{T}$$

La presión en cada lado es

$p_1 = C'\sqrt{T_1}$ y $p_2 = C'\sqrt{T_2}$

Luego

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}\frac{T_2}{T_1} \;\Rightarrow\; \frac{N_1}{N_2} = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}}$$

Sumando 1 a cada miembro:

$$\frac{N_1}{N_2} + 1 = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{N_1 + N_2}{N_2} = \frac{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{N_2} = \frac{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}}$$

$$\Rightarrow N_2 = N\frac{\sqrt{T_1}}{\left(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}\right)}$$

Invirtiendo y sumando 1 a cada miembro:

$$\frac{N_2}{N_1} + 1 = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{N_1 + N_2}{N_1} = \frac{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{N_1} = \frac{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}$$

$$\Rightarrow N_1 = N\frac{\sqrt{T_2}}{\left(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}\right)}$$

c) Como $T_2 > T_1$

$\Rightarrow p_2 > p_1$

La bandera se desvía hacia el primer volumen.

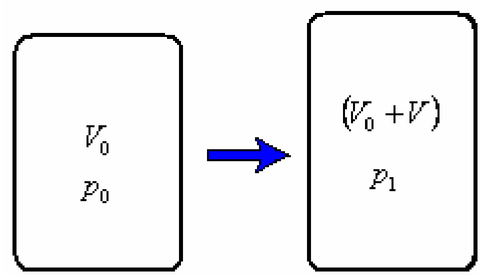
Ejemplo 150. ¿Efectuando cuantas carreras de émbolo de una bomba con volumen de trabajo V, se puede enrarecer de un recipiente de volumen V_0 desde la presión p_0 hasta p_n?

Solución.

En cada carrera la bomba extrae un volumen V de gas.

Para poder aplicar la ley del gas ideal $pV = nRT$ = Constante , consideramos la temperatura constante, y para que el número de moles permanezca igual, en cada carrera la comparación la hacemos agregando un volumen V al nuevo volumen, como a continuación se procede.

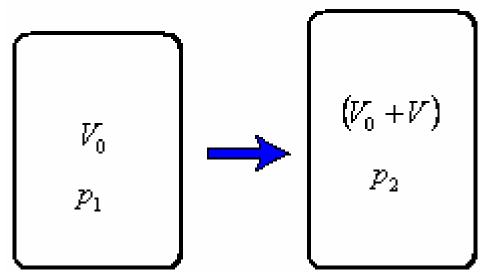
Carrera 1:



$$p_0 V_0 = p_1 (V_0 + V)$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{V_0}{(V_0 + V)}p_0$$

Carrera 2:

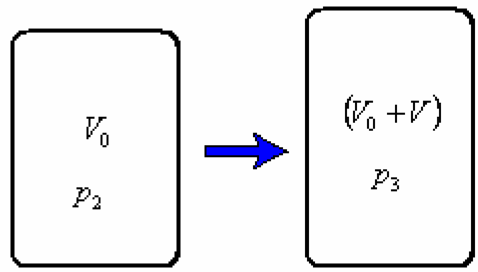


$$p_1 V_0 = p_2 (V_0 + V)$$

$$\Rightarrow\ p_2 = \frac{V_0}{(V_0 + V)} p_1$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{V_0^2}{(V_0 + V)^2} p_0$$

Carrera 3:



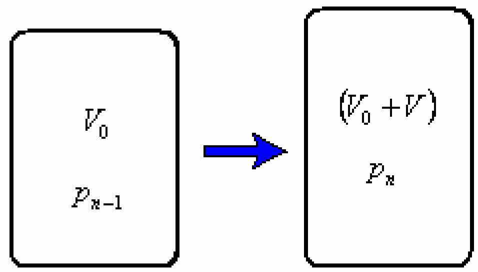
$$p_2 V_0 = p_3 (V_0 + V)$$

$$\Rightarrow\ p_3 = \frac{V_0}{(V_0 + V)} p_2$$

$$\Rightarrow p_3 = \frac{V_0^3}{(V_0 + V)^3} p_0$$

…………………………………
…………………………………
…………………………………
…………………………………

Carrera n:



$$p_{n-1} V_0 = p_n (V_0 + V)$$

$$\Rightarrow\ p_n = \frac{V_0}{(V_0 + V)} p_{n-1}$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{V_0^n}{(V_0 + V)^n} p_0$$

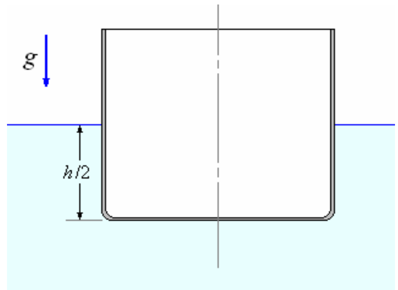
$$\Rightarrow \left(1 + \frac{V}{V_0}\right)^n = \frac{p_0}{p_n}$$

Tomando logaritmos:

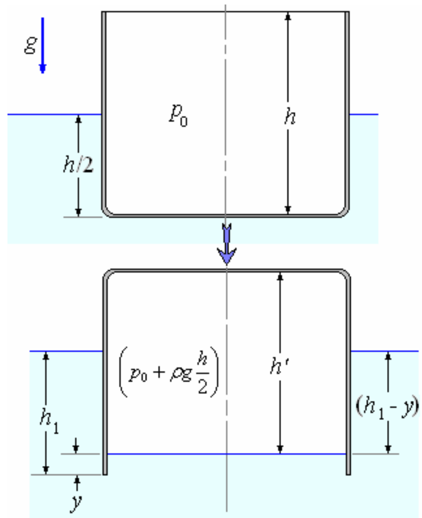
$$n \ln\left(1 + \frac{V}{V_0}\right) = \ln \frac{p_0}{p_n}$$

$$\Rightarrow\ n = \frac{\ln \dfrac{p_0}{p_n}}{\ln\left(1 + \dfrac{V}{V_0}\right)}$$

Ejemplo 151. Sobre la superficie de un líquido de densidad ρ flota un vaso cilíndrico de paredes delgadas, sumergido hasta la mitad en el líquido.
a) ¿En cuánto se hundirá en el líquido el borde inferior del vaso, si este se coloca sobre la superficie del líquido con el fondo hacia arriba? La altura del vaso es h y la presión del aire p_0.
b) ¿A qué profundidad es necesario sumergir el vaso invertido para que el junto con el aire que contiene dentro se hunda?



Solución.
a)



Antes: Peso = Empuje

$$\text{Peso} = \rho g \frac{h}{2}$$

Después: Peso = Empuje

$$\rho g A \frac{h}{2} = \rho g A (h_1 - y)$$

$$\Rightarrow\ (h_1 - y) = \frac{h}{2} \Rightarrow\ h_1 = y + \frac{h}{2} \qquad (1)$$

Aplicando la ley del gas ideal

$$p_0 A h = \left(p_0 + \rho g \frac{h}{2}\right) A h'$$

$$\Rightarrow h' = \frac{p_0 h}{\left(p_0 + \rho g \dfrac{h}{2}\right)} \qquad (2)$$

También tenemos

$$h' + y = h\ \Rightarrow\ y = h - h' \qquad (3)$$

Reemplazando (2) en (3):

$$y = h - \frac{p_0 h}{\left(p_0 + \rho g \frac{h}{2}\right)} \qquad (4)$$

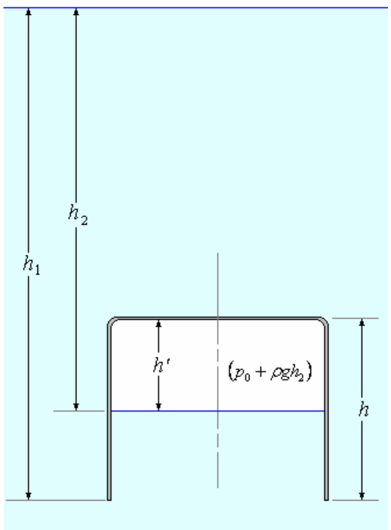
Reemplazando (4) en (1):

$$h_1 = h - \frac{p_0 h}{\left(p_0 + \rho g \frac{h}{2}\right)} + \frac{h}{2} =$$

$$\frac{3}{2} h - \frac{2 p_0 h}{(2 p_0 + \rho g h)}$$

$$H = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{2 \rho g h}{2 p_0 + \rho g H}\right)$$

b)



Por la ley del gas ideal

$$p_0 A h = (p_0 + \rho g h_2) A h' \Rightarrow h' = \frac{p_0 h}{(p_0 + \rho g h_2)}$$

Por la condición de hundimiento

$$\rho g A \frac{h}{2} > \rho g A h' \Rightarrow h' < \frac{h}{2}$$

$$\frac{h}{2} > \frac{p_0 h}{(p_0 + \rho g h_2)}$$

$$\Rightarrow p_0 + \rho g h_2 > 2 p_0 \Rightarrow \rho g h_2 > p_0 \Rightarrow h_2 > \frac{p_0}{\rho g}$$

Como

$$h_1 = h_2 + (h - h') \Rightarrow h_1 > \frac{p_0}{\rho g} + \left(h - \frac{h}{2}\right) \Rightarrow$$

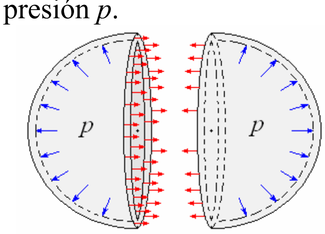
$$h_1 > \frac{p_0}{\rho g} + \frac{h}{2}$$

Ejemplo 152. Gas de helio se vende en tanques de acero. ¿Si el helio se utiliza para inflar un globo, el globo podría levantar el tanque de helio en el que vino? Justifique su respuesta. El acero se romperá, si se somete a esfuerzo de tracción superior a su límite de elasticidad, de 5 x 10^8 N/m^2.

Sugerencia: Considerar un depósito esférico de acero de radio *r* y espesor e que contiene helio a alta presión y al borde de la ruptura que lo separe en dos hemisferios.

Solución.

Consideremos un depósito de acero de radio interior *r* y espesor delgado e que contiene helio a la presión *p*.



Cuando está al borde de la ruptura que lo separe en dos hemisferios, tenemos:

$$p \pi r^2 = \left(5 \times 10^8\right) 2 \pi r e \Rightarrow$$

$$e = \frac{pr}{10 \times 10^8} = \frac{pr}{109}$$

La masa del acero es

$$\rho_a V = \rho_a 4 \pi r^2 e = \rho_a 4 \pi r^2 \frac{pr}{10^9}$$

$$= \frac{\rho_a p 4 \pi r^3}{10^9}$$

La masa de helio en el tanque,

$$pV = nRT \Rightarrow$$

$$p \frac{4}{3} \pi r^3 = nRT = \frac{m_{H_e}}{M_{H_e}} RT$$

$$= 1 \text{ atm } V_{globo} \Rightarrow$$

$$m_{H_e} = \frac{M_{H_e} p 4 \pi r^3}{3RT}$$

La masa del aire desplazado,

$$1 \text{ atm } V_{globo} = \frac{m_{aire}}{M_{aire}} RT = p \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow$$

$$m_{aire} = \frac{M_{aire} p 4 \pi r^3}{3RT}$$

La fuerza hacia arriba sobre el globo con el tanque de acero colgando de él es:

$$+m_{aire}g - m_{H_e}g - m_a g$$

$$= \frac{M_{aire}p4\pi r^3 g}{3RT} - \frac{M_{He}p4\pi r^3 g}{3RT} - \frac{\rho_a p4\pi r^3 g}{10^9}$$

El globo levantará o no levantará al tanque dependiendo de si esta cantidad es positiva o negativa, lo que depende del signo de

$$\frac{\left(M_{aire} - M_{H_e}\right)}{3RT} - \frac{\rho_a}{10^9}.$$

A 20 º C esta cantidad es

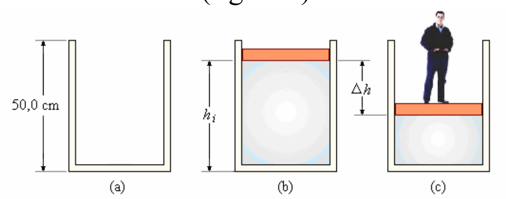
$$\frac{(28{,}9 - 4{,}00)}{3(8{,}314)(293)} - \frac{7860}{10^9}$$

$$= 3{,}41 \times 10^{-6} - 7{,}86 \times 10^{-6}$$

$$= -3{,}45 \times 10^{-6}$$

La fuerza neta es hacia abajo, el globo no puede levantar a su tanque

Ejemplo 153. Un cilindro de 40,0 cm de radio y 50,0 cm de profundidad se llena con aire a 20,0 ° C y 1,00 atm (figura a). Un pistón de 20,0 kg se baja en el cilindro, comprimiendo el aire atrapado dentro (figura b). Por último, un hombre de 75,0 kg está parado en el pistón, además comprimiendo más el aire, que permanece a 20 ° C (figura c).



a) ¿Hasta qué punto hacia abajo (Δh) se mueve el pistón cuando el hombre sube en él?

b) ¿A que temperatura se debe calentar el gas para elevar el pistón y el hombre de vuelta a h_i?

Solución.

a) Con el pistón solo:

T = constante, $pV = p_0 V_0 \Rightarrow$

$$p(Ah_i) = p_0(Ah_0)$$

Con A = constante $p = p_0\left(\frac{h_0}{h_i}\right)$

Pero, $p = p_0 + \frac{m_p g}{A}$

Donde m_p es la masa del pistón.

Luego, $p_0 + \frac{m_p g}{A} = p_0\left(\frac{h_0}{h_i}\right) \Rightarrow$

$$h_i = \frac{h_0}{1 + \frac{m_p g}{p_0 A}}$$

Reemplazando valores:

$$h_i = \frac{0{,}50}{1 + \frac{20{,}0(9{,}80)}{1{,}013 \times 10^5 \left(\pi 0{,}400^2\right)}}$$

$= 0{,}4981$ m $= 49{,}81$ cm

Con el hombre de masa M sobre el pistón, con cálculo similar (reemplazando m_p por $m_p + M$ da:

$$\Rightarrow h' = \frac{h_0}{1 + \frac{(m_p + M)g}{p_0 A}}$$

Reemplazando valores:

$$h' = \frac{0{,}50}{1 + \frac{95{,}0(9{,}80)}{1{,}013 \times 10^5 \left(\pi 0{,}400^2\right)}}$$

$= 0{,}4910$ m $= 49{,}10$ cm

Cuando el hombre sube sobre el pistón, se mueve hacia abajo

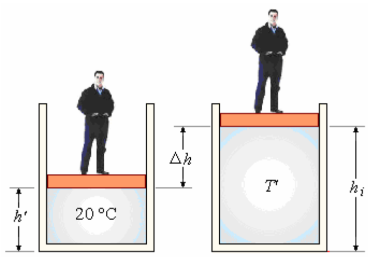
$\Delta h = h_i - h'_i = 49{,}81 - 49{,}10 = 0{,}71$ cm.

b) p = constante,

$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'} \Rightarrow \frac{Ah_i}{T} = \frac{Ah'}{T'} \Rightarrow$$

$$T = T'\left(\frac{h_i}{h'}\right) = (273 + 20)\left(\frac{49{,}81}{49{,}10}\right)$$

$= 297$ K $= 24$ º C

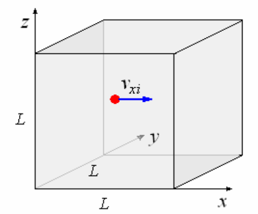


TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES IDEALES.

El concepto de los átomos y de las moléculas que eran los últimos bloques de edificio de la materia fue restablecido por Dalton para explicar las tres leyes de combinaciones químicas. En mediados del siglo diecinueve, estos conceptos, junto con ciertas asunciones con respecto la naturaleza, el tamaño, la distribución y a los movimientos de las moléculas y de los átomos, fueron

sintetizados con la mecánica Newtoniana, para explicar el comportamiento de los gases ideales. Este trabajo realizado por Maxwell, Boltzman y otros, condujo al desarrollo de lo qué se conoce como la teoría cinética de gases.
Las asunciones de la teoría cinética son:
Cualquier gas se compone de un número muy grande de moléculas.
Las moléculas de un gas son idénticas, con respecto a la forma, tamaño y masa.
Las moléculas son esferas perfectamente rígidas del radio insignificante.
Las moléculas están en un estado incesante del movimiento caótico en todas las velocidades y direcciones posibles.
La distribución de moléculas es homogénea e isotrópica en cualquier envase que encierre el gas.
Las moléculas ejercen fuerzas una sobre otra solamente cuando chocan entre ellas o con las paredes del envase.
La colisión entre las moléculas o las moléculas y las paredes del envase son colisiones perfectamente elásticas, es decir, sólo tales colisiones pueden cambiar las direcciones del movimiento pero no de sus velocidades.
Entre las colisiones sucesivas las moléculas viajan libremente con velocidades constantes; la distancia viajada libremente se llama trayectoria libre. En promedio, la trayectoria libre media de todas las moléculas es igual.
La energía cinética media de una molécula es proporcional a la temperatura absoluta del gas.

Expresión para la presión ejercida por un gas.



Sea N el número de moléculas del gas ideal de masa M, encerrado en un cubo de lado L La molécula i se mueve con velocidad v_i, con v_{xi}, v_{yi} y v_{zi} son sus componentes x, y y z respectivamente.
Luego $v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$
Consideremos solamente la componente en x de la molécula i.
La fuerza ejercida por esta molécula a causa de sus colisiones periódicas con la pared cada $\Delta t = \dfrac{2L}{v_{xi}}$, y el cambio de cantidad de movimiento $-2mv_{xi}$ es: $f_{xi} = \dfrac{2mv_{xi}}{\Delta t} =$

$$\frac{2mv_{xi}}{2L/v_{xi}} = \frac{mv_{xi}^2}{L}$$

La fuerza sobre la pared debido a las N moléculas es:

$$F_x = \sum_{i=1}^{N} f_{xi} = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_{xi}^2}{L}$$

La presión sobre la pared es:

$$p_x = \frac{F_x}{L^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{mv_{xi}^2}{L}}{L^2} = \left(\frac{m}{L^3}\right)\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2$$

$$p_x = \left(\frac{m}{V}\right)\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2 \,, \quad (V = L^3 = \text{volumen del gas}).$$

$$p_x = \left(\frac{m}{V}\right)N\overline{v_x^2} \,, \text{ con } \begin{cases} V = L^3 \\ N\overline{v_x^2} = \sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2 \end{cases}$$

Siendo $v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$
Podemos promediar esta relación para todas las moléculas:

$$\overline{v_x} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

y como en nuestro modelo no hay una diferencia real entre las direcciones x, y y z debido a que las rapideces son muy altas en un gas típico, así que los efectos de la gravedad son despreciables.
Se sigue que $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. Por lo tanto:

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$$

Con esta relación obtenemos:

$$p = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{V}\right)N\overline{v^2}$$

Ecuación del gas Ideal de la Teoría Cinética.

Considerando $p = \dfrac{1}{3}\dfrac{mN}{V}\overline{v^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{N}{V}\right)\left(\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}\right)$

Pero
$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}$ = Energía Cinética promedio de una molécula $\propto T$

Por consiguiente $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \dfrac{3}{2}k_BT$

La elección de la constante como $\dfrac{3}{2}k_B$ es mandataria para obtener la ecuación del gas ideal similar a la ya encontrada.

$$p = \frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{3}{2}k_BT\right) = \frac{Nk_BT}{V}$$

$\Rightarrow \qquad pV = Nk_BT$

Y también:

$$pV = Nk_BT = N\left(\frac{R}{N_a}\right)T = nRT$$

$$pV = nRT$$

La asunción $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_BT$ implica la interpretación de la energía térmica como energía mecánica de las moléculas, no obstante como concepto estadístico solamente; es decir, la temperatura es la manifestación del movimiento medio de una gran cantidad de moléculas; es absurdo decir $\frac{1}{2}m\overline{v_i^2} = \frac{3}{2}k_BT$ para cualesquier *i*.

Ejemplo 154. En un intervalo de 30,0 s, 500 bolitas de granizo chocan con una ventana de vidrio de 0,600 m^2 de área con un ángulo de 45,0º. Cada granizo tiene una masa de 5,0 g y se mueve con una velocidad de 8,00 m/s. Asumiendo que las colisiones son elásticas, encontrar la fuerza promedio y la presión sobre la ventana.

Solución.

Componente de la velocidad normal a la ventana

$v = 8{,}00\,\text{sen}45^\circ = 5{,}66$

La fuerza media

$$\overline{F} = Nm\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$= 500(0{,}005\text{ kg})\frac{[8{,}00\text{sen}45^\circ - (8{,}00\text{sen}45^\circ)]\text{m/s}}{30\text{ s}}$$

$= 0{,}9428$ N

La presión sobre la ventana

$$p = \frac{\overline{F}}{A} = \frac{0{,}9428}{0{,}600} = 1{,}571\text{ Pa}$$

Ejemplo 155. Un gas ideal está contenido en un recipiente a 300 K. Si la temperatura es mayor a 900 K, ¿cuál es el factor de cambio de cada uno de los siguientes?

a) La energía cinética promedio de las moléculas.
b) La velocidad molecular rms.
c) El cambio de cantidad de movimiento promedio de una molécula en un choque con una pared.
d) La tasa de colisiones de las moléculas con las paredes.
e) la presión del gas.

Solución.

a) La energía cinética promedio de las moléculas aumenta en un factor de 3.
b) La velocidad molecular rms aumenta en un factor de $\sqrt{3}$.
c) El cambio de cantidad de movimiento promedio de una molécula en un choque con una pared aumenta en un factor de $\sqrt{3}$.
d) La tasa de colisiones de las moléculas con las paredes aumenta en un factor de $\sqrt{3}$ ya que la trayectoria libre media no cambia.
e) La presión aumenta en un factor de 3.

ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL

Cuando añadimos calor a un cuerpo poniéndolo en contacto térmico con un cuerpo a mayor temperatura puede elevar su temperatura, fundirse o vaporizarse.

Se pueden efectuar estos mismos cambios realizando trabajo que resulta en la disipación de energía mecánica por fricción.

Añadir calor y realizar trabajo sobre el cuerpo en tal forma de disipar energía son equivalentes en lo que concierne a efectos térmicos. Ambos, involucran una transferencia de energía.

La energía mecánica que se añade no desaparece, permanece dentro del cuerpo en forma de energía potencial y cinética asociada con los movimientos al azar de los átomos del cuerpo.

A esta energía térmica se le conoce como ENERGÍA INTERNA, a la que vamos a denotar con la letra *U*.

Como vimos anteriormente $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_BT$ indica que la energía cinética traslacional media por molécula depende solo de la temperatura; no de la presión, el volumen ni el tipo de molécula.

Podemos obtener la energía cinética por mol multiplicando la ecuación por el número de Avogadro y usando la relación $M = N_Am$:

$N_A\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}M\overline{v^2} = \frac{3}{2}RT$ (energía cinética media por mol de gas)

Esta ecuación ilustra un resultado general llamado el teorema del equipartición de la energía que dice que cada "grado de libertad" de un gas contribuye una cantidad de ½ k_BT a la energía interna total. Un grado de libertad es un movimiento independiente que puede contribuir a la energía total. Por ejemplo, una molécula tal como O_2 tiene, en principio, 7 grados de libertad. Tres se asocian a la traslación a lo largo de los ejes *x*, *y*, y *z*, tres se asocian a rotaciones sobre los ejes *x*, *y*, y *z* , y uno se asocia a las vibraciones de la molécula a lo largo del eje de O-O (como las masas que vibran en los extremos de un resorte). Sin embargo, desde el momento

de la inercia I para las rotaciones sobre el eje O-O es aproximadamente cero, las rotaciones sobre este eje no agrega casi nada a la energía$\left(K = 1/2\, I\omega^2\right)$. Además, la mecánica cuántica demuestra que los modos vibratorios no están excitados apreciablemente sino hasta que la temperatura del gas es alta, así que para la mayoría de los propósitos asumimos que una molécula diatómica tiene 5 grados de libertad. Un gas monoatómico como el helio tiene 3 grados de libertad.
La energía interna total de n moles de un gas monoatómico (con tres grados de libertad) es:

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

La energía interna total de n moles de un gas diatómico (con cinco grados de libertad) es:

$$U = \frac{5}{2} nRT$$

Ejemplo 156.
a) ¿Cuántos átomos de gas helio llenan un globo que tiene un diámetro de 30,0 cm a 20 º C y 1 atm?
b) ¿Cuál es la energía cinética media de los átomos de helio?
c) ¿Cuál es la velocidad rms de los átomos de helio?
Solución.
a) La ley del gas ideal

$$pV = Nk_BT \;\Rightarrow\; N = \frac{pV}{k_BT} \Rightarrow$$

$$N = \frac{\left(1{,}013\times10^5\right)\left(\frac{4}{3}\pi 0{,}15^2\right)}{\left(1{,}38\times10^{-23}\right)\left(293\right)}$$
= 3,54 x 10^{23} átomos

b) La energía cinética media

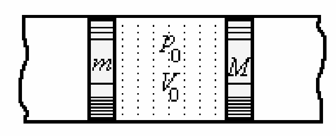
$$\overline{K} = \frac{3}{2}k_BT = \frac{3}{2}\left(1{,}38\times10^{-23}\right)\left(293\right)$$
= 6,07 x 10^{-21} J
c) Cálculo de la velocidad cuadrática media
Para el helio, la masa atómica es

$$m = \frac{4{,}00 \text{ g/mol}}{6{,}02\times10^{23} \text{ moléculas/mol}} = 6{,}64 \times 10^{-24}$$
g/molécula

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_BT \;\Rightarrow$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = 1{,}35 \text{ km/s}$$

Ejemplo 157. En un tubo termo aislado liso e infinito se encuentran dos émbolos con masas M y m, entre los cuales hay un gas monoatómico de volumen V_0 a presión p_0. Los émbolos se dejan libres. Estímese sus velocidades máximas. Menospréciese la masa del gas en comparación con las masas de los émbolos.



Solución.
La energía interna del gas es

$$U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}p_0V_0$$

Cuando se expande se convierte en energía cinética de los émbolos

$$K = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 \qquad (1)$$

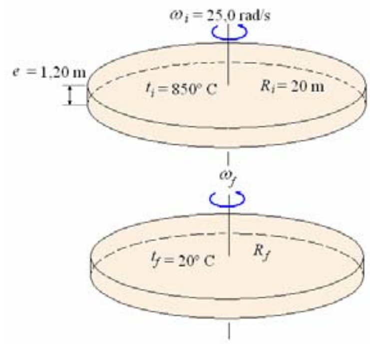
Cantidad de movimiento inicial: 0
Cantidad de movimiento final: $Mv_M - mv_m$
Cantidad de movimiento inicial = Cantidad de movimiento final.

$$0 = Mv_M - mv_m \Rightarrow Mv_M = mv_m \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$v_M = \sqrt{\frac{3p_0V_0m}{M(M+m)}},\; v_m = \sqrt{\frac{3p_0V_0M}{m(M+m)}}$$

Ejemplo 158. Como consecuencia de un choque entre una nave espacial y un asteroide, un disco de cobre de radio 28,0 m y espesor 1,20 m, temperatura 850º C, esta flotando en el espacio, rotando alrededor de su eje con una velocidad angular de 25,0 rad/s. A medida que el disco irradia luz infrarroja su temperatura baja a 20º C. No actúa un torque externo sobre el disco.
a) Encontrar el cambio de la energía cinética del disco.
b) Encontrar el cambio de la energía interna del disco.
c) Encontrar la cantidad de energía que radia.
Solución.



El momento de inercia inicial del disco es

$$I_i = \frac{1}{2}MR_i^2 = \frac{1}{2}\rho V R_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi R_i^2 t R_i^2 = \frac{1}{2}(8920)\pi(28)^4 1,2$$

$= 1,033 \times 10^{10}$ kg m^2

Cuando la velocidad de rotación aumenta el disco se enfría y su radio disminuye

$$R_f = R_i(1 - \alpha\Delta T)^2$$

$$= R_i\left[1 - \left(17\times 10^{-6}\right)(850-20)\right]^2$$

$$= 0,986 R_i$$

La cantidad de movimiento angular se conserva

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{\frac{1}{2}MR_i^2}{\frac{1}{2}MR_i^2(1+\alpha\Delta T)^2}\omega_i$$

$$= \frac{\omega_i}{(1+\alpha\Delta T)^2} = \frac{\omega_i}{(0,986)^2} = 1,029\omega_i$$

$= 1,029(25) = 25,7207$ rad/s

a) El cambio de la energía cinética del disco

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_f\omega_f^2$$

$$= \frac{1}{2}I_f\omega_f\omega_f - \frac{1}{2}I_i\omega_i\omega_i$$

$$= \frac{1}{2}I_i\omega_i(\omega_f - \omega_i)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1,033\times 10^{10}\right)(25)(25,7207 - 25)$$

$= 9,31\ 10^{10}$ J

b) El cambio de la energía interna del disco

$$\Delta U = mc\Delta T$$

$$= \left(2,64\times 10^7\right)(387)(20-850)$$

$= -\ 8,48 \times 10^{12}$ J

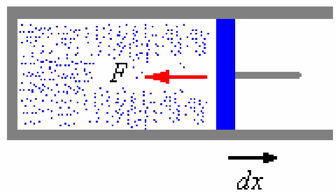
c) La cantidad de energía que radia.

A medida que salen $8,48 \times 10^{12}$ J de la energía interna, $9,31 \times 10^{12}$ J se cambia a energía interna extra, el resto es radiado

Energía radiada = $8,48 \times 10^{12}$ J - $9,31 \times 10^{10}$ J
= 8,387 J

TRABAJO REALIZADO POR UN GAS

Consideremos, por ejemplo, un gas dentro de un cilindro. Las moléculas del gas chocan contra las paredes cambiando la dirección de su velocidad, o de su momento lineal. El efecto del gran número de colisiones que tienen lugar en la unidad de tiempo, se puede representar por una fuerza *F* que actúa sobre toda la superficie de la pared



Si una de las paredes es un pistón móvil de área *A*, y éste se desplaza *dx*, el intercambio de energía del sistema con el mundo exterior puede expresarse como el trabajo realizado

$dW = Fdx$ y $F = pA$

Se tiene:

$$dW = (pA)dx = p(Adx) \Rightarrow dW = pdV$$

Siendo dV el cambio del volumen del gas.

Expresión que nos permite al integrarla, calcular e trabajo entre dos estados, conociendo la relación entre la presión y el volumen.

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B pdV$$

Ejemplo 159. En cierto cilindro un émbolo móvil encierra un volumen V_o con presión p_o. El émbolo se deja libre. ¿Qué trabajo ejecutará el gas sobre el émbolo?, si el volumen del gas, al desplazarse el émbolo, aumenta al doble, en tanto que la presión del gas en este caso:

a) permanece constante;

b) crece linealmente hasta la presión $2p_o$ a medida que aumenta el volumen.

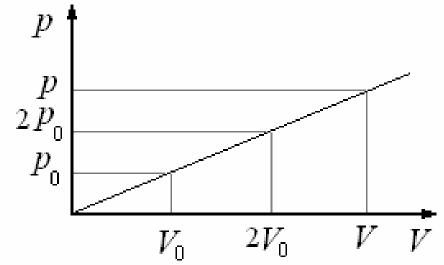
Solución.

a) p = constante

$$W = \int pdV \Rightarrow W = p_o\int_{V_o}^{2V_o} dV = p_o V\Big|_{V_0}^{2V_0}$$

$$= W = p_0(2V_0 - V_0) = p_0 V_0$$

b) El gráfico muestra la relación lineal de la presión y la temperatura.



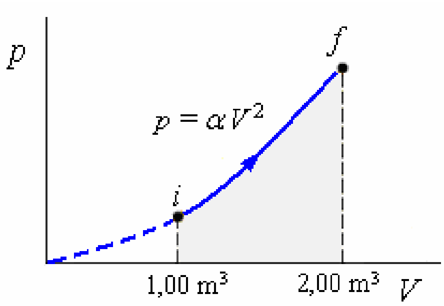
$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = \frac{2p_0 - p_0}{2V_0 - V_0} = \frac{p_0}{V_0} \Rightarrow p = \frac{p_0}{V_0}V$$

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{p_0}{V_0} V dV$$

$$= \frac{p_0}{V_0}\frac{V^2}{2}\bigg|_{V_0}^{2V_0} = \frac{p_0}{2V_0}\left(4V_0^2 - V_0^2\right)$$

$$= \frac{3}{2}p_0 V$$

Ejemplo 160. Una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen de 1,00 m^3 en un proceso cuasi estático para el que $p = \alpha V^2$, con α = 5,00 atm/m^2 , tal como se muestra en la figura. ¿Cuánto trabajo se realiza en la expansión del gas?



Solución.

$$W_{if} = \int_i^f pdV = \int_i^f \alpha V^2 dV$$

El trabajo realizado por el gas es el negativo del área encerrada bajo la curva $p = \alpha V^2$ entre V_i y V_f.

$$W_{if} = \int_i^f \alpha V^2 dV = \frac{1}{3}\alpha\left(V_f^2 - V_i^2\right)$$

$V_f = 2V_i$ = 2(1,00 m^3) = 2,00 m^3

$$W_{if} = \frac{1}{3}(5,00)\left(1,013\times10^5\right)\left[(2,00)^3 - (1,00)^3\right]$$

= 11,82 x 10^5 J

Ejemplo 161. Un mol de un gas ideal se calienta lentamente tal que va desde (p_1. V_1) a (3p_1. 3V_1) en tal forma que la presión es directamente proporcional al volumen.

a) ¿Qué trabajo realiza el gas en el proceso?
b) ¿Cómo se relaciona la temperatura del gas a su volumen durante este proceso?

Solución. Durante el proceso de calentamiento $p = CV$ de tal manera que

$$p_1 = CV_1 \Rightarrow C = \frac{p_1}{V_1}$$

Luego $p = \frac{p_1}{V_1}V$

a) El trabajo que realiza el gas en el proceso

$$W = -\int_1^2 pdV = -\int_{V_1}^{3V_1} \frac{p_1}{V_1}VdV$$

$$= -\frac{p_1}{V_1}\frac{V^2}{2}\bigg|_{V_1}^{3V_1} = -\frac{p_1}{2V_1}\left(9V_1^2 - V_1^2\right)$$

$$= -4p_1V_1^2$$

b) La ley del gas ideal

$pV = nRT$

$$\left(\frac{p_1}{V_1}V\right)V = nRT \Rightarrow \frac{p_1}{V_1}V^2 = nRT$$

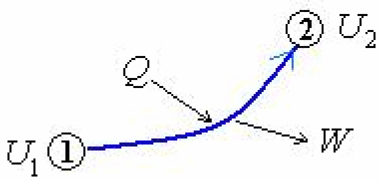
$$\Rightarrow T = \frac{p_1}{nRV_1}V^2$$

La temperatura es proporcional al volumen al cuadrado.

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA.

Como ya hemos dicho la transferencia de calor y la realización de trabajo constituyen dos formas o métodos de transferir, suministrar o quitar, energía a una sustancia, o sea, representa energía en tránsito y son los términos utilizados cuando la energía está en movimiento. Una vez que la transferencia de energía termina se dice que el sistema ha experimentado un cambio de energía interna.

Supongamos un sistema al que se hace pasar del estado de equilibrio 1 al 2, mediante un determinado proceso termodinámico y durante el cual medimos el calor absorbido *Q* y el trabajo realizado *W*.



Estas cantidades dependen no solamente de las características de los estados inicial y final, sino también de los estados intermedios del camino en particular seguido en el proceso. Sin embargo, si calculamos la diferencia Q - W para ir del estado de equilibrio y al 2 por diferentes caminos, encontramos siempre el mismo valor. Por consiguiente la diferencia Q - W representa la variación de energía interna del sistema, si asociamos un número con cada estado de equilibrio de tal modo que sirva como medida de esta cantidad, podemos escribir

$$U_2 - U_1 = Q - W$$

Expresión que constituye el primer principio de la termodinámica.

o $Q = (U_2 - U_1) + W$

Tenga en cuenta que Q y W deben expresarse en las mismas unidades, ya sean de calor o trabajo. También que Q es positivo cuando el sistema recibe (entra) calor y W es positivo cuando el sistema realiza (sale) trabajo.

Note que la convención de signos que estamos utilizando aquí en este capítulo para el trabajo es opuesta a la utilizada en la Mecánica., donde W es positivo cuando es hecho sobre el sistema. Este cambio obedece a la costumbre o tradición, dado que el. Propósito de las máquinas as hacer trabajo y a este 1o llamamos en la vida diaria trabajo útil o positivo. Por otro lado la convención de signos de: Q es consistente con este hecho, cuando una máquina disipa o pierde calor es indeseable o negativo.

La forma descrita se aplica cuando los valores de la presión, volumen y temperatura correspondientes a los estados 1 y 2 difieren en cantidades finitas. Si los estados 1 y 2 varían infinitesimalmente, el primer principio toma la forma

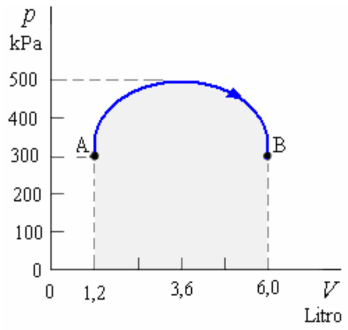
$$dQ = dU + dW$$

Si el sistema de tal naturaleza que el único trabajo se realiza mediante una expansión o compresión

$$dQ = dU + pdV$$

Dado que: $dW = pdV$

Ejemplo 162. Una muestra de un gas ideal está en un cilindro vertical equipado con un pistón. Cuando 5,79 kJ de energía se transfiere al gas por calor para elevar su temperatura, el peso sobre el pistón se ajusta de modo que el estado del gas cambia del punto A al punto B a lo largo de la semicircunferencia mostrada en la figura. Encontrar el cambio de la energía interna del gas.



Solución.

El trabajo sobre el gas es

$$W = -\int_A^B pdV$$

= - área bajo el arco mostrado en el gráfico

= - (área de la semicírculo - área del rectángulo)

Área del semicírculo $= \frac{1}{2}\pi(2\,\mathrm{u})^2$

$= 2\pi\,\mathrm{u}^2 = 6{,}28\,\mathrm{u}^2$

Área del rectángulo $= (4\,\mathrm{u_v})(3\,\mathrm{u_h}) = 12\,\mathrm{u}^2$

Pero: $\mathrm{u}^2 = (\mathrm{u_v})(\mathrm{u_h})$

$\mathrm{u_v} = 100\,\mathrm{kPa} = 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$,

$\mathrm{u_h} = 1{,}2\,\mathrm{Litro} = 1{,}2\times10^{-3}\,\mathrm{m}^3$

$\mathrm{u}^2 = (\mathrm{u_v})(\mathrm{u_h}) = \left(10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)(1{,}2\times10^{-3}\,\mathrm{m}^3)$

= 120 J

Luego

Área del semicírculo = 6,28 u^2 = 754 J

Área del rectángulo = $(4\mathrm{u_V})(3\,\mathrm{u_H}) = 12\,\mathrm{u}^2$

= 1440 J

El trabajo sobre el gas es

W = - (754 + 1440) = - 2194 J

El cambio de la energía interna del gas.

$\Delta U = Q + W$ = 5790 J – 2194 J = 3596 J

CALOR ESFECÍFICO DEL GAS IDEAL

Antes de ver las principales transformaciones de los gases veamos el calor específico de un gas ideal a volumen constante y a presión constante. Las capacidades caloríficas mas importantes son las que se determinan cuando los procesos se realizan a volumen constante (C_V) o a presión constante (C_p)

Calor específico a volumen constante.

Sea $(dQ)_V$ una pequeña cantidad de calor que absorbe un gas a volumen constante $(dV = 0)$.

Por lo tanto no se realiza trabajo $\left(dW = 0\right)$, aplicando el primer principio de la termodinámica,
$dQ = dU + dW$, obtenemos:

$$\left(dQ\right)_V = dU$$

Como: $C_V = \dfrac{\left(dQ\right)_V}{dT}$

De aquí la capacidad calorífica a volumen constante,

$$C_V = \frac{\left(dQ\right)_V}{dT} = \frac{dU}{dT}$$

Para un gas ideal monoatómico:

$U = \dfrac{3}{2}nRT$, luego,

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}nR$$

Calor específico a presión constante.
De igual modo si $\left(dQ\right)_p$ es una pequeña cantidad de calor que absorbe un gas a presión constante, aplicando el primer principio de la termodinámica

$$\left(dQ\right)_p = dU + \left(dW\right)_p$$

Donde $\left(dW\right)_p = pdV \;\Rightarrow$

$$\left(dQ\right)_p = dU + pdV$$

Como $C_p = \dfrac{\left(dQ\right)_p}{dT}$

De esto obtenemos: $C_p = \dfrac{dU}{dT} + p\dfrac{dV}{dT}$

y como $C_V = \dfrac{dU}{dT}$, $C_p = C_V + p\dfrac{dV}{dT}$

para un gas ideal $pV = nRT$

A presión constante, $dp = 0$, luego

$$pdV = nRdT \;\Rightarrow\; p\frac{dV}{dT} = nR$$

Luego, $C_p = C_V + nR$

Para un gas monoatómico:

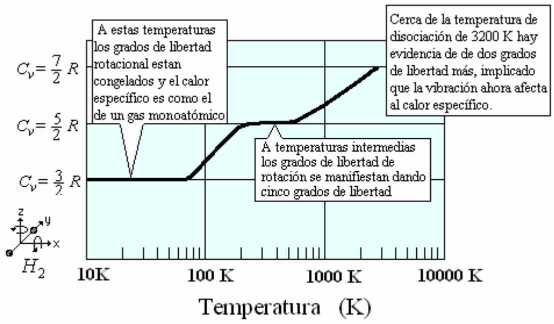
$$C_p = \frac{3}{2}nR + nR = \frac{5}{2}nR$$

También como $C_p = C_V + nR$,

La capacidad calorífica por mol

$$c_p = c_V + R$$

Calor específico del hidrógeno
El comportamiento del calor específico del hidrógeno con el cambio de temperatura es sumamente desconcertante a inicios del siglo XX. En bajas temperaturas que se comporta como un gas monoatómico, pero a temperaturas más altas su calor específico asume un valor similar a otras moléculas diatómicas. Tomó el desarrollo de la teoría cuántica para demostrar que el hidrógeno diatómico, con su pequeña inercia de rotación, requiere una gran cantidad de energía para excitar su primera rotación molecular de estado cuántico. Dado que no puede obtener esa cantidad de energía a bajas temperaturas, actúa como un gas monoatómico



Ejemplo 163. Un foco incandescente contiene un volumen *V* de argón a presión p_i . El foco se enciende y una potencia constante P es transferido a la argón por un intervalo de tiempo *t*.
a) Mostrar que la presión final p_f en el foco al final de este proceso es

$$p_f = p_i\left(1 + \frac{P\Delta tR}{p_i VC_V}\right)$$

b) Encontrar la presión en un foco esférico de 10,0 cm de diámetro, 4,00 s después de encendido, dada la presión inicial de 1,00 atm y que 3,60W de potencia se transfiere al gas.
Solución.
a) Asumimos que el foco no se expande. El proceso de calentamiento es a volumen constante.

La cantidad de gas es $n = \dfrac{p_i V}{RT_i}$

El calor que se pone es

$$Q = P\Delta t = nC_V\Delta T \;\Rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{P\Delta t}{nC_V} = \frac{P\Delta t}{\left(\dfrac{p_i V}{RT_i}\right)C_V} = \frac{RT_i P\Delta t}{p_i VC_V}$$

La temperatura final es

$$T_f = T_i + \Delta T$$

$$= T_i + \frac{RT_i P\Delta t}{p_i VC_V} = T_i\left(1 + \frac{P\Delta tR}{p_i VC_V}\right)$$

La presión final es

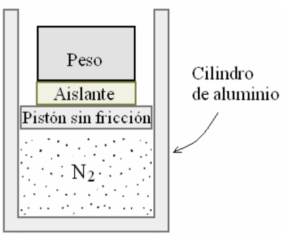
$$p_f = p_i \frac{T_f}{T_i} = p_i\left(1 + \frac{P\Delta tR}{p_i V C_V}\right)$$

b)

$$p_f = \left(1{,}013\times10^5\right)\left[1 + \frac{(3{,}60)(4{,}00)(8{,}31)}{\left(1{,}013\times10^5\right)\left(\frac{4}{3}\pi 0{,}05^3\right)(12{,}5)}\right]$$

= 1,18 x 10^5 Pa

Ejemplo 164. Un sistema que consiste de un pistón de aluminio sin fricción y un cilindro de aluminio a prueba de fugas contiene 2,0 g de gas nitrógeno a 27º C como se muestra en la figura. El pistón soporta una carga aislada de manera que no hay transferencia de calor entre el pistón y la carga. La superficie del pistón en contacto con el nitrógeno es de 200 cm^2. La masa total del cilindro y el pistón es de 140 g, y la fuerza total hacia abajo sobre el gas es de 1013 N.
Un mol de N_2 tiene una masa de 28 g,
Presión atmosférica es de 1 atm = 1,013 x 10^5 N/m^2
Calor específico aluminio es 0,22 cal/g °C,
Calor específico N_2 es 0,25 cal /g °C.
Considerar que el gas N_2 se comporta idealmente.
Calcular
a) La presión ejercida sobre el gas N_2 por el pistón y la carga;
b) El volumen inicial del gas;
c) El volumen de gas después de que el sistema se calienta a 327º C.
d) El desplazamiento del pistón después del calentamiento;
e) El trabajo realizado por el gas sobre el pistón;
f) el incremento en energía interna del sistema, y
g) La cantidad total de calor añadido al sistema



Solución.
a) La presión sobre el gas es la que ejerce el pistón y la carga

$$p = \frac{F}{A}$$

F = 1013 N
A = 200 cm^2 = 2 x 10^{-2} m^2

$$p = \frac{1013}{2\times10^{-2}} = 5{,}063 \text{ x } 10^{-4}\ \text{N/m}^2$$

En atmósferas

$$p = 5{,}063\times10^{-4}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\left(\frac{1\,\text{atm}}{1{,}013\times10^5\,\text{N/m}^2}\right)$$

= 0,5 atm
b) El volumen inicial del gas
Usando la ley del gas ideal

$$pV_i = nRT_i \Rightarrow V_i = \frac{nRT_i}{p}$$

R = 0,0821 litro atm / mol K
T_i = 27º C 273,15º C = 300,15 K

$$n = \frac{2\text{ g}}{28\text{ g/mol}} = 0{,}07$$

La presión total es la presión del pistón, carga y la atmósfera.
p = 0,5 atm + 1 atm = 1,5 atm
Reemplazando valores:

$$V_i = \frac{(0{,}07)(0{,}0821)(300{,}15)}{1{,}5}$$

= 1,1734 litros
c) Como la presión permanece constante

$$\frac{V_i}{T_i} = \frac{V_f}{T_f} \Rightarrow V_f = V_i\frac{T_f}{T_i}$$

T_i = 300,15 K
T_f= 327 + 273,15 = 600,15 K
Reemplazando valores

$$V_f = 1{,}1734\left(\frac{600{,}15}{300{,}15}\right)$$

= 2,346 litros
d) El desplazamiento del pistón después del calentamiento;

d) El cambio de volumen del cilindro es

$$\Delta V = A\Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{\Delta V}{A}$$

Δh es el desplazamiento del cilindro.
Siendo
ΔV = 2,346 - 1,1734 = 1,1734 litros = 1,1734 x 10^{-3} m^3 y
A = 200 cm^2 = 2 x 10^{-2} m^2
Obtenemos

$$\Delta h = \frac{1{,}1734\times10^{-3}}{2\times10^{-2}} = 0{,}05867 \text{ m} = 5{,}865 \text{ cm.}$$

e) El trabajo realizado por el gas sobre el pistón;
Primero encontremos la fuerza que el gas ejerce sobre el pistón y la carga.

$$F = pA$$

$$p = (1,5 \text{ atm})\left(\frac{1,013\times 10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ atm}}\right)$$
$= 1,5195 \times 10^5$ N/m^2
$A = 200$ cm^2 = 2×10^{-2} m^2
$F = (1,5195\times 10^5)(2\times 10^{-2})$ = 3039 N
La fuerza y el desplazamiento están en la misma dirección, luego
$W = F\Delta h$ = (3039 N)(0,0587 m) = 178,4 J
En calorías
$$W = 178,4 \text{ J}\left(\frac{1 \text{ cal}}{4,184 \text{ J}}\right) = 42,6 \text{ cal}$$
f) El aumento en la energía interna del sistema es igual al calor absorbido por el cilindro de aluminio y el pistón más el calor absorbido por el gas nitrógeno.
$\Delta U = Q_{Al} + Q_{N2}$
Siendo
$Q_{Al} = mc\Delta T$
= (140 g)(0,22 cal/g °C)(300 °C)
= 9240 cal y
$Q_{N2} = mc\Delta T$ = (2,0 g)(0,25 cal/g °C)(300 °C)
= 150 cal
Luego
ΔU = 9240 cal + 150 cal = 9390 cal
g) Aplicando la primera ley de la termodinámica
$Q = W + \Delta U$
Donde
W = 43,6 cal
ΔU = 9390 cal
Obtenemos:
Q = 42,6 cal + 9390 cal = 9433 cal

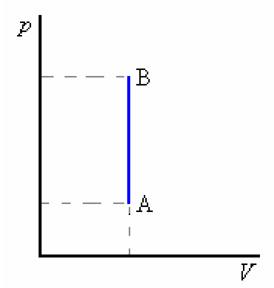
Ejemplo 165. Un bloque de aluminio de 1,00 kg se calienta a presión atmosférica tal que la temperatura incrementa de 22,0º C a 40º C. Encontrar
a) el trabajo realizado por el aluminio.
b) la energía añadida por calor y
c) el cambio en su energía interna.
Presión atmosférica = $1,013 \times 10^5$ Pa
$\alpha_{alumnio} = 24 \times 10^{-6}$ /º C
$c_{aluminio}$ = 900 J/kg º C
Solución.
a) Al elevarse la temperatura el bloque se dilata
$\Delta V = 3\alpha V\Delta T$
$$= 3(24,0\times 10^{-6})\left(\frac{1,00}{2,7\times 10^3}\right)(18,0)$$
$= 0,48 \times 10^{-6}$ m^3
El trabajo realizado por el aluminio en este proceso es
$W = -p\Delta V = p(3\alpha V\Delta T)$
$= -(1,013\times 10^5)(0,48\times 10^{-6})$
= - 0,04862 J = 48,6 mJ
b) La energía añadida por calor
$Q = mc\Delta T = (1,00)(900)(18,0)$
= 16200 J = 16,2 kJ
c) El cambio en su energía interna
$\Delta U = Q + W$ = 16200 – 0,04862
= 16200 J = 16,2 kJ

PROCESOS TERMODINÁMICOS.
El estado de un gas cualquiera o una mezcla de gases está determinado por su temperatura, su presión y su volumen. En el caso del gas ideal estas variables se unen por la relación para un mol de gas. $pV = RT$
La especificación del estado de un gas presupone:
a) Equilibrio térmico. La temperatura es uniforme en todo el sistema e igual a la del recipiente;
b) Equilibrio mecánico. La fuerza ejercida por el sistema sobre el recipiente es uniforme en toda su superficie y es contrabalanceada por tuerzas externas;
c) Equilibrio químico. La estructura interna del sistema y su composición química no varían de un punto a otro.
Un estado que satisfaga estas condiciones se denomina estado de equilibrio termodinámico y sus variables satisfacen la ecuación anterior. Si queremos usar la ecuación de estado durante una transformación, es necesario que el sistema no se aleje mucho de las condiciones de equilibrio; esto se consigue procurando que la transformación se realice en una sucesión de estados de equilibrio poco diferentes entre sí; este proceso se llama cuasi estático; durante la transformación, el sistema está en todos los instantes en una proximidad infinita al estado de equilibrio. Esto se consigue, en general, haciendo los cambios en forma suficientemente lenta para que el sistema entre en equilibrio después de cada modificación (en rigor, una transformación exigiría un tiempo infinito para su realización).
La energía interna U del sistema depende únicamente del estado del sistema, en un gas ideal depende solamente de su temperatura. Mientras que la transferencia de calor o el trabajo mecánico dependen del tipo de transformación o camino seguido para ir del estado inicial al final.

Isocórico o a volumen constante
No hay variación de volumen del gas, luego

$W = 0$, $Q = nc_V (T_B - T_A)$

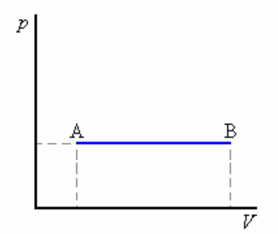
Donde c_V es el calor específico a volumen constante



Isobárico o a presión constante

$W = p(V_B - V_A)$, $Q = nc_p (T_B - T_A)$

Donde c_p es el calor específico a presión constante



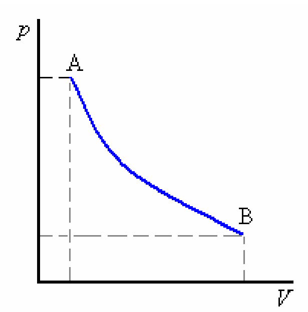
Isotérmico o a temperatura constante

$pV = nRT$

La curva $p = \dfrac{\text{constante}}{V}$, representa la transformación en un diagrama $p - V$ es una hipérbola cuyas asíntotas son los ejes coordenados

$$W = \int_{V_A}^{V_B} pdV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$\Delta U = 0$, $Q = W$



Ejemplo 166. Expansión libre de un gas.
Un recipiente de paredes rígidas y completamente aisladas está dividido en dos por medio de una pared. Una parte contiene gas y la otra está evacuada. Si la pared que los separa se rompe súbitamente, mostrar que la energía interna final y la inicial son iguales.

Solución.
Según el primer principio de la termodinámica:

$Q = (U_2 - U_1) + W$

Como el sistema está aislado Q es cero, o sea

$(U_2 - U_1) + W = 0$

el trabajo W realizado sobre el sistema también es cero. Note que el gas inicialmente tenía un volumen V y una presión p y finalmente un volumen V y una presión p/2.
Luego:

$(U_2 - U_1) = 0 \Rightarrow U_2 = U_1$

Ejemplo 167. Una cámara al vacío hecha de materiales aislantes se conecta a través de una válvula a la atmósfera, donde la presión es p_o. Se abre la válvula y el aire fluye a la cámara hasta que la presión es p_0. Probar que $u_f = u_0 + p_o V_0$, donde u_0 y V_0 es la energía interna molar y volumen molar de temperatura y presión de la atmósfera.
u_f es la energía interna molar del aire en la cámara.

Solución.
Inicialmente la cámara tenía un volumen cero de aire, al final se encuentra llena de aire y el trabajo por mol realizado sobre el sistema sería $- p_o V_0$. Como está aislado no ha habido pérdida ni ganancia de calor.
Aplicando el primer principio de la termodinámica:

$Q = (U_2 - U_1) + W$

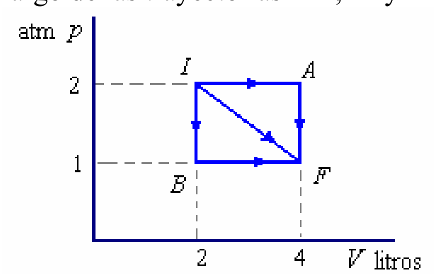
Obtenemos por mol

$0 = (u_f - u_0) - p_o V_0$

Finalmente:

$u_f = u_0 + p_o V_0$

Ejemplo 168. Un gas se expande desde I a F por tres posibles trayectorias como se indica en la figura. Calcule el trabajo realizado por el gas a lo largo de las trayectorias *IAF*, *IF* y *IBF*.



Solución.

a) $W_{IAF} = \int_i^f pdV = 2 \text{ x } (4 - 2)$

$= 4$ litro atm $= 4 \text{ x } 101,33$ J $= 405,32$ J

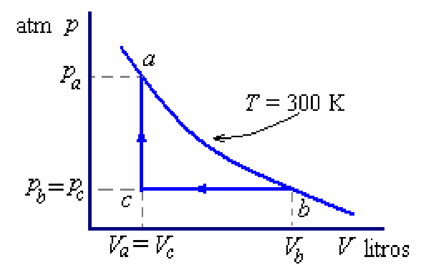
b) $W_{IF} = \int_i^f pdV = 2\times 1 + \frac{1}{2}(1\times 2)$

= 3 litro atm = 3 x 101,33 J = 304 J

c) $W_{IBF} = \int_i^f pdV = 2\times 1$

= 2 litro atm = 2 x 101,33 J = 202,7 J

Ejemplo 169. Una muestra de un gas ideal de un mol se lleva a través de un proceso termodinámico cíclico, como se muestra en la figura. El ciclo consta de tres partes, una expansión isotérmica (a - b), una compresión isobárica (b - c) y un aumento de la presión a volumen constante (c -d). Si T = 300 K, p_a = 5 atm, $p_b = p_c$ = 1 atm, determine el trabajo realizado por el gas durante el ciclo.



Solución.

$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca}$

Para una expansión isotérmica ab

$$W_{ab} = \int_a^b pdV = \int_a^b nRT\frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_b}{V_a}$$

$$= nRT\ln\frac{p_a}{p_b}$$

Para la compresión isobárica bc

$W_{bc} = p_b(V_c - V_a)$

Para la compresión isocórica ca no hay trabajo.

$W_{ca} = 0$

De tal manera:

$$W = nRT\ln\frac{p_a}{p_b} + p_c(V_c - V_a)$$

$$= nRT\ln\frac{p_a}{p_b} + p_b\left(\frac{nRT}{p_a} - \frac{nRT}{p_b}\right)$$

$$= nRT\left[\ln\frac{p_a}{p_b} + \left(\frac{p_b}{p_a} - 1\right)\right]$$

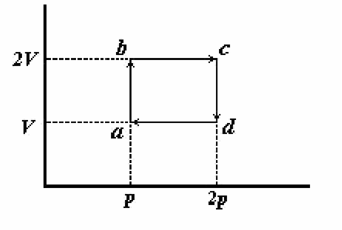
$$= RT\left[\ln 5 + \left(\frac{1}{5} - 1\right)\right]$$

= 19,9 l atm = 2017,5 J

Ejemplo 170. La figura muestra un ciclo donde a es el estado inicial del sistema.

Las energías internas de los estados son: U_a = 10 J, U_b = 35 J, U_d= 39 J.

En el proceso $b\rightarrow c$, el trabajo realizado por el gas es + 91 J.



Encontrar:

a) El calor añadido al sistema durante el proceso $b\rightarrow c$.

b) El calor removido en el proceso $d\rightarrow a$.

Solución.

Usando la ley del gas ideal $\frac{pV}{T}$ = constante ,

podemos encontrar una relación entre las temperaturas en a, b, c y d.

Si $T_a = T$, $T_b = 2T$, $T_c = 4T$ y $T_d = 2T$

a) $Q_{bc} = C_p(T_c - T_b)$

$= C_p(4T - 2T) = 2C_pT$

Por la segunda ley de la termodinámica:

$U_c - U_b = Q_{bc} - W_{bc} \Rightarrow$

$U_c - 35 = Q_{bc} - 91$

Por otra parte en el proceso $a\rightarrow b$:

$U_b - U_a = Q_{ab} - W_{ab}$

$\Rightarrow 35 - 10 = Q_{ab} - 0$

y $Q_{ab} = 25$ J y también

$Q_{ab} = C_V(T_b - T_a) = C_V(2T - T) = C_VT$

luego $C_VT = 25$ J

En el proceso $c\rightarrow d$:

$U_d - U_c = Q_{cd} - W_{cd} \Rightarrow 39 - U_c = Q_{cd} - 0$

Como

$Q_{cd} = C_V(T_d - T_c) \Rightarrow$

$Q_{cd} = C_V(2T - 4T) = -2C_VT$

y $Q_{cd} = -2\times 25 = -50$ J

con lo que encontramos

$U_c = 39 - Q_{cd} = 39 + 50 = 89$ J

Finalmente:

$Q_{bc} = U_c - 35 + 91 = 89 - 35 + 91 = 145$ J

$Q_{bc} = 145$ J

b) $Q_{da} = U_a - U_d + W_{da}$

$Q_{da} = C_p(T_a - T_d) = C_p(T - 2T) = -C_pT$

Como $Q_{bc} = 145 J = 2C_pT$

Luego $Q_{da} = -C_pT = -\frac{145}{2} = -72,5$ J

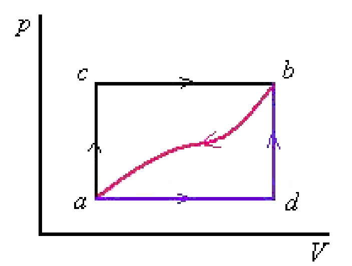
Ejemplo 171. ¿Cuál es la tasa de trabajo de un corazón que late 70 veces por minuto y las bombea 72 cm^3 de sangre en cada latido contra una presión de 12 cm de mercurio?
Solución.
A cada latido el trabajo realizado por el corazón en cada latido es
$W = pV$
$p = \rho gh = 13600 \times 9{,}8 \times 0{,}12$
$= 1{,}6 \text{ x } 10^4$ N/m^2, $V = 72 \times 10^{-6}$ m^3
Reemplazando valores:
$W = \left(1{,}6 \times 10^4\right)\left(72 \times 10^{-6}\right)$ = 1,1515 J/ latido
Como son 70 latidos por minuto.
El trabajo por segundo es
$W = 1{,}1515 \times \dfrac{70}{60}$ = 1,34 J/s

Ejemplo 172. Cuando un gramo de agua de volumen 10^{-6} m^3 se hierve a una presión de 10^5 N/m^2 se producen 1670 x10^{-6} m^3 de vapor de agua. ¿Qué trabajo se realiza contra la presión exterior y cuál es el incremento de energía interna?
Solución.
Para vaporizar 1 g de agua se pone
$Q = mL$ = 1 g x 540 cal/g = 540 cal.
El trabajo es para realizar el cambio de volumen de 10^{-6} m^3 a 1670 x10^{-6} m^3 a presión constante de 10^5 N/m^2 es:
$W = \int pdV = p\left(V_2 - V_1\right) = 10^5\,(1670 - 1) \text{ x}10^{-6}$
= 166,9 J =39,92 cal
Como $\Delta U = Q - W$
Tenemos.
$\Delta U = (540 - 39{,}92)$ = 500,08 cal
El incremento de energía interna es 500,2 cal.

Ejemplo 173. Calcular el trabajo realizado cuando un gas obedece la ecuación de estado de Berthelot
$$\left(p + \frac{a}{TV^2}\right)(V - B) = RT\ .$$
Se expande isotérmicamente desde el volumen V_1 a V_2.
Solución.
$$p = \frac{RT}{(V - B)} - \frac{a}{TV^2}$$
El trabajo realizado es
$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{RT}{V - B} - \frac{a}{TV^2}\right)dV$$
R, T, a y b son constantes

Integrando
$$W = RT \ln\left(\frac{V_2 - b}{V_1 - b}\right) + \left(\frac{a}{TV_2} + \frac{a}{TV_1}\right)$$

Ejemplo 174. En la figura se muestran diversas trayectorias entre los estados de equilibrio a, b, c y d, en un diagrama p-V.



a) Cuando el sistema pasa de1 estado a al b a lo largo de la trayectoria a, c, b recibe 20000 calorías y realiza 7500 cal de trabajo. Calcular el cambio de energía interna $\left(U_b - U_a\right)$.
b) ¿Cuánto calor recibe el sistema a lo largo de la trayectoria adb, si el trabajo realizado es 2500 cal?
c) Cuando el sistema vuelve de b hacia a, a lo largo de la trayectoria curva ba, el trabajo realizado es 5000 cal. ¿Cuánto calor absorbe o libera el sistema?
d) Si $U_a = 0$ y U_d = 10000 cal., hállese el calor absorbido en los procesos ad y db.
Solución.
a) Por la trayectoria acb, se tiene:
Q = 20000 cal.
W = 7500 cal.
Luego,
$U_b - U_a = Q - W \;\Rightarrow$
$U_b - U_a$ = 20000 – 7500 = 12500 cal.
b) Por la trayectoria adb, W = 2500 cal.
$Q = \left(U_b - U_a\right) + W$
= 12500 + 2500
Q_{adb} = 15000 cal. (absorbido)
c) Para la trayectoria ba,
W = + 5000 cal.
Luego,
$Q = \left(U_a - U_b\right) + W$
Q = - 12500 + 5000
Q_{ba} = - 7,500 cal. (libera)
d) Si $U_a = 0$ y U_d = 10,000 cal,
$U_d - U_a$ = 10000 cal. Además, observe que al ir por la trayectoria adb solo se hace trabajo en ad y no en db, o sea, se tiene que:
$W_{ad} = W_{adb}$ = 2500 cal.
Luego

$Q_{ad} = (U_d - U_a) + W_{ad}$

= 10000 + 2500 = 12500 cal. (absorbido)

Como encontramos que

Q_{adb} = 15000 y $Q_{adb} = Q_{ad} + Q_{db}$

Obtenemos

Q_{db} = 15000 – 12500 = 2500 cal. (Absorbido)

Esta última cantidad también podría encontrarse teniendo en cuenta que:

$W_{db} = 0$

Y como en (a) hemos determinado que

$U_b - U_a$ = 12,500 cal.

Si $U_a = 0$, se tiene que U_b = 12500, luego

$U_b - U_d$ = 12500 – 10000 = 2500 cal.

Finalmente

$Q_{db} = (U_b - U_d) + W_{db}$ = 2500 cal.

Ejemplo 175. Un mol de un gas ideal se encuentra en un estado inicial p = 2 atm y V = 10 litros indicado por el punto a en el diagrama pV de la figura. El gas se expande a presión constante hasta el punto *b,* cuyo volumen es 30 litros y luego se enfría a volumen constante hasta que su presión es de 1 atm en el punto *c*. Entonces se comprime a presión constante hasta alcanza su volumen original en el punto *d* y finalmente se calienta a volumen constante hasta que vuelve a su estado original.

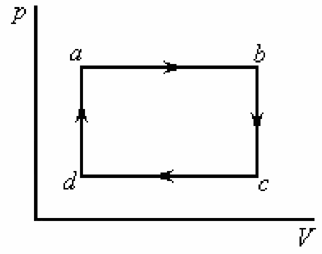
a) Determinar la temperatura de cada estado *a*, *b*, *c* y *d*.

b) Determinar el calor añadido a lo largo de cada una de las etapas del ciclo.

c) Calcular el trabajo realizado a lo largo de cada trayectoria.

d) Determinar la energía de cada estado *a*, *b*, *c* y *d*.

e) ¿Cuál es el trabajo neto realizado por el gas en el ciclo completo?



Solución.

a) Por la ley del gas ideal:

$$pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR}$$

$$n = 1,\ R = 0{,}0821 \frac{\text{litro.atm}}{\text{mol.K}}$$

En a $\begin{cases} p_a = 2\ \text{atm} \\ V_a = 10\ \text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{2 \times 10}{0{,}0821} = 243{,}6$ K

En b $\begin{cases} p_b = 2\ \text{atm} \\ V_b = 30\ \text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{2 \times 30}{0{,}0821} = 730{,}8$ K

En c $\begin{cases} p_c = 1\ \text{atm} \\ V_c = 30\ \text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{1 \times 30}{0{,}0821} = 365{,}4$ K

En d $\begin{cases} p_d = 1\ \text{atm} \\ V_d = 10\ \text{litros} \end{cases}$

Luego $T = \dfrac{1 \times 10}{0{,}0821} = 121{,}8$ K

b)

De $a \rightarrow b$ (presión constante)

El calor suministrado es $Q = C_p \Delta T$

Siendo gas ideal (gas monoatómico)

$$C_p = \frac{5}{2} nR$$

Como $n = 1$, y $R = 2 \dfrac{\text{cal}}{\text{mol K}} \Rightarrow$

$$C_p = 5 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

ΔT = 730,8 – 243,6 = 48

= 2436 calorías

De $b \rightarrow c$ (volumen constante)

El calor suministrado es $Q = C_V \Delta T$

Siendo gas ideal (gas monoatómico)

$$C_p = \frac{3}{2} nR$$

Como $n = 1$, y $R = 2 \dfrac{\text{cal}}{\text{mol K}}$

$$\Rightarrow C_p = 3 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

ΔT = 365,4 – 730,8 = -365,4 K

$Q = (3)(-365{,}4)$ = -1096,2 calorías

De $c \rightarrow d$ (presión constante)

El calor suministrado es $Q = C_p \Delta T$

ΔT = 121,8 – 365,4 = - 243,6 K

$Q = (5)(-243{,}6)$ = -1218 calorías

De $d \rightarrow a$ (volumen constante)

El calor suministrado es $Q = C_V \Delta T$

ΔT = 243,6 – 121,8 = 121,8 K

$Q = (3)(121{,}8)$ = 365,4 calorías

c)

De $a \rightarrow b$ (presión constante)

El trabajo es $W = p(V_b - V_a)$

$W = 2(30 - 10)$ = 40 litro atm
Como 1 litro-atm = 101,3 J = 24,2 cal:
W = 4052 J = 968 calorías (trabajo del sistema)

De $b \rightarrow c$ (volumen constante)
El trabajo es $W = 0$, (no hay trabajo).

De $c \rightarrow d$ (presión constante)
El trabajo es $W = p(V_d - V_c)$
$W = 1(10 - 30)$ = - 20 litro atm
W = - 2026 J = - 484 calorías (trabajo sobre el sistema)

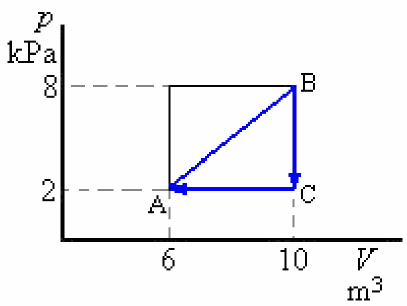
De $d \rightarrow a$ (volumen constante)
El trabajo es $W = 0$, (no hay trabajo).
d) Como

$$U = \frac{3}{2}nRT$$
$$= \frac{3}{2}(1\text{mol})\left(2\frac{\text{cal}}{\text{mol K}}\right)T$$
$$= 3T$$

$U_a = 3T_a = 3(243{,}6K) =$ 730,8 cal
$U_b = 3T_b = 3(730{,}8K) =$ 2192,4 K
$U_c = 3T_c = 3(365{,}4K) =$ 1096,2 K
$U_d = 3T_d = 3(121{,}8K) =$ 365,4 K

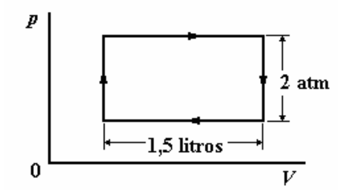
e) Trabajo neto = $W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$
= 4052 + 0 – 2026 + 0 = 2026 J
= 487 cal
Calor absorbido = $Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{cd} + Q_{da}$
= 2436 – 1096,2 – 1218 +365,4
= 487 cal
Trabajo neto = calor absorbido
= Calor que entra – calor que sale.

Ejemplo 176. Considere el proceso cíclico descrito en la figura. Si Q es negativo para el proceso BC y □U es negativo para el proceso CA:
a) determine los signos de Q asociados a cada proceso.
b) determine los signos de W asociados a cada proceso.



Solución.
a) Q_{AB} = positivo
Q_{BC} = negativo (Dato)
$(U_C - U_B) = Q_{BC} - W_{BC}$
$= Q_{CA} =$ negativo
$(U_A - U_B) = Q_{CA} - W_{CA} \Rightarrow$
$Q_{CA} = (U_A - U_C) + W_{CA}$ = (-) + (-) = negativo
b) W_{AB} = positivo
W_{BC} = 0 (A volumen constante)
W_{CA} = 2 (6-10) = -8 = negativo

Ejemplo 177. Un cilindro contiene un gas ideal a una presión de 2 atmósferas, el volumen es de 5 litros a una temperatura del gas de 250 K. El gas se calienta a volumen constante hasta una presión de 4 atmósferas, y luego a presión constante hasta una temperatura de 650 K. Calcular el calor total recibido durante estos procesos. Para el gas el c_v es 21,0 J /mol K
Luego el gas entonces es enfriado a vo1umen constante hasta su presión original y después a presión constante se lleva el gas hasta su volumen original.
a) Encuentre la salida de calor total durante estos procesos y
b) el trabajo total hecho por el gas en el proceso cíclico del conjunto.
Solución.



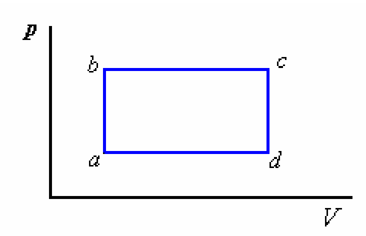
La ecuación del gas ideal permite el cálculo del número de los moles originalmente presentes.

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{2\text{atm} \times 5\text{litro}}{0{,}0821\ \text{litro atm/mol.K}}$$
= 0,487 mol

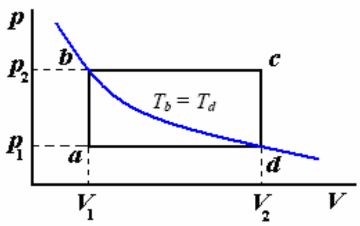
También $C_p = C_V + nR$, la capacidad calorífica por mol $c_p = c_v + R$.
a) $c_p = c_v + R$ = (21,0+ 8,317)J/mol K
= 29,317 J/mol K
En el primer cambio p/T es constante y luego, como p se duplica, T se duplica también a 500 K. La entrada de calor por lo tanto es:
$Q_1 = nc_v(T_2 - T_1)$
= 0,487 mol x 21,0 J/ mol K x (500 – 250)K
= 2558 J.
En el Segundo cambio V/T es constante y, como T se incrementa en la razón 650/500, entonces V se hace 6,5 1itros. La entrada de calor por lo tanto es:
$Q_2 = nc_p(T_3 - T_2)$
= 0,487 mol x 29,317 J/mol K x(650 – 500)K

= 2143 J.
La entrada de calor total durante estos dos procesos es $Q = Q_1 + Q_2 = 4701$ J.
Durante el primer proceso de enfriamiento p se hace la mitad, y T también se hace la mitad 325 K. La salida de calor es
$Q'_1 = nc_v\ (T_3 - T_4)$
= 0,487 mol x 21,0 J /mol K x (650- 325)K
= 3325 J.
En el Segundo proceso de enfriamiento V se reduce en la razón de 5/6,5, y T se hace 250K, la temperatura original, como se esperaba. La salida de calor es por lo tanto:
$Q'_2 = nc_p(T_4 - T_1)$
= 0,487 mol x 29,317 J/ mol K (325 – 250)K
= 1072 J.
La salida de calor total durante el proceso de enfriamiento es.
$Q' = H'_1 + H'_2 = 4397$ J.
La diferencia entre el calor de entrada y el de salida es 304 J. Esto debe aparecer como trabajo hecho por el gas, puesto que la energía interna del gas debe ser igual al principio y en el final de un proceso de cíc1ico.
b) La cantidad 304 J debería estar de acuerdo con el valor del área dentro de la curva del ciclo, que representa el trabajo hecho por el gas. Es un rectángulo de alto 2 atm y largo1,5 litros. El área bajo ésta curva es:
$W = 2 \text{ x} 1{,}013 \text{ x } 10^6$dinas/cm x 1,5 x 10^3 cm^3
= 3,04 x 109 ergios = 304 J,
Lo que esta de acuerdo con el ingreso.

Ejemplo 178. Sobre un mol de gas se realiza un ciclo cerrado que consta de dos isócoras y dos isóbaras. Las temperaturas en los puntos a y c son T_a y T_c. Determínese el trabajo que efectúa el gas durante dicho ciclo, si se sabe que los puntos b y d yacen en una isoterma



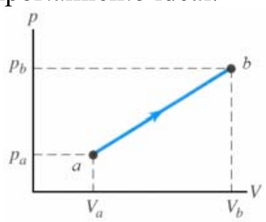
Solución.



$$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$$

$W_{ab} = 0$, $W_{bc} = p_2(V_2 - V_1)$, $W_{cd} = 0$,
$W_{da} = -p_1(V_2 - V_1)$,
$$W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$$
$$W = p_2V_2 - p_2V_1 - p_1V_2 + p_1V_1$$
Por la de los gases ideales $p_2V_2 = RT_c$.
$p_2V_1 = RT_b$, $p_1V_2 = RT_d$, $p_1V_1 = RT_a$
$$W = R(T_c - T_b - T_d + T_a)$$
Como $T_b = T_d$
$$W = R(T_c + T_a - 2T_b)$$
De las relaciones
$$\frac{p_1}{T_a} = \frac{p_2}{T_b} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_a}{T_b} \text{ y}$$
$$\frac{p_1}{T_d} = \frac{p_2}{T_c} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_d}{T_c}$$
$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{T_d}{T_c} \rightarrow T_aT_c = T_bT_d$$
Con $T_b = T_d \Rightarrow T_aT_c = T_b^2$
Finalmente $\sqrt{T_aT_c} = T_b$
Con lo que obtenemos
$$W = R\left(T_c + T_a - 2\sqrt{T_aT_c}\right)$$
$$= R\left(\sqrt{T_c} - \sqrt{T_a}\right)^2$$

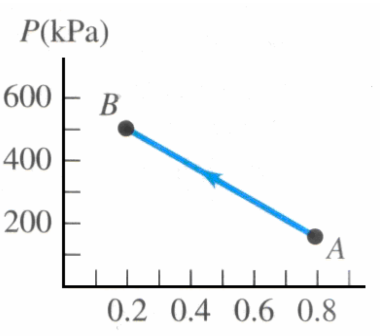
Ejemplo 179. Una cantidad de aire se lleva del estado a al b siguiendo una trayectoria recta en una gráfica pV.
a) En este proceso ¿la temperatura del gas: aumenta, disminuye o no cambia? Explique.
b) Si $V = 0{,}0700$ m^3, $V_b = 0{,}1100$ m^3, $p_a = 1{,}00 \text{ x } 10^5$ Pa y $p_b = 1{,}40 \text{ x } 10^5$ Pa, ¿cuánto trabajo efectúa el gas en este proceso. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal.



Solución.
a) El producto pV se incrementa, y aun para un gas no ideal, esto indica un incremento de temperatura.
b) El trabajo es el área encerrada bajo la línea que representa el proceso y las verticales en V_a y V_b. El área del trapezoide es:
$$\frac{1}{2}(p_b + p_a)(V_b - V_a)$$

$$= \frac{1}{2}(2,40 \times 10^5)(0,0400) = 400 \text{ J}$$

Ejemplo 180. Cuatro moles de O_2 se llevan de A a B con el proceso que muestra en una gráfica pV de la figura. Suponga que el tiene comportamiento ideal. Calcule el flujo de calor Q durante este proceso. ¿Entra calor en el gas o sale de él?



Solución.
El trabajo es el área bajo la trayectoria de A a B en el gráfico pV. El volumen disminuye, tal que $W < 0$.

$$W = -\tfrac{1}{2}(500 \times 10^3 + 150 \times 10^3)(0,60)$$
$$= -1,95 \times 10^5 \text{ J}$$

$$\Delta U = nC_V \Delta T$$

Con $T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}, T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR}$

$$\Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{nR}$$

$$\Delta U = \left(\frac{C_V}{R}\right)(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

$$\Delta U = \left(\frac{20,85}{8,315}\right)\left[\left(5 \times 10^5\right)(0,20) - \left(1,5 \times 10^5\right)(0,80)\right]$$
$$= -5,015 \times 10^4 \text{ J}$$

Luego $\Delta U = Q - W$

$$\Rightarrow Q = \Delta U + W = -0,5015 \times 10^5 - 1,95 \times 10^5$$
$$= -2,45 \times 10^5$$

Q es negativo, el calor fluye fuera del gas.

Ejemplo 181. Sea 20,9 J el calor añadido a determinado gas ideal. Como resultado, su volumen cambia de 63,0 a 113 cm^3 mientras que la presión permanece constante a 1,00 atm.
a) ¿En cuánto cambió la energía interna del gas?
b) Si la cantidad de gas presente es de $2,00 \times 10^{-3}$ mol, halle la capacidad calorífica molar a presión constante.
c) Halle la capacidad calorífica molar a volumen constante.

Solución.
a) $\Delta U = Q - W$

$Q = 20,9$ J,

$$W = p(V_2 - V_1) \Rightarrow$$

$$W = 1,013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}(113 - 63) \times 10^{-6} m^3$$

$W = 5,06$ J

b) $Q = nC_p(T_2 - T_1)$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1,013 \times 10^5 \times 63 \times 10^{-6}}{2,00 \times 10^{-3} \times 8,31} = 384 \text{ K}$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1,013 \times 10^5 \times 113 \times 10^{-6}}{2,00 \times 10^{-3} \times 8,31} = 689 \text{ K}$$

$$20,9 = 2,00 \times 10^{-3} C_p (689 - 384)$$

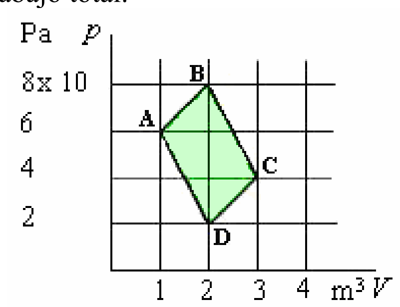
$$C_p = \frac{20,9 \times 10^3}{2 \times 305} = 34,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

$$C_p = \frac{20.9 \times 10^3}{2 \times 305} = 34,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

c)

$$C_V = C_p - R \Rightarrow C_V = 34,3 - 8,31 = 26 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

Ejemplo 182. Un mol de un gas ideal monoatómico es llevado cuasiestáticamente desde el estado A recorriendo el ciclo ABCDA, tal como se muestra en la figura.
Hallar:
a) La temperatura en A
b) El trabajo total.

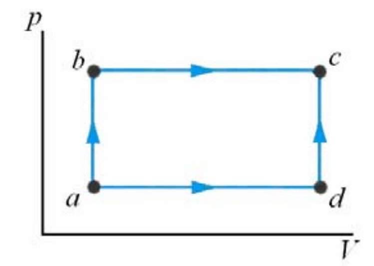


Solución.
a) $pV = nRT$, y $T = \frac{pV}{nR}$, en el punto A:

$$T_A = \frac{6 \times 10^3 \times 1}{1 \times 8,31} = 722 \text{ K}$$

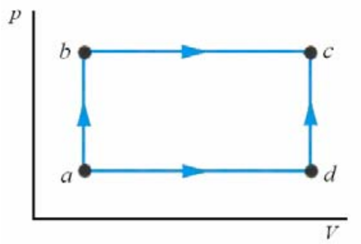
b) Trabajo total = Area ABCDA
= (3,5 + 3 – 2 – 1,5)2 = 6,0 kJ

Ejemplo 183. Un sistema termodinámico se lleva del estado *a* al estado *c* de la figura siguiendo la trayectoria *abc* o bien la trayectoria *adc*. Por la trayectoria *abc*, el trabajo *W* efectuado por el sistema es de 450 J. Por la trayectoria *adc*, *W* es de 120 J. Las energías internas de los cuatro estados mostrados en la figura son: *Ua* = 150 J, U_b = 240 J, *Uc* = 680 J y *Ud* = 330 J. Calcule el flujo de calor *Q* para cada uno de los cuatro procesos: *ab*, *bc*, *ad* y *dc*. En cada proceso, ¿el sistema absorbe o desprende calor?



Solución.
Para cada proceso, $Q = \Delta U + W$. No se realiza trabajo en los procesos *ab* y *dc,* también $W_{bc} = W_{abc}$ y $W_{ad} = W_{adc}$.
El calor para cada proceso es,
para *ab* $Q_{ab} = 90\ \text{J}$,
para *bc* $Q_{bc} = 440\ \text{J} + 450\ \text{J} = 890\ \text{J}$,
para *ad* $Q_{ad} = 180\ \text{J} + 120\ \text{J} = 300\ \text{J}$,
para *dc* $Q_{dc} = 350\ \text{J}$, el calor es absorbido en cada proceso. Las flechas representadas en los procesos indican la dirección del incremento de la temperatura (incrementando *U*).

Ejemplo 184. La figura muestra cuatro estados de un sistema termodinámico: *a, b, c* y *d*. El volumen del sistema es V_a tanto en el estado *a* como en el *b*, y es V_c tanto en el estado *c* como en el *d*. La presión del sistema es p_a tanto en el estado *a* como en el *d*, y es p_c tanto en el estado *b* como en el *c*. Las energías internas de los cuatro estados son: U_a, U_b, U_c y U_d. Para cada uno de los procesos: *ab*, *bc*, *ad* y *dc*, calcule:
a) el trabajo efectuado por el sistema;
b) el flujo de calor al sistema durante el proceso;
c) El sistema se puede llevar del estado al c siguiendo la trayectoria *abc* o bien la *adc*. Calcule el flujo neto de calor al sistema y el trabajo neto efectuado por el sistema en cada trayectoria. ¿Por cuál trayectoria es mayor el flujo neto de calor? ¿Por cuál es mayor el trabajo neto?
d) Un amigo le dice que las cantidades de flujo de calor deben ser iguales para la trayectoria *abc* y la trayectoria *adc*, porque el estado inicial (a) y el final (c) del sistema son los mismos por ambas trayectorias. ¿Cómo respondería a esta afirmación?

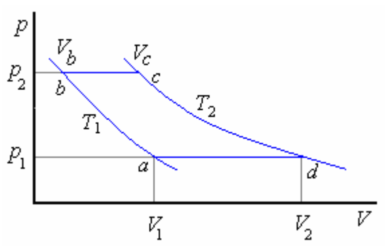


Solución.
Vamos a usar las ecuaciones, $W = p(V_2 - V_1)$ y $\Delta U = Q - W$.
a) El trabajo hecho por el sistema durante el proceso: A lo largo de *ab* o *cd, W* = 0. A lo largo de *bc,* $W_{bc} = p_c(V_c - V_a)$ A lo largo de *ad*, $W_{ad} = p_a(V_c - V_a)$.
b) El calor que ingresa al sistema durante el proceso: $Q = \Delta U + W$.
$\Delta U_{ab} = U_b - U_a$, tal que, $Q_{ab} = U_b - U_a + 0$.
$\Delta U_{bc} = U_c - U_b$, tal que
$Q_{bc} = (U_c - U_b) + p_c(V_c - V_a)$.
$\Delta U_{ad} = U_d - U_a$, tal que
$Q_{ad} = (U_d - U_a) + p_a(V_c - V_a)$.
$\Delta U_{dc} = U_c - U_d$, tal que $Q_{dc} = (U_c - U_d) + 0$.
c) Del estado *a* al estado *c* a lo largo de la trayectoria *abc*.
$W_{abc} = p_c(V_c - V_a)$. Q_{abc}
$= U_b - U_a + (U_c - U_b) + p_c(V_c - V_a)$
$= (U_c - U_a) + p_c(V_c - V_a)$
Del estado *a* al estado *c* a lo largo de la trayectoria *adc*.
$W_{adc} = p_a(V_c - V_a)$.
$Q_{adc} = (U_c - U_a) + p_a(V_c - V_a)$
Asumiendo $p_c > p_a, Q_{abc} > Q_{adc}$ y
$W_{abc} > W_{adc}$.
d) Para entender esta diferencia, comenzar por la relación $Q = W + \Delta U$. El cambio de la energía Interna ΔU es independiente de la trayectoria de tal manera que es igual para la trayectoria *abc* y para la trayectoria *adc*. El trabajo hecho por el sistema es el área bajo los caminos en el diagrama *pV*- no es igual para las dos trayectorias. De hecho, es más grande para la trayectoria *abc*. Puesto que ΔU es igual y *W* es diferente, *Q* debe ser diferente para las dos trayectorias. El flujo del calor *Q* es dependiente de la trayectoria.

Ejemplo 185. Un motor térmico funciona con un gas ideal que se somete a un ciclo termodinámico que consta de dos etapas

isotérmicas y dos etapas isobáricas de presiones p_1 y p_2 ($p_2 > p_1$) . Si las dos isotermas cortan la isobárica de presión p_1 en los volúmenes V_1 y V_2 ($V_2 > V_1$)
a) Grafique el proceso en los ejes pV .
b) Determine el trabajo neto realizado en función de p_1 , p_2 , V_1 y V_2

Solución.
a)



b) $W_{ab} = nRT_1 \ln \frac{V_b}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{V_b}{V_1}$

$W_{bc} = p_2 (V_c - V_b) = p_1 (V_2 - V_1)$

$W_{cd} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_c} = p_1 V_2 \ln \frac{V_2}{V_c}$

$W_{da} = p_1 (V_1 - V_2)$

$W_{neto} = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$

W_{bc} se anula con W_{cd}

$W_{neto} = p_1 V_1 \ln \frac{V_b}{V_1} + p_1 V_2 \ln \frac{V_2}{V_c}$

$p_1 V_1 = p_2 V_b \Rightarrow V_b = \frac{p_1 V_1}{p_2}$, $p_1 V_2 = p_2 V_c \Rightarrow$

$V_c = \frac{p_1 V_2}{p_2}$

Reemplazando los valores de V_b y V_c respectivamente:

$W_{neto} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1 V_1 / p_2}{V_1} + p_1 V_2 \ln \frac{V_2}{p_1 V_2 / p_2}$

$W_{neto} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + p_1 V_2 \ln \frac{p_2}{p_1}$

$= - p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1} + p_1 V_2 \ln \frac{p_2}{p_1}$

$= p_1 (V_2 - V_1) \ln \frac{p_2}{p_1}$

PROCESO ADIABATICO:
Es un proceso termodinámico importante en el cual al cambiar, el sistema de estado de equilibrio no intercambia calor con el ambiente, $Q = 0$. En este caso, de acuerdo al primer principio, se tiene: $U_2 - U_1 = -W$.

Es importante hacer notar que este trabajo, denominado TRABAJO ADIABATICO (W_{ad}), hecho para cambiar el sistema desde un estado inicial a un final, depende solo de los estados de equilibrio dados. Conociendo W_{ad} se puede determinar la trayectoria. Cuando se realiza un trabajo que no es adiabático, entre los dos estados dados, la cantidad en exceso o defecto comparado con el trabajo adiabático es calor y es lo que realmente lo define como otra forma de trabajo.

Ecuación del proceso adiabático
Cuando un gas ideal va en un proceso adiabático, la presión volumen y temperatura cambian de forma tal que es descrito solamente por una relación entre p y V, T y V, o p y T , en función de las capacidades caloríficas. Esta relación puede calcularse aplicando el primer principio de la termodinámica y utilizando la ecuación del gas ideal.
Según el primer principio tenemos:

$dQ = dU + dW = dU + pdV$

Como $dU = C_V dT$ (aunque este resultado se obtuvo considerando un proceso a volumen constante, relación solamente las variables U y T y por lo tanto, es válido independientemente del proceso considerado), luego podemos escribir:

$dQ = C_V dT + pdV$

Como $dQ = 0$ en un proceso adiabático, se tiene:

$C_V dT + pdV = 0$

$dT = -\frac{pdV}{C_V}$ (1)

De la ecuación del gas ideal

$pV = nRT$

$pdV + Vdp = nRdT$ (2)

Reemplazando (1) en (2); para eliminar dT :

$pdV + Vdp = -nR \frac{p}{C_V} dV$

$pC_V dV + VC_V dp = -nRpdV$

$(C_V + nR) pdV + C_V Vdp = 0$

$\frac{dp}{p} = -\frac{C_p}{C_V} \frac{dV}{V}$

Llamando a la relación $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$. Para gas ideal:

$\gamma = \frac{5}{3} = 1{,}67$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

Integrando

$\ln p = -\gamma \ln V + \ln \text{const.}$

$pV^{\gamma} = \text{constante}$

Utilizando la ecuación de los gases ideales $pV = nRT$ se pueden encontrar las siguientes relaciones:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}\ ,\ \frac{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = \text{constante}$$

La curva de un proceso adiabático, en un diagrama pV cae más rápidamente con el aumento de V que la curva de un proceso isotérmico.

Ejemplo 186. En el diagrama $p\ V$ de un gas ideal, una curva isotérmica y una curva adiabática pasan a través de cada punto Demostrar que la pendiente de la adiabática es más pronunciada que la pendiente de la isotérmica por el factor γ.

Solución.

Vamos a evaluar $\dfrac{dp}{dV}$ para las funciones

$pV = nRT = \text{constante}$ y $pV^{\gamma} = \text{constante}$.

Para $pV = \text{constante} \Rightarrow$

$$p + V\frac{dp}{dV} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{isotérmica} = -\frac{p}{V}$$

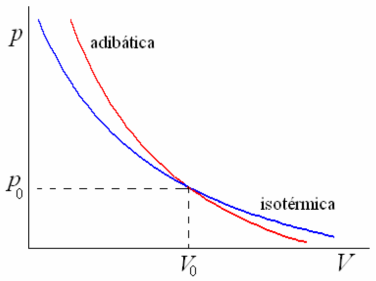
Para $pV^{\gamma} = \text{constante} \Rightarrow$

$$pV^{\gamma-1} + V^{\gamma}\frac{dp}{dV} = 0 \Rightarrow \left(\frac{dp}{dV}\right)_{adiabática} = -\frac{\gamma p}{V}$$

Por consiguiente

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{adiabática} = \gamma\left(\frac{dp}{dV}\right)_{isotérmica}$$

La pendiente de la adiabática es más pronunciada que la pendiente de la isotérmica por el factor γ.



Ejemplo 187. Demostrar que el trabajo realizado por un gas ideal, con capacidades caloríficas constantes, durante una expansión adiabática es igual a:

a) $W = C_V\left(T_1 - T_2\right)$

b) $W = \dfrac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$

c) $W = \dfrac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$

Solución.

a) Por el principio de la termodinámica

$dQ = dU + dW$

Como el proceso es adiabático $dQ = 0$

Luego $dW = -dU$

Pero $\dfrac{dU}{dT} = C_V \Rightarrow dU = C_V dT$

Y $dW = -C_V dT$

Integrando de 1 a 2:

$$W_{1\to 2} = -C_V\int_{T_1}^{T_2} dT = -C_V\left(T_2 - T_1\right)$$

$$W = C_V\left(T_1 - T_2\right)$$

b) Tenemos que $dW = pdV$

Por ser proceso adiabático $pV^{\gamma} = C$

$$\Rightarrow p = \frac{C}{V^{\gamma}}$$

Luego $dW = C\dfrac{dV}{V^{\gamma}}$

Integrando: $W = C\displaystyle\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^{\gamma}} = C\left.\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_1}^{V_2} =$

$$\frac{CV_1^{-\gamma+1} - CV_2^{-\gamma+1}}{\gamma - 1}$$

Como $p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} = C$

Reemplazando C en la expresión de W en las formas arriba puestas, obtenemos finalmente:

$$W = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$$

c) De la expresión anterior

$$W = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{p_2V_2}{p_1V_1}\right]$$

Pero $V_1 = \left(\dfrac{C}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ y $V_2 = \left(\dfrac{C}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

De allí

$$W = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{p_2\left(\dfrac{C}{p_2}\right)^{1/\gamma}}{p_1\left(\dfrac{C}{p_1}\right)^{1/\gamma}}\right]$$

$$= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

Ejemplo 188. Encontrar el módulo de compresibilidad elástica en un proceso adiabático ($A_{diabático}$).
Se conoce la relación de capacidades caloríficas $\left(\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}\right)$.

Solución.
Tenemos:

$$B = -\frac{dp}{\dfrac{dV}{V}} \Rightarrow dp = -B\frac{dV}{V} \qquad (1)$$

También, en un proceso adiabático:
$pV^{\gamma} = \text{constante}$
Derivando
$dpV^{\gamma} + p\gamma V^{\gamma-1}dV = 0$
De aquí

$$dp = -\gamma p\frac{dV}{V} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$-B\frac{dV}{V} = -\gamma p\frac{dV}{V}$$

De aquí obtenemos:
$B_{adiabático} = \gamma p$

El sonido en el aire se propaga en un proceso adiabático
La velocidad de un gas está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Para el aire:
$B_{adiabático} = \gamma p = 1{,}4\left(1{,}013 \times 10^5\right)$
$\rho_{aire} = 1{,}28 \text{ kg/m}^3$

$$v = \sqrt{\frac{1{,}4(1{,}013 \times 15)}{1{,}28}} = 333 \text{ m/s}$$

Ejemplo 189. Dos moles de un gas ideal se expanden cuasiestática y adiabáticamente desde una presión de 5 atm y un volumen de 12 litros a un volumen final de 30 litros. (γ= 1,40)
(a) ¿Cuál es la presión final del gas?
(b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final?

Solución.
$n = 2$ mol, $\gamma = 1{,}4$, $p_i = 5$ atm, $V_i = 12$ litros, $V_f = 30$ litros
a) Para una expansión adiabática
$pV^{\gamma} = cte$
Entonces: $p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma}$
$\Rightarrow 5(12)^{1,4} = p_f (30)^{1,4}$
De donde
$p_f = 1{,}39$ atm

$$\text{b) } T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{5 \times 12}{2 \times 0{,}082} = 365{,}9 \text{ K}$$

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{1{,}39 \times 30}{2 \times 0{,}082} = 254{,}3 \text{ K}$$

Ejemplo 190. Un mol de un gas ideal monoatómico inicialmente a 300 K y a 1 atm se comprime cuasiestática y adiabáticamente a un cuarto de su volumen inicial. Encuentre la presión y temperatura final. (□ = 1,67)

Solución.
n = 1mol
γ = 1,67
T_i = 300 K
p_i = 1 atm

$$V_f = \frac{1}{4}V_i$$

$pV^{\gamma} = \text{cte}$, $pV = nRT$
Bien

$$\left.\begin{array}{l} p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma} \\ \dfrac{p_i V_i}{T_i} = \dfrac{p_f V_f}{T_f} \end{array}\right\} \Rightarrow V_i^{\gamma-1}T_i = V_f^{\gamma-1}T_f$$

De la última

$$T_f = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} T_i = (4)^{0,67}300$$

$= 459{,}15$ K
También

$$p_f = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} p_i = (4)^{1,67} \times 1 = 10{,}1 \text{ atm}$$

Ejemplo 191. Aire (un gas ideal diatomico) a 27,0 ° C y a presión atmosférica se bombea a un bicicleta la bomba tiene un cilindro con un diámetro interior de 2,5 cm y 50,0 cm de longitud. En la carrera hacia abajo comprime el aire adiabaticamente, que llega a una presión

manométrica de 800 kPa antes de entrar en la llanta. Determinar
a) el volumen de aire comprimido y
b) la temperatura del aire comprimido.
c) si la bomba está hecha de acero y tiene una pared interna de 2,00 mm de espesor. Asumiendo que a 4,00 cm de la longitud del cilindro se le permite llegar a un equilibrio térmico con el aire. ¿Cuál será el aumento de la temperatura de pared?

Solución.

$$V_i = \pi\left(\frac{2,50\times10^{-2}}{2}\right)^2(0,500)$$
= 2,45 x 10^{-4} m^3

La cantidad de aire encontramos de

$$p_iV_i = nRT_i \Rightarrow$$
$$n = \frac{p_iV_i}{RT_i} = \frac{(1,013\times10^5)(2,45\times10^{-4})}{(8,324)(300)}$$
= 9,97 x 10^{-3} moles.

La presión final

p_f = 8,0 x 10^5 + 1,013 x 10^5
= 9,013 x 10^5

a) $p_iV_i^\gamma = p_fV_f^\gamma \Rightarrow$

$$V_f = V_i\left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{1/\gamma}$$
$$= 2,45\times10^{-4}\left(\frac{1,013\times10^5}{9,013\times10^5}\right)^{5/7}$$
= 5,5 x 10^{-5} m^3

b) De $p_fV_f = nRT_f \Rightarrow$

$$\frac{p_iV_i}{T_i} = \frac{p_fV_f}{T_f} \Rightarrow T_f = T_i\frac{p_fV_f}{p_iV_i} =$$
$$T_i\left(\frac{p_f}{p_i}\right)\left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{1/\gamma} = T_i\left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{(1/\gamma-1)}$$

$$T_f = (300)\left(\frac{1,013\times10^5}{9,013\times10^5}\right)^{(5/7-1)} = 560\ \text{K}$$

c) El trabajo realizado para comprimir el gas

$W = \Delta U = nC_V\Delta T$

$$W = (9,97\times10^{-3})\frac{5}{2}(8,314)(560-300)$$
= 53,9 J

Ahora imaginemos que esta energía se comparte con la pared interna como el gas se mantiene a volumen constante. La pared de la bomba tiene un diámetro exterior de 25,0 mm + 2,00 mm = 29 mm, y volumen

$$V = \pi\left[\left(\frac{29,00\times10^{-3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{25,00\times10^{-3}}{2}\right)^2\right](4,00\times10^{-2})$$
= 6,79 x 10^{-6} m^3

La masa

$$m = \rho V = (7,86\times10^3)(6,79\times10^{-6})$$
= 53,3 x 10^{-3} kg = 53,3 g

El proceso de calentamiento total es descrito por

$$53,9\ \text{J} = nC_V\Delta T + mc\Delta T$$
$$= (9,97\times10^{-3})\frac{5}{2}(8,314)(T_f-300)$$
$$+ (53,3\times10^{-3})(448)(T_f-300)$$
$$= (0,207+23,9)(T_f-300) \Rightarrow$$
$$T_f - 300\ \text{K} = 224\ \text{K} \Rightarrow$$
$$T_f = 524\ \text{K}$$

Ejemplo 192. La botella más grande hecha por soplado de vidrio tiene un volumen de alrededor de 0,720 m^3. Imagine que esta botella se llena de aire que se comporta como un gas ideal diatómico. La botella se mantiene con su abertura abajo y se sumerge rápidamente en el océano. No se escapa el aire ni se mezcla con el agua. No hay intercambio de energía con el océano por el calor

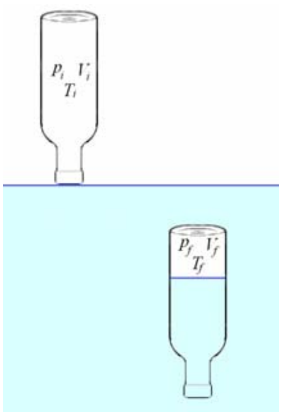
a) Si el volumen final del aire es de 0,240 m^3, ¿por qué factor aumenta la energía interna del aire?

b) Si la botella se sumerge de manera que la temperatura del aire se duplica, ¿qué volumen está ocupado por aire?

γ_{aire} = 1,40

Solución.

a)



Como el aire se considera como gas ideal cumple con

$$\frac{pV}{T} = \text{constante} \qquad (1)$$

Al no haber intercambio de energía se realiza un proceso adiabático

$$pV^{\gamma} = \text{constante} \qquad (2)$$

De (1) y (2), se obtiene

$$V^{\gamma-1}T = \text{constante}$$

Aplicando al proceso

$$V_i^{\gamma-1}T_i = V_f^{\gamma-1}T_f \ \Rightarrow$$

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{0{,}720}{0{,}240}\right)^{1{,}4-1} = 1{,}55$$

La energía interna inicial

$$U_i = nc_V T_i$$

La energía interna final

$$U_f = nc_V T_f = nc_V(1{,}55T_i) = nc_V 1{,}55T_i$$

La energía interna se incrementa por un factor igual a 1,55.

b) Si la temperatura se duplica.

Aplicando $\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1}$:

$$\frac{2T_i}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{0{,}720}{V_f}\right)^{0{,}4} = 2 \ \Rightarrow$$

$$V_f = \frac{0{,}720}{2^{1/0{,}4}} = 0{,}127 \text{ m}^3$$

Ejemplo 193. Un rifle de aire dispara un proyectil de plomo por la expansión de aire a alta de presión, propulsando al proyectil fuera de la recámara del rifle. Debido a que este proceso ocurre muy rápidamente, no se produce apreciable conducción térmica, y la expansión es esencialmente adiabática.
Supongamos que el rifle comienza por admitir en la recámara 12,0 cm^3 de aire comprimido, que se comporta como un gas ideal con γ = 1,40. El aire se expande detrás de un proyectil de 1,10 g y empuja como un pistón de sección transversal de 0,03 cm^2, cuando se desplaza a lo largo de 50,0 cm de la recamara del rifle. El proyectil emerge con velocidad 120 m/s. Encuentre la presión inicial requerida.

Solución.
El trabajo realizado por el gas sobre el proyectil se convierte en energía cinética.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1{,}1\times10^{-3})(120)^2 = 7{,}92 \text{ J}$$

El trabajo sobre el gas es

$$\frac{(p_f V_f - p_i V_i)}{\gamma - 1} = \text{- 7.92 J}$$

También $p_f V_f^{\gamma} = p_i V_i^{\gamma} \Rightarrow p_f = p_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma}$

Luego $-7{,}92 = \frac{1}{1{,}4-1} p_i\left[V_f\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} - V_i\right] \Rightarrow$

La presión inicial es

$$p_i = \frac{-7{,}92(0{,}4)}{\left[V_f\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} - V_i\right]} = \frac{-3{,}168}{\left[V_f\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} - V_i\right]}$$

Tenemos

V_i = 12 x 10^{-6} m^3

$$V_f = 12\times10^{-6} + (0{,}50)(0{,}03\times10^{-4})$$

= 13,5 x 10^{-6} m^3

Reemplazando

$$p_i = \frac{-3{,}168}{10^{-6}\left[13{,}5\left(\frac{12}{13{,}5}\right)^{1{,}4} - 12\right]}$$

= 5,74 x 106 Pa = 56,6 atm

Ejemplo 194. Aire 1030 mbar de presión y una temperatura de 17 ºC es aspirado a una mina de carbón. El aire se encuentra sometido a compresión adiabática a medida que desciende. La presión en el fondo del pozo es de 1000 mbar. ¿Cuál es la temperatura del aire cuando llega al fondo? Para el aire, γ = 1,40.

1 bar es igual a 0,640062 mm de mercurio normal (mmHg).
1 mb = 10^2 Pa 1 atm = 1013 mb.

Solución.

Para un proceso adiabático del estado 1 al estado 2.

Estado 1

T_1 = 17 + 273 = 290 K

p_1 = 1030 mbar = 1,030 x 10^5 N/m^2

Estado 1

T_2 = temperatura del aire cuando llega al fondo

P_2 = 1000 mbar = 1,000 x 10^5 N/m^2

Aplicando la ecuación para un proceso adiabático:

$$T_1 p_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2 p_2^{(1-\gamma)/\gamma}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{(1-\gamma)}{\gamma}}$$

Tomando logaritmos

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{(1-\gamma)}{\gamma}\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{(1-1{,}4)}{1{,}4}\ln\left(\frac{1030}{1000}\right)$$

$$= -\frac{0{,}4}{1{,}4}\ln 1{,}03 = -0{,}00884$$

Antilogaritmos

$$\frac{T_2}{T_1} = 0{,}9915$$

Finalmente

$T_2 = 0{,}9915 T_1$ = 0,9915 x 290 K 287,5 K = 14,5 ºC

La temperatura del aire en el fondo es 14,5 ºC.

Ejemplo 195. Durante el tiempo de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1 a 20 atm. Suponiendo que el proceso es adiabático y el gas es ideal con γ = 1,40.

a) ¿en qué factor cambia el volumen? y

b) ¿en qué factor cambia la temperatura?

Solución.

γ = 1,40, p_i = 1 atm, p_f = 20 atm

a) $p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma \Rightarrow$

$$\frac{V_f}{V_i} = \left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{1{,}4}} = 0{,}12$$

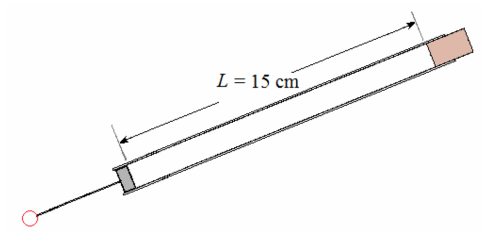
b) $$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{0{,}12}\right)^{0{,}4} = 2{,}33$$

Ejemplo 196. La pistola de juguete de un niño consiste en un tubo de 15 cm de largo. Se inserta un corcho en un extremo y un pistón hermético se empuja rápidamente en el otro extremo. Cuando la presión en el tubo llega a 1,25 atm el corcho es expulsado con un estallido.

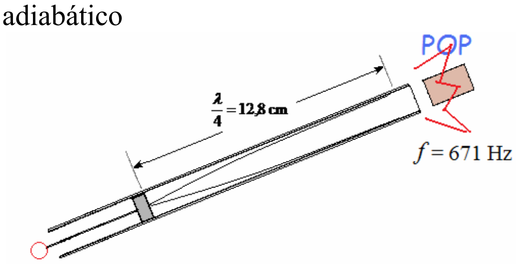
a) ¿Cuál es aproximadamente la frecuencia del estallido?

b) ¿Qué diferencia hace si el émbolo es empujado lentamente?

Solución.



a) Si el pistón se empuja rápidamente el proceso es adiabático



$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{1}{1{,}25}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow V_2 = \left(\frac{1}{1{,}25}\right)^{\frac{1}{1{,}4}} V_1 =$$

0,853 V_0

Como la sección transversal es constante, la longitud del de tubo conteniendo aire cuando el corcho es lanzado es

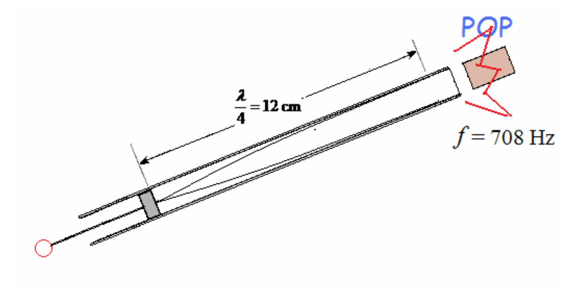
h_2 = 0,853 x 15cm = 12,8 cm

El tubo tiene un nodo de presión y el pistón un antinodo en el extremo libre

$$\frac{\lambda}{4} = 12{,}8 \text{ cm} \quad \lambda = 51{,}2 \text{ cm}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{0{,}512 \text{ m}} = 671{,}9 \text{ Hz}$$

b) Si el émbolo es empujado lentamente el cambio será isotérmico



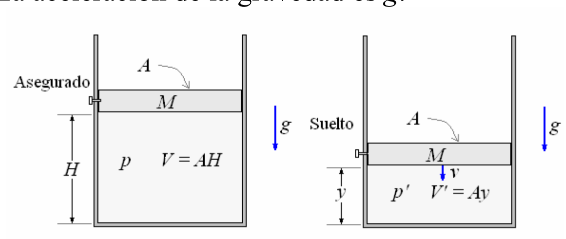
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = 0{,}8$$

$h_2 = 0{,}8$ x 15cm = 12 cm

$$\frac{\lambda}{4} = 12 \text{ cm} \quad \lambda = 48 \text{ cm}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{0{,}48 \text{ m}} = 708{,}3 \text{ Hz}$$

Ejemplo 197. En un espacio rarificado permanece verticalmente un recipiente cilíndrico, tapado por arriba mediante un émbolo móvil de masa *M*. dentro del volumen cerrado e encuentra un gas monoatómico a temperatura *T* y presión *p*. La sección interior del cilindro es *A*, la altura del volumen dentro del que se encuentra el gas, es *H*. El émbolo se deja libre y empieza a moverse. ¿Qué velocidad máxima desarrollará el émbolo?
a) De modo isotérmico
b) De modo adiabático
Datos: *p*, *M*, *H*, *A*
La aceleración de la gravedad es *g*.



Solución.

$$E_i = U_i + E_p = \frac{3}{2}nRT + MgH$$

Energía final

$$E_f = U_{if} + E_{Pf} + E_{Kf} = \frac{3}{2}nRT' + Mgy + \frac{1}{2}Mv^2$$

a) **Proceso isotérmico**

$\Delta U = 0$,

$E_i - E_f = W$

La energía inicial

$$E_i = \frac{3}{2}nRT + MgH ,$$

$$E_f = \frac{3}{2}nRT + Mgy + \frac{1}{2}Mv^2$$

Por la ley de Boyle

$$pV = p'V' \Rightarrow pAH = \frac{Mg}{A}Ay \Rightarrow y = \frac{pAH}{Mg}$$

La energía final

$$E_f = \frac{3}{2}nRT + Mgy + \frac{1}{2}Mv^2$$

Por la ley de Boyle

$$pV = p'V' \Rightarrow pAH = \frac{Mg}{A}Ay \Rightarrow y = \frac{pAH}{Mg}$$

Luego

$$E_f = \frac{3}{2}nRT + Mg\frac{pAH}{Mg} + \frac{1}{2}Mv^2$$
$$= \frac{3}{2}nRT + pAH + \frac{1}{2}Mv^2$$

El trabajo

$$W = nRT \ln \frac{V'}{V}$$

Por la ley de Boyle

$$pV = p'V' \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{p}{p'} = \frac{p}{Mg/A} = \frac{pA}{Mg}$$

Por la ley del gas ideal

$nRT = pV = pAH$

Luego

$$W = pAH \ln \frac{Mg}{pA}$$

Energía inicial – energía final = trabajo realizado

$$(MgH) - \left(pAH + \frac{1}{2}Mv^2\right) = pAH \ln \frac{pA}{Mg} \Rightarrow$$

$$MgH - pAH - \frac{1}{2}Mv^2 = pAH \ln \frac{pA}{Mg} \Rightarrow$$

$$MgH - pAH - pAH \ln \frac{pA}{Mg} = \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = 2gH - \frac{2pAH}{M} - \frac{2pAH}{M} \ln \frac{pA}{Mg}$$
$$= 2gH\left(1 - \frac{pA}{Mg} - \frac{pA}{Mg} \ln \frac{pA}{Mg}\right) \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{pA}{Mg} - \frac{pA}{Mg} \ln \frac{pA}{Mg}\right)}$$

b) **Proceso adiabático**

$Q = 0$, $W = -\Delta U$

$E_i - E_f = W$

La energía inicial

$$E_i = \frac{3}{2}nRT + MgH , \quad E_i = U_i + MgH$$

La energía final

$$E_f = \frac{3}{2}nRT' + Mgy + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$E_f = U_f + Mgy + \frac{1}{2}Mv^2$$

Por proceso adiabático

$$pV^\gamma = p'V'^\gamma$$

$$\Rightarrow p(AH)^\gamma = \frac{Mg}{A}(Ay)^\gamma \Rightarrow$$

$$y = \left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{1}{\gamma}} H = \left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} H$$

Luego

$$E_f = U_f + Mg\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} H + \frac{1}{2}Mv^2 =$$

$$U_f + MgH\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2}Mv^2$$

El trabajo

$$W = \frac{pV - p'V'}{\gamma - 1} = \frac{3}{2}\left[pAH - \frac{Mg}{A}A\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} H\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[pAH - MgH\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}}\right]$$

Energía inicial – energía final = trabajo realizado

$$(U_i + MgH) - \left[U_f + MgH\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2}Mv^2\right] = W$$

$$\Rightarrow$$

$$MgH - MgH\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}Mv^2 + \Delta U = W \Rightarrow$$

$$MgH - MgH\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}Mv^2 = W - \Delta U \Rightarrow$$

$$MgH - MgH\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}Mv^2 = 2W \Rightarrow$$

$$MgH - MgH\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}Mv^2$$

$$= 3\left[pAH - MgH\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}}\right] \Rightarrow$$

$$v^2 = 2gH + 4gH\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} - \frac{6pAH}{M} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2gH\left[1 + 2\left(\frac{pA}{Mg}\right)^{\frac{3}{5}} - 3\frac{pA}{Mg}\right]}$$

CICLOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES

Supongamos que ocurre un proceso en que el sistema va de un estado inicial (i) a otro final (f) en el que se realiza un trabajo W y se produce una transferencia de calor Q a una serie de reservorios de calor. Si al final de este proceso, el sistema puede ser restaurado a su estado inicial se dice que es REVERSIBLE. Un proceso que no llena este requisito se dice que es IRREVERSIBLE.

Las condiciones para un proceso reversible son:1) No debe existir trabajo realizado por fricción, fuerzas debidas a la viscosidad u otros efectos disipativos.

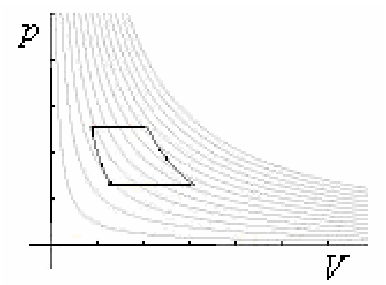
2) El proceso debe ser tal que el sistema se encuentre siempre en estado de equilibrio o infinitamente próximo a él (cuasiestático - por ejemplo, si el pistón de un cilindro se mueve lentamente dando tiempo para que el sistema pueda interactuar con el ambiente y alcanzar un estado de equilibrio en todo instante).

Cualquier proceso que viole una de estas condiciones es irreversible. La mayoría de los procesos en la naturaleza son irreversibles. Si queremos conseguir un proceso reversible debemos eliminar las fuerzas disipativas y el proceso sea cuasiestático, en la práctica esto es imposible. Sin embargo nos podemos aproximar mucho a un proceso reversible.

CICLOS TERMODINÁMICOS. MÁQUINAS TERMODINÁMICAS.

Una máquina que realiza esta conversión, lo hace mediante "PROCESOS" que llevan a la sustancia de trabajo nuevamente a su estado original, al conjunto de estos procesos se conoce como "CICLO" una vez completado el ciclo, los procesos se vuelven a repetir.

Una máquina térmica se puede representar en forma idealizada como se muestra en la siguiente figura.



Repitiendo el ciclo se puede obtener cualquier cantidad de trabajo. Damos la siguiente notación, refiriéndonos a un ciclo completo.

Q_1 = calor absorbido por el sistema del reservorio a θ_1 (+).

Q_2 = calor liberado por el sistema al reservorio a θ_2 Donde $\theta_1 > \theta_2$ (-).

$|W| = |Q_1| - |Q_2|$ trabajo neto hecho por el sistema.

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA.

La experiencia nos dice que a pesar de que es muy fácil convertir energía mecánica completamente en energía térmica (como en la fricción), hay muchas restricciones para efectuar La transformación inversa. La única forma en que somos capaces de efectuar la transformación continua de energía térmica en energía mecánica es teniendo "reservorios de calor" a dos temperaturas diferentes, e interactuando entre ellas una máquina que transforme una parte del calor que fluye del reservorio caliente al frío en trabajo (máquina térmica) . El segundo principio de la termodinámica: se refiere a este hecho y se establece cualitativamente como sigue:

"Es imposible construir una máquina de funcionamiento continuo que produzca trabajo mecánico derivado de la extracción de calor de un reservorio simple, sin dar calor, a un reservorio a temperatura más baja"

En resumen, la segunda ley establece los procesos que sin violar la primera ley no ocurren en la naturaleza. La primera Ley establece simplemente la conservación de energía.

Reservorio de calor. Se define como un cuerpo de masa tal que es capaz de absorber o liberar calor en cantidad ilimitada sin sufrir apreciable cambio de su estado, temperatura u otra variable termodinámica.

Eficiencia térmica.

Observe que el enunciado que hemos dado del segundo principio de la termodinámica establece que la máquina térmica perfecta en la que todo calor suministrado se convierte en trabajo sin perder calor, **no existe**. Nos gustaría tenerla, pues no viola la primera ley, pero no se ha obtenido.

Dado que el trabajo neto en el ciclo es lo que obtenemos, y el calor absorbido por la sustancia de trabajo es lo que ponemos. Luego la eficiencia térmica de la máquina está definida por:

Eficiencia térmica = $\dfrac{\text{Trabajo obtenido}}{\text{calor puesto}}$

$$e = \frac{|W|}{|Q_1|}$$

Aplicando la primera ley a un ciclo completo. Como los estados inicial y final son los mismos la energía interna final debe ser igual a la inicial, obteniéndose

$Q_1 + Q_2 = W$ 0 $|Q_1| - |Q_2| = |W|$

De aquí

$$e = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|}$$

$$e = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

Tenga en cuenta que en esta expresión Q_1 y Q_2 deben ser tomados en valor absoluto.

Observe que la eficiencia sería 100% (e = 1) si $Q_2 = 0$ es decir sin ceder nada de calor, esto es completamente imposible en la práctica y lo establece el segundo principio que veremos más adelante (e < 1). En cambio, si $Q_2 = Q_1$ se tendrá e = 0 y $W = Q_1 - Q_2 = 0$.

Ejemplo 198. Cierta máquina tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, encuentre:

a) el calor absorbido en cada ciclo y

b) el tiempo para cada ciclo.

Solución.

a) $e = \dfrac{W}{Q_1} = 1 - \dfrac{|Q_2|}{|Q_1|} \Rightarrow 0{,}25 = 1 - \dfrac{8000}{Q_1} \Rightarrow$

$Q_1 = 10666{,}67 J$

b) $W = eQ_1 = 2666{,}67 J$

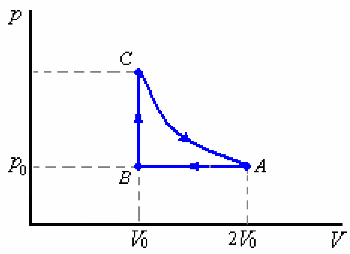
$P = \dfrac{W}{t} \Rightarrow t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{2666{,}67}{5000}$ = 0,53 s

Ejemplo 199. El motor térmico X tiene cuatro veces la energía del reservorio caliente que el motor Y.
El motor X realiza el doble de trabajo, y rechaza calor al reservorio frío siete veces que el motor Y.
a) Encontrar la eficiencia térmica del motor X
b) Encontrar la eficiencia térmica del motor Y.
Solución.
Tenemos
$Q_{X1} = 4Q_{Y1}$, $Q_{X2} = 7Q_{Y2}$ y $W_X = 2W_Y$.
a)
Trabajo de X:
$$W_X = Q_{X1} - Q_{X2} \qquad (1)$$

Trabajo de Y:
$$W_Y = Q_{Y1} - Q_{Y2} \Rightarrow$$
Poniéndolo en función de X.
$$\frac{1}{2}W_X = \frac{1}{4}Q_{X1} - \frac{1}{7}Q_{X2} \Rightarrow$$
$$\frac{7}{2}W_X = \frac{7}{4}Q_{X1} - Q_{X2} \qquad (2)$$

Restando (1) de (2):
$$\frac{7}{2}W_X - W_X = \frac{7}{4}Q_{X1} - Q_{X1} - Q_{X2} + Q_{X2}$$
$$\Rightarrow \frac{5}{2}W_X = \frac{3}{4}Q_{X1}$$
$$\Rightarrow \frac{5}{2}W_X = \frac{3}{4}Q_{X1}$$
Finalmente
$$e_X = \frac{W_X}{Q_{X1}} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\ \%$$
b) $e_Y = \dfrac{W_Y}{Q_{Y1}} = \dfrac{W_X/2}{Q_{X2}/4} = 2(0{,}3) = 0{,}6$
$= 60\ \%$

Ejemplo 200. En cierto proceso industrial se somete un gas al siguiente ciclo termodinámico:
1-compresión isobárica hasta la mitad de su volumen inicial,
2-calentamiento isocórico,
3-expansión isotérmica hasta la presión y el volumen inicial.
El control de calidad requiere que la eficiencia del proceso sea mayor al 11%. Determine la eficiencia del ciclo para un gas monoatómico y para un gas diatómico, y en cada caso indique si aprueba o no el control de calidad.
Solución.



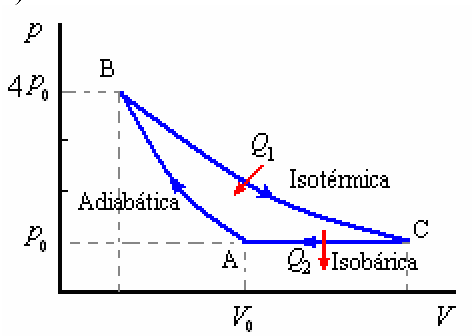
1-compresión isobárica hasta la mitad de su volumen inicial,
$$Q_{AB} = C_p(T_B - T_A) = -\frac{C_p}{nR}p_0V_0$$
2-calentamiento isocórico,
$$Q_{BC} = C_V(T_C - T_B) = C_V(T_A - T_B)$$
Por la ly del gas ideal:
$$T_A = \frac{p_AV_A}{nR} = \frac{2p_0V_0}{nR}$$
$$T_B = \frac{p_BV_B}{nR} = \frac{p_0V_0}{nR}$$
Luego
$$Q_{BC} = \frac{C_V}{nR}p_0V_0$$
3-expansión isotérmica hasta la presión y el volumen iniciales.
$$Q_{CA} = W_{CA} = nRT_A\ln\frac{2V_0}{V_0}, \text{ como}$$
$$T_A = \frac{2p_0V_0}{nR} \Rightarrow Q_{CA} = 2p_0V_0\ln 2$$
De aquí deducimos que:
$$Q_1 = 2p_0V_0\ln 2 + \frac{C_V}{nR}p_0V_0 \text{ y } Q_2 = -C_p\frac{p_0V_0}{nR}$$
La eficiencia del ciclo es:
$$e = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{C_p\dfrac{p_0V_0}{nR}}{2p_0V_0\ln 2 + \dfrac{C_V}{nR}p_0V_0}$$
$$= 1 - \frac{\dfrac{C_p}{nR}}{2\ln 2 + \dfrac{C_V}{nR}}$$
Si es gas monoatómico
$$C_V = \frac{3}{2}nR \text{ y } C_p = \frac{5}{2}nR$$
$$e = 1 - \frac{\dfrac{5}{2}}{2\ln 2 + \dfrac{3}{2}} = 0{,}1338 = 13{,}38\%$$
Si es gas diatómico

$$C_V = \frac{5}{2}nR \text{ y } C_p = \frac{7}{2}nR$$

$$e = 1 - \frac{\frac{7}{2}}{2\ln 2 + \frac{5}{2}} = 0{,}09939 = 9{,}94\%$$

Se aprueba el control de calidad para gas monoatómico.

Ejemplo 201. Un gas ideal monoatómico se somete a un ciclo termodinámico que consta de 3 procesos:
A $\rightarrow$ B Compresión adiabática desde (V_0, p_0) hasta cuadriplicar la presión.
B $\rightarrow$ C Expansión isotérmica hasta la presión inicial.
C $\rightarrow$ A Compresión isobárica hasta el volumen inicial.
a) Presente un gráfico *p* versus *V* para el ciclo.
b) Determine las variables termodinámicas *p*, y, *T* para cada estado A, B, C.
c) Calcule la eficiencia del ciclo.
Solución:
a)



b)

Estado A: $p_A = p_0$, $T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{p_0 V_0}{nR}$

Estado B: $p_B = 4p_0$,

$$T_B = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_A = (4)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{p_0 V_0}{nR} = 4^{2/5} \frac{p_0 V_0}{nR}$$

Estado C: $p_C = p_0$, $= T_C = T_B = 4^{2/5} \frac{p_0 V_0}{nR}$

c)
Calor en A $\rightarrow$ B: $Q_{AB} = 0$

Calor en B $\rightarrow$ C: $Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B}$

Calculo de V_B: $p_B V_B^\gamma = p_A V_A^\gamma \Rightarrow$

$$V_B = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_A = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{5}} V_0$$

Cálculo de V_C: $\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_A}{T_A} \Rightarrow$

$$V_C = \left(\frac{T_C}{T_A}\right) V_A = 4^{2/5} V_0$$

Luego

$$Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{4^{2/5} V_0}{(1/4)^{3/5} V_0} =$$

$$nR\left(4^{2/5} \frac{p_0 V_0}{nR}\right) \ln\left(4^{2/5} \times 4^{3/5}\right) = 2{,}41 p_0 V_0$$

Calor en C $\rightarrow$ A:

$$Q_{CA} = C_p (T_A - T_C) = \frac{5}{2} nR \left(\frac{p_A V_A}{nR} - \frac{p_C V_C}{nR}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(p_0 V_0 - 4^{2/5} p_0 V_0\right) = -1{,}85 p_0 V_0$$

La eficiencia es

$$e = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}, \; Q_1 = 2{,}41 p_0 V_0 \text{ y } Q_2 = -1{,}85 p_0 V_0$$

Luego:

$$e = 1 - \frac{1{,}85 p_0 V_0}{2{,}41 p_0 V_0} = 1 - 0{,}7676 = 0{,}2324$$

$e = 23{,}23\%$

Ejemplo 202. Un gas ideal realiza el siguiente ciclo, parte de *a* en condiciones iniciales tiene un volumen V_0, aumenta su temperatura a volumen constante, luego expande adiabaticamente hasta llegar al cuádruplo de su volumen y a una presión p_0, finalmente regresa a su estado inicial isotérmicamente, completando un ciclo *abca*.
a) Hacer el grafico *p* vs *V*, distinguiendo el tipo de proceso y los valores entre los que funciona.
b) Encuentre para cada proceso el intercambio de calor, el cambio de energía interna y el trabajo. Haga un cuadro con los valores y procesos.
c) Determinar si el ciclo es más eficiente para un gas monoatómico o para un gas diatómico.
Solución
a) En *a* el volumen es V_0
En c el volumen es $4V_0$ la presión es p_0
bc es proceso adiabático

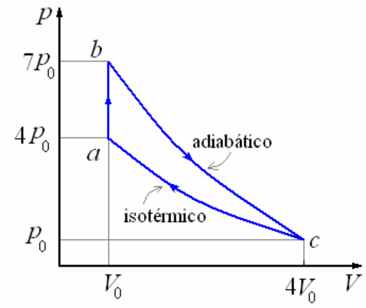
$$p_b V_b^\gamma = p_c V_c^\gamma$$

$p_b V_0^{\gamma} = p_0 (4V_0)^{\gamma} \Rightarrow p_b = 4^{\gamma} \approx 7 p_0$

ca es proceso isotérmico

$p_c V_c = p_a V_a$

$p_0 4V_0 = p_a V_0 \Rightarrow p_a = 4 p_0$



b) Encuentre para cada proceso el intercambio de calor, el cambio de energía interna y el trabajo. Haga un cuadro con los valores y procesos.

Proceso *ab*

Isocórico

$$Q_{ab} = C_V (T_b - T_a) =$$

$$c_V \left(\frac{p_b V_b}{nR} - \frac{p_a V_a}{nR} \right) = c_V \frac{3 p_0 V_0}{nR}$$

$$U_b - U_a = Q_{ab} = c_V \frac{3 p_0 V_0}{nR}$$

$$W_{ab} = 0$$

Proceso *bc*

Adiabático

$$Q_{bc} = 0$$

$$W_{bc} = \frac{p_b V_b - p_c V_c}{\gamma - 1} = \frac{3 p_0 V_0}{\gamma - 1} = 7{,}5 p_0 V_0$$

$$U_c - U_b = -W_{bc} = -7{,}5 p_0 V_0$$

Proceso *ca*

Isotérmico

$$Q_{ca} = W_{ca} = -5{,}55 p_0 V_0$$

$$W_{ca} = \int_c^a p dV = \int_c^a nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_a}{V_c}$$

$$= p_c V_c \ln \frac{V_a}{V_c} = 4 p_0 V_0 \ln 0{,}25 = -5{,}55 p_0 V_0$$

$$U_a - U_c = 0$$

c)

El calor ingresa en el proceso *ab*.

El calor sale en el proceso *ca*.

La eficiencia es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \; Q_1 = c_V \frac{3 p_0 V_0}{nR} \text{ y } Q_2 = 5{,}55 p_0 V_0$$

Luego:

$$e = 1 - \frac{5{,}55 p_0 V_0}{c_V \dfrac{3 p_0 V_0}{nR}} = 1 - 1{,}85 \frac{nR}{c_V}$$

Para gas monoatómico $c_V = \frac{3}{2} nR$

$$e = 1 - 1{,}85 \frac{nR}{1{,}5 nR} = -0{,}23$$

$e = -23\%$

Para gas diatómico $c_V = \frac{5}{2} nR$

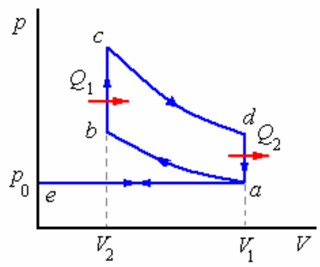
$$e = 1 - 1{,}85 \frac{nR}{2{,}5 nR} = 0{,}26$$

$e = 26\%$

Es más eficiente para gas diatómico.

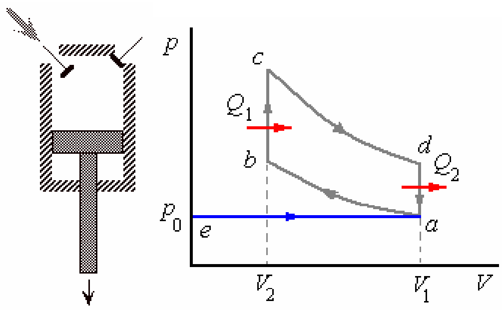
CICLO DE OTTO.

El funcionamiento de un motor a gasolina puede idealizarse considerando que la sustancia de trabajo es aire, el cual se comporta como un gas ideal y que no hay fricción. En base a esto el ciclo de Otto está compuesto por seis procesos simples mostrado en el diagrama *p*-*V* de la figura.

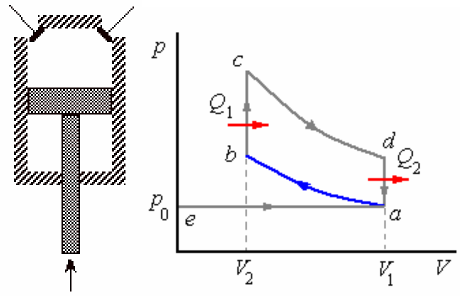


$e \rightarrow a$ Entrada isobárica (presión constante), el volumen varía de cero a V_1, a1 igual que el número de moles de cero a n, de acuerdo a la ecuación

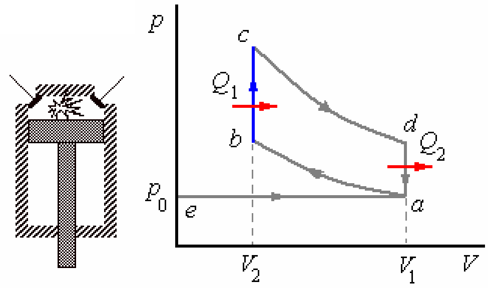
$$p_0 V = nRT_a$$



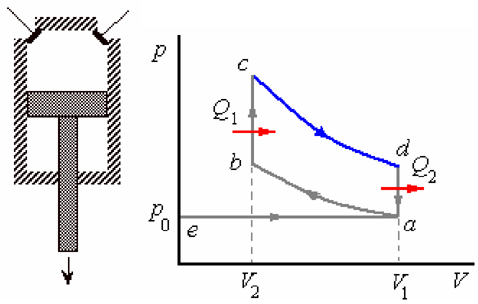
$a \rightarrow b$ Compresión adiabática, de acuerdo a la ecuación $T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}$



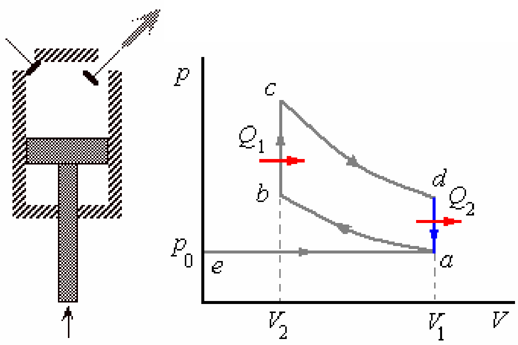
$b \to c$ Compresión isocórica (volumen constante) la temperatura cambia de T_b a T_c. Este proceso es aproximado a la explosión en el motor de gasolina.



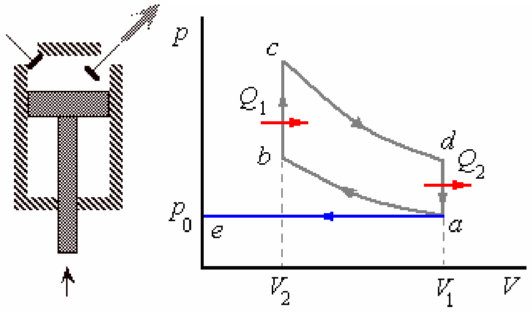
$c \to d$ Descompresión adiabática de acuerdo a la ecuación. $T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}$



$d \to a$ Descompresión a volumen constante, la temperatura cambia de T_d a T_a. Este proceso es aproximado a la apertura de la válvula en el motor a gasolina.



$a \to e$ Proceso isobárico a presión atmosférica, el volumen varía de V_1 a cero, a temperatura constante.



$$Q_1 = \int_{T_b}^{T_c} C_V dT = C_V (T_c - T_b)$$

El calor liberado Q_2, a volumen constante

$$Q_2 = \int_{T_d}^{T_a} C_V dT = -C_V (T_d - T_a)$$

La eficiencia es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)}$$

De los procesos adiabáticos tenemos

$T_d V_1^{\gamma-1} = T_c V_2^{\gamma-1}$ y $T_a V_1^{\gamma-1} = T_b V_2^{\gamma-1}$

Restando

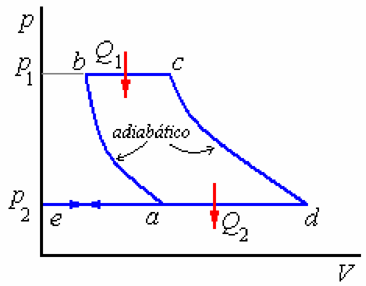
$$(T_d - T_a) V_1^{\gamma-1} = (T_c - T_b) V_2^{\gamma-1}$$

o $\dfrac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$

Finalmente

$$e = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \Rightarrow e = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

Ejemplo 203. La figura representa un diagrama *p-V* del ciclo Joule de gas ideal, C_p es constante. ¿Cuál es su eficiencia térmica?



Solución.
En este ciclo, el ingreso de calor se produce en el proceso adiabático $b \to c$ y la salida de calor en el proceso isobárico $d \to a$.

Luego $Q_1 = \int_{T_b}^{T_c} C_p dT = C_p (T_c - T_b)$ y

$$Q_2 = \int_{T_d}^{T_a} C_p dT = C_p (T_a - T_d) = -C_p (T_d - T_a)$$

Luego la eficiencia

$$e = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)}$$

Por la trayectoria adiabática $a \rightarrow b$:

$$\frac{p_2^{\gamma-1/\gamma}}{T_a} = \frac{p_1^{\gamma-1/\gamma}}{T_b}$$

ó $T_b p_2^{\gamma-1/\gamma} = T_a p_1^{\gamma-1/\gamma}$ (1)

Por la trayectoria adiabática $c \rightarrow d$:

$$\frac{p_2^{\gamma-1/\gamma}}{T_d} = \frac{p_1^{\gamma-1/\gamma}}{T_c}$$

ó $T_c p_2^{\gamma-1/\gamma} = T_d p_1^{\gamma-1/\gamma}$ (2)

Restando (1) de (2):

$$(T_c - T_b)p_2^{\gamma-1/\gamma} = (T_d - T_a)p_1^{\gamma-1/\gamma}$$

De aquí: $\dfrac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

Finalmente: $e = 1 - \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

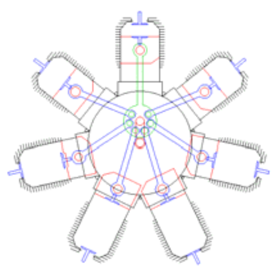
Ejemplo 204. Un motor de gasolina en un avión, opera a 2 500 rev/min, toma energía 7,89 x10^3 J y saca 4,58 x 10^3 J por cada vuelta del cigüeñal.

a) ¿Cuántos litros de combustible se consumen en 1,00 h de operación si el calor de combustión es 4,03 x 10^7 J/L?

b) ¿Cuál es la potencia mecánica del motor? No tome en cuenta la fricción y exprese su respuesta en horsepower.

c) ¿Cuál es el torque ejercido por el cigüeñal sobre la carga?

d) ¿Qué potencia debe el escape y el sistema de enfriamiento transferir fuera del motor?



Solución.

a) Litros de combustible se consumen en 1,00 h de operación.

La energía de entrada cada hora es

$$\left(7,89\times10^3 \frac{\text{J}}{\text{rev}}\right)\left(2500\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(60\frac{\text{min}}{\text{h}}\right)$$

$$= 1,18\frac{\text{J}}{\text{h}}$$

El combustible que ingresa

$$\left(1,18\frac{\text{J}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1\ \text{litro}}{4,03\times10^7\ \text{J}}\right) = 29,4\frac{\text{litro}}{\text{h}}$$

b) Cálculo de la potencia mecánica del motor.

$$Q_1 = W_{motor} + Q_2$$

Para un proceso de transferencia continua podemos dividir por el tiempo para obtener

$$\frac{Q_1}{\Delta t} = \frac{W_{motor}}{\Delta t} + \frac{Q_2}{\Delta t}$$

Potencia de salida útil

$$\frac{W_{motor}}{\Delta t} = \frac{Q_1}{\Delta t} - \frac{Q_2}{\Delta t}$$

$$\frac{Q_1}{\Delta t} = \frac{7,89\times10^3}{\text{rev}}\frac{2500\ \text{rev}}{1\ \text{min}}\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}$$

$= 3,28$ x 10^5 W

$$\frac{Q_2}{\Delta t} = \frac{4,58\times10^3}{\text{rev}}\frac{2500\ \text{rev}}{1\ \text{min}}\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}$$

$= 1,91$ x 10^5 W

$$\frac{W_{motor}}{\Delta t} = \frac{Q_1}{\Delta t} - \frac{Q_2}{\Delta t}$$

$= 1,38$ x 10^5 W

La potencia del motor es

1,38 x 10^5 W = 184,7 hp

c) Cálculo del torque ejercido por el cigüeñal sobre la carga.

La potencia es

$$P_{motor} = \tau\omega \Rightarrow \tau = \frac{P_{motor}}{\omega}$$

Tenemos

$$P_{motor} = 1,38\text{ x }10^5\ \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$\omega = \frac{2500\ \text{rev}}{1\ \text{min}}\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} = 261,80\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Reemplazando:

$$\tau = \frac{1,38\times10^5}{261,80} = 527,12\ \text{Nm}$$

d) Cálculo de la potencia que el escape y el sistema de enfriamiento transfiere fuera del motor.

$$\frac{Q_2}{\Delta t} = \frac{4,58\times10^3}{\text{rev}}\frac{2500\ \text{rev}}{1\ \text{min}}\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}$$

$= 1,91$ x 10^5 W

Ejemplo 205. Un motor de gasolina con una relación de compresión 6,20 tiene una potencia de salida útil de 102 hp. Suponiendo que el motor opera en un ciclo de Otto ideal, encontrar la energía de entrada y la energía de salida en cada segundo. Supongamos que la mezcla

combustible- aire se comporta como un gas ideal con γ = 1,40.
0,746 kW = 1 HP
Solución.
Potencia de salida útil del motor

$$P = \frac{W_{motor}}{t} = 102\ \text{hp} \times \frac{0{,}746\ \text{kW}}{1\ \text{hp}} = 76{,}09\ \text{kW}$$

Asumiendo que la mezcla combustible- aire se comporta como un gas ideal con γ = 1,40.

$$e_{Otto} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{6{,}20^{1,4-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{6{,}20^{0,4}} = 0{,}518$$

También

$$e = \frac{W_{motor}}{Q_1} = \frac{W_{motor}/t}{Q_1/t} \Rightarrow$$

La energía de entrada es

$$\frac{Q_1}{t} = \frac{W_{motor}/t}{e} = \frac{76{,}09}{0{,}518} = 146{,}89\ \text{kW}$$

Por la primera ley de la termodinámica

$$Q_1 = W_{motor} + |Q_2| \Rightarrow |Q_2| = Q_1 - W_{motor}$$

La energía de salida es

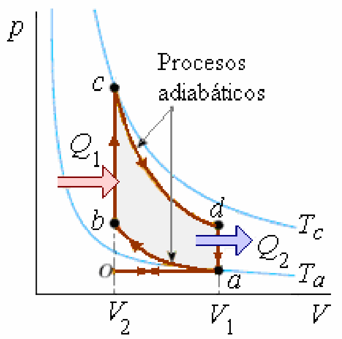
$$\frac{|Q_2|}{t} = \frac{Q_1}{t} - \frac{W_{motor}}{t}$$

Reemplazando valores

$$\frac{|Q_2|}{t} = 146{,}89 - 76{,}09$$

$$= 70{,}80\ \text{kW}$$

Ejemplo 206. La relación de compresión de un ciclo Otto, como se muestra en la figura, es $V_a/V_b = 8{,}00$. En el inicio *a* del proceso de compresión, 500 cm^3 de gas está a 100 kPa y 20,0 ° C. Al inicio de la expansión adiabática la temperatura es T_c= 750 °C. Tome el fluido de trabajo como un gas ideal con
$U = nC_V T = 2{,}50nRT$ y $\gamma = 1{,}40$.



a) Llenar en la tabla los siguientes estados del gas:

Estado	T (K)	p (kPa)	V (cm^3)	U (J)
a	293	100	500	
b				
c	1023			
d				
a				

b) Llenar en la tabla los siguientes procesos:

Proceso	Q_1 (J)	W (J)	ΔU(J)
$a \to b$			
$b \to c$			
$c \to d$			
$d \to a$			
abcd			

c) Identifique la energía de entrada Q_1, la energía de salida Q_2, y el trabajo neto W.
d) Calcule la eficiencia térmica.
e) Encuentre el número revoluciones por minuto del cigüeñal necesarias para un cilindro de un motor para tener una potencia de salida de 1,00 kW = 1,34 hp. Tenga en cuenta que el ciclo termodinámico tiene cuatro golpes de pistón.
Solución.
La cantidad de gas es

$$n = \frac{p_a V_a}{RT_a} = \frac{(100\times10^3)(500\times10^{-6})}{(8{,}314)(293)}$$

$$= 0{,}0205\ \text{mol}$$

$$U_a = \frac{5}{2}nRT_a = \frac{5}{2}p_a V_a$$

$$= \frac{5}{2}(100\times10^3)(500\times10^{-6}) = 125\ \text{J}$$

En el proceso *ab*:

$$p_b = p_a\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma} = (100\times10^3)(8{,}00)^{1,40}$$

$$= 1{,}84 \text{ x } 10^6\ \text{Pa}$$

$$T_b = \frac{p_b V_b}{nR} = \frac{(1{,}84\times10^6)\left(\frac{500\times10^{-6}}{8{,}00}\right)}{(0{,}0205)(8{,}314)}$$

$$= 673\ \text{K}$$

$$U_b = \frac{5}{2}nRT_b = \frac{5}{2}(0{,}0205)(8{,}314)(673)$$

$$= 287\ \text{J}$$

Luego

$$\Delta U_{ab} = 287 - 125 = 162\ \text{J}$$

$$= Q_{ab} - W_{ab} = 0 - W_{ab}$$

$$\Rightarrow W_{ab} = -162\ \text{J}$$

En el proceso *bc*:

$$p_c = \frac{nRT_c}{V_c} = \frac{(0,205)(8,314)(1023)}{62,5\times 10^{-6}}$$
$= 2,79 \text{ x } 10^6$ Pa

$$U_c = \frac{5}{2}nRT_c = \frac{5}{2}(0,0205)(8,314)(1023)$$
$= 436$ J

$$\Delta U_{bc} = 436 - 287 = 149 \text{ J}$$
$$= Q_{bc} - W_{bc} = Q_{bc} - 0 \Rightarrow$$
$Q_{bc} = 149$ J

En el proceso *cd*:

$$p_d = p_c\left(\frac{V_c}{V_d}\right)^\gamma = \left(2,79\times 10^6\right)\left(\frac{1}{8,00}\right)^{1,40}$$
$= 1,52 \text{ x } 10^5$ Pa

$$T_d = \frac{p_d V_d}{nR} = \frac{\left(1,52\times 10^6\right)\left(500\times 10^{-6}\right)}{(0,0205)(8,314)}$$
$= 445$ K

$$U_d = \frac{5}{2}nRT_d = \frac{5}{2}(0,0205)(8,314)(445)$$
$= 190$ J

Luego $\Delta U_{cd} = 190 - 436 = -246$ J
$$= Q_{cd} - W_{cd} = 0 - W_{cd} \Rightarrow$$
$W_{cd} = 246$ J

Y $\Delta U_{da} = U_a - U_d = 125 - 190 = -65,0$ J
$$= Q_{da} - W_{da} = Q_{da} - 0 \Rightarrow$$
$Q_{da} = -65$ J

Para todo el ciclo

$\Delta U_{neto} = -162 + 149 - 246 - 65,0 = 0$

El trabajo neto

$W_{neto} = -162 + 0 + 246 + 0 = 84,3$ J

El calor neto

$Q_{neto} = 0 + 149 + 0 - 65,0 = 84,3$ J

a) Tabla de estados del gas:

Estado	T (K)	p (kPa)	V (cm^3)	U (J)
a	293	100	500	125
b	673	1840	62,5	287
c	1023	2790	62,5	436
d	445	152	500	190
a	293	100	500	125

b) Tabla de procesos:

Proceso	Q_1 (J)	W (J)	ΔU(J)
$a \to b$	0	- 162	162
$b \to c$	149	0	149
$c \to d$	0	246	- 246
$d \to a$	- 65,0	0	- 65,0
abcd	84,3	84,3	0

c) La energía de entrada es $Q_1 = 149$ J

La energía perdida es $Q_2 = 65,0$ J

El trabajo $W = 84,3$ J

d) La eficiencia es $e = \dfrac{W}{Q_1} = \dfrac{84,3}{149} = 0,565$

e) Sea ω la velocidad angular del cigüeñal.

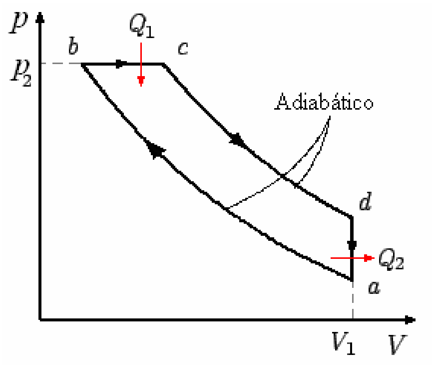
Luego $\dfrac{\omega}{2}$ es la frecuencia en la cual se obtiene el trabajo en razón de 84,3 J/ciclo.

$$1000\frac{\text{J}}{\text{s}} = \left(\frac{\omega}{2}\right)\left(84,3\frac{\text{J}}{\text{ciclo}}\right)$$

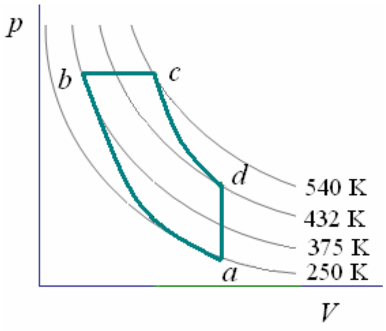
$$\omega = \frac{2000 \text{ J/s}}{84,3 \text{ J/ciclo}} = 23,7\frac{\text{rev}}{\text{s}}$$
$$= 1,42\times 10^3 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

CICLO DIESEL

Este ciclo también se inicia con una compresión adiabática, ocurre la explosión manteniéndose constante la presión, aunque no es necesario introducir una chispa, ya que la combustión se produce de manera espontánea. Nuevamente la etapa de trabajo se corresponde con una expansión adiabática y finalmente se realiza un enfriamiento isócoro del fluido en el motor.



Ejemplo 207. Un motor diesel opera en el ciclo reversible *abcda*, con 9,0 moles de un gas ideal. Los procesos *ab* y *cd* son adiabáticos. Las temperaturas de los puntos *a*, *b*, *c* y *d* del ciclo son 250 K, 375 K, 540 K, 432 K, respectivamente. La constante adiabática del gas es 1,50.



a) Calcule el calor absorbido durante la expansión isobárica.
b) Calcule el calor rechazado en el proceso de isocórico.
c) Calcule el cambio de energía interna del gas, en la compresión adiabática.
d) Calcule el trabajo realizado por el motor, en la expansión adiabática.
e) Calcule la eficiencia térmica del motor, en porcentaje.
Solución.
a) Cálculo previo de las capacidades caloríficas

$$C_p = C_V + nR \quad \gamma = 1 + \frac{nR}{C_V} \quad 1,5 = 1 + \frac{9,0(8,31)}{C_V}$$

$$C_V = \frac{74,79}{0,5} = 149,58 \text{ J/K}$$

$$C_p = 149,58 + 74,79 = 224,37 \text{ J/K}$$

$$C_p = 149,58 + 74,79 = 224,37 \text{ J/K}$$

El calor absorbido (Q_1) durante la expansión isobárica

$$Q_1 = C_p(T_c - T_b) = 224,37(540 - 373)$$
$$= 37469,79 \text{ J} = 37 \text{ kJ}$$

b) El calor rechazado (Q_2) en el proceso de isocórico

$$Q_2 = C_V(T_d - T_c) = 149,58(250 - 432)$$
$$= \text{- } 27223,56 \text{ J} = 27 \text{ kJ}$$

c) El cambio de energía interna del gas, en la compresión adiabática

$$\Delta U = U_b - U_a = C_V(T_b - T_a)$$
$$= 149,58(375 - 250)$$
$$= 18697,5 \text{ J} = 19 \text{ kJ}$$

d) El trabajo realizado por el motor, en la expansión adiabática es igual al negativo del cambio de energía interna en el proceso.

$$W = -\Delta U = U_d - U_c = C_V(T_d - T_c)$$
$$= 149,58(432 - 540)$$
$$= \text{- } 16154,64 \text{ J} = \text{- } 16 \text{ kJ}$$

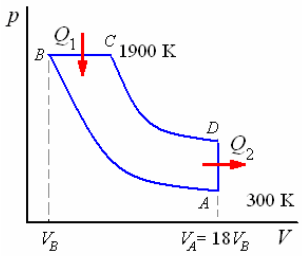
e) La eficiencia térmica del motor.

$$e = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

$$= 1 - \frac{27223,56}{37469,79} = 1 - 0,73 = 0,27$$

La eficiencia es el 27 por ciento.

Ejemplo 208. Un mol de un gas ideal diatómico se somete al siguiente proceso cíclico termodinámico:
- Proceso *AB*: compresión adiabática.
- Proceso *BC*: calentamiento a presión constante.
- Proceso *CD*: expansión adiabática.
- Proceso *DA*: enfriamiento a volumen constante.
Además, se cumple que: $T_A = 300$ K; $T_C = 1900$ K; $V_A = 18\,V_B$
($R = 8,314$J/mol.K)
a) ¿Cuál es la temperatura en *B*?
b) ¿Cuál es la temperatura en *D*?
c) ¿Cuál es el trabajo neto realizado durante el ciclo?
d) ¿Cuál es la eficiencia de este proceso cíclico?
Solución.



a) $A \to B$ es un proceso adiabático

$$V_A^{(\gamma-1)}T_A = V_B^{(\gamma-1)}T_B$$
$$V_A^{(\gamma-1)}T_A = V_B^{(\gamma-1)}T_B$$
$$(18V_B)^{(\gamma-1)}T_A = V_B^{(\gamma-1)}T_B$$
$$T_B = 18^{(\gamma-1)}T_A$$
$$T_B = 18^{(1,4-1)}(300) = 953 \text{ K}$$

La temperatura en *B* es 953 K.
b) $B \to C$ es un proceso isobárico

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C}$$

$$V_C = \frac{T_C}{T_B}V_B = \frac{1900}{953}V_B = 2V_B$$

$C \to D$ es un proceso adiabático

$$V_C^{(\gamma-1)}T_C = V_D^{(\gamma-1)}T_D$$
$$(2V_B)^{(\gamma-1)}T_C = (18V_B)^{(\gamma-1)}T_D$$
$$T_D = \frac{1}{9^{(1,4-1)}}1900 = 789 \text{ K}$$

La temperatura en *D* es 789 K.

c) Calor que ingresa al sistema

$$Q_1 = Q_{BC} = nc_p R(T_C - T_B) = 1\times\frac{7}{2}R(1900-953)$$
= 27543,49 J

Calor que libera el sistema

$$Q_2 = Q_{DA} = nc_V R(T_A - T_D) = 1\times\frac{5}{2}R(300-789)$$
= - 10158,97 J

Trabajo neto realizado durante el ciclo

$$W = |Q_1| - |Q_2| = 27543{,}49 - 19158{,}97$$
= 27543,49 - 10158,97 = 17384,52 J

d)

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{17384{,}52}{27543{,}49} = 0{,}6312$$
63,12 %

Ejemplo 209. Diez moles de un gas diatómico ($C_v = 5R/2$) se encuentran inicialmente a una presión de p_A = 5 x10^5 Pa y ocupando un volumen de V_A = 249 10^{-3} m^3. Se expande adiabáticamente (proceso *AB*) hasta ocupar un volumen V_B = 479 x10^{-3} m^3. A continuación el gas experimenta una transformación isoterma (proceso *BC*) hasta una presión p_C = 1 x10^5 Pa. Posteriormente se comprime isobáricamente (proceso *CD*) hasta un volumen $V_D = V_A$ = 249 10^{-3} m^3. Por último, experimenta una transformación a volumen constante (proceso *DA*) que le devuelve al estado inicial.

a) Representar gráficamente este ciclo en un diagrama *p-V*.

b) Calcular el valor de las variables termodinámicas desconocidas en los vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

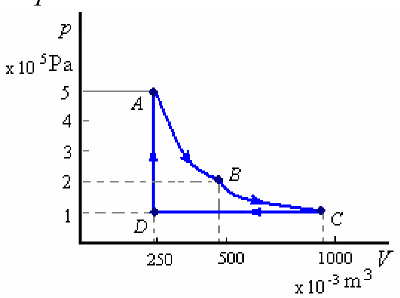
c) Hallar el calor, el trabajo, la variación de energía interna, en Joules, de forma directa y/o empleando el Primer Principio, en cada etapa del ciclo.

d) Calcular el rendimiento.

R = 0,082 atm litro/mol K = 8,314 J/mol K ;
1 cal = 4,186 J; 1atm = 1,013 10^5 Pa

Solución.

a) Representar gráficamente este ciclo en un diagrama *p-V*.



b) Calcular el valor de las variables termodinámicas desconocidas en los vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

$$C_V = \frac{5}{2}R,\ C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R,$$
$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

Vértice *A* $p_A V_A = nRT_A \Rightarrow$

$T_A = 1447{,}5$ K

$A \rightarrow B \quad p_A V_A^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma} \Rightarrow p_B = 2\times 10^5$ Pa

Vértice *B* $p_B V_B = nRT_B \Rightarrow$

$T_B = 1152{,}7$ K

$B \rightarrow C \quad p_B V_B = p_C V_C \Rightarrow$

$$\begin{cases} V_C = 958{,}3\times 10^{-3} \\ T_C = 1152{,}7\ \text{K} \end{cases}$$

Vértice *D* $p_D V_D = nRT_D \Rightarrow$

$T_D = 299{,}5$ K

c) Hallar el calor, el trabajo, la variación de energía interna, en Joules, de forma directa y/o empleando el Primer Principio, en cada etapa del ciclo.

Proceso $A \rightarrow B$ (adiabático)

$Q = 0$

$$\Delta U = nC_V(T_B - T_A)$$
$$= 10\left(\frac{5}{2}8{,}314\right)(1152{,}7 - 1447{,}5)$$
= 71166,7 J

$$W = \int_{V_A}^{V_B} pdV = \text{cte}\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V^{\gamma}}$$
$$= \frac{(p_A V_A - p_B V_B)}{\gamma - 1}$$
$$= \frac{(5\times 10^5 \times 249\times 10^{-3} - 2\times 10^5 \times 479\times 10^{-3})}{1{,}4-1}$$
= 71750 J

Comprobación, $\Delta U \approx Q - W$

Proceso $B \rightarrow C$ (Isotérmico)

$\Delta T = 0$ (no hay cambio de temperatura)

$$W = \int_{V_B}^{V_C} pdV = nRT\int_{V_B}^{V_C}\frac{dV}{V}$$
$$= nRT \ln\frac{V_C}{V_B} = nR(1152{,}7)\ln\frac{958\times 10^{-3}}{479\times 10^{-3}}$$
= 66458,1 J

$Q = W$ = 66458,1 J

Proceso $C \rightarrow D$ (Isobárico)

$$\Delta U = nC_V(T_D - T_C)$$

$$= 10\left(\frac{5}{2}8{,}314\right)(299{,}5 - 1132{,}7)$$

= - 177337,6 J

$$Q = nC_p(T_D - T_C)$$

$$= 10\left(\frac{7}{2}8{,}314\right)(299{,}5 - 1132{,}7)$$

= - 248272,7 J

$$W = p(V_D - V_C)$$

$$= 10^5\left(249\times 10^{-3} - 958\times 10^{-3}\right)$$

= - 70930 J

Comprobación, $\Delta U \approx Q - W$

Proceso $D \rightarrow A$ (Isocórico)

$W = 0$ no hay cambio de volumen

$$Q = nC_V(T_A - T_D)$$

$$= 10\left(\frac{5}{2}8{,}314\right)(1447{,}5 - 299{,}5)$$

= 249004,3 J

$\Delta U = Q$ = 249004,3 J

En el ciclo completo

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ W = 67278{,}1 \text{ J} \\ Q_{absorbido} = 315462{,}4 \text{ J } (+) \\ Q_{cedido} = 248272{,}7 \text{ J } (-) \end{cases}$$

Podemos ver que $W \approx Q_{abs} + Q_{ced}$

	ΔU (J)	Q (J)	W (J)
$A \rightarrow B$	- 71666,7	0	71750
$B \rightarrow C$	0	66438,1	66458,1
$C \rightarrow D$	- 177337,6	-248272,7	-70930
$D \rightarrow A$	249004,3	249004,3	0
	0		67278,1

d) Calcular el rendimiento.

$$e = \frac{W}{Q_{abs}} = 0{,}21 = 21\%$$

Ejemplo 210. Dos moles de un gas diatómico se somete al siguiente proceso cíclico termodinámico:

- Proceso *AB*: expansión isotérmica.
- Proceso *BC*: expansión adiabática.
- Proceso *CD*: compresión isobárica.
- Proceso *DA*: calentamiento isocórico.

Además, se cumple que: p_A = 5 atm; T_A = 600 K; $V_B = 2V_A$ y p_D = 1 atm. (R = 8,314J/mol K)

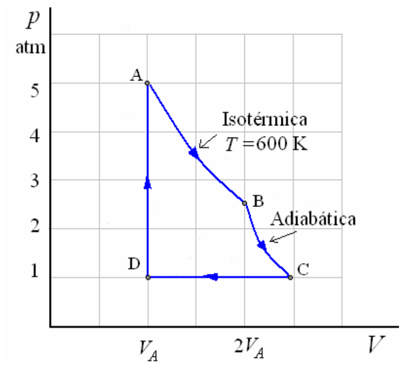
a) ¿Cuál es la temperatura en T_C?

b) ¿Cuál es el trabajo neto realizado durante el ciclo?

c) ¿Cuál es la eficiencia de este proceso cíclico?

Solución.

Cálculos previos.



En el punto A

$p_A = 5(1{,}013\times 10^5)$ = 5,065 x 10^5 Pa

$T_A = 600$ K

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = \frac{2\times 8{,}31\times 600}{5{,}065\times 10^5} = 0{,}0197 \text{ m}^3$$

En el punto B

$V_B = 2(0{,}0197)$ = 0,0394 m^3

$T_B = T_A = 600$ K

$$p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{2\times 8{,}31\times 600}{2\times 0{,}0197}$$

= 2,5325 x10^5 Pa = 2,5 atm

Volumen en C

$$V_C = \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_B = \left(\frac{2{,}5}{1}\right)^{\frac{1}{1{,}4}}(0{,}0394)$$

= 0,0751 m^3

Temperatura en D

$$T_D = \left(\frac{p_D}{p_A}\right)T_A = \left(\frac{1}{5}\right)(600) = 120 \text{ K}$$

Cuadro resumen

	p (atm)	V (m^3)	T (K)
A	5	0,0197	600
B	2,5	0,0393	600
C	1	0,0751	457,7
D	1	0,0394	120

a) La temperatura en T_C

$$T_C = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)T_D = \left(\frac{0{,}0751}{0{,}0197}\right)120 = 457{,}46 \text{ K o}$$

$$T_C = \left(\frac{p_C}{p_B}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_B = \left(\frac{1}{2{,}5}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}(600) = 461 \text{ K}$$

b) El trabajo neto realizado durante el ciclo

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = 2(8{,}31)(600)\ln\frac{0{,}0392}{0{,}0196}$$

$= 9972 \ln 2 = +\ 6912$ J

$Q_{BC} = 0$

$$Q_{CD} = nc_V\left(T_D - T_C\right) = 2\left(\frac{7}{2}R\right)(120 - 461{,}67)$$

= - 19874,94 J

$$Q_{DA} = nc_p\left(T_A - T_D\right) = 2\left(\frac{5}{2}R\right)(600 - 120)$$

= + 19944 J

Calor que ingresa

Q_1 = 6912 + 19944 = 26856 J

Calor que sale

Q_2 = 19874,94 J

$W_{neto} = \sum Q = Q_1 - Q_2$ = 26856 - 19874,94

= 6981,06 J

El trabajo neto es 6981,06 J

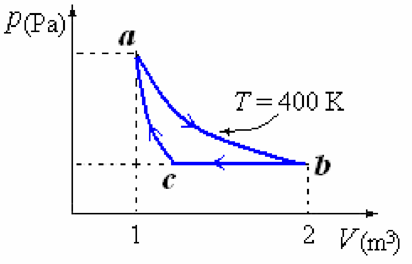
c) La eficiencia

$$e = \frac{W_{neto}}{Q_1} = \frac{6981{,}06}{26856} = 0{,}2599$$

La eficiencia es 25,99 %

Ejemplo 211. Un mol de un gas monoatómico se lleva por un ciclo ***abca*** como se muestra en la figura. El proceso $a \to b$ es un proceso isotérmico a 400 K y el proceso $c \to a$ es un proceso adiabático.

a) Hallar la presión, el volumen y la temperatura para los puntos ***a***, ***b*** y ***c***.
b) Hallar el trabajo total en el ciclo.
c) Hallar los calores en cada uno de los procesos (Q_{ab}, Q_{bc} y Q_{ca}).
d) Hallar la eficiencia del ciclo.



Solución.

a) Cálculo de las presiones:

$p_aV_a = p_bV_b = nRT$

= 1 x 8,31 x 400 = 3324

$$p_a = \frac{3324}{V_a} = \frac{3324}{1} = 3324\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$p_b = \frac{3324}{V_b} = \frac{3324}{2} = 1662\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$p_c = p_b = 1662\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Cálculo de los volúmenes:

$V_a = 1\text{m}^3$, $V_b = 2\text{m}^3$,

Como $p_aV_a^{\ \gamma} = p_bV_b^{\ \gamma}$,

Con $\gamma = \dfrac{5}{3} \Rightarrow$

$3324(1)^{5/3} = 1662(V_c)^{5/3}$

$\therefore V_c = (2)^{3/5} = 1{,}51\text{m}^3$

Cálculo de las temperaturas:

$T_a = T_b$, = 400 K,

Como $p_cV_c = nRT_c \Rightarrow$

$$T_c = \frac{p_cV_c}{nR} = \frac{1662 \times 1{,}51}{1 \times 8{,}31} = 302\ \text{K}$$

	p (N/m²)	V (m³)	T (K)
a	3324	1	400
b	1662	2	400
c	1662	1,51	302

b)

$$W_{ab} = nRT \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$$

$= (8{,}31)(400)\ln 2 = 2304$ J

$W_{bc} = p(V_c - V_b)$

$= (1662)(1{,}51 - 2) =$ - 814 J

$W_{ca} = -\Delta U = -nc_V\Delta T =$ - 1222 J

W_{Total} = 268 J

c)

$Q_{ab} = W_{ab}$ = 2304 J

$Q_{bc} = nc_p\Delta T$ = - 2036 J

$Q_{ca} = 0$

e) $$e = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{2036}{2304} = 0{,}11$$

Ejemplo 212. Una maquina tiene una potencia de salida de 2 kW, si su eficiencia es del 40% y cede un calor de 3000 calorías por ciclo.

a) Determine el trabajo realizado por ciclo.
b) El tiempo de duración de cada ciclo.

Solución.

a) Determine el trabajo realizado por ciclo.

e = 40% , Q_2 = 3000 calorías

$$e = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{|W|}{|Q_1|}$$

$$Q_1 = \frac{Q_2}{1-e} = \frac{3000}{0,6} = 5000 \text{ calorías}$$

Y el trabajo es:

$W = Q_1 - Q_2 = 5000 - 3000 = 2000$ calorías.

b) 1 cal = 4,186 Joules

Como la potencia es 2000 J/s

2000 J (1 caloría/4,186 J) = 477,78 calorías

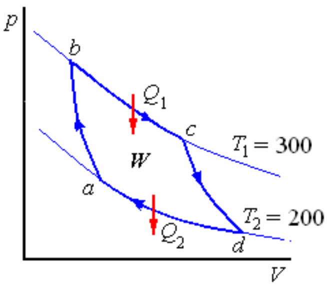
El tiempo de duración de cada ciclo es:

$$t = \frac{2000}{477,78} = 4,2 \text{ s}$$

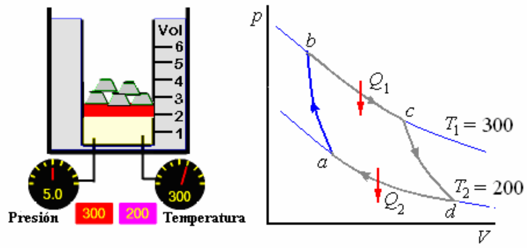
EL CICLO CARNOT Vamos a estudiar ahora una máquina térmica altamente idealizada conocida como la máquina de Carnot. Nos muestra como es posible obtener trabajo por medio de una sustancia de trabajo que es llevada a través de un proceso cíclico y también nos permitirá establecer la escala absoluta termodinámica de temperatura.

Un ciclo de Carnot es un conjunto de procesos, la sustancia de trabajo se imagina primero en equilibrio térmico con un reservorio frío a la temperatura T_2.

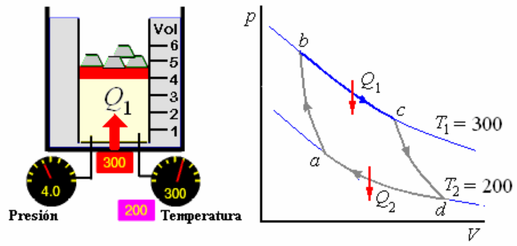
Se realiza cuatro procesos, por ejemplo sobre un gas, como se muestra en el diagrama *p*-*V* de la figura..



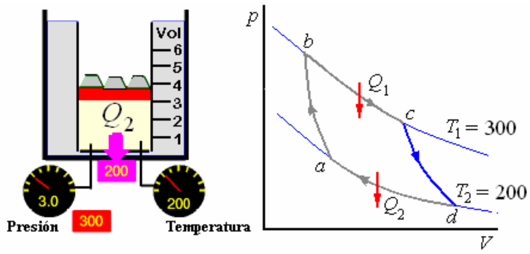
$a \to b$ Compresión adiabática reversible hasta que la temperatura se eleve a T_1.



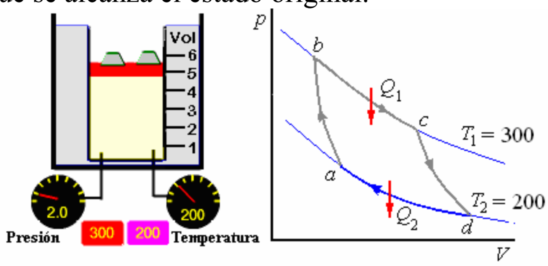
$b \to c$ Expansión isotérmica reversible hasta un punto *c*.



$c \to d$ Expansión adiabática reversible hasta que la temperatura baje a T_2.



$d \to a$ Compresión isotérmica reversible hasta que se alcanza el estado original.



En este ciclo se tendrá:

$\Delta U = 0$

(Por ser un ciclo en que estado final = estado inicial)

$W = Q_2 - Q_2 = \Delta Q$ (Calor total absorbido por el sistema enunciado)

W = Trabajo neto entregado

Durante la expansión isotérmica $b \to c$ ingresa calor Q_1.

Como la energía interna de un gas ideal depende solo de su temperatura

$$Q_1 = W_1 = \int_{V_b}^{V_c} pdV = RT_1 \int_{V_b}^{V_c} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_c}{V_b}$$

Del mismo modo durante la comprensión isotérmica $d \to a$ en que se realiza calor Q_2.

$$Q_2 = W_2 = \int_{V_d}^{Va} pdV = RT_2 \int_{V_d}^{V_a} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \frac{V_a}{V_d}$$

Siendo $V_d > V_a$:

$$Q_2 = -RT_2 \ln \frac{V_d}{V_a}$$

En la expansión adiabática $e \to d$

$$T_1 V_c^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{V_d}{V_c}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (1)$$

En la comprensión adiabática $a \to b$

$$T_2 V_a^{\gamma-1} = T_1 V_b^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (2)$$

de (1) y (2)

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{V_d}{V_c} \Rightarrow \frac{V_d}{V_a} = \frac{V_c}{V_b} \qquad (3)$$

Entonces $\dfrac{|Q_2|}{|Q_1|} = \dfrac{T_2 \ln \dfrac{V_d}{V_a}}{T_1 \ln \dfrac{V_c}{V_b}} = \dfrac{T_2}{T_1}$

La relación entre las temperaturas absolutas de reservorios de calor en los que trabaja la máquina de Carnot tiene la misma relación que los calores rechazado y absorbido.

La eficiencia térmica es

$$e = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

Reemplazando $\dfrac{|Q_2|}{|Q_1|}$ por su valor, obtenemos:

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Para que una máquina Carnot tenga una eficiencia de 100 por ciento es claro que e debería ser cero. Como en la práctica no es posible tener e = 1, es imposible obtener el cero absoluto de temperatura.
Estos resultados que se han obtenido usando un gas ideal como sustancia de trabajo, sin embargo, son independientes de este hecho y en general la eficiencia de una máquina térmica reversible es independiente del material usado como sistema, dependiendo únicamente de las temperaturas de los reservorios.

Ejemplo 213. Una fuente termal produce agua a 56 ºC. El agua fluye a un gran lago, con una temperatura media de 14 ° C, a una tasa de 0,1 m^3 de agua por minuto, ¿Cuál es la tasa de trabajo de un motor térmico ideal que utiliza toda la energía disponible?
Solución.
T_1 = 56 + 273 = 329 K
T_0 = 14 + 273 = 287 K
El motor debe trabajar en una serie de motores reversibles entre el agua caliente de la fuente y el lago.
El motor debe trabajar en una serie de ciclos infinitesimales tal que, si uno de los ciclos la temperatura T del agua caliente decrece por solo una cantidad infinitesimal dT.
Significa que la extracción de calor del agua caliente será un proceso isotérmico reversible
$dQ = -mcdT$
El trabajo realizado en el ciclo
$dW = edQ$
Siendo la eficiencia de un ciclo Carnot
$e = 1 - \dfrac{T_0}{T}$:
Luego

$$dW = edQ = -mcdT\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$$

En la serie completa de ciclos Carnot la temperatura del agua caliente se reducirá desde T_1, la temperatura de la fuente termal, a un valor infinitesimalmente cercano a T_0 , la temperatura del lago.

$$W = \int dW = -mc\int_{T_1}^{T_0}\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)dT$$

$$= mc\left[(T_1 - T_0) - T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right]$$

Ejemplo 214. Un motor térmico de Carnot utiliza una caldera de vapor a 100° C, como reservorio de alta temperatura. El reservorio de baja temperatura es el ambiente exterior a 20,0° C. La energía que sale al reservorio de baja temperatura es a una razón de 15,4 W.
a) Determine la potencia útil del motor térmico.
b) ¿Cuánto vapor se condensa en el reservorio de alta temperatura en 1,00 h?
L_v = 2,26 x 10^6 J/kg
Solución.
En un ciclo Carnot

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\dfrac{|Q_2|}{\Delta t}}{\dfrac{|Q_1|}{\Delta t}} \Rightarrow$$

$$\frac{|Q_1|}{\Delta t} = \frac{|Q_2|}{\Delta t}\frac{T_1}{T_2} = 15{,}4\ \text{W}\frac{(273+100)\text{K}}{(273+20)\text{K}}$$

= 19,6 W
a) Cálculo de la potencia útil del motor térmico.
$|Q_1| = W_{motor} + |Q_2|$
La potencia útil de salida es

$$\frac{W_{motor}}{\Delta t} = \frac{|Q_1|}{\Delta t} - \frac{|Q_2|}{\Delta t} = 19{,}6\ \text{W} - 15{,}4\ \text{W}$$

= 4,2 W
b) Cálculo del vapor se condensa en el reservorio de alta temperatura en 1,00 h.

$$|Q_1| = \left(\frac{|Q_1|}{\Delta t}\right)\Delta t = mL_v \Rightarrow$$

$$m = \frac{|Q_1|}{\Delta t}\frac{\Delta t}{L_v} = \left(19{,}6\frac{\text{J}}{\text{s}}\right)\left(\frac{3600\ \text{s}}{2{,}26\times10^6\ \text{J/kg}}\right)$$

= 3,12 x 10^{-2} kg

Ejemplo 215. Supongamos que construimos un dispositivo de dos motores de tal forma que la energía de salida de gases de escape de un motor térmico es la entrada de energía para un segundo motor térmico. Nosotros decimos que los dos motores están en serie. Sean e_1 y e_2 las eficiencias de los dos motores.

a) La eficiencia total del dispositivo se define como la producción total de trabajo dividido por la energía puesta en el primer motor por el calor. Mostrar que la eficiencia total viene dada por

$e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$

b) Supongamos que los dos motores son motores de Carnot.

El motor 1 funciona entre las temperaturas T_1 y T_2. El motor 2 entre las temperaturas T_2 y T_3. En función de las temperaturas, ¿cuál es la eficiencia de la combinación de motores?

c) ¿Qué valor intermedio de la temperatura T_2 hará que el trabajo realizado por cada uno de los dos motores en serie sean iguales?

d) ¿Qué valor debe tener T_2 para que los dos motores en serie tengan la misma eficacia?

Solución.

a)

$$e = \frac{W_1 + W_2}{Q_1} = \frac{e_1 Q_1 + e_2 Q_2}{Q_1} \qquad (1)$$

$Q_2 = Q_1 - W_1$, pero $W_1 = e_1 Q_1 \Rightarrow$

$$Q_2 = Q_1 - e_1 Q_1 = Q_1(1 - e_1) \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$e = \frac{e_1 Q_1 + e_2 Q_1(1 - e_1)}{Q_1}$$

$$= e_1 + e_2 - e_1 e_2$$

b)

$$e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$$

$$= \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + \left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right) - \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right)$$

$$= 2 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_2} - 1 + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - \frac{T_3}{T_1}$$

$$= 1 - \frac{T_3}{T_1}$$

La combinación de motores reversibles es también reversible, de tal modo que tiene la eficiencia Carnot.

c) $W_1 = W_2 \Rightarrow$

$$e_1 Q_1 = e_2 Q_2 = e_2(Q_1 - W_1) \Rightarrow$$

$$e_1 Q_1 = e_2(Q_1 - e_1 Q_1) \Rightarrow$$

$$e_1 Q_1 = e_2 Q_1 (1 - e_1) \Rightarrow$$

$$e_1 = e_2(1 - e_1) \Rightarrow 1 - \frac{T_2}{T_1} = \left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \Rightarrow$$

$$1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_1} \Rightarrow T_1 = 2T_2 - T_3 \Rightarrow$$

$$T_2 = \frac{T_1 + T_3}{2}$$

d) $e_1 = e_2 \Rightarrow 1 - \dfrac{T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{T_3}{T_2} \Rightarrow$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \Rightarrow T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$$

Ejemplo 216. Una máquina de Carnot opera con 2 moles de un gas ideal. En el proceso cíclico, la temperatura máxima que alcanza el gas es de 527°C y la presión máxima es de 5 atm. En un ciclo, el calor suministrado es de 400 J y el trabajo realizado por dicha máquina es de 300 J.

a) Calcular la temperatura del depósito frío y la eficiencia porcentual.

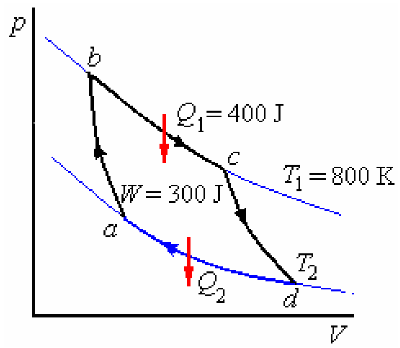
b) Si empleando únicamente el calor expulsado por la máquina se logra derretir totalmente un bloque de hielo de 10 kg a 0°C, ¿Durante cuántos ciclos debe operar esta máquina?

$L_f = 334 \times 10^3$ J/kg

c) ¿Cual debería ser la temperatura del depósito caliente sin modificar la del depósito frío para elevar la eficiencia hasta el 80%?

Solución.

a) $T_1 = 273 + 527 = 800$ K



$W = Q_1 - Q_2 \Rightarrow$

$Q_2 = Q_1 - W = 400 - 300 = 100$ J

$$\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 800 \frac{100}{400} = 200 \text{ K}$$

$T_2 = 200 - 273 = -73$ ºC

La eficiencia es:

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{200}{800} = 0{,}75 = 75\ \%$$

b) Para derretir los 10 kg de hielo se necesitan 10 (334x10^3) = 334x10^4 J

Si en cada ciclo el calor expulsado por la máquina es 100 J

Esta máquina debe operar

$$\frac{334 \times 10^4}{100} = 33400 \text{ ciclos.}$$

c) ¿Cual debería ser la temperatura del depósito caliente sin modificar la del depósito frío para elevar la eficiencia hasta el 80%?

$$e' = 1 - \frac{T_2}{T'_1} \Rightarrow$$

$$T'_1 = \frac{T_2}{1-e'} = \frac{200}{1-0{,}8} = \frac{200}{0{,}2} = 1000\ \text{K}$$

t'_1 = 1000 – 273 = 727 ºC.

Ejemplo 217. Se ha propuesto una planta de potencia que haga uso del gradiente de temperatura en el océano. El sistema se diseñó para operar entre 20 ºC (temperatura de la superficie del agua) y 5 ºC (temperatura del agua a una profundidad de casi 1 km).

a) ¿Cuál es la máxima eficiencia de dicho sistema?

b) Si la potencia de salida de la planta es de 7,5 MW, ¿cuánta energía térmica se absorbe por hora?

c) En vista de los resultados de la parte (a), ¿piensa que se deba tomar en cuenta dicho sistema?

Solución.

t_1 = 5 ºC, T_1 = 278,15K

t_2 = 20 ºC, T_2 = 293,15 K

P = 7,5 MW

a) $e = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$

$$= 1 - \frac{278{,}15}{293{,}15} = 0{,}051 = 5{,}1\%$$

b) $e = \dfrac{W}{Q_1} = \dfrac{P}{P_1} \Rightarrow P_1 = \dfrac{P}{e}$

La potencia absorbida será

$$P_1 = \frac{7{,}5}{0{,}051} = 147\ \text{MW}$$

En una hora

Q_1 = 147 x 3600 x 10^6 J = 5,292 x 10^{11} J

c) Se recomienda que no.

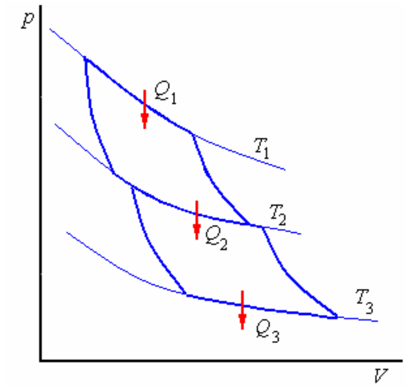
Ejemplo 218. Se dan dos máquinas de Carnot acopladas, la máquina A opera entre los reservorios T_1 = 1000 K y T_2 = 800 K y la máquina B entre T_2 = 800 K y T_3 = 400 K.

Sabiendo que el reservorio T_1 suministra 1500 Joules de calor al sistema, calcular:

a) La eficiencia de cada máquina y del sistema.

b) El trabajo de cada máquina y el total del sistema.

Solución.



a) $e_A = 1 - \dfrac{T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{800}{1000} = 20\ \%$

$$e_B = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \frac{400}{800} = 50\ \%$$

Eficiencia del sistema

$$e_S = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{400}{1000} = 60\ \%$$

b) Cálculo de W_A

$$\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$|Q_2| = \frac{T_2}{T_1}|Q_1| = \frac{800}{1000}(1500) = 1200\ \text{J}$$

Luego

$W_A = |Q_1| - |Q_2|$

= 1500 – 1200 = 300 J

Cálculo de W_B

$$\frac{|Q_3|}{|Q_2|} = \frac{T_3}{T_2} \Rightarrow$$

$$|Q_3| = \frac{T_3}{T_2}|Q_2| = \frac{400}{800}(1200) = 600\ \text{J}$$

Luego

$W_B = |Q_2| - |Q_3|$ = 1200 – 600 = 600 J

El trabajo total del sistema

$W_S = |Q_1| - |Q_3|$ = 1500 – 600 = 900 J

Nota: observe que:

$W_S = W_A + W_B$ y $e_S \neq e_A + e_B$

Ejemplo 219. Una casa cerca de un lago se calefacciona mediante una motor térmico. En invierno, el agua debajo del hielo que cubre el lago se bombea por medio del motor térmico. Se extrae el calor hasta que el agua está en el punto de congelar cuando se expulsa. El aire exterior se utiliza como enfriador. Asuma que temperatura del aire es -15°C y la temperatura del agua del lago es 2°C. Calcule la razón en la cual el agua se debe bombear al motor. La eficiencia del motor es un quinto que el de un motor de Carnot y la casa requiere 10 kilovatios.

Solución.

La eficiencia de un motor Carnot es
$[1 - (T_1/T_2)]$.

Para éste problema,

$$e = \frac{|Q_2| - |Q_1|}{|Q_1|} = \frac{1}{5}\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)$$

El calor se toma del agua del lago mientras que se enfría de 2°C a 0°C antes de la eyección. La temperatura media del reservorio caliente es 274 K. Si m es la masa del agua que fluye en el tiempo t, el calor tomado adentro del reservorio caliente por unidad de tiempo es $Q_2/t = (m/t)c$ x 2°C, donde c está la capacidad específica de calor del agua.

El calor que sale al aire como reservorio frío a una temperatura de -15°C = 258 K, por la cantidad infinita de aire disponible se asume que la temperatura permanece constante.

Además, el trabajo realizado (Q_2 - Q_1) es 10 kilovatio = 104 J/ s. Así, de la primera ecuación, tenemos

$$\frac{10^4\,\text{J/s}}{\left(m/t\right)\left(4{,}18\text{J/g}^\text{o}\text{C}\right)\left(2^\text{o}C\right)} = \frac{1}{5}\frac{(274 - 258)\text{K}}{274\text{K}}$$

$$\therefore \quad \frac{m}{t} = \frac{5\times 274\times 10^4}{2\times 4{,}18\times 16}\frac{\text{g}}{\text{s}} = 102{,}4\times 10^3\frac{\text{g}}{\text{s}}$$

La razón del flujo de agua necesario es 102,4 litros/s

Ejemplo 220. Una máquina térmica absorbe 360 J de calor y realiza un trabajo de 25 J en cada ciclo. Encuentre:

a) la eficiencia de la máquina y

b) el calor liberado en cada ciclo.

Solución.

Q_1 = 360 J

W = 25 J

a) $e = \dfrac{|W|}{|Q_1|} = \dfrac{25}{360} = 0{,}069 = 6{,}9\%$

b) $Q_{Liberado} = |Q_1| - |W| = 335$ J

Ejemplo 221. Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30%. Para cada ciclo de operación,

a) ¿cuánto calor se absorbe?, y

b) ¿cuánto calor se libera?

Solución.

Q_1 calor absorbido de la fuente caliente

Q_2 calor cedido a la fuente fría

W = 200 J

$$e = \frac{|W|}{|Q_1|} = 0{,}3$$

Entonces

a) $|Q_1| = \dfrac{200}{0{,}3} = 666{,}7$ J

b) $|Q_2| = |Q_1| - |W| = 666{,}7 - 200 = 466{,}7$ J

Ejemplo 222. Cierta máquina tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, encuentre:

a) el calor absorbido en cada ciclo y

b) el tiempo para cada ciclo.

Solución.

P = potencia = 5 kW = 5000 W

e = 25 % = 0,25

Q_2 = 8000 J

Si t es el tiempo de un ciclo

$$e = \frac{|W|}{|Q_1|} = \frac{|W|}{|W| + |Q_2|} = \frac{Pt}{Pt + |Q_2|}$$

o bien

$$0{,}25 = \frac{5000t}{5000t + 8000}$$

De donde se obtiene t = 0,53 s el tiempo para cada ciclo.

El calor absorbido en cada ciclo será

$$Q_1 = 5000t + 8000$$
$$= 5000(0{,}53) + 8000 = 10666{,}7 \text{ J}$$

Ejemplo 223. El calor absorbido por una máquina es el triple del trabajo que realiza.

a) ¿Cuál es su eficiencia térmica?

b) ¿Qué fracción del calor absorbido se libera a la fuente fría?

Solución.

$Q_1 = 3W$

a) $e = \dfrac{|W|}{|Q_1|} = \dfrac{1}{3} = 0{,}33 = 33\%$

b) $|Q_2| = |Q_1| - W = |Q_1| - \frac{|Q_1|_1}{3} = \frac{2}{3}|Q_1|$

Fracción del calor absorbido que se libera:

$$\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{2}{3} = 0,66$$

Ejemplo 224. Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30%. Para cada ciclo de operación,
a) ¿cuánto calor se absorbe?, y
b) ¿cuánto calor se libera?

Solución.

Q_1 calor absorbido de la fuente caliente
Q_2 calor cedido a la fuente fría
$W = 200$ J

$$e = \frac{|W|}{|Q_1|} = 0,3$$

Entonces

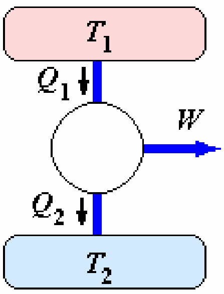
a) $|Q_1| = \frac{200}{0,3} = 666,7$ J

b) $|Q_2| = |Q_1| - |W| = 666,7 - 200 = 466,7$ J

MOTOR Y REFRIGERADOR

Un motor de Carnot es un dispositivo ideal que describe un ciclo de Carnot. Trabaja entre dos focos, tomando calor Q_1 del foco caliente a la temperatura T_1, produciendo un trabajo W, y cediendo un calor Q_2 al foco frío a la temperatura T_2.

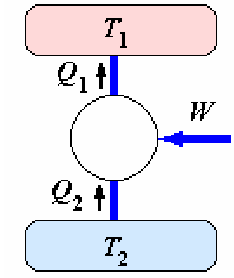
En un motor real, el foco caliente está representado por la caldera de vapor que suministra el calor, el sistema cilindro-émbolo produce el trabajo, y se cede calor al foco frío que es la atmósfera.



Motor

La máquina de Carnot también puede funcionar en sentido inverso, denominándose entonces refrigerador o frigorífico. Se extraería calor Q_2 del foco frío aplicando un trabajo W, y cedería Q_1 al foco caliente.

En un refrigerador real, el motor conectado a la red eléctrica produce un trabajo que se emplea en extraer un calor del foco frío (la cavidad del refrigerador) y se cede calor al foco caliente, que es la atmósfera



Refrigerador

La segunda Ley establecería que no existe el Refrigerador perfecto. No es posible transportar calor de un cuerpo a otro de más alta temperatura, sin efectuar trabajo sobre el sistema. También, nos gustaría tenerla, puesto viola la primera Ley, pero tampoco se ha obtenido nunca.

Coeficiente de rendimiento de un refrigerador:

$$\eta = \frac{|Q_2|}{|W|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|}$$

Ejemplo 225. La eficiencia de una máquina de Carnot es de 30%. La maquina absorbe 800 J de calor por ciclo de una fuente caliente a 500 K. Determine
a) el calor liberado por ciclo y
b) la temperatura de la fuente fría.

Solución.

$T_2 = 500$ K
$Q_2 = 800$ J
$e = 0,3$

a) $e = \frac{|W|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$

$$0,3 = 1 - \frac{|Q_2|}{800} \Rightarrow |Q_2| = 560 \text{ J}$$

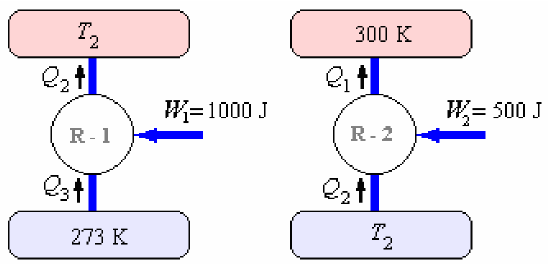
b) $e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$0,3 = 1 - \frac{T_2}{500} \Rightarrow T_2 = 350 \text{ K}$$

Ejemplo 226. Dos máquinas frigoríficas de Carnot trabajan en serie la primera extrae calor de una fuente a 0°C y consume 1000 J. La segunda maquina consume 500 J. y entrega calor a una fuente a 27ºC Considere que el calor que la primera cede a una fuente intermedia es íntegramente absorbido por la segunda.
a) ¿Cuál es el calor que la primera maquina extrae?
b) ¿Cuál es la temperatura de la fuente intermedia?

c) ¿Qué calor intercambian las máquinas con la fuente de temperatura intermedia?

Solución.



a) Para el conjunto

$$\eta = \frac{|Q_3|}{|Q_3| - |Q_1|} = \frac{|Q_3|}{|W_1| + |W_2|}$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{|Q_1|}{|Q_3|}} = \frac{1}{1 - \dfrac{T_1}{T_3}}$$

$$\Rightarrow \frac{|Q_3|}{W_1 + W_2} = \frac{1}{1 - \dfrac{T_1}{T_3}}$$

$$\Rightarrow \frac{|Q_3|}{-(1000 + 500)} = \frac{1}{1 - \dfrac{300}{273}}$$

$$\Rightarrow Q_3 = \frac{1500 \times 273}{27} = 15166{,}7 \text{ J}$$

b) Para R – 1

$$\eta_1 = \frac{|Q_3|}{|Q_3| - |Q_2|} = \frac{|Q_3|}{W_1} = \frac{1}{1 - \dfrac{|Q_2|}{|Q_3|}} = \frac{1}{1 - \dfrac{T_2}{T_3}}$$

$$\Rightarrow \frac{15166{,}7}{-1000} = \frac{1}{1 - \dfrac{T_2}{273}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{273} - 1 = 0{,}066 \ \Rightarrow T_2 = 290{,}1 \text{ K}$$

c) $Q_3 = 15166{,}7$ J,

$Q_2 = Q_3 - W_1 = 15166{,}7 - (-1000) = 16166{,}7$ J

Ejemplo 227. Un refrigerador tiene un coeficiente de operación igual a 5. Sí el refrigerador absorbe 120 J de calor de una fuente fría en cada ciclo, encuentre:
a) el trabajo hecho en cada ciclo y
b) el calor liberado hacia la fuente caliente.

Solución.

$\eta = 5$

$Q_2 = 120$ J

a) $\eta = \dfrac{|Q_2|}{|W|}$

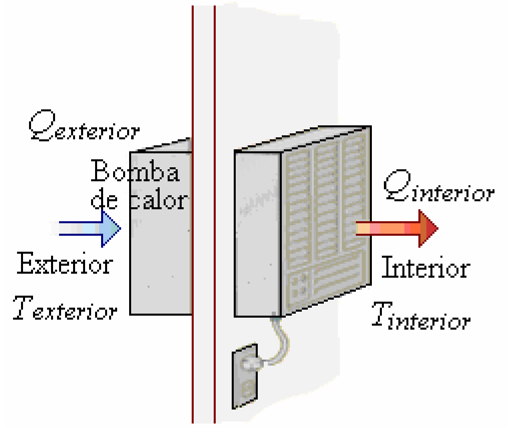
De donde $5 = \dfrac{120}{|W|} \Rightarrow$

$|W| = 24 \text{ J} \Rightarrow W = -24 \text{ J}$

b) $|W| = |Q_1| - |Q_2| \ \Rightarrow$

$|Q_1| = |Q_2| + |W| = 120 + 24 = 144$ J

Ejemplo 228. Una bomba de calor, se muestra en la figura, es esencialmente un acondicionador de aire instalado al revés. Se extrae la energía del aire frío afuera y se deposita en una habitación más caliente. Supongamos que la razón real de la energía que ingresa en la sala al trabajo realizado por el dispositivo del motor es el 10,0% de la razón máxima teórica. Determinar la energía que ingresa en la sala por Joule de trabajo realizado por el motor, dado que la temperatura interior es 20,0 °C y la temperatura exterior es - 5,00 °C.



Solución.

Coeficiente de rendimiento real = 0,100

Rendimiento Ciclo de Carnot

$$\eta_{real} = 0{,}100\left(\frac{Q_{ext}}{W}\right)_{ciclo\,carnot}$$

$$= 0{,}100\left(\frac{T_{ext}}{T_{ext} - T_{\text{int}}}\right)$$

$$= 0{,}100\left(\frac{293}{293 - 268}\right) = 1{,}17$$

Luego, 1,17 J de energía ingresa al salón por el calor de cada Joule de trabajo realizado.

Ejemplo 229. Un aparato de aire acondicionado absorbe calor de su embobinado de enfriamiento a 13 ºC y libera calor al exterior a 30 ºC.
a) ¿Cuál es el máximo rendimiento del aparato?
b) Si el rendimiento real es de la tercera parte del valor máximo y si el aparato remueve 8 x 10^4 J

de energía calórica cada segundo, ¿qué potencia debe desarrollar su motor?

Solución.

Q_1 calor transferido a la fuente caliente

Q_2 calor absorbido de la fuente fría

W trabajo gastado por la bomba

$$\eta = \frac{|Q_2|}{|W|}$$

a) Si el refrigerador es una máquina de Carnot funcionando a la inversa

$$\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{273{,}15 + 30}{273{,}15 + 13} = 1{,}06$$

Luego

$$\eta = \frac{|Q_2|}{|W|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|} = \frac{1}{\dfrac{|Q_1|}{|Q_2|} - 1} = 16{,}7$$

b) Si $\eta_{real} = \dfrac{16{,}7}{3} = 5{,}56$ y $P_1 = 8 \text{ x } 10^4$ J/s

Luego

$$\eta_{real} = \frac{|Q_2|}{W} = \frac{P_2}{P_1 - P_2} \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta_{real}} + P_2$$

$$P_1 = P_2\left(\frac{1}{\eta_{real}} + 1\right) = 8 \times 10^4 \left(\frac{5{,}56 + 1}{5{,}56}\right)$$

$$= 8\text{x}10^4 \,(1{,}18) = 9{,}44\text{x}10^4 \text{ W}.$$

Ejemplo 230. En un determinado refrigerador las serpentinas de baja temperatura están a -10°C y el gas comprimido en el condensador tiene una temperatura de + 30°C. Considerando que trabaja con el ciclo Carnot. ¿Cuál es su rendimiento teórico?

Solución.

$$\eta = \frac{|Q_2|}{|W|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|} = \frac{1}{\dfrac{|Q_1|}{|Q_2|} - 1} = \frac{1}{\dfrac{T_1}{T_2} - 1}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{303}{263} - 1} = \frac{263}{40} = 6{,}58$$

Ejemplo 231. Dos motores Carnot tienen la misma eficiencia. Un motor funciona en reversa como una bomba de calor, y el otro funciona en reversa como un refrigerador. El coeficiente de rendimiento de la bomba de calor es 1,5 veces el coeficiente de rendimiento del refrigerador. Encontrar

a) el coeficiente de rendimiento del refrigerador

b) el coeficiente de rendimiento de la bomba de calor, y

c) la eficiencia de cada motor térmica.

Solución.

Eficiencia de los motores

$$e_b = 1 - \frac{T_{2b}}{T_{1b}} \text{ y } e_r = 1 - \frac{T_{2r}}{T_{1r}}$$

Coeficientes de rendimiento

De la bomba $\eta_b = \dfrac{T_{1b}}{T_{1b} - T_{2b}}$

Del refrigerador $\eta_r = \dfrac{T_{1r}}{T_{1r} - T_{2r}}$

Los dos motores tienen la misma eficiencia

$e_b = e_r$

$1 - \dfrac{T_{2b}}{T_{1b}} = 1 - \dfrac{T_{2r}}{T_{1r}}$, la bomba y el refrigerador deben operar entre reservorio con la misma relación de temperaturas $r = \dfrac{T_{2b}}{T_{1b}} = \dfrac{T_{2r}}{T_{1r}}$.

El coeficiente de rendimiento de la bomba de calor es 1,5 veces el coeficiente de rendimiento del refrigerador, $\eta_b = 1{,}5\eta_r$, luego

$$\frac{T_{1b}}{T_{1b} - T_{2b}} = 1{,}5\frac{T_{1r}}{T_{1r} - T_{2r}} \Rightarrow$$

$$\frac{T_{1b}}{T_{1b} - rT_{1b}} = 1{,}5\frac{T_{1r}}{T_{1r} - rT_{1r}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-r} = 1{,}5\frac{1}{1-r} \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

a) $\eta_r = \dfrac{T_{1r}}{T_{1r} - T_{2r}} = \dfrac{1}{1 - T_{2b}/T_{1b}}$

$$= \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-2/3} = 2{,}00$$

b) $\eta_b = 1{,}5\eta_r = 1{,}5 \times 2{,}00 = 3{,}00$

c) $e_b = e_r = 1 - \dfrac{T_{2r}}{T_{1r}} = 1 - r$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 33{,}3\%$$

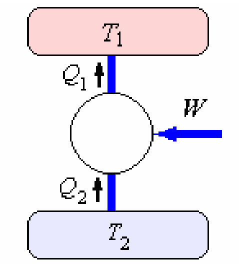
Ejemplo 232. Un frigorífico de eficiencia 5 produce 200 g de hielo a partir de agua a la temperatura ambiental 27 ºC, cuando la temperatura dentro del frigorífico es la de congelamiento .Determine

a) El calor que cede la maquina frigorífica.

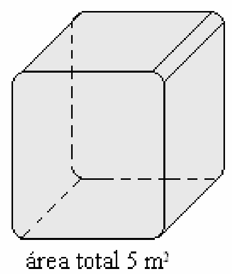
b) La energía que consume la maquina frigorífica.

c) Si todo el frigorífico posee un área de 5 m^2 y sus paredes tienen el mismo espesor ¿Cuánto será dicho espesor si el flujo de calor a través de las paredes es de 60 watts, considere que la temperatura de las paredes esta a la temperatura de su entorno?
Datos.
Conductividad térmica de la lana de vidrio:
$$k = 0{,}038 \frac{\text{J}}{\text{s m °C}}$$
1 cal = 4,186 Joules
Solución.

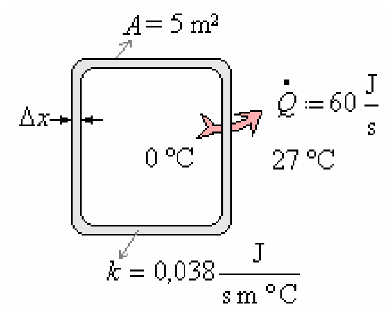
a)



Masa de hielo, m = 200 g.
Calor que extrae la máquina
$$Q_2 = m(L + c\Delta\theta) = 200(80 + 1 \times 27) = 21400$$
calorías
Calor que cede la máquina Q_1
El rendimiento es
$$\eta = \frac{|Q_2|}{|W|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|} = 5$$
Luego: $5|Q_1| = 6|Q_2| \Rightarrow$
$$|Q_1| = 1{,}2|Q_2| = 1{,}2 \text{ x } 21400 = 25680 \text{ calorías}$$
La extrae la máquina 25680 calorías.
b)
$$|W| = |Q_1| - |Q_2| = 25680 - 21400 = 4280$$
calorías
La energía que consume la máquina frigorífica es
4280 calorías o 4280 x 4,186 = 17916,08 J
c) El frigorífico es una caja con superficies de área total 5 m^2 con aislamiento de lana de vidrio con conductividad térmica $k = 0{,}038 \frac{\text{J}}{\text{s m °C}}$.



La figura siguiente muestra un corte transversal de la caja.



$$\dot{Q} = 60 \text{ W} = 60 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$
$$\dot{Q} = kA\frac{\Delta\theta}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = \frac{kA}{\dot{Q}}\Delta\theta$$
Reemplazando valores:
$$\Delta x = \frac{(0{,}038)5}{60}(27) = 0{,}0855 \text{ m}$$
El espesor de las paredes es 8,55 cm.

Ejemplo 233. Un frigorífico tiene una temperatura interior de – 23° C. El aire exterior tiene una temperatura de 27° C. Como el aislamiento térmico no es perfecto, cierta cantidad de calor entra en el frigorífico, a razón de 50 J/s. Determinar la potencia del motor del frigorífico necesaria para mantener constante su temperatura interior, asumiendo que el frigorífico es de Carnot.
Solución.
La eficiencia de un frigorífico es
$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|}}$$
Siendo este de Carnot
$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_2}},$$
Su rendimiento es
$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{300}{250}} = 5$$
También
$$\eta = \frac{|Q_2|}{|W|} = 5$$
Nos dicen que la razón de entrada de calor es
$$\frac{Q_2}{t} = 50 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

La potencia del motor es

$$P = \frac{W}{t}$$

La eficiencia podemos escribirla como

$$5 = \frac{|Q_2|}{|W|} = \frac{\frac{|Q_2|}{t}}{\frac{|W|}{t}} = \frac{50 \text{ J/s}}{P} \Rightarrow$$

$$P = \frac{50}{5} = 10 \text{ J/s}$$

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|}} = \frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_2}} \quad |W| = |Q_1| - |Q_2|$$

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{300}{250}} = 5 \quad 5 = \frac{|Q_2|}{|W|} = \frac{50}{|W|/t}$$

$$P = \frac{|W|}{t} = \frac{50}{5} = 10 \text{ J/s}$$

La potencia del motor del frigorífico necesaria para mantener constante su temperatura interior es 10 W.

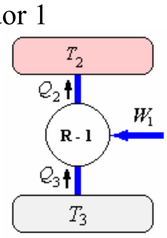
Ejemplo 234. Dos máquinas frigoríficas trabajan en serie. Considere que el calor que la primera cede a una fuente intermedia es íntegramente absorbido por la segunda. Los rendimientos de las máquinas frigoríficas son η_1 y η_2, respectivamente. Hallar el rendimiento neto de la combinación en función de η_1 y η_2.

Solución.

El rendimiento de una máquina frigorífica es

$$\eta_T = \frac{|Q_3|}{|Q_1| - |Q_3|} = \frac{T_3}{T_1 - T_3} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_3} - 1}$$

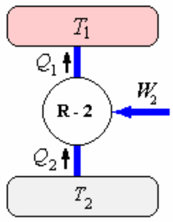
Para el refrigerador 1



$$\eta_1 = \frac{1}{\frac{T_2}{T_3} - 1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_3} - 1 = \frac{1}{\eta_1} \Rightarrow$$

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{1}{\eta_1} + 1 = \frac{\eta_1 + 1}{\eta_1} \quad (1)$$

Para el refrigerador 2



$$\eta_2 = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} - 1 = \frac{1}{\eta_2} \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{1}{\eta_2} = \frac{\eta_2 + 1}{\eta_2} \quad (2)$$

Multiplicando (1) x (2)

$$\frac{T_2}{T_3}\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\eta_1 + 1}{\eta_1}\right)\left(\frac{\eta_2 + 1}{\eta_2}\right)$$

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)}{\eta_1 \eta_2}$$

La eficiencia del conjunto

$$\eta_T = \frac{1}{\frac{T_1}{T_3} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)}{\eta_1 \eta_2} - 1} = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 + 1}$$

ENTROPÍA

Recordemos para el ciclo reversible de Carnot,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ o } \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Es posible aproximar cualquier ciclo reversible por una serie de ciclos de Carnot, y éste nos conduce a la conclusión que

$\oint \frac{dQ}{T} = 0$ para un ciclo reversible.

Esto recuerda a las fuerzas conservativas, donde

$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ para una trayectoria cerrada. Que nos llevó a definir la energía potencial U donde

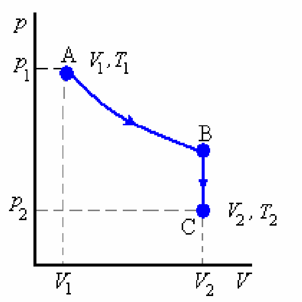
$U_B - U_A = \int_A^B \vec{F} . d\vec{s}$. En este caso un estado del sistema fue caracterizado por un valor definido de U, la energía potencial. De la misma manera, definimos una nueva variable del estado, la entropía S, tal que

$$dS = \frac{dQ}{T} \text{ y } S_{(B)} - S_{(A)} = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

Note que aunque un valor definido de Q no caracteriza un estado (es decir, un punto en un diagrama p V), cada punto en el diagrama p V

tiene un valor definido de S. Es curioso que aunque el flujo del calor en un sistema depende de la trayectoria seguida entre los dos estados, el cambio en S es independiente de la trayectoria. Decimos que dQ es un diferencial inexacto, y dS es un diferencial exacto.
La ecuación anterior es cierta para un ciclo reversible. Uno puede razonar que
$\oint (dQ/T) > 0$ para un ciclo irreversible.
Además, es posible ampliar este razonamiento a cualquier proceso que lleve un sistema del estado A al estado B, con el resultado que.
$\Delta S = S_{(B)} - S_{(A)} .= \oint (dQ/T)$. Para un sistema aislado, esto se convierte $\Delta S = 0$ para un ciclo reversible y $\Delta S > 0$ para un ciclo irreversible.
Esto significa que la entropía de un sistema aislado sigue siendo constante o aumenta. Puesto que los procesos verdaderos son todos irreversibles, esto significa que la entropía del universo aumenta siempre en cada proceso.

Ejemplo 235. Calcular el cambio en la entropía para un gas ideal siguiendo un proceso en el cual lo lleve de p_1, T_1, V_1 a p_2, T_2, V_2 según se muestra en la figura.



Solución.
No importa qué trayectoria siga, el cambio de la entropía será igual puesto que S es una función del estado. Para simplificar el cálculo, elegiremos la trayectoria reversible mostrada, primero viajando a lo largo de una trayectoria isotérmica, y luego a lo largo de una trayectoria a volumen constante. A lo largo de la isoterma la temperatura no cambia, por lo tanto no hay cambio en energía interna. $(U = nC_V T)$
Así $dQ = dW$ para este proceso, y

$$S_{(B)} - S_{(A)} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dW}{T_1}$$

$pV = nRT$, tal que

$$S_{(B)} - S_{(A)} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRTdV_1}{VT_1} \Rightarrow$$

$$S_{(B)} - S_{(A)} = nR \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Para $B \rightarrow C$, no se realiza trabajo, luego
$dQ = dU = nC_V dT$:

$$S_{(C)} - S_{(B)} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dQ}{T} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

El cambio total de la entropía es

$$\Delta S = S_{(B)} - S_{(A)} + S_{(C)} - S_{(B)} :$$

$$\Delta S = S(p_2, V_2, T_2) - S(p_1, V_1, T_1)$$

$$= nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Ejemplo 236. Un kilogramo de agua a temperatura de 280 K se mezcla con 2 kilogramos de agua a 310 K en un recipiente aislado térmicamente. Determine el cambio en la entropía del Universo.
Solución.
Aquí, un proceso de mezclado

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2}$$

Donde (por calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

siendo
$m_1 = 1000$ g
$T_1 = 280 + 273{,}15 = 553{,}15$K
$m_2 = 2000$ g
$T_2 = 310 + 273{,}15 = 583{,}15$K
entonces

$$T_f = \frac{553{,}15 + 2 \times 583{,}15}{3} = 573{,}15 \text{ K}$$

y $\Delta S = 1000 \ln \frac{573{,}15}{553{,}15} + 2000 \ln \frac{573{,}15}{583{,}15}$

$$= 0{,}92 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

Ejemplo 228. Una masa m de líquido a temperatura T_1 se mezcla con una igual cantidad del mismo líquido a temperatura T_2 en un recipiente aislado térmicamente. Demuestre que el cambio de entropía del Universo es

$2mc_p \ln \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$ y pruebe que es necesariamente positivo.

Solución.
El cambio de entropía del Universo será el cambio de entropía de la mezcla, es decir

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln\frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln\frac{T_f}{T_2}$$

Donde por calorimetría se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

Pero $m_1 = m_2 = m$ y $c_1 = c_2 = c$ por lo cual resulta

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$ y

$$\Delta S = mc \ln\frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 2mc \ln\frac{T_f}{\sqrt{T_1 T_2}} =$$

$$2mc \ln\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$$

Para probar que es positivo, debemos demostrar que en general

$$\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} > 1$$

y esto se deduce de

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 > 0 \ \Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} > 0 \ \Rightarrow$$

$$x + y > 2\sqrt{xy}$$

Finalmente: $\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}} > 1$

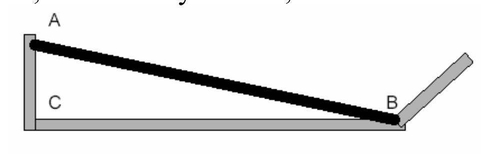
PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un termómetro de gas a volumen constante se calibra en hielo seco (dióxido de carbono en estado sólido, temperatura de -80 ºC) y en alcohol etílico en ebullición (temperatura de 78 ºC).
Los valores de las presiones son 0,9 atm y 1,635 atm, respectivamente.
Determine:
a) El valor del cero absoluto obtenido de la calibración;
b) El valor de la presión en el punto de congelación del agua;
c) El valor de la presión en el punto de ebullición del agua.

2. En un termómetro de resistencia la propiedad usada para medir a temperatura es la resistencia eléctrica de un conductor. Las temperaturas medidas por este termómetro (en Kelvin o en grados Celsius) pueden ser directamente relacionadas con la resistencia *R*, medida en ohms. Un cierto termómetro de resistencia tiene una resistencia *R* = 90,35 cuando su bulbo se coloca en agua, a temperatura del punto triple (273,16 K). Determine a temperatura indicada por el termómetro cuando su bulbo se coloca en un medio tal que a su resistencia sea igual a:
a) 105, b) 96,28 .

3. Un recipiente de vidrio está lleno hasta el borde de mercurio a la temperatura de 0º y masa 1 kg. El recipiente vacío tiene una masa de 0,1 kg. Calcular la cantidad de mercurio a 100 ºC que puede contener este recipiente. El coeficiente de dilatación cúbica del mercurio es $1{,}8\text{x}10^{-4}$ ºC^{-1} y el del vidrio $3\text{x}10^{-5}$ ºC^{-1}.
ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3 a 0 ºC.
Respuesta
887 g de Hg.

4. Un vástago de latón AB tiene una longitud de 200,1 mm y ha de encajarse exactamente en el hueco BC, de hierro que tiene la forma del esquema. Al intentarlo queda AB como se indica en la figura, siendo AC = 4 mm. Calcular el descenso de la temperatura para lograr el encaje. Los coeficientes de dilatación del latón y del hierro valen respectivamente,
$\alpha = 19{,}9\ \text{x}10^{-6}$ ºC^{-1} y $\alpha' = 12{,}1\text{x}10^{-6}$ ºC^{-1}.



Respuesta
25,6 ºC.

5. Un anillo de latón de varios centímetros de diámetro se calienta hasta la temperatura t_1 = 300 ºC y se encaja ajustadamente sobre un cilindro de acero cuya temperatura es t_2 = 18 ºC. ¿Qué esfuerzo de rotura experimentará el anillo una vez enfriado hasta 18 ºC? El coeficiente de dilatación lineal del latón es α = 1,84x10-5 ºC^{-1} y su módulo de Young $Y = 6{,}47\text{x}10^{10}$ Nm^{-2}. Las dimensiones de la sección del anillo son 2x5 mm.
Respuesta
3,364 N.

6. Con una regla métrica de latón cuyas dimensiones son exactas a 0 ºC, se ha medido la

longitud de una barra de hierro, encontrándose ℓ = 1,4996 m a 38 ºC. Siendo α = 12,1x10^{-6} ºC^{-1} el coeficiente de dilatación lineal del hierro y α = 19,9x10^{-6} ºC^{-1} el del latón, calcular la longitud a 0 ºC de la barra de hierro.
Respuesta
1,500 m.

7. Si la temperatura del ambiente en que se encuentra un reloj de péndulo que bate segundos se modifica en 20 ºC, ¿qué le pasará al reloj al cabo de 30 días si el coeficiente de dilatación lineal del péndulo es 20x10^{-6} ºC^{-1}?
Respuesta
8 min. 38 s. se atrasa.

8. Una bola de acero de 6 cm de diámetro tiene 0,010 milímetros más de diámetro que el correspondiente al orificio de una plancha de latón donde se debe alojar cuando tanto la bola como la plancha están a una temperatura de 30 ºC. A qué temperatura, tanto de la bola como de la plancha, podrá pasar la bola por el orificio.
El coeficiente de dilatación lineal del acero vale 12x10^{-6} ºC^{-1} y el del latón 19x10^{-6} ºC^{-1}.
Respuesta
54 ºC.

9. Una vasija de vidrio está llena justamente con 1 litro de terpentina a 50 ºF. Hallar el volumen de líquido que se derrama si se calienta hasta 86 ºF. El coeficiente de dilatación lineal del vidrio vale 9x10^{-6} ºC^{-1} y el de dilatación cúbica de la terpentina 97x10^{-5} ºC^{-1}.
Respuesta
18,86 cm^3.

10. Se ha de introducir un remache de hierro en una placa también de hierro y para conseguir un ajuste lo más perfecto posible se introduce el remache, antes de meterlo en la placa, en aire líquido (-187 ºC). El diámetro del orificio es de 10 mm. ¿Que diámetro tendrá que tener el remache a la temperatura ambiente (20 ºC) para que después de meterlo en aire líquido entre justamente por el orificio de la placa?
Coeficiente de dilatación lineal del hierro:
α = 12x10^{-6} ºC^{-1}.
Respuesta
10,025 mm.

11. Un recipiente a 0 ºC contiene la tercera parte de su volumen de mercurio.
Se calienta a una cierta temperatura y entonces el mercurio ocupa el 34,37 por 100 del volumen del vaso. ¿Cuál es dicha temperatura?
Coeficiente de dilatación del mercurio
β = 18x10^{-5} ºC^{-1}.
Coeficiente de dilatación del recipiente
β = 25x10^{-6} ºC^{-1}.
Respuesta
202 ºC.

12. ¿Que fuerzas hay que aplicar a los extremos de una barra de acero, cuya sección transversal tiene el área S = 10 cm^2, para impedir que se dilate cuando se calienta desde t_1= 0 ºC hasta t_2 = 30 ºC?
Respuesta
68,688 N.

13. De un alambre de 1 mm de radio cuelga una carga. Esta carga hace que el alambre se alargue en la misma magnitud que se alargaría sí se elevara 20 ºC su temperatura.
Hallar la magnitud de la carga.
Respuesta
148 N.
α = 1,2x10^{-5} ºC^{-1}
Y = 19,6x10^{10} N.m^{-2}

14. Un alambre de hierro se tendió entre dos paredes fijas resistentes, estando la temperatura a 150 ºC ¿A qué temperatura se romperá el alambre al enfriarse? Suponer que la ley de Hooke se cumple hasta el momento en que se produce la rotura.
α = 1,2x10^{-5} C^{-1}
Resistencia a la rotura F/S = 2,94x10^8 N/m^2
Módulo de Young Y = 19,6x10^{10} N/m2
Respuesta
25 ºC.

15. Unos carriles de acero de 18 m de longitud se colocan un día de invierno en que la temperatura es -6 ºC. ¿Qué espacio ha de dejarse entre ellos para que estén justamente en contacto un día de verano en que la temperatura es 40 ºC. Coeficiente de dilatación del acero □= 12x10^{-6} ºC^{-1}?
Respuesta
9,936x10^{-6} m.

16. La varilla de un reloj de péndulo sin compensar, que bate segundos a 0 ºC
es de latón. Averiguar cuanto se retrasa el reloj en un día si se introduce en un ambiente a 200 ºC.
Coeficiente de dilatación del latón: 17x10^{-6} ºC^{-1}
(Considerar el péndulo como simple).
Respuesta
7 m. 12 s.

17. Un herrero ha de colocar una llanta circular de hierro de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la temperatura ambiente es de 20 ºC y su coeficiente de dilatación lineal $12,2\text{x}10^{-6}$ $ºC^{-1}$. Calcular:
a) Temperatura en grados centígrados a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.
b) Expresar esta temperatura en grados Fahrenheit y en grados absolutos.
Respuesta
a) 347 ºC; b) 656,6 ºF, 620 K.

18. Una vasija de cinc (coeficiente de dilatación lineal: $29\text{x}10^{-6}$ $ºC^{-1}$), está llena de mercurio a 100 ºC; teniendo entonces una capacidad de 10 litros. Se enfría hasta 0 ºC. Calcular la masa de mercurio a 0 ºC que hay que añadir para que la vasija quede completamente llena
(Coeficiente de dilatación cúbico del mercurio: $182\text{x}10^{-6}$ $ºC^{-1}$). Densidad del mercurio a 0 ºC 13,6 g/cm^3.
Respuesta
1,258 g.

19. La pared de concreto de un frigorífico mide 3,0 m de alto, 5,0 m de ancho, y 20 cm de espesor. La temperatura se mantiene en –10º C y la temperatura exterior es 20º C. La pared interior está cubierta por una capa de lana para reducir el flujo de calor a través de la pared por 90 %. Las conductividades térmicas del concreto y de la lana son 0,8 y 0,04 W/m.K, respectivamente.
a) ¿Cuál es la diferencia de temperaturas de la capa de lana?
b) ¿Cuál es el espesor de capa de lana requerido?

20. Dos placas paralelas grandes están separadas por 0,5 m. Un círculo de 1,5 m de radio se delinea sobre la placa de la izquierda. Un segundo círculo, del mismo radio y opuesta a la primera, se delinea sobre la placa de la derecha. La temperatura de la placa de la izquierda es 700 K y la emisividad es 1,00. La temperatura de la placa de la derecha es 600 K y la emisividad es 0,80.
a) ¿El calor neto radiado entre los dos círculos es?
b) La temperatura de la placa izquierda se mantiene en 700 k. La temperatura de la placa derecha se cambia, tal que ahora el flujo de calor neto radiado es cero, en el espacio entre los círculos. ¿Cuál es la temperatura de la placa de la derecha?

21. Una esfera de 0,30 m de radio, tiene una emisividad de 0,48 y su temperatura es de 600 K. La esfera se rodea de una cáscara esférica concéntrica cuya superficie interior tiene un radio de 0,90 m y una emisividad de 1,00. La temperatura de la cáscara es 400 K. ¿El calor neto radiado, incluyendo la dirección, en el espacio entre las esferas y la cáscara es?

22. Un proyectil de plomo choca contra un obstáculo. ¿Cuál es la velocidad en el momento del choque sí su temperatura inicial era de 65 ºC y se funde la tercera parte? Se supone el obstáculo inamovible e inalterable. Calor específico del plomo 0,031 cal/g ºC.
Temperatura de fusión: 327,4 ºC; calor de fusión: 5,74 cal/g.
Respuesta
289,93 m/s.

23 Se lanza una esfera de plomo cuya temperatura inicial es de 36 ºC, verticalmente y hacia abajo con una velocidad v_0; 100 metros más abajo encuentra un plano absolutamente resistente de conductividad calorífica nula. Calcular el valor de v_0 necesario para que la esfera se funda totalmente en el choque. Calor específico del plomo c = 0,031 cal/g ºC.
Temperatura de fusión del plomo t = 327,4 ºC.
Calor de fusión del plomo = 5,74 cal/g;
1 cal = 4,186 J; g = 9,8 m/s^2.
Respuesta
348,7 m/s.

24. Una masa de plomo igual a 10 g llega horizontalmente, con una velocidad de 250 m/s sobre una esfera de plomo de 450 g, en la cual se incrusta.
a) Estando, al principio, la esfera de plomo inmovilizada, calcular el calentamiento que resultará del choque.
b) Pudiéndose separar la esfera de plomo de la vertical como un péndulo, se comprueba en una segunda experiencia que se eleva 2 metros después del choque. Calcular el calentamiento resultante. C_{Pb}= 0,03 cal/g.
Respuesta
a) 5,4 ºC; b) 5,2 ºC.

25. En un calorímetro sin pérdidas cuyo equivalente en agua es de 101 g y cuya temperatura inicial es de 20 ºC, se añaden 250

cm^3 de agua a 40 ºC, 100 g de hierro a 98 ºC (calor específico = 0,109 cal/g ºC) y 80 g de hielo fundente. Calcular la temperatura de equilibrio.
Respuesta
15,1 ºC.

26. Dentro de un calorímetro que contiene 1.000 g de agua a 20 ºC se introducen 500 g de hielo a -16 ºC. El vaso calorimétrico es de cobre y tiene una masa de 278 g.
Calcular la temperatura final del sistema, suponiendo que no haya pérdidas.
Calor específico del hielo: 0,55 cal/g ºC
Calor específico del cobre: 0,093 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 539 cal/g
Respuesta
0 ºC no se funde todo el hielo; 201 g.

27. En un calorímetro de latón sin pérdidas, de 240 g, que contiene 750 cm^3 de agua a 20,6 ºC se echa una moneda de oro de 100 g a 98 ºC y la temperatura sube a 21 ºC.
Determinar la cantidad de oro y cobre que integra la moneda. Calor específico del latón: 0,09 cal/g ºC; calor específico del cobre: 0,0922 cal/g ºC; calor específico del oro: 0,031 cal/g ºC.
Respuesta
85,16 g de oro; 14,84 g de cobre.

28. En un calorímetro de cobre se queman exactamente, 3 g de carbón produciéndose CO_2.
La masa del calorímetro es de 1,5 kg y la masa de agua del aparato es 2 kg.
La temperatura inicial de la experiencia fue de 20 ºC y la final de 31 ºC. Hallar el poder calorífico del carbón expresándolo en cal/g. El calor específico del cobre vale 0,093 cal/g ºC.
Respuesta
7,8x103 cal/gr.

29. En un calorímetro cuyo equivalente en agua es despreciable, hay 1 kg de hielo a -10 ºC.
¿Cuantos gramos de agua a 80 ºC hay que introducir en él para que la temperatura final sea de 10 ºC? Sí en lugar de agua a 80 ºC, se introduce vapor de agua a 100 ºC, ¿Cuántos gramos de éste habría que introducir para que la temperatura final sea de 40 ºC? ¿Que volumen ocupa el vapor de agua introducido, si la presión a que se mide es de 700 mm de mercurio? Peso molecular del agua 18.
Calor específico del hielo (de -20 a 0 ºC): 0,5 cal/g ºC
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g
Respuesta
1,357 g; 208 g; 384 litros.

30. Mezclamos 1 kg de agua a 95 ºC con un kg de hielo a -5 ºC.
¿Dispondremos de suficiente calor para fundir todo el hielo? Sí es así, ¿a qué temperatura queda la mezcla?
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Respuesta
Se funde todo el hielo, 6,25 ºC.

31. Una bola de plomo (calor específico: 0,03 cal/g ºC) de 100 g está a una temperatura de 20 ºC. Se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 420 m/s
y al regresar al punto de partida choca con un trozo de hielo a 0 ºC. ¿Cuanto hielo se funde?
Se supone que toda la energía del choque se convierte íntegramente en calor.
Respuesta
27 g.

32. Un vaso cuya capacidad calorífica es despreciable contiene 500 g de agua a temperatura de 80 ºC. ¿Cuantos gramos de hielo a la temperatura de -25 ºC han de dejarse caer dentro del agua para que la temperatura final sea de 50 ºC?
Respuesta
105 gramos de hielo. 105 gramos de hielo.

33. Una bola, a una velocidad de 200 m/s, choca contra un obstáculo.
Suponiendo que toda la energía cinética se transforma en calor y que éste calienta tan solo la bola, calcular su elevación de temperatura.
Calor específico del metal 0,1 cal/g ºC.
Respuesta
47,8 ºC

34. Un calorímetro de latón de M_1= 125 g contiene un bloque de hielo de M_2 = 250 g todo ello a t_1 = -15 ºC.
Calcular la cantidad de vapor de agua a 100 ºC y a la presión normal que es necesario para que todo el sistema llegue a la temperatura de t = 15 ºC.
Calor específico del latón: 0,09 cal/g ºC
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g
Respuesta
41,54 g.

35. En un recipiente de aluminio de 256 g que contiene 206 g de nieve a -11 ºC se introducen 100 g de vapor de agua a 100 ºC. Calcular la temperatura final de la mezcla.
Calor específico del aluminio: 0,219 cal/g ºC
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 539 cal/g
Respuesta
Solo se condensa parte del vapor y la temperatura final será de 100 ºC. Vapor condensado 82,4 gramos.

36. Una bala de plomo atraviesa una pared de madera. Antes de chocar con la pared la velocidad de la bala era v_0 = 400 m/s y después de atravesarla v = 250 m/s. La temperatura de la bala antes del choque era t_0 = 50 ºC. ¿Qué parte de la bala se fundirá?
Calor de fusión del plomo: 5,74 cal/g
Temperatura de fusión del plomo: 327 ºC
Calor específico del plomo: 0,031 cal/g ºC
Suponer que todo el calor que se desprende lo recibe la bala.
Respuesta
0,53.

37. En un calorímetro sin pérdidas cuyo equivalente en agua es de 500 g, hay 4,500 g de agua a 50 ºC. Se añaden 2 kg de hielo fundente y se introduce 1 kg de vapor de agua a 100 ºC. El calor de fusión vale 80 cal/g y el de vaporización 540 cal/g. Calcular la temperatura de equilibrio.
Respuesta.
91,25 ºC.

38. Un cubo de hielo de 20 g a 0 ºC se calienta hasta que 15 g se han convertido en agua a 100 ºC y 5 g se han convertido en vapor. ¿Cuanto calor se necesitó para lograr esto?
Respuesta
6300 cal.

39. En un recipiente se almacenan 2 litros de agua a 20 ºC. Inmersas en el agua se encuentran dos barras: una de latón de 5 cm de largo y 200 g y otra de hierro de idénticas dimensiones y 250 g.
a) Hallar la cantidad de calor necesaria para calentar todo el conjunto (agua y barras) justo hasta que todo el agua se convierta en vapor a 100 ºC (calor específico del latón y hierro: 0,09 cal/gºC y 0,11 cal/gºC respectivamente).
b) Determinar las longitudes de ambas barras en esas condiciones (coeficiente lineal de dilatación de latón y hierro: $1{,}9\times10^{-5}$ ºC^{-1} y $1{,}2\times10^{-5}$ ºC^{-1} respectivamente).
c) ¿Cuál es más denso a 20 ºC, el latón o el acero? ¿Y a 100 ºC?
Respuesta
a) $Q = 5{,}2\times10^6$ J;
b) $L_{latón}$ = 0,050076 m, L_{hierro} = 0,050048 m.
c) A 20 ºC y 100 ºC es más denso el hierro.

40. En un recipiente se mezclan 4,5 litros de agua a 20 ºC y 500 g de hielo a 0 ºC. Se introduce en el recipiente una barra de metal, de capacidad calorífica despreciable.
a) ¿Cuál es la temperatura en el equilibrio?
b) El conjunto se calienta en un hornillo que proporciona 5,000 cal/s, ¿cuál es la temperatura a los 100 s?
c) La longitud de la barra a 0 ºC es de 10 cm y su coeficiente de dilatación lineal es de 2×10^{-5} ºC^{-1}. Obtener una expresión de la longitud de la barra en función del tiempo hasta t = 100 s.
Respuesta
a) t = 10 ºC, b) t_{final} = 100 ºC.

41. Un tubo cilíndrico de medio metro de longitud se introduce en mercurio hasta su mitad; después se tapa el extremo superior y se retira. Calcular la longitud de mercurio que quedará en el tubo y la presión del aire encerrado sobre él. La presión atmosférica es de 76 cm de mercurio.
Respuesta
17,5 cm Hg.

42. El peso de un metro cúbico de cierto gas a la temperatura de t = 67 ºC y presión p = 100 mm de mercurio es m = 282,32 g. Calcular la pérdida de peso que experimentaría un cuerpo sumergido en este gas a una cierta presión y temperatura sabiendo que en estas condiciones pierde en el aire 4,839 g.
ρ_{aire} = 1,293 g/litro
Respuesta
10,001 g.

43. Un depósito contiene 50 kg de oxígeno a la presión p_1= 10 atm y a la temperatura t_1= 27 ºC. Se produce una fuga por donde escapa oxígeno y al cabo de cierto tiempo, localizada y tapada la fuga, la presión y la temperatura del depósito resultan ser
p_2= 6 atm y t_2= 20 ºC.
¿Que cantidad de oxígeno ha escapado?
Respuesta
19,3 kg.

44. Un frasco de 5 litros de volumen se tapa en un recinto cuya presión es de 762 mm de Hg y cuya temperatura es de 27 ºC. Luego se abre en un lugar donde la presión es de 690 mm y la temperatura 9 ºC. ¿Entra o sale aire? Calcular el peso de aire que entra o sale.
Respuesta
0,1905 salen; 0,2165 g.

45. Calcular en gramos el peso del hidrógeno H_2 contenido en un recipiente de 5 galones que está a la presión de 14 psi y a la temperatura de 86 ºF.
Respuesta
1,462 g.

46. Un recipiente cuyo volumen es igual a 5 litros, contiene aire a 27 ºC de temperatura y a la presión de 20 atm. ¿Que masa de aire hay que liberar del recipiente, para que la presión de éste caiga a 10 atm?
Respuesta
59 g.

47. Calcular el trabajo que realiza un gas cuando se calienta isobáricamente desde los 20 ºC hasta 100 ºC, si se encuentra dentro de un recipiente cerrado por medio de un émbolo móvil, cuya sección es igual a 20 cm2 y su peso 5 kgf.
Analizar dos casos:
a) cuando el recipiente se encuentra en posición horizontal y
b) cuando el recipiente se encuentra en posición vertical. El volumen inicial del gas es igual a 5 litros, y la presión atmosférica es la normal.
Respuesta
a) 138 J; b) 172 J.

48. Un tubo con su extremo superior cerrado es sumergido completamente en un recipiente que contiene mercurio, después de lo cual, dentro del tubo queda una columna de aire de 10 cm de longitud. ¿A que altura sobre el nivel del mercurio en el recipiente hay que levantar el extremo superior del tubo para que dentro de éste el nivel del mercurio quede igual al nivel del mercurio en el recipiente. La presión atmosférica es la normal. Calcular la masa de aire dentro del tubo, si su sección es igual a 1 cm^2 y la temperatura igual a 27 ºC.
Respuesta
11,3 cm; 13,3 mg.

49. ¿Que cantidad de calor se desprenderá al comprimir por vía reversible e isoterma 100 litros de un gas ideal a 27 ºC que se encuentran a 71 cm de mercurio de presión, hasta reducir su volumen a la centésima parte?
Respuesta
10418 cal.

50. Cien litros de oxígeno a 20 ºC y 69 cm de mercurio de presión se calientan
a volumen constante comunicando 2555 calorías. Calcular el incremento de la presión en cm de mercurio.
Respuesta
31,87 cm Hg.

51. Un tanque contiene 2,73 m^3 de aire a una presión de 24,6 kg/cm^2. El aire se enfría hasta ser su presión de 14 kg/cm^2. ¿Cuál será la disminución de su energía interna?
Considérese el aire como gas perfecto biatómico de índice adiabático γ = 1,4.
Respuesta
$1,420 \times 10^6$ cal.

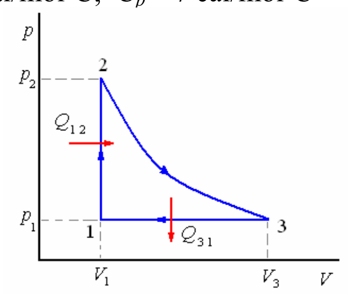
52. Cinco moles de un gas perfecto diatómico a 27 ºC se calientan isobáricamente con el calor que se desprende de un mol de otro gas perfecto que se comprime isotérmicamente a 27 ºC hasta triplicar su presión. Calcular la temperatura final del primer gas.
Respuesta
318,8 K = 45,8 ºC.

53. Se comprime adiabáticamente un mol de cierto gas perfecto (índice adiabático γ= 1,15) que se encuentra a p_1= 1 atm, t_1 = 127 ºC hasta alcanzar una presión p_2.
Después se deja enfriar a volumen constante hasta alcanzar las condiciones p_3 = 10 atm y t_3 = 27 ºC. Calcular:
a) La presión p_2 en atmósferas.
b) El trabajo en la compresión adiabática.
c) La cantidad de calor en calorías cedidas durante el enfriamiento.
Respuesta
a) 48,7 atm; b) $1,8 \times 10^9$ J; b) 4,621 cal.

54. Supóngase que 1 litro de gasolina propulsa un automóvil una distancia de 10 km. La densidad de la gasolina es aproximadamente 0,7 g/cm^3, y su calor de combustión es aproximadamente $4,6 \times 10^4$ J/g.
a) Si el motor tiene un rendimiento del 25%, ¿qué trabajo total realiza el motor durante los 10 km del recorrido?
b) Si se supone que este trabajo se realiza contra una fuerza resistente constante *F*, hállese la magnitud de *F*.

Respuesta
a) $8,05\text{x}10^6$ J; b) 0,805 N.

55. En el ciclo que se muestra en la figura, un mol de un gas diatómico ideal (γ= 1,4) se encuentra inicialmente a 1 atm y 0 ºC. El gas se calienta a volumen constante hasta t_2 = 150 ºC y luego se expande adiabáticamente hasta que su presión vuelve a ser 1 atm.
Luego se comprime a presión constante hasta su estado original. Calcular:
a) La temperatura t_3 después de la expansión adiabática.
b) El calor absorbido o cedido por el sistema durante cada proceso.
c) El rendimiento de este ciclo.
d) El rendimiento de un ciclo de Carnot que operara entre las temperaturas extremas del ciclo.
C_V = 5 cal/molºC; C_p = 7 cal/molºC



Respuesta
a) 373 ºK ; b) -2,93 kJ; c) 6,69 %; d) 35 %

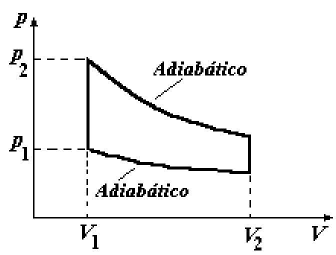
56. Un mol de gas N_2 (C_V= 5/2R; γ = 1,4) se mantiene a la temperatura ambiente (20 ºC) y a una presión de 5 atm. Se deja expandir adiabáticamente hasta que su presión iguala a la ambiente de 1 atm. Entonces se calienta a presión constante hasta que su temperatura es de nuevo de 20 ºC. Durante este calentamiento el gas se expansiona. Una vez que ha alcanzado la temperatura ambiente, se calienta a volumen constante hasta que su presión es de 5 atm. Se comprime entonces a presión constante hasta volver a su estado original.
a) Construir un diagrama pV exacto, mostrando cada etapa del ciclo.
b) A partir de este gráfico determinar el trabajo realizado por el gas en todo el ciclo.
c) ¿Cuánto calor fue absorbido o cedido por el gas en el ciclo completo?
R = 0,082 litro.atm/mol K = 1,98 cal/mol K
Respuesta
b) -65,1 litro.atm; c) -1.572,5 cal

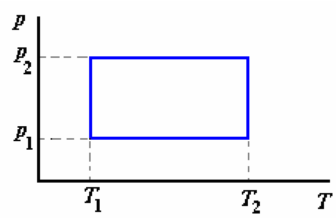
57. Una máquina de vapor con potencia de 14,7 kW consume durante 1 h de funcionamiento 8,1 kg de carbón, cuyo calor específico de combustión es de $3,3\text{x}10^7$ J/kg. La temperatura en la caldera es do 200 ºC, en la máquina frigorífica, 58ºC. Hállese el rendimiento real de la máquina y compárese cl resultado con el rendimiento de una máquina térmica ideal.
Respuesta
$e \approx 19,8\% \quad e_o = 30\%$

58. Un cuerpo calentado con temperatura inicial T_1 se aprovecha como calentador en una máquina térmica. La capacidad calorífica del cuerpo no depende de la temperatura y es igual a C. Un medio ilimitado, cuya temperatura es constante e igual a T_0, sirve de máquina frigorífica. Hállese el trabajo máximo que puede obtenerse por cuenta del enfriamiento del cuerpo. Realícese el cálculo para 1 kg de agua hirviendo y de hielo que se derrite.
Respuesta
$$W = C\left[T_1 - T_0 - T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right] \approx 62 \text{ J}$$

59. Con ayuda do un hornillo e1éctrico de potencia. de 1 kW en la habitación se mantiene la temperatura de 17ºC siendo la temperatura del aire circundante de –23ºC. ¿Qué potencia se necesitaría para mantener en la habitación la misma temperatura con ayuda de una bomba térmica ideal?
Respuesta
$P = 138\text{W}$

60. Hállese el rendimiento de los ciclos mostrados en la figura, sí como agente propulsor se toma un gas monoatómico perfecto.





Respuesta

$$e = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}$$

$$e = \frac{2(T_2 - T_1)\ln\left(p_2/p_1\right)}{5(T_2 - T_1) + 2T_2\ln\left(p_2/p_1\right)}$$

61. Un motor térmico funciona mediante un ciclo de Carnot reversible entre las temperaturas t_1 = 200 ºC (hogar) y t_2 = 20 ºC (refrigerante). El hogar comunica al sistema 60 kcal por minuto. Calcúlese la potencia del motor en caballos de vapor.

Respuesta

2,16 C.V.

62. 8,1 kg de carbón de valor calorífico igual a 3,3x10^7 J/kg. La temperatura de la caldera es de 200 ºC y la del condensador de 58 ºC. Hallar el rendimiento real de la máquina e_1y compararlo con el rendimiento e_2 de la máquina térmica ideal que funcione según el ciclo de Carnot entre las mismas temperaturas.

Respuesta

0,20; 0,30.

63. En una nevera de compresión se trata de fabricar 5 kg de hielo cada hora, partiendo de agua a 0 ºC. El ambiente exterior está a 27 ºC. Calcular:

a) La eficacia de la nevera.

b) La potencia teórica del motor.

c) La potencia real si el rendimiento de la operación es el 75%.

d) El costo de la energía eléctrica necesaria para fabricar 100 kg de hielo a 5 soles el kW h.

Respuesta

a) 10; b) 46 W; c) 61 w; 4d) 6,10 soles.

64. Una cierta máquina térmica ideal en la que se realiza un ciclo de Carnot reversible en cada segundo, tiene el refrigerante a 27 ºC, una potencia de 4,18 kW y en cada ciclo se toman 3 kcal de la caldera. Calcular la temperatura de ésta, el calor que se cede al refrigerante y el rendimiento.

Respuesta

2,000 cal; 177 ºC; 1/3.

65. En un ciclo de Carnot reversible, descrito por un mol de un gas perfecto diatómico, la temperatura más elevada es de 500 K y el trabajo en la expansión adiabática 4,157 J. Calcular el rendimiento del ciclo.

Respuesta

0,4.

66. Un refrigerador está impulsado por un pequeño motor cuya potencia útil es de 150 W. Si suponemos que este refrigerador trabaja como un refrigerador ideal de Carnot, y que las temperaturas caliente y fría de los recipientes térmicos son 20 y -5 ºC, ¿cuanto hielo fabricará este refrigerador en 1 h si en el interior se coloca agua a 10 ºC?

Respuesta

15,4 kg.

67. Tres kilogramos de agua a 18 ºC, se mezclan con 9 kg a 72 ºC. Una vez establecido el equilibrio, se restituyen las dos cantidades de agua a su estado inicial colocando 3 kg en contacto con una fuente térmica siempre a 18 ºC, y los 9 kg restantes en otra siempre a 72 ºC. Calcular:

a) El incremento de la entropía del agua como consecuencia del primer proceso y el incremento de entropía del universo.

b) El incremento de entropía del agua producido por todas las operaciones y el del universo.

c) El incremento de entropía del agua debido al segundo proceso y el del universo.

Respuesta

a) 0,0315 kcal/ K que también es la del universo;

b) 0,0653 kcal/ K, la del agua 0;

c) -0,0315 kcal/ K del agua, 0,0338 kcal/ K universo.

68. Un congelador fabrica cubos de hielo a razón de 5 gramos por segundo, comenzando con agua en el punto de congelación. Cede calor a una habitación a 30 ºC. Si el sistema utiliza un frigorífico de Carnot ideal,

a) ¿Qué potencia expresada en watios requiere el motor?;

b) ¿Cuanto calor por unidad de tiempo cede a la habitación?;

c) ¿Cual es la variación de entropía del agua?

Respuesta

a) 184 W; b) 444 cal/s; c) 6,15 J/ K.

69. Un herrero sumerge una herradura de acero caliente con una masa de 2 kg en una cubeta que contiene 20 kg de agua. La herradura al principio está a una temperatura de 600 ºC y el agua está inicialmente a una temperatura de 20 ºC. Suponiendo que no se evapora el agua, encuentre:

a) la temperatura final del agua,

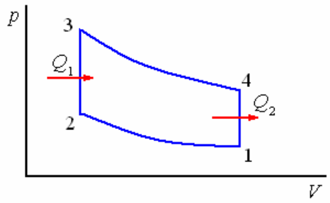
b) el cambio de entropía de la herradura,

c) el cambio de entropía del agua
d) el cambio global en la entropía del agua y la herradura.
e) Después de cierto tiempo, que es bastante comparado con el tiempo que tarda la herradura en enfriarse, la herradura y el agua se enfrían hasta la temperatura de los alrededores: 20 ºC. Durante este proceso, encuentre los cambios en la entropía del agua, la herradura y sus alrededores.
f) Usando los resultados del inciso d y e, encuentre el cambio en la entropía del universo como resultado de toda la consecuencia de eventos.
Calor específico del acero 0,107 cal/g ºC

Respuesta

a) 26,14 ºC; b) –959 J/ K; c) 1,736 J/K; d) 777 J/ K; e) –1,736 J/ K; -18,6 J/ K; f) 1,754 J/ K

70. Una máquina térmica trabaja con un gas perfecto (γ = 1,4) según el ciclo Otto, motores de explosión.
¿Cuánto vale el rendimiento térmico de este ciclo, para un estado inicial de p_1 = 1 atm. T_1 = 20 ºC y un grado de compresión V_2/V_1 = 1/4, si la combustión aporta Q_1 = 20 kcal/ciclo?
¿Cuánto vale el calor evacuado Q_2?
¿Cuánto valdrá la potencia de la máquina si realiza 300 ciclos por minuto?



71. Se dispone de botellas de 1,5 litros de agua a temperatura ambiente (20 ºC);
a) calcular la temperatura final del conjunto si se mezcla una botella con 100 g de hielo a -5 ºC;
b) calcular el calor necesario para evaporar toda el agua de una botella; hallar el tiempo que requiere este proceso si se usa un microondas de 100 W;
c) hallar la eficiencia de una máquina de Carnot que utiliza el vapor a 100 ºC como foco caliente y agua a 20 ºC como foco frío; dibujar un esquema de una máquina de vapor en el que se explique cómo se obtiene el trabajo mecánico.

Respuesta

a) t = 13,6 ºC;
b) 930,000 cal = 3887,400 J, tiempo = 3.887,4 s;
c) Eficiencia = 21 %.