Universidad Ricardo Palma
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias

FÍSICA BÁSICA

José Ricardo Luna Victoria Muñoz

Junio 2011

FÍSICA BÁSICA

Primera edición digital

Julio, 2011

Lima - Perú

PROYECTO LIBRO DIGITAL

PLD 0180

Editor: Víctor López Guzmán

Guzlop editoras

http://www.guzlop-editoras.com/
guzlopster@gmail.com
guzlopnano@gmail.com
facebook.com/guzlop
twitter.com/guzlopster
428 4071 - 999 921 348
Lima - Perú

PROYECTO LIBRO DIGITAL (PLD)

El proyecto libro digital propone que los apuntes de clases, las tesis y los avances en investigación (papers) de las profesoras y profesores de las universidades peruanas sean convertidos en libro digital y difundidos por internet en forma gratuita a través de nuestra página web. Los recursos económicos disponibles para este proyecto provienen de las utilidades nuestras por los trabajos de edición y publicación a terceros, por lo tanto, son limitados.

Un libro digital, también conocido como e-book, eBook, ecolibro o libro electrónico, es una versión electrónica de la digitalización y diagramación de un libro que originariamente es editado para ser impreso en papel y que puede encontrarse en internet o en CD-ROM. Por, lo tanto, no reemplaza al libro impreso.

Entre las ventajas del libro digital se tienen:
• su accesibilidad (se puede leer en cualquier parte que tenga electricidad),
• su difusión globalizada (mediante internet nos da una gran independencia geográfica),
• su incorporación a la carrera tecnológica y la posibilidad de disminuir la brecha digital (inseparable de la competición por la influencia cultural),
• su aprovechamiento a los cambios de hábitos de los estudiantes asociados al internet y a las redes sociales (siendo la oportunidad de difundir, de una forma diferente, el conocimiento),
• su realización permitirá disminuir o anular la percepción de nuestras élites políticas frente a la supuesta incompetencia de nuestras profesoras y profesores de producir libros, ponencias y trabajos de investigación de alta calidad en los contenidos, y, que su existencia no está circunscrita solo a las letras.

Algunos objetivos que esperamos alcanzar:
• Que el estudiante, como usuario final, tenga el curso que está llevando desarrollado como un libro (con todas las características de un libro impreso) en formato digital.
• Que las profesoras y profesores actualicen la información dada a los estudiantes, mejorando sus contenidos, aplicaciones y ejemplos; pudiendo evaluar sus aportes y coherencia en los cursos que dicta.
• Que las profesoras y profesores, y estudiantes logren una familiaridad con el uso de estas nuevas tecnologías.
• El libro digital bien elaborado, permitirá dar un buen nivel de conocimientos a las alumnas y alumnos de las universidades nacionales y, especialmente, a los del interior del país donde la calidad de la educación actualmente es muy deficiente tanto por la infraestructura física como por el personal docente.
• El personal docente jugará un rol de tutor, facilitador y conductor de proyectos

de investigación de las alumnas y alumnos tomando como base el libro digital y las direcciones electrónicas recomendadas.

• Que este proyecto ayude a las universidades nacionales en las acreditaciones internacionales y mejorar la sustentación de sus presupuestos anuales en el Congreso.

En el aspecto legal:

• Las autoras o autores ceden sus derechos para esta edición digital, sin perder su autoría, permitiendo que su obra sea puesta en internet como descarga gratuita.

• Las autoras o autores pueden hacer nuevas ediciones basadas o no en esta versión digital.

Lima - Perú, enero del 2011

"El conocimiento es útil solo si se difunde y aplica"

Víctor López Guzmán
Editor

PRESENTACIÓN

Las dificultades que padecen un buen número de los alumnos ingresantes a la carrera de ingeniería son los pocos conocimientos de ciencias. Esta dificultad ha obligado a que en los programas de estudio de las carreras de ingeniería se optara por establecer una asignatura introductoria de Física Básica cuyo contenido permita reforzar o consolidar según el caso los conocimientos de mecánica.

Este curso de Física Básica ha sido diseñado y enriquecido en los últimos años por los profesores del Departamento de Ciencias, considerando que para su desarrollo el alumno solo tenga que utilizar los conocimientos de matemáticas elementales que han sido impartidos en la secundaria.

El libro está organizado conforme a los contenidos que el silabo de dicho curso establece y a la recopilación del material utilizado en la preparación de las clases en los últimos años, la solución de problemas y propuestas de prácticas y exámenes y material de lectura que ha sido utilizado.

Esta primera versión digital tiene como propósito poner a consideración de estudiantes y profesores todo el material recopilado y se espera que se nos haga llegar todas las sugerencias que crean los lectores hacernos y permitirnos corregir todos aquellos errores en los que se han incurrido.

Agradecemos por su colaboración y nos pueden comunicar sus observaciones al correo jlunavictoria@urp.edu.pe

José Ricardo Luna Victoria Muñoz

Marzo de 2011

Índice

CAPITULO VI
DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA.

CAPITULO VII
TRABAJO Y ENERGÍA.

Capítulo I

MAGNITUDES FÍSICAS Y MEDIDA

La Física como hoy día la conocemos se estableció a mediados del siglo XIX como síntesis de otras ciencias, estudiadas independientemente, como la mecánica, la óptica, la acústica, la electricidad, el magnetismo, el calor y las propiedades físicas de la materia; al reconocer que las distintas fuerzas que aparecen en la naturaleza están relacionadas entre sí.

Actualmente entendemos por Física la ciencia que estudia las propiedades de la materia y de la energía, considerando aquellos fenómenos que son susceptibles de medida y de los cuales se pueden deducir leyes generales.

El físico español Julio Palacios Martínez (1891-1970) escribía: «La Física es la ciencia que trata de descubrir y dar forma matemática a las leyes universales que relacionan entre sí las magnitudes que intervienen en los fenómenos reales».

En pocas palabras, la Física es una ciencia basada fundamentalmente en la experimentación, que estudia las interacciones entre sistemas, y que se sirve de las matemáticas para la proposición de sus leyes.

En la medida que conozcamos estas leyes, podremos afirmar, que comprendemos el mundo que nos rodea y que sabemos cómo funciona y se comporta la naturaleza, para ser conscientes de la extraordinaria simetría y racionalidad que existe en el universo físico.

El gran físico inglés Lord Kelvin consideraba que solamente puede aceptarse como satisfactorio nuestro conocimiento si somos capaces de expresarlo mediante números. Aun cuando la afirmación de Lord Kelvin tomada al pie de la letra supondría la descalificación de valiosas formas de conocimiento, destaca la importancia del conocimiento cuantitativo, particularmente en el tipo de ciencia que él profesaba.

En las ciencias físicas es muy importante observar y analizar un fenómeno o realizar un experimento con el propósito de entenderlo y proponer una teoría que permita explicarlo. En la antigüedad (3000 años antes de Cristo hasta el siglo XVI) el hombre llevo a cabo muchas observaciones del mundo que le rodeaba y **busco explicaciones más bien de carácter filosófico a sus observaciones** siendo algunas de ellas totalmente contraproducentes y otras que dieron lugar a conceptos que hasta el día de hoy seguimos practicando. Es así (dentro de los órdenes de magnitud hoy día conocidos) que los griegos, (con la tecnología de dicha época) probaron la redondez y midieron el radio de la tierra, la distancia de la tierra a la luna y la distancia de la tierra al sol, la denominación de algunos cuerpos celestes en planetas, estrellas, la atracción eléctrica y la magnética. Sin embargo algunos de estos fenómenos no tenían explicaciones teóricas como hoy día conocemos **sino explicaciones aparentemente en algunos casos lógicas**. En otras palabras nada de lo observado como un fenómeno podría expresarse matemáticamente como hoy lo hacemos.

Después del siglo XVI, haciendo uso de los cálculos matemáticos y buscando explicaciones teóricas que pudieran expresarse mediante ecuaciones o formulas se construyeron los modelos teóricos que representaban a los fenómenos observados. Si se reproduce en el laboratorio mediante un experimento el fenómeno observado, se pueden realizar mediciones (toma de datos) que permiten comprobar la teoría planteada y los límites de la misma.

Las operaciones que se realizan en el laboratorio, que permiten expresar una propiedad o atributo físico de lo observado, en forma numérica del experimento (por ejemplo la caída de una moneda, las oscilaciones de un péndulo, el estiramiento de un resorte, encender y apagar un foco de luz, etc.), es lo que se denomina la medida.

En este punto sería oportuno ingresar a las siguientes páginas Web:

Historia de la Física

http://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_f%C3%ADsica

http://www.culturageneral.net/Ciencias/Fisica/Historia_y_Estructura/

http://mural.uv.es/sansipun/

1.1 MAGNITUDES FÍSICAS, CANTIDAD Y UNIDAD

La noción o el concepto de magnitud física están relacionados con la de medida. Se denominan magnitudes físicas a las propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresados en forma numérica. En otros términos, las magnitudes físicas son propiedades o atributos medibles.

Son ejemplos de magnitudes físicas:

CUADRO DE MAGNITUDES FÍSICAS

Longitud	Masa	Tiempo	Densidad
Área	Volumen	Velocidad	Desplazamiento
Rapidez	Aceleración	Fuerza	Presión
Trabajo	Energía	Potencia	Torque
Momento Lineal	Momento angular	Aceleración angular	Velocidad angular
Momento de inercia	Carga eléctrica	Campo eléctrico	Campo magnético
Voltaje	Corriente	Capacidad	Resistencia

En el lenguaje de la física la noción de cantidad se refiere al valor numérico que toma una magnitud física: la longitud de esta mesa es 90 cm., la masa de ese costal de azúcar es de 50 Kg, el volumen de ese cubo es de 35 cm^3, la tensión o fuerza que soporta esa cuerda es de 5 Newton, es decir 90, 50, 35 y 5 son ejemplos de cantidades asignadas a las magnitudes físicas de longitud, masa, volumen y fuerza.

En el párrafo anterior cm., kg, cm^3 y Newton (N) son las unidades asignadas a las cantidades de las magnitudes físicas señaladas. En física existen muchas unidades de denominación diferente que se refieren a una misma magnitud física: por ejemplo la longitud puede ser expresada en cm, m, Km, mm, pie, pulgada, vara, yarda etc. De la misma manera existen otras unidades para otras magnitudes físicas.

1

Tarea para el alumno

Describa el significado de las siguientes magnitudes físicas: ¿Qué cosa es? o ¿Cómo define?
Longitud, Masa, Peso, Velocidad, Densidad, Fuerza, Presión, Trabajo.

LA MEDIDA COMO COMPARACIÓN

La medida de una magnitud física supone la comparación del objeto que encarna dicha propiedad con otro de la misma naturaleza que se toma como referencia y que constituye el patrón. Por ejemplo el metro patrón, unidad de medida de longitud del sistema métrico de unidades.

Las medidas de longitud se efectuaban en la antigüedad de diversas formas y una de ellas era empleando una vara como patrón, es decir, determinando cuántas veces la longitud del objeto a medir contenía a la del patrón. La vara, como predecesora del metro de sastre, ha pasado a la historia como una unidad de medida equivalente a 835,9 mm en el sistema de unidades metrico.

La medida puede ser directa o indirecta. La comparación entre la vara y el metro, señalada en el párrafo anterior es un tipo de comparación inmediata denominada medidas directas. La vara o el metro se usan para realizar directamente la medición, de la misma manera como usamos un reloj para medir el tiempo o una balanza para medir pesos o masas.

Con frecuencia, la medición de una magnitud física se efectúa entre atributos o propiedades que, aun cuando están relacionados con lo que se desea medir, son de diferente naturaleza. Tal es el caso por ejemplo de la medida de la temperatura la cual podemos realizarla mediante un termómetro de vidrio, en las que comparando longitudes sobre la escala graduada del termómetro, se determina la temperatura. Esta otra clase de medidas se denominan medidas indirectas.

En ingeniería y en física existen instrumentos que permiten hacer mediciones directas e indirectas. Una regla sirve para hacer mediciones directas de longitud y mediciones indirectas del área; una balanza hace mediciones indirectas de masa o peso según se encuentre calibrada; un voltímetro digital o analógico hace la medición indirecta del voltaje, etc.

2 ***Tarea para el alumno***

Haga una relación de los instrumentos de laboratorio que le sean más conocidos que sirven para realizar mediciones directas e indirectas de las magnitudes físicas.

CLASIFICACIÓN DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS

Las magnitudes físicas pueden ser clasificadas de acuerdo a sus características de dos maneras distintas.

Primera clasificación:

- **magnitudes escalares**
- **magnitudes vectoriales**

MAGNITUDES ESCALARES

Un grupo importante de magnitudes físicas están perfectamente definidas y descritas cuando se expresan mediante un número o cantidad seguidos de la unidad correspondiente. Este grupo de magnitudes físicas reciben el nombre de magnitudes escalares. La longitud, el volumen, la masa, la temperatura, la energía, son sólo algunos ejemplos de magnitudes escalares. En el Cuadro de Magnitudes Físicas, mostrado anteriormente, son aquellas que están escritas con letras en negrita.

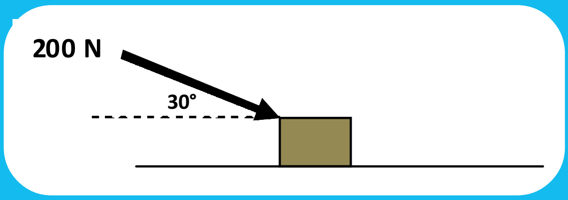
Cuando nos referimos a la longitud, podemos decir la distancia entre dos puntos es 40 m, dicha expresión claramente señala la distancia entre los puntos. El tiempo empleado para ir de Lima a Barranco es de 45 minutos. La presión de la llanta del auto es 32 atmosfera. El voltaje a través del condensador es 5.7 voltios. Todos son ejemplos de magnitudes físicas escalares porque solo fue suficiente expresar el número (escalar) 40, 45, 32, 5.7 y la unidad correspondiente para que la medida de la magnitud física quede claramente definida.

MAGNITUDES VECTORIALES

Otras magnitudes físicas que precisan para su total definición que se especifique, además del número, modulo o cantidad, una dirección y un sentido reciben el nombre de magnitudes vectoriales. La fuerza es un ejemplo claro de magnitud vectorial, pues sus efectos al actuar o aplicarse sobre un cuerpo dependerán no sólo de su modulo o cantidad, sino también de la dirección o línea a lo largo de la cual actúa y del sentido en el que se ejerza dicha fuerza, la cual puede dar como resultado efectos físicos diferentes al cuerpo que se le aplica. En el Cuadro de Magnitudes Físicas son aquellas que están escritas con letras en azul.

Los números reales son usados para representar a las magnitudes físicas escalares. Las magnitudes físicas vectoriales requieren del empleo de otros elementos matemáticos diferentes de los números reales, que cuenten con una mayor capacidad de descripción. Estos elementos matemáticos, con los que se representan a las magnitudes físicas vectoriales, que pueden expresar simultáneamente modulo, dirección y sentido se denominan vectores.

Cuando nos referimos a que sobre un cuerpo se está aplicando una fuerza de 200 Newton, la información proporcionada no es suficiente para saber el efecto que dicha fuerza realiza sobre el cuerpo. Es necesario que se nos informe sobre la dirección y el sentido de la fuerza. Esta información es proporcionada analíticamente mediante un vector o como estamos acostumbrados los físicos de una manera grafica mediante una flecha como la que se muestra en el dibujo.



Las magnitudes físicas que manejamos en la vida diaria son por lo general escalares. El dependiente de una tienda, el comerciante o incluso el contador manejan números: masas, precios, volúmenes, etc., y por ello les es suficiente saber operar bien con números. Sin embargo, el ingeniero debe manejar magnitudes vectoriales, por tanto deben conocer como operar con los vectores. La representación de un vector y las operaciones que pueden realizarse con ellos es tema del capítulo 3 del curso.

Segunda clasificación:
- **magnitudes fundamentales**
- **magnitudes derivadas**

En la física como en la ingeniería por lo general las leyes, las definiciones y las ecuaciones relacionan algebraicamente entre sí grupos de magnitudes físicas, por lo general muy amplios. Por ejemplo la siguiente ecuación de cinemática:

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

En dicha ecuación podemos observar que en ella están presentes y relacionadas algebraicamente varias magnitudes físicas, tales como la coordenada de posición inicial en el eje Y de la partícula en el plano, su velocidad inicial, el ángulo que hace con la horizontal, el tiempo, la aceleración de la gravedad.

De todas las magnitudes físicas mostradas en el cuadro, algunas de ellas resultan ser la combinación de otras que están en el mismo cuadro. Por ello es posible seleccionar un conjunto reducido de estas magnitudes de tal modo que cualquier otra magnitud física pueda ser expresada en función de dicho conjunto.

Esas pocas magnitudes físicas escogidas se denominan magnitudes fundamentales, mientras que el resto que pueden expresarse en función de las magnitudes fundamentales reciben el nombre de magnitudes derivadas.

Por ejemplo magnitudes fundamentales en el sistema métrico son la longitud, la masa y el tiempo. Magnitudes derivadas son la velocidad, presión, área, trabajo, energía, fuerza etc.

3 ***Tarea para el alumno***

Escriba una relación de cinco magnitudes físicas escalares y cinco vectoriales. Explique el significado físico de cada una de ellas.

4 ***Tarea para el alumno***

¿La masa y el peso de un cuerpo son magnitudes físicas iguales? ¿Por qué?

SISTEMAS DE UNIDADES

Una **unidad de medida** es una cantidad estandarizada de una determinada magnitud física. Por ejemplo el metro es una unidad de medida de longitud. En general, una unidad de medida toma su valor a partir de un patrón o de una composición o combinación de otras unidades definidas previamente. Las primeras las denominaremos fundamentales o de base mientras que las segundas se llaman unidades derivadas.

El nombre que se le asigne puede ser diferente pero siempre está referido a la magnitud física correspondiente. Por ejemplo la longitud es una magnitud física y existen diversas denominaciones para ella: metro, centímetro, kilometro, pie, pulgada, milla, milímetro, etc.

¿Qué es un sistema de unidades?

Cuando se ha elegido un conjunto reducido de magnitudes físicas (por ejemplo masa, longitud y tiempo) a las que denominaremos fundamentales y se han definido sus unidades correspondientes, se dispone entonces de un sistema de unidades.

La definición de las unidades dentro de un sistema se atiene a diferentes criterios y debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Ser inalterable, esto es, no ha de cambiar con el tiempo ni en función de quién realice la medida.
2. Ser universal, es decir utilizada por todos los países.
3. Ha de ser fácilmente reproducible.

Así la unidad ha de ser constante como corresponde a su función de cantidad de referencia equivalente para las diferentes mediciones, pero también ha de ser reproducible con relativa facilidad en un laboratorio. Ejemplo el metro, el segundo, el kilogramo etc.

Sin embargo hay otras unidades tales como el amperio, unidad de la intensidad de corriente eléctrica, ha evolucionado en el tiempo la definición que le fue establecida inicialmente. Debido a que las fuerzas pueden medirse en el laboratorio con bastante precisión y facilidad, actualmente se define el amperio a partir de la fuerza que se ejerce entre dos conductores de corriente eléctrica en paralelo, cuya magnitud depende de la intensidad de la corriente.

Las unidades correspondientes a una medida tienen diferente denominación o nombre conforme nos encontremos trabajando en un determinado sistema de unidades. La longitud de una mesa puede ser medida en pies, yardas o metros. La longitud de la mesa no cambia, lo que cambia es la elección de la unidad de medida, la cual corresponde a diferentes sistemas de unidades.

La unidad de medida se convierte en unidad estándar o patrón si es aceptada oficialmente por todos quienes hacen uso de ellas.

En el mundo han existido muchos sistemas de unidades, tanto como culturas existentes. Con el transcurso del tiempo y la necesidad de intercambio global, algunos sistemas de unidades han ido desapareciendo. Los sistemas de unidades más conocidos y que actualmente son usados en ingeniería son:

- Sistema métrico (MKS)
- Sistema Ingles o anglosajón.
- El sistema cegesimal CGS.
- Sistema Internacional de Unidades (SI)

Describiremos los tres más importantes que a menudo usamos en física e ingeniería y encontraremos los factores de conversión que nos permitan pasar de uno a otro sistema de unidades.

SISTEMA METRICO DE UNIDADES (MKS)

El sistema métrico es el más difundido en el mundo en comparación con otros sistemas de unidades. Tiene sus inicios alrededor de 1790 en plena revolución francesa, cuando la Asamblea Nacional de Francia solicito a la Academia Francesa de Ciencias «establecer un estándar invariable para todas las medidas y pesos».

La característica importante del sistema métrico es que se encuentra sustentado en el sistema de base decimal. El proceso culminó en la proclamación el 22 de junio de 1799 del sistema métrico con la entrega a los Archivos de la República de los patrones del metro y el kilogramo, confeccionados en aleación de platino e iridio, presenciados por funcionarios del gobierno francés y de varios países invitados y muchos renombrados científicos de la época.

Las unidades fundamentales del sistema métrico son tres y se corresponden con tres Magnitudes Fundamentales:

Unidad Fundamental	Magnitud Fundamental
El metro (m)	longitud
El kilogramo (kg)	masa
El segundo (s)	tiempo

Para cada una de las unidades fundamentales del sistema métrico existen patrones, que están reproducidos en cada uno de los países.

El sistema métrico ha sido modernizado y mejorado a partir de 1960 por un comité internacional, que estableció un nuevo conjunto de patrones para sus unidades fundamentales. Este nuevo sistema recibe el nombre de **SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI).**

SISTEMA INGLES O ANGLOSAJON

El **sistema anglosajón** (o **sistema imperial**) **de unidades** es el conjunto de las unidades no métricas que se utilizan actualmente en muchos territorios de habla inglesa, como Estados Unidos de América, además de otros territorios y países con influencia anglosajona en América, como Bahamas, Barbados, Jamaica, Puerto Rico o Panamá. Pero existen discrepancias entre los sistemas de Estados Unidos e Inglaterra, e incluso sobre la diferencia de valores entre otros tiempos y ahora. Sus unidades de medida son guardadas en Londres, Inglaterra. (Wikipedía)

El sistema ingles tiene sus orígenes en Inglaterra, y a partir del establecimiento del sistema métrico se establecieron equivalencias entre dichos sistemas.

Las unidades fundamentales del sistema ingles son tres y se corresponden con tres Magnitudes Fundamentales:

Unidad Fundamental	Magnitud Fundamental
El pie (ft)	longitud
Slug	masa
Segundo (s)	tiempo

El slug (unidad de masa) se definió inicialmente en términos de la **unidad de fuerza denominada libra** (peso). Una fuerza de una libra (lb) que actúa sobre la masa de un slug produce una aceleración de un pie por segundo al cuadrado (pie/s^2).

Tanto en el sistema métrico como en el ingles la unidad de tiempo es el segundo, definido a partir del tiempo que tarda la tierra en dar una vuelta completa sobre su eje, y el tiempo que demora en girar alrededor del sol.

La definición de las diferentes unidades fundamentales ha evolucionado con el tiempo al mismo ritmo que las propias ciencias físicas e ingeniería. Así, el segundo fue definido inicialmente como 1/86 400 de la duración del día solar medio, esto es, promediado a lo largo de un año.

Un día normal tiene 24 horas aproximadamente, es decir 24x60x60 = 86400 segundo; no obstante, esto tan sólo es aproximado, pues la duración del día varía a lo largo del año en algunos segundos, de ahí que se tome como referencia la duración promedio del día solar. Pero debido a que el periodo de rotación de la Tierra puede variar, y de hecho varía, se ha acudido al átomo para buscar en él un periodo de tiempo fijo al cual referir la definición de su unidad fundamental.

SISTEMA CEGESIMAL DE UNIDADES CGS

El **sistema cegesimal de unidades**, también llamado **sistema CGS**, es un sistema de unidades basado en el centímetro, el gramo y el segundo. Su nombre es el acrónimo de estas tres unidades.

Unidad Fundamental	Magnitud Fundamental
El centímetro (cm)	longitud
El gramo	masa
El segundo (s)	tiempo

El sistema CGS ha sido casi totalmente reemplazado por el Sistema Internacional de Unidades. Sin embargo aún perdura su utilización en algunos campos científicos y técnicos muy concretos, con resultados ventajosos en algunos contextos. Así, muchas de las fórmulas del electromagnetismo presentan una forma más sencillas cuando se las expresa en unidades CGS, resultando más simple la expansión de los términos en *v*/*c*, donde v es la velocidad de la onda electromagnética y c la velocidad de la luz.

La Oficina Internacional de Pesos y Medidas, reguladora del Sistema Internacional de Unidades, valora y reconoce estos hechos e incluye en sus boletines referencias y equivalencias de algunas unidades electromagnéticas del sistema CGS gaussiano, aunque desaconseja su uso. (Wikipedia).

[1]Algunas de las unidades más conocidas en el sistema cegesimal que tienen nombre propio equivalentes con el SI son:

MAGNITUDES	CGS	SI
Fuerza	dina	10^{-5} N
Energía	ergio	10^{-7} J
Potencia	ergio/s	10^{-7} W
Presión	baria	0.1 Pa
Flujo magnético	maxwell	10^{-8} Wb
Densidad del flujo magnético	gauss	10^{-4} T

EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

El sistema internacional ha sido adoptado por la mayoría de los países del mundo incluyendo a los de habla inglesa, quienes se encuentran adecuando al nuevo sistema.

A lo largo de la historia el hombre ha venido empleando diversos tipos de sistemas de unidades. Estos están íntimamente relacionados con la historia de los pueblos que las crearon, las adaptaron o las impusieron a otras culturas. Su permanencia y extensión en el tiempo lógicamente también ha quedado ligada al destino de esos pueblos y a la aparición de otros sistemas más coherentes y generalizados. El sistema ingles de medidas -millas, pies, libras, grados Farenheit- todavía en vigor en determinadas áreas geográficas, es, no obstante, un ejemplo evidente de un sistema de unidades en recesión. Otros sistemas son el cegesimal -centímetro, gramo, segundo-, el terrestre o técnico –metro, kilogramo-fuerza, segundo-, el Giorgi o MKS -metro, kilogramo, segundo- y el sistema métrico decimal, muy extendido en ciencia, industria y comercio, y que constituyó la base de elaboración del Sistema Internacional.

El Sistema de unidades Internacional (SI) toma como magnitudes fundamentales la longitud, la masa, el tiempo, la intensidad de corriente eléctrica, la temperatura absoluta, la intensidad luminosa y la cantidad de sustancia, y fija las correspondientes unidades fundamentales para cada una de ellas. A estas siete magnitudes fundamentales hay que añadir dos magnitudes suplementarias asociadas a medidas angulares, el ángulo plano y el ángulo sólido.

El Sistema Internacional es el sistema práctico de unidades de medidas adoptado por la XI Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en octubre de 1960 en París. Trabaja sobre siete magnitudes fundamentales (longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, intensidad luminosa y cantidad de sustancia) de las que se derivan sus correspondientes unidades fundamentales (metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, candela y mol). De estas siete unidades se definen las derivadas (coulomb, joule, newton, pascal, volt, ohm, etc.), además de otras suplementarias de estas últimas.

Las unidades y magnitudes fundamentales escogidas en el Sistema Internacional son:

Unidad Fundamental	Magnitud Fundamental
Metro	Longitud
Kilogramo	Masa
Segundo	Tiempo
Ampere	Intensidad de corriente
Kelvin	Temperatura absoluta
Candela	Intensidad luminosa
Mol	Cantidad de sustancia

En este punto es necesario ingresar a las siguientes páginas Web relacionadas con los sistemas de unidades:

http://www.terra.es/personal6/gcasado/si.htm

http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_m%C3%A9trico_decimal

DEFINICIONES DE LAS UNIDADES FUNDAMENTALES DEL SI

Metro (m). Es la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de 1/299 792 458 segundo.

Kilogramo (kg). Es la masa del prototipo internacional de platino-iridio que se conserva en la Oficina de Pesas y Medidas de París.

Segundo (s). Unidad de tiempo que se define como la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

Ampere (A). Es la intensidad de corriente eléctrica constante que, mantenida en dos conductores rectilíneos paralelos de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados a una distancia de un metro el uno del otro, en el vacío, produce entre estos conductores una fuerza igual a $2x10^{-7}$ Newton (N) por cada metro de longitud.

Kelvin (K). Unidad de temperatura termodinámica correspondiente a la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

Candela (cd). Unidad de intensidad luminosa, correspondiente a la fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540x10^{12}$ Hz y cuya intensidad energética en esa dirección es 1/683 W sr-1.

Mol (mol). Cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kg de carbono 12.

UNIDADES DERIVADAS DEL SI

En el Sistema Internacional de Unidades existen unidades derivadas que tienen nombre propio. Las más conocidas son:

Coulomb (C). Cantidad de carga eléctrica transportada en un segundo por una corriente de un amperio.

Joule (J). Trabajo producido por la fuerza de un newton, cuando su punto de aplicación se desplaza la distancia de un metro en la dirección de la fuerza.

Newton (N). Es la fuerza que, aplicada a un cuerpo que tiene la masa de 1 kilogramo, le comunica una aceleración de 1 metro por segundo al cuadrado (m/s^2).

Pascal (Pa). Unidad de presión. Es la presión uniforme que, actuando sobre una superficie plana de 1 metro cuadrado, ejerce perpendicularmente a esta superficie una fuerza total de 1 newton.

Volt (V). Unidad de tensión eléctrica, potencial eléctrico, fuerza electromotriz. Es la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un hilo conductor que transporta una corriente de intensidad constante de 1 ampere cuando la potencia disipada entre esos puntos es igual a 1 watt.

Watt (W). Potencia que da lugar a una producción de energía igual a 1 joule por segundo.

Ohm (Ω). Unidad de resistencia eléctrica. Es la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 volt aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1 ampere.

Weber (Wb). Unidad de flujo magnético o flujo de inducción magnética. Es el flujo magnético que, al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 volt si se anula dicho flujo en 1 segundo por decrecimiento uniforme.

1.2 LAS MEDICIONES EN FÍSICA

En el mundo físico existen medidas cuyos orden de magnitud son muy grandes (macroscópicas) o muy pequeñas (microscópicas). Para escribirlas en cualquier sistema de unidades es necesario utilizar la notación científica. Solo para poder tener conocimiento del orden de magnitud de algunas mediciones, se muestran los siguientes cuadros.

Distancia de la tierra al quasar más lejano	1.4×10^{26}
Distancia de la tierra a las galaxias normales más lejanas	4×10^{25}
Distancia de la tierra a una gran galaxia cercana	2×10^{22}
Distancia de la tierra a la estrella más cercana	4×10^{16}
Un año luz	9.46×10^{15}
Radio de la órbita media de la tierra alrededor del sol	1.5×10^{11}
Distancia media de la tierra a la luna	3.8×10^{8}
Radio medio de la tierra	6.4×10^{6}
Altura promedio de un satélite que órbita la tierra	2×10^{5}
Longitud de un campo de fútbol	9.1×10^{1}
Longitud de una mosca común	5×10^{-3}
Tamaño de las células de los organismos vivos	1×10^{-5}
Diámetro del átomo de hidrogeno	1×10^{-10}
Diámetro de un núcleo atómico	1×10^{-14}
Diámetro de un protón	1×10^{-15}

Fuente: Física. Serway. Mac Graw Hill.

El universo	$1x10^{52}$
La vía láctea	$7x10^{41}$
El sol	$2x10^{30}$
La tierra	$6x10^{24}$
La luna	$7x10^{22}$
Un ser humano	$7x10^{1}$
Un mosquito	$1x10^{-5}$
Una bacteria	$1x10^{-15}$
El átomo de hidrogeno	$1.67x10^{-27}$
El electrón	$9.11x10^{-31}$

Fuente: Física. Serway. Mac Graw Hill.

Edad del universo	$5x10^{17}$
Edad de la tierra	$1.3x10^{17}$
Un año	$3.2x10^{7}$
Un día	$8.6x10^{4}$
Tiempo entre latidos de un corazón normal	$8x10^{-1}$
Periodo de ondas sonoras audibles	$1x10^{-3}$
Periodo de ondas de radio comunes	$1x10^{-6}$
Periodo de vibración de un átomo en un sólido	$1x10^{-13}$
Periodo de ondas luminosas visibles	$2x10^{-15}$
Duración de un choque nuclear	$1x10^{-22}$
Tiempo que tarda la luz en atravesar un protón	$3.3x10^{-24}$

Fuente: Física. Serway. Mac Graw Hill.

Prefijo	Potencia	Abreviatura
ato	10^{-18}	a
pico	10^{-12}	p
nano	10^{-9}	n
micro	10^{-6}	u
mili	10^{-3}	m
centi	10^{-2}	c
deci	10^{-1}	d
deca	10^{1}	da
kilo	10^{3}	k
mega	10^{6}	M
giga	10^{9}	G
tera	10^{12}	T
peta	10^{15}	P

Fuente: Física. Serway. Mac Graw Hill.

1.3 FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

Es necesario que cuando se llevan a cabo cálculos numéricos en el que están presentes diversas magnitudes físicas, todas deben estar en un mismo sistema de unidades. Por consiguiente es necesario pasar las unidades de los valores dados al sistema de unidades en el que se desea obtener la respuesta.

Para pasar de un sistema de unidades a otro es necesario conocer los factores o constantes que permiten hacer el cambio entre uno y otro sistema de unidades. En la mayoría de los libros, se encuentran y se conocen como Factores de Conversión de Unidades.

Ejemplo de algunos Factores de Conversión de Unidades:

1m = 39.37 pulg = 3.281 pie	1 milla = 5280 pie
1Km = 0.6215 milla	1 m^2 = 10.76 pie^2
1 milla = 1.609 Km	1 pie^2 = 144 $pulg^2$
1 pulg = 2.54 cm	1 m^3 = $6.102x10^4$ $pulg^3$
1 pie = 30.48 cm	1 litro = 10^3 cm^3 = 0.0353 pie^3
1 gr = $6.852x10^{-5}$ slug	1 galón = 3.786 litros = 231 $pulg^3$
1 dia = $8.640x10^4$ seg.	1 slug = 14.59 Kg

Páginas web que muestra factores de conversión de unidades.

http://www.emersonflowcontrols.com.mx/mt/mt_cap_15.pdf
http://www.ieslaasuncion.org/fisicaquimica/sistema4.html

En este curso trabajaremos en el sistema de unidades internacional (SI), por consiguiente para evitar errores en las respuestas a los problemas numéricos se recomienda que todos los datos correspondientes a las magnitudes físicas se expresen en dicho sistema y si no lo están usar los factores de conversión de unidades.

Ejemplo 1

Convertir 15 pulg. a cm.

Solución:

Según la tabla de factores de conversión 1 pulg = 2.54 cm.
Reemplazando tendremos:

$$15 \text{ pulg} = 15 \times 2.54 \text{ cm} = 38.1 \text{ cm}$$

Ejemplo 2

Convierta el volumen de 8.5 $pulg^3$ a m^3

Solución:

Primero convertimos la pulgada a metro, usando la tabla:

$$1 \text{ pulg} = 2.54 \text{ cm} = 2.54 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Elevamos al cubo ambos miembros de la igualdad y tendremos la equivalencia de pulgadas cúbicas a metros cúbicos.

$$1 \text{ pulg}^3 = (2.54 \times 10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 16.39 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Reemplazando el valor obtenido de pulgadas cubicas se tiene:

$$8.5 \text{ pulg}^3 = 8.5 \times 16.39 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$139.32 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Ejemplo 3

Una criatura se mueve con una rapidez de 5 estadios por quincena (no es una unidad muy común para la rapidez, la estamos inventando). Dado que un estadio es igual a 220 yardas y una quincena igual a 15 días, determinar la rapidez de la criatura en m/s. (La criatura es probablemente un caracol).

Solución:

Primero debemos saber que la rapidez es el modulo o magnitud de la velocidad. El equivalente de 5 estadios en metros:

$$5 \text{ estadios} = 5 \text{x} 220 \text{ yardas} = 1100 \text{ yd}$$

Según la tabla de factores de conversión:

$$1 \text{ yd} = 0.9144 \text{ m}$$

Entonces el valor de 5 estadios en metros debe ser:

$$5 \text{ estadios} = 1100 \text{x} 0.9144 \text{ m} = 1005.84 \text{ m}$$

El equivalente de una quincena en segundos:

$$1 \text{ quincena} = 15 \text{x} 24 \text{x} 60 \text{x} 60 \text{ s} = 1296000 \text{ s}$$

La rapidez de la criatura será:

$$v = \text{espacio recorrido} / \text{tiempo}$$

$$v = 1005.84 \text{m} / 1296000 \text{s} = 7.76 \text{x} 10^{-4} \text{ m/s}$$

Ejemplo 4

Una pieza sólida de plomo tiene una masa de 23.94 g y un volumen de 2.10 cm^3. De estos datos calcule la densidad del plomo en unidades del SI.

Solución:

Por definición densidad es la relación entre la masa y el volumen:

$$\rho = m / V$$

El equivalente de la masa en Kg.

$$m = 23.94 \times 10^{-3}\ Kg$$

El equivalente del volumen en m^3.

$V = 2.10\ cm^3$ pero $1\ cm^3 = 10^{-6}\ m^3$

$V = 2.10 \times 10^{-6}\ m^3$

Por consiguiente la densidad en unidades del SI será:

$$\rho = 23.94 \times 10^{-3}\ Kg / 2.10 \times 10^{-6}\ m^3$$
$$\rho = 11.4 \times 10^{3}\ Kg/m^3$$

Ejemplo 5

La rapidez de la luz en el vacío es aproximadamente 3.00×10^8 m/s. Cuántas millas viajará el pulso (o la luz) de un laser en una hora.

Solución:

Cuando el movimiento es uniforme la distancia recorrida es dada por la ecuación:

$$e = v\ t$$

El espacio recorrido por el Laser en una hora en metros es.

$$e = 3.00 \times 10^{8} \times 60 \times 60 = 108 \times 10^{10}\ m$$

El equivalente de una milla en metros es:

$$1 \text{ milla} = 1.609 \times 10^{3} \text{ m}$$

Por consiguiente el espacio recorrido en millas es:

$$e = (108 \times 10^{10} / 1.609 \times 10^{3}) \text{ millas}$$
$$e = 67.12 \times 10^{7} \text{ millas.}$$

Ejemplo 6

Una caja en forma de un paralelepípedo recto tiene 50 pies de largo, 26 pies de ancho y 8 pies de altura. ¿Cuál es el volumen de la caja en metros cúbicos y en centímetros cúbicos?

Solución:

El volumen de la caja en pies cúbicos es:

$$V = 50 \times 26 \times 8 = 10400 \text{ pie}^{3}$$

Equivalencia del pie cúbico en metros cúbicos:

$$1 \text{ pie}^{3} = 2.83 \times 10^{-2} \text{ m}^{3}$$

El volumen de la caja en pies cúbicos:

$$V = 10400 \times 2.83 \times 10^{-2} \text{ m}^{3}$$

$$V = 294 \text{ m}^{3}$$

El equivalente del metro cúbico en centímetros cúbicos:

$$1 \text{ m}^{3} = 10^{-6} \text{ cm}^{3}$$

El volumen de la caja en centímetros cúbicos es:

$$V = 294 \times 10^{-6} \text{ cm}^{3}$$

Ejemplo 7

El radio promedio de la tierra es de $6.37x10^{6}$ m, y el de la luna es de $1.74x10^{8}$ cm. Con estos datos, encuentre: a) la razón entre el área de la superficie de la tierra y la de la luna. Recuerde que el área de la superficie de una esfera es $4\pi r^{2}$ y el volumen de una esfera es $4/3(\pi r^{3})$.

Solución:

Área de la superficie de la tierra:

$$A_{t} = 4\pi(6.37x10^{6})^{2} = 509.9x10^{12}\ m^{2}$$

Área de la superficie de la luna:

$$A_{L} = 4\pi(1.74x10^{6})^{2} = 38.05x10^{12}\ m^{2}$$

Razón entre las áreas:

$$R = 509.9x10^{12} / 38.05x10^{12}$$
$$R = 13.4$$

Ejemplo 8

El aluminio es un metal muy ligero, con una densidad de 2.7 g/cm^{3}. ¿Cuál es el peso en libras de una esfera sólida de aluminio de un radio igual a 50 cm? El resultado lo puede sorprender. (Nota: Una masa de 1 Kg corresponde a un peso de 2.2 libras en la tierra)

Solución:

El volumen de la esfera de aluminio de 50 cm de radio es:

$$V = (4/3)\pi(50)^{3} = 52.4x10^{4}\ cm^{3}$$

La masa de la esfera de aluminio es:

$$m = \rho\ V = 2.7x52.4x10^{4}\ g$$
$$m = 141.48x10^{4}\ g = 1414.8\ Kg$$

Como la masa de un Kg corresponde al peso de 2.2 libras, el peso de la esfera en libras es:

$$\text{Peso} = 1414.8 \times 2.2 \text{ libras}$$
$$\text{Peso} = 3112.56 \text{ libras}$$

1.4 ANÁLISIS DIMENSIONAL

El **análisis dimensional** es una herramienta matemática que permite simplificar el estudio de aquellos fenómenos en el que están involucradas muchas magnitudes físicas en forma de variables independientes.

Los métodos del análisis dimensional se basan en el principio de la homogeneidad dimensional de Fourier (1822), el cual establece que una ecuación que expresa una relación física entre cantidades debe ser dimensionalmente homogénea; esto es, las dimensiones de cada lado de la ecuación deben ser las mismas.

El análisis dimensional permite deducir una formula física empíricamente o verificar sus dimensiones o magnitudes. La palabra dimensión suele significar la naturaleza física de una cantidad: por ejemplo la distancia entre dos puntos puede medirse en (unidades) metros, pies, yardas, millas o pulgadas sin embargo su dimensión o magnitud es la longitud. Respetando la denominación de dimensión en vez de la definición que se ha dado de la magnitud, utilizaremos simultáneamente a partir de ahora dimensión como equivalente de magnitud física.

El análisis dimensional puede ser considerado como una técnica matemática que permite:

a) Determinar las unidades de una magnitud física.
b) Comprobar si una ecuación física es dimensionalmente correcta.
c) Derivar empíricamente formulas físicas.

Las magnitudes físicas, tales como espacio, distancia, altura, espesor y longitud tienen en el SI la misma unidad de medida, el metro. En el análisis dimensional un símbolo dimensional es representado mediante corchetes

[x], donde x es la magnitud física correspondiente y se lee: dimensión de la magnitud x, por ejemplo:

$$[\text{Espacio}] = [\text{altura}] = [\text{espesor}] = [\text{longitud}] = L$$

Donde L es el símbolo de la magnitud física correspondiente a la longitud.

Los símbolos atribuidos a las dimensiones de las magnitudes físicas fundamentales son:

DIMENSIÓN	**SIMBOLO**
[Longitud]	L
[Masa]	M
[Tiempo]	T

Cuando se trata de las dimensiones de las magnitudes físicas derivadas pueden representarse en función de las magnitudes físicas fundamentales de la siguiente manera:

$[v] = L\,T^{-1}$	dimensiones de la velocidad
$[a] = L\,T^{-2}$	dimensiones de la aceleración
$[V] = L^{3}$	dimensiones del volumen
$[A] = L^{2}$	dimensiones del área
$[F] = M\,L\,T^{-2}$	dimensiones de la fuerza
$[p] = M\,L^{-1}\,T^{-2}$	dimensiones de la presión
$[W] = ML^{2}\,T^{-2}$	dimensiones del trabajo
$[P_{0}] = ML^{2}\,T^{-3}$	dimensiones de potencia
$[\rho] = ML^{-3}$	dimensiones de densidad
$[f] = T^{-1}$	dimensiones de frecuencia

Una de las propiedades del análisis dimensional es que las **«dimensiones pueden tratarse como cantidades algebraicas»**. Es decir se debe cumplir con las siguientes reglas:

1. Las dimensiones solo se pueden sumarse o restarse si tienen las mismas dimensiones.

2. Los términos a ambos lados de una ecuación deben tener las mismas dimensiones. Sea la ecuación.

$$A = B + C$$

Si a la ecuación se le toman las dimensiones se cumple que.

$$[A] = [B] = [C]$$

3. Si A y B son magnitudes físicas y **n una constante sin dimensiones o adimensional,** se cumple:

$$[A^n] = [A]^n$$
$$[A\,B]^n = [A^n\,B^n] = [A]^n\,[B]^n$$

4. La dimensión de números, ángulos, funciones trigonométricas, logaritmos y constantes adimensionales (sin dimensiones) es igual a la unidad:

$[3.45] = 1$

$[53°] = 1$

$[\text{Sen } 36°] = 1$

$[\text{Ln } 5.6] = 1$

$[\pi] = 1$

$[a] = 1$ Donde a es una constante adimensional

$[e^{-1}] = 1$ Donde e es la base de los logaritmos Neperianos

Ejemplo 9

Verificar si la ecuación correspondiente al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es dimensionalmente correcta.

$$x = \tfrac{1}{2}\, a\, t^2$$

Solución:

Tomando las dimensiones a ambos lados de la ecuación y aplicando las reglas establecidas se tiene:

$[x] = \frac{1}{2} [a] [t]^{2}$ $\qquad$ ½ es una constante sin dimensiones

$L = (L T^{-2}) T^{2} \longrightarrow L = L$

Resultado que muestra que la ecuación es dimensionalmente correcta.

Ejemplo 10

Hallar los valores de los exponentes n y m para que la expresión mostrada sea dimensionalmente correcta:

$$X \quad \alpha \quad a^{n} \; t^{m}$$

Donde α significa proporcionalidad o proporcional. La expresión dada se lee X es proporcional a a^{n}, y X es proporcional a t^{m}. También se puede leer X es directamente proporcional a a^{n} y X es directamente proporcional a t^{m}.

Solución: Para resolver el problema la expresión puede escribirse como una igualdad:

$$X = K \, a^{n} \, t^{m},$$

Donde K es una constante de proporcionalidad sin dimensiones. Aplicando el análisis dimensional tomando las dimensiones a ambos términos de la igualdad y aplicando las reglas se tiene:

$$[x] = [a]^{n} [t]^{m} \longrightarrow L = (L T^{-2})^{n} (T)^{m} \longrightarrow L = L^{n} T^{m} T^{-2n}$$

$$L = L^{n} T^{m-2n} \longrightarrow L T^{0} = L^{n} T^{m-2n}$$

La ecuación se multiplica por T° y no cambia por qué algebraicamente $T^0 = 1$. Igualando los exponentes se obtiene el siguiente resultado:

$$n = 1, \qquad m - 2n = 0$$

Los valores de los exponentes serán: $n = 1$ y $m = 2$, por tanto:

$$x \quad \alpha \quad a\,t^2$$

También puede escribirse que: $x = K\,a\,t^2$, donde K es una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 11

La presión sonora en una sala, puede ser obtenida a partir de una constante R que puede ser determinada por la ecuación:

$$R = V / (t / k - V / A)$$

Donde t es el tiempo, V el volumen de la sala y A el área total de la sala. ¿Cuáles son las unidades de la constante k en el SI?

Solución:

Aplicando la primera regla del análisis dimensional a los términos que se encuentran entre paréntesis se tiene:

$$[\,t / k\,] = [V / A]$$

$$[t] / [\,k\,] = [\,V\,] / [\,A\,]$$

$$T / [k] = L^3 / L^2$$

Despejando las dimensiones de la constante k tenemos:

$$[k] = T\,L^{-1}$$

Las unidades de la constante k en el Sistema Internacional son:

$$s\;m^{-1}$$

Este ejemplo muestra que k es una constante pero no es adimensional por que tiene unidades. Sería adimensional si la respuesta fuese la unidad.

Ejemplo 12

La ecuación que representa a determinado fenómeno físico es:

$$x = A\, e^{-at}\, \text{Sen}\,(b\,t + c)$$

Donde A, a, b y c son constantes, e la base de los logaritmos neperianos, x está en metros, t en segundos y c en radianes. ¿Cuáles son las unidades de A, a y b respectivamente en el SI?

Solución:

Aplicando las reglas del análisis dimensional se tiene:

$$[x] = [A\, e^{-at}\, \text{Sen}\,(b\,t + c)]$$
$$[x] = [A]\,[e]^{-at}\,[\text{Sen}\,(b\,t + c)]$$
$$[x] = [\,A\,]\,[\,e\,]^{-at}$$

De la última ecuación podemos ver que la dimensión del exponente es la unidad dado que la dimensión $[e] = 1$, por la propiedad 4 del análisis dimensional:

$$[-at] = [at] = 1$$
$$[at] = [a]\,[\,t\,] = 1$$
$$[a]\,T = 1$$

La dimensión de a es: $[\,a\,] = T^{-1}$

Aplicando la propiedad 4 del análisis dimensional, en la función Sen (b t + c) las dimensiones de $[\,bt\,] = [\,c\,] = 1$.

$$[\,b\,]\,[\,t\,] = 1$$

$$[\,b\,]\,T = 1$$

La dimensión de b es:

$$[\,b\,] = T^{-1}$$

Por último la dimensión de $[\,x\,] = [\,A\,]$

$L = [A]$ La dimensión de A será: $[A] = L$

Por tanto las unidades de A, a y b en el SI son: m, s^{-1}, s^{-1} respectivamente.

Ejemplo 13

Una partícula se mueve con rapidez uniforme v en un circulo de radio r. Si su aceleración es proporcional a una potencia de r, por ejemplo r^n. Si su aceleración es también proporcional a alguna potencia de v, por ejemplo v^m. Determinar los valores de las potencias m y n.

Solución:

Según el problema la aceleración es proporcional al radio y a la velocidad según la relacion:

$$a \propto r^n \qquad\qquad a \propto v^m$$

Por consiguiente:

$$a \propto v^m r^n$$

$a = K v^m r^n$ donde K es una constante sin dimensiones.

Tomando dimensiones a la ecuación:

$$[a] = [K][v^m][r^n]$$

$$L / T^2 = (L/T)^m (L)^n \Longrightarrow L T^{-2} = L^{m+n} T^{-m}$$

De donde: $m + n = 1$ y $-m = -2$ por consiguiente los valores de m y n serán:

$$m = 2 \quad y \quad n = -1$$

LaL La aceleración de la partícula se escribirá como:

$$a = K v^2 / r$$

TEOREMA DE BRIDGMAN

El teorema de P.W. Bridgman suele usarse para obtener formulas o ecuaciones empíricas a partir de resultados experimentales. Su texto es: «Si empíricamente, fuera constatado que una magnitud X depende de las magnitudes A, B, C..., independientes entre sí, entonces X puede ser expresado de la forma siguiente:

$$X = K\,A^{a}\,B^{b}\,C^{c}\ldots\ldots\ldots$$

Donde K es una constante adimensional que debe ser evaluada experimentalmente y a, b, c... exponentes cuyos valores son evaluados mediante el análisis dimensional».

Debemos señalar que las magnitudes físicas X, A, B, C,.. , suelen denominarse las variables experimentales.

Ejemplo 14

En un experimento se verifica que el periodo T_0 de oscilación de un sistema masa-resorte depende de la masa m del cuerpo y de la constante elástica k_e del resorte. ¿Cuál es la ecuación para el periodo de oscilación del resorte en función de m y de k_e?

Datos: Las dimensiones de $[k_e] = MT^{-2}$ y $[T_0] = T$

Solución:

Aplicando el Teorema de Bridgman:

$$T_0 = K\,m^{a}\,k_e^{b}$$

encontremos los valores de a y b

Dimensionando la ecuación:

$$[T_0] = [K][m]^a [k_e]^b$$

$$T = M^a M^b T^{-2b}$$

$$T M^0 = M^{a+b} T^{-2b}$$

$$a + b = 0 \quad , \quad -2b = 1$$

De donde obtenemos:

$$b = -½ \quad y \quad a = ½$$

$$T_0 = K (m / k_e)^{½} = K\sqrt{\frac{m}{k_e}}$$

Ejemplo 15

La velocidad mínima necesaria para que un cuerpo lanzado de uno de los polos de la tierra no regrese es v, esta velocidad se llama «velocidad de escape» y depende de la constante de Gravitación Universal G, de la masa m y del radio R de la tierra. ¿Cuál es la fórmula para v?

Dato: La dimensión de $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$

Solución:

Aplicando el teorema de Bridgman:

$$v = K G^a m^b R^c$$

$$[v] = [K][G]^a [m]^b [R]^c$$

$$L T^{-1} = M^{-a} L^{3a} T^{-2a} M^b L^c$$

$$L T^{-1} = M^{-a+b} L^{3a+c} T^{-2a}$$

Igualando los exponentes obtenemos:

$$-a + b = 0 \qquad 3a + c = 1 \qquad -2a = -1$$

Resolviendo:

$$a = \tfrac{1}{2}, \qquad b = \tfrac{1}{2} \quad y \quad c = -\tfrac{1}{2}$$

$$v = K\,(G\,m / R)^{1/2} = K\sqrt{\frac{Gm}{R}}$$

Problema 16

Llenar el cuadro que a continuación se le muestra:

Magnitud	Símbolo Dimensional	U. Sistema Internacional	U. Sistema C.G.S.	Equivalencia S.I.-S.CGS
MASA	M	kg	g	**1kg = 1000g**
LONGITUD	L			
TIEMPO	T			
VELOCIDAD $v = e / t$				
ACELERACIÓN $a = v / t$				
FUERZA $F = m \cdot a$				
TRABAJO $W = F \cdot e$				
IMPULSO MECÁNICO $Im = F \cdot t$				
POTENCIA $P = W / t$				
ENERGÍA POTENCIAL $E_{POT} = m \cdot g \cdot h$				
ENERGÍA CINÉTICA $E_{CIN} = (m \cdot v^2) / 2$				

1.5 CALCULOS CON POTENCIAS DE DIEZ

Cuando resolvemos problemas en física y en ingeniería generalmente tenemos que realizar operaciones con números, que expresan a las magnitudes físicas, que son muy grandes o muy pequeños. Dichas operaciones se llevan a cabo con calculadoras en las que pueden expresarse dichos números en una notación denominada científica, o de potencias de diez, y para lo cual se ha establecido una serie de reglas de representación y operación de las mismas.

Magnitudes físicas como el radio del átomo de hidrógeno, que es del orden de 0.000000005 cm se escribe en notación científica como $5x10^{-9}$ cm o el tiempo de un año en segundos $3.2x10^{7}$ s.

OPERACIONES CON POTENCIAS DE 10

Las operaciones con números escritos en notación científica o potencia de 10 obedecen las reglas del álgebra elemental como lo muestran los ejemplos dados a continuación.

Ejemplo 17

Realizar las siguientes operaciones:

a) 0.0000023 x 34000000

En este caso debemos representar cada uno de los términos en potencia de 10

$0.0000023 = 2.3x10^{-6}$

$34000000 = 3.4x10^{7}$

Operando: $2.3x10^{-6}$ x $3.4x10^{7} = 7.82x10^{1} = 78.2$

La respuesta debe ser: 78

b) **$(3.45x10^{-6})^2x(0.65x10^{-3})^3$**

Primero desarrollemos cada término:

$(3.45x10^{-6})^2 = 11.9025x10^{-12}$

$(0.65x10^{-3})^3 = 0.274625x10^{-9}$

Operando:

$(3.45x10^{-6})^2$ x $(0.65x10^{-3})^3 = 3.268724063x10^{-21}$

Resultado que puede aproximarse, por ejemplo, a dos cifras significativas:

$(3.45x10^{-6})^2$ x $(0.65x10^{-3})^3 = 3.3x10^{-21}$

c) $$\sqrt{\frac{3.5x10^{-3}\,x4.2x10^{-2}}{7.8x10^{6}}}$$

Desarrollando el término dentro del radical se tiene:

$1.884615385x10^{-11} = 18.84615385x10^{-12}$

Tomando la raíz cuadrada:

$\sqrt{18.84615385x10^{-12}} = 4.341215711x10^{-6}$

Resultado que se puede redondear a dos cifras significativas:

$4.3x10^{-6}$

En los ejemplos presentados aparecen operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación; pero cuando se trata de operaciones de suma o de resta, se debe tener el cuidado de que antes de realizar las operaciones debemos expresar cada término de la suma o de la resta en la misma potencia de 10.

Todas las operaciones han sido realizadas con una calculadora científica.

Ejemplo 18

Realizar las siguientes operaciones.

a) Restar: $\mathbf{6.5x10^3 – 3.2x10^3}$

En este caso cada término de la resta se encuentra a la misma potencia de 10 y por tanto no hay que realizar ninguna corrección previa.

$6.5x10^3 – 3.2x10^3 = (6.5 – 3.2) \times 10^3 = 3.3x10^3$

b) Sumar: $\mathbf{4.23x10^7 + 1.3x10^6}$

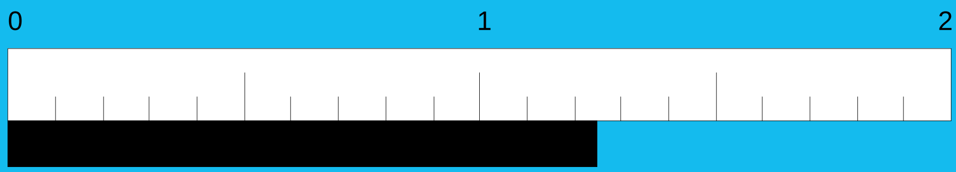
En este caso las potencias de 10 no son las mismas en cada término, por tanto cualquiera de los dos debe ser modificado:

$$42.3x10^6 + 1.3x10^6 = (42.3 + 1.3) \times 10^6$$

$$= 43.6x10^6 = 4.36x10^7$$

1.6 CIFRAS SIGNIFICATIVAS

La figura muestra una regla graduada en cm (amplificada) en el que la división más pequeña visible es 1 mm. Debajo de la regla graduada se coloca una barra (en color negro) cuya longitud se desea medir. Leyendo en la regla graduada, la dimensión de la barra está comprendida entre 1.2 cm y 1.3 cm, la fracción de mm que deberá aumentarse a 1.2 cm tendrá que ser aproximada **pues la regla no presenta divisiones menores que 1 mm**.



Para efectuar está aproximación deberá imaginarse que el intervalo entre 1.2 y 1.3 cm pudiera ser subdividido en diez partes iguales y por tanto la fracción de mm que debiera aumentarse a 1.2 cm se puede obtener con una estimación razonable. En la figura podemos considerar que esta estimación puede ser de 5 décimos de mm, y por consiguiente el resultado de la medición se puede expresar como:

1.25 cm

Otro observador podría decir que es 1.26 cm y otro podría decir 1.24 cm.

De la medición efectuada podemos estar seguros que las cifras 1 y 2 (de la medición) están señaladas por las divisiones mostradas en la regla graduada. Es decir, podemos asegurar que estas cifras son correctas. Por otro lado el número 5 o el 4 o el 6 agregado a la medida fueron dados aproximadamente, es decir no estamos completamente seguros de su valor. Por ésta razón a este número estimado se le conoce como cifra dudosa o incierta.

De lo observado en la medición efectuada en el ejemplo anterior podemos señalar que en el resultado están presentes o deben aparecer solo los números correctos y el primer número aproximado.

Estos números (las cifras correctas y la primera cifra dudosa o aproximada) se denominan **cifras significativas**. Por esta razón, al realizar una medición debemos registrar únicamente las cifras significativas. El resultado de la medición efectuada en nuestro ejemplo debe entonces expresarse como:

$$1.25 \text{ cm}$$

Es decir la medición tiene 3 cifras significativas.

Los datos que nos dan en un problema de física e ingeniería son el resultado de mediciones experimentales realizadas con instrumentos, y como tales las lecturas expresan las cifras significativas que dicho instrumento puede dar. Por ello cuando realizamos operaciones aritméticas con dichos datos debemos tener en cuenta las reglas que para dichas operaciones han sido establecidas.

OPERACIONES CON CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Cuando se realizan los cálculos en un problema, uno siempre se pregunta cuantas cifras o dígitos debe tener la respuesta. En el ejemplo se muestra el cálculo de una división, realizado por una calculadora cuya pantalla muestra hasta diez dígitos:

$$2.7/1.74 = 1.551724138$$

¿Cuántos dígitos o cifras significativas debemos considerar en la respuesta?

Al realizar las operaciones o cálculos matemáticos no es posible obtener en la respuesta final una mayor exactitud o mas cifras significativas que de las cantidades que intervienen en la operación. Para poder establecer el número de cifras significativas de una respuesta se deben seguir el siguiente procedimiento:

1. Conocer el número de cifras significativas de los datos que intervienen en la operación.
2. Cumplir con las reglas que a continuación se establecen.

Cuando las medidas realizadas tienen ceros; los ceros pueden ser o no considerados como cifras significativas:

1. Los que sirven para colocar el punto decimal, como por ejemplo en 0.03 y 0.0075 no son significativos; por tanto el primer número tiene una cifra significativa y el segundo dos cifras significativas respectivamente.

2. Cuando la posición de los ceros viene después de otros dígitos hay la posibilidad de una interpretación incorrecta, por ello es mejor en esos casos usar la notación científica o potencia de diez para indicar el número de cifras significativas. Por ejemplo: 1.5×10^{3} si hay dos cifras significativas en el valor medido, o 1.50×10^{3} si hay tres cifras significativas. Del mismo modo 0.00016 debe expresarse en notación científica como 1.6×10^{-4} si tuviera dos cifras significativas o como

1.60×10^{-4} si tuviera tres.

REGLA 1

En la multiplicación o división de dos o más medidas numéricas, la cantidad de cifras significativas en la respuesta final no puede ser mayor que las que figuran en la medición con el menor número de cifras significativas.

Esta regla aplicada al ejemplo inicial significa que el redondeo debe hacerse a dos cifras significativas, de modo que el resultado de la operación debe escribirse como:

$$2.7 / 1.74 = 1.6$$

REGLA 2

Cuando se suman o restan números, el número de decimales en el resultado debe ser igual al número más pequeño de decimales que contenga cualquier término de la suma o resta.

Ejemplo 19

Realizar las operaciones propuestas a continuación teniendo en cuenta que los resultados estén de acuerdo a las reglas establecidas para el uso de cifras significativas:

a) 3.67 x 2.3

El resultado obtenido mediante el uso de la calculadora manual:

$$3.67 \times 2.3 = 8.441$$

Dado que el factor que contiene el menor número de cifras significativas es 2.3 y este corresponde a 2 cifras, la respuesta correcta de acuerdo a la primera regla sería:

$$3.67 \times 2.3 = 8.4$$

b) 342.1 x 0.12

$$342.1 \times 0.12 = 41.052$$

La respuesta correcta es:

$$342.1 \times 0.12 = 41$$

c) 0.0012 x 0.004

$$1.2 \times 10^{-3} \times 4.0 \times 10^{-3} = 4.8 \times 10^{-6}$$

d) Cuantas cifras significativas hay en cada una de las medidas siguientes:

702 cm	Rpt. 3
36.00 Kg	Rpt. 4
0.00815 m	Rpt. 3
0.05080 litro	Rpt. 4

e) Aplicando la «regla del redondeo», escriba las mediciones siguientes con solo tres cifras significativas:

422.32 cm^2	Rpt. 422 cm^2
3.428 g	Rpt. 3.43 g
16.15 s	Rpt. 16.2 s

f) Realizar el siguiente cálculo:

$$\sqrt{\frac{3.56x0.143}{4.756}}$$

Rpt. 0.327

g) Realizar el siguiente cálculo:

$$3.74x10^3\sqrt{\frac{7.2x10^4\,x1.52x10^3}{0.25x10^2}}$$

Rpt. $79x10^5$ o $7.9x10^6$

h) Expresar en gramos una medida de 7.3 Kg.

El dato dado de 7.3 Kg tiene dos cifras significativas, por tanto en la conversión debemos mantener el mismo número de cifras significativas.

Si escribiésemos:

7.3 Kg = 7300 gr

Estamos dando una interpretación incorrecta dado que figurarían cuatro cifras significativas. Por consiguiente la respuesta apropiada que mantiene el número de cifras significativas es:

7.3 Kg = $7.3x10^3$ gr

i) **Sumar las siguientes cantidades.**

$2807.5 + 0.0648 + 83.645 + 525.35$

La suma realizada con una calculadora da:

$2807.5 + 0.0648 + 83.645 + 525.35 = 3416.5598$

Aplicando la regla 2 para la suma, la respuesta debe ser después de realizar las aproximaciones:

3416.6 con un decimal.

Ejemplo 20

El volumen de un cono recto está dado por la expresión:

$$V = \frac{Ah}{3}$$

Donde A es el área de su base y h su altura. ¿Cuál es el volumen del cono? si $A = 0.302\ m^2$ y $h = 1.020$ m.

Solución:

En este caso para determinar las cifras significativas en la respuesta solo se toman en cuenta la de los datos y no la del número 3, dado que este número no fue obtenido mediante una medición.

$$V = \frac{0.302x1.020}{3} = 0.308\ m^3$$

Material de lectura

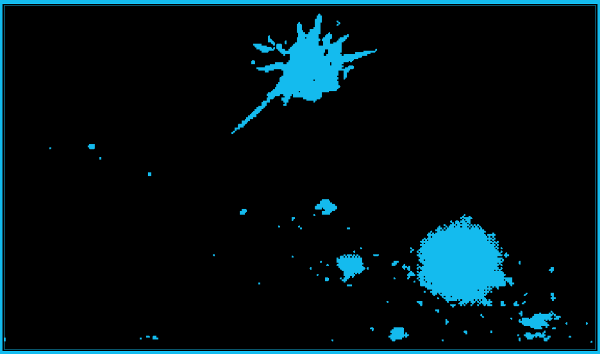
Concepto de masa

La masa es una de las magnitudes fundamentales de la física.

De hecho, muchos fenómenos de la naturaleza están, directa o indirectamente, asociados al concepto de masa.

Un primer acercamiento al concepto de masa se puede expresar al decir que «**masa** es la cantidad de **materia** que tiene un cuerpo».

Entender esa afirmación requiere, sin embargo, conocer el concepto de **materia**.



La masa de una estrella

Los científicos suelen definir materia como todo aquello que posee **inercia**, y aquí aparece el concepto de **inercia**.

Por el momento, solamente diremos que un cuerpo tiene **inercia** si para modificar su estado, entiéndase como cambiar su **movimiento**, requiere de que sobre él se aplique una **fuerza** neta. Una fuerza que tenga un valor distinto de cero.

La fuerza aplicada a una masa.

Materia, entonces, al ser todo aquello que posee inercia, sería todo aquello que requiera una fuerza para detenerse o iniciar su movimiento…, ahora aparece el concepto de **fuerza**.

Por lo visto, para hablar de materia, debemos referirnos, necesariamente, a otros conceptos, pues bien, sigamos con lo más básico entonces.

Una porción de materia, que también vendría a ser una porción de masa, se puede reducir a la más pequeña de sus partículas que la componen, y nos encontraríamos con los átomos. Los átomos son, por el momento, la unidad de la materia. Una materia o una masa cualquiera es –al final de cuentas– una cierta cantidad de átomos (muchos átomos con toda seguridad).

A modo de curiosidad: una persona de 70 kg de masa tendría, aproximadamente: $3{,}41 \times 10^{28}$ electrones, $3{,}41 \times 10^{28}$ protones y $7{,}76 \times 10^{27}$ neutrones.

Hombre promedio: 70 kilogramos de masa.

Ahora, la materia más común que nos rodea está formada por al menos dos tipos de materiales diferentes, que combinados dan origen a una **mezcla**. Por ejemplo, en la etiqueta de una camisa podemos leer que la tela tiene 70 por ciento y 30 por ciento poliéster. Ahí tenemos una mezcla.

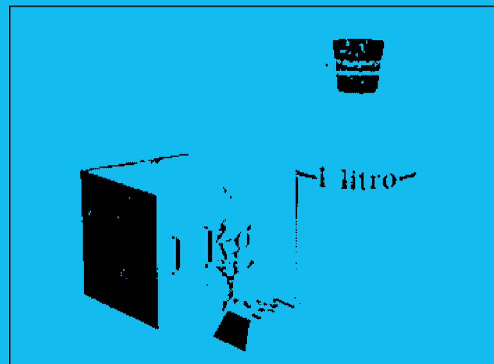
Las **mezclas** pueden ser **homogéneas** o **heterogéneas**. Si la materia de la mezcla no está distribuida uniformemente, la mezcla es heterogénea, y si está distribuida uniformemente entonces es una mezcla homogénea.

Una mezcla homogénea puede ser de dos tipos: homogénea propiamente tal, si está compuesta por al menos dos materiales en una distribución uniforme o, una sustancia si la materia que compone a la mezcla es la misma en todas sus partes, en este caso la materia es pura en la naturaleza y ésta puede ser: un compuesto, formado por dos o más tipos de átomos o un elemento, formada por un solo tipo de elemento (corresponde a una materia formada por algún elemento químico, de esos que están en la Tabla Periódica).

Como ven, entender el concepto de masa, no es tan simple, requiere más conocimientos para ser rigurosamente precisos.

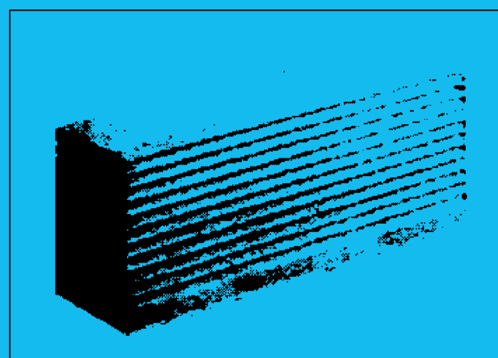
Pero, si pensamos que el concepto de masa se va a enseñar a niños pequeños, que les falta aún madurez para su formación intelectual, entonces debemos hacer algunos supuestos y pasar por alto algunas cosas.

A partir de ejemplos de masa podemos llegar. ¿Qué es masa?... casi todas las cosas que nos rodean son masas, algunas masas se pueden ver y otras no se pueden ver.



Una piedra o un ladrillo o una persona, las podemos ver y son masas, el aire no lo podemos ver pero está compuesto de masa, masa compuesta de partículas materiales muy pequeñas, que son imposibles de ver si no usamos un microscopio bien poderoso.

La masa se mide en kilogramos ¿y el peso?



Todas las cosas son masa.

La unidad de medida de masa es el **kilogramo**, también se usa el gramo, donde un gramo es la milésima parte de un kilogramo (1 gr = 0,001 kg).

En las transformaciones en el universo como traspasos, transporte, transferencia de materia la masa involucrada permanece constante.

La masa es una magnitud medible, la materia aparte de ser algo concreto también se puede expresar como una explicación cualitativa de un cuerpo cualquiera.

Podemos decir características de una materia, por ejemplo, podemos decir que en la naturaleza se encuentra en tres estados posibles, visibles o «sensorialmente» captables: sólido, líquido y gas.

Una materia puede ser dúctil, flexible, rígida, etc., puede ser salada, dulce, etc.

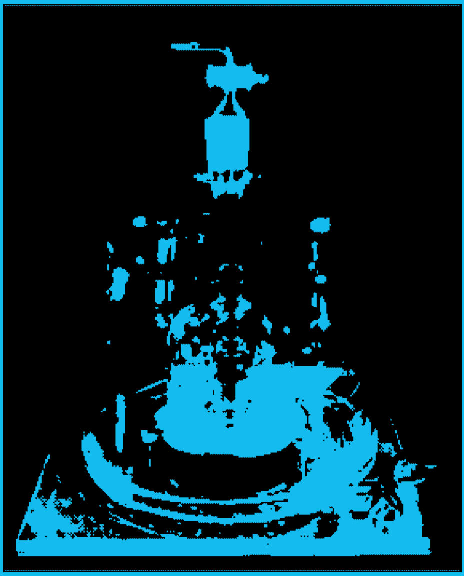
La masa es la medida, en kilogramos o gramos e incluso toneladas, de una cierta cantidad de materia. 1 kilogramo de pan, por ejemplo.

La masa se mide en kilogramos ¿y el peso?

Masa y peso

¿Son lo mismo la masa y el peso?

Todos los cuerpos están hechos de materia. Algunos tienen más materia que otros. Por ejemplo, pensemos en dos pelotas de igual tamaño (igual volumen): una de golf (hecha de un material duro como el caucho) y otra de tenis (hecha de goma, más blanda).



Kilogramo patrón.

Aunque se vean casi del mismo tamaño, una (la de golf) tiene más materia que la otra.

Como la **masa** es la **cantidad de materia de los cuerpos**, diremos que la pelota de golf tiene más **masa** que la de tenis.

Lo mismo ocurre con una pluma de acero y una pluma natural. Aunque sean iguales, la pluma de acero tiene más masa que la otra.

Ahora, un ejemplo con cuerpos que no sean del mismo tamaño (que tengan distinto volumen):

Un niño de 7 años comparado con su padre de 35 años.

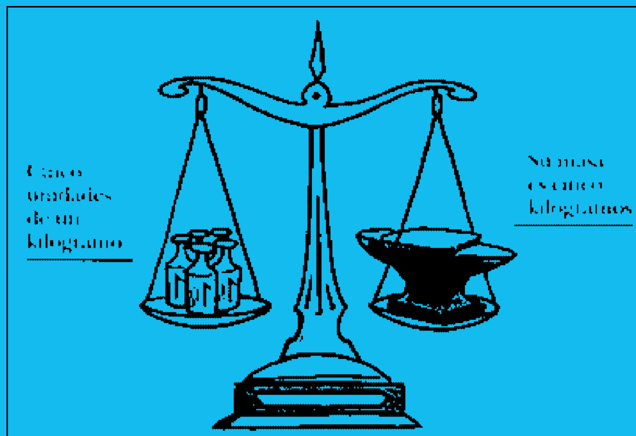
La diferencia es más clara. Es evidente que el pequeño tiene mucho menos masa que su padre.

Ahora bien: pon mucha atención a lo siguiente:

La UNIDAD DE MEDIDA de la MASA es el KILOGRAMO (kg)

La masa se mide usando una balanza

El kilogramo (**unidad de masa**) tiene su patrón en: la masa de un cilindro fabricado en 1880, compuesto de una aleación de platino-iridio (90 % platino - 10 % iridio), creado y guardado en unas condiciones exactas, y que se guarda en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sevres, cerca de París.



Una balaza mide solo cantidad de masa.

La masa es la única unidad que tiene este patrón, además de estar en Sevres, hay copias en otros países que cada cierto tiempo se reúnen para ser regladas y ver si han perdido masa con respecto a la original.

No olvidemos que **medir** es **comparar algo con un patrón** definido universalmente.

¿Y el peso?

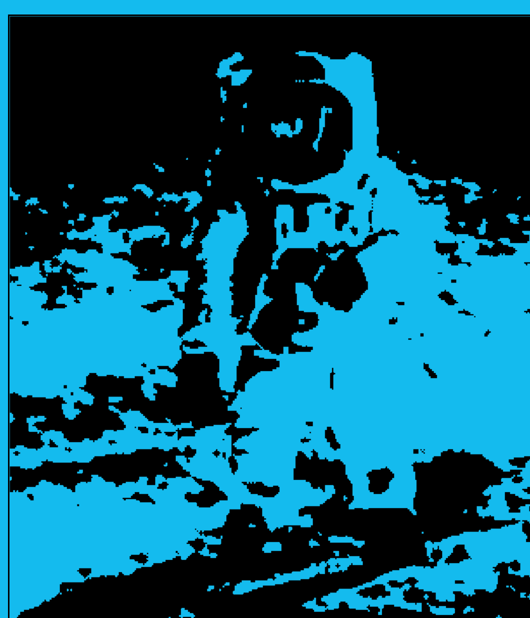
De nuevo, atención a lo siguiente: la **masa** (la cantidad de materia) de cada cuerpo **es atraída** por la **fuerza de gravedad** de la Tierra. Esa fuerza de atracción hace que el cuerpo (la **masa**) **tenga un peso**, que se cuantifica con una unidad diferente: el Newton (N).

La UNIDAD DE MEDIDA DEL PESO ES EL NEWTON (N)

Entonces, el **peso es la fuerza** que ejerce la gravedad sobre una masa y ambas magnitudes son proporcionales entre sí, pero no iguales, pues están vinculadas por el factor aceleración de la gravedad.

Para que entiendas que el concepto **peso** se refiere a la **fuerza de gravedad** ejercida sobre un cuerpo, piensa lo siguiente:

El mismo niño del ejemplo, cuya **masa** podemos calcular en unos 36 **kilogramos** (medidos en la Tierra, en una balanza), **pesa** (en la Tierra, pero cuantificados con un dinamómetro) 352,8 Newtons (N).



En la Luna, pesa seis veces menos.

Si lo ponemos en la Luna, **su masa seguirá siendo la misma** (la cantidad de materia que lo compone no varía, sigue siendo el mismo niño, el cual puesto en una balanza allí en la Luna seguirá teniendo una **masa** de 36 **kilogramos**), pero **como la fuerza de gravedad de la Luna** es 6 veces menor que la de la Tierra, allí el niño PESARÁ 58,68 Newtons (N)

Estas cantidades se obtienen aplicando la **fórmula para conocer el peso**, que es:

$$\boxed{P = m \cdot g}$$

Donde

P = peso, en Newtons (N)

m = masa, en kilogramos (kg)

g = constante gravitacional, que es 9,8 en la Tierra (kg.m/s).

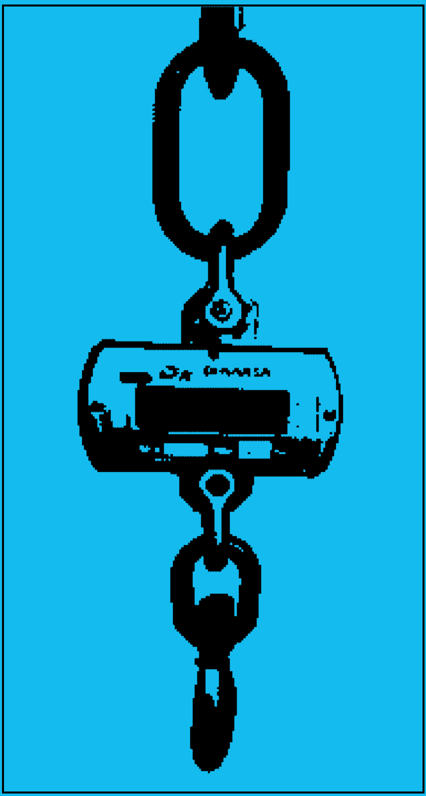
Estoy seguro de que todos se sorprenderán con que un niño de 7 años **pese** 352,8 Newtons, pero en **física** es así, ése es su **peso**.

Lo que ocurre es que la costumbre nos ha hecho trabajar desde chicos solo con el concepto de **peso**, el cual hemos asociado siempre al **kilogramo**, y nos han habituado a usarlo, sin saberlo nosotros, como sinónimo de **masa**. Por eso, cuando subimos a una balanza decimos que nos estamos **«pesando»**, cuando en realidad estamos midiendo nuestra **cantidad de masa**, que se expresa en **kilogramos**.

Lo que hacemos es usar nuestra medición de MASA como si fuera nuestro «PESO» y al bajar de la balanza decimos «PESÉ 70 KILOS» si la máquina marca esa cantidad, pero el PESO REAL SERÁ 686 Newtons (N) (70 por 9,8 es igual a 686).

Lo concreto es que, en el uso moderno del campo de la mecánica, el peso y la masa son cantidades fundamentalmente diferentes: la masa es una propiedad intrínseca de la materia mientras que el peso es la fuerza que resulta de la acción de la gravedad en la materia.

Sin embargo, el reconocimiento de la diferencia es, históricamente, un descubrimiento relativamente reciente. Es por eso que en muchas situaciones cotidianas la palabra **peso** continúa siendo usada cuando se piensa en **masa**. Por ejemplo, se dice que un objeto **pesa un kilogramo** cuando el **kilogramo** es una **unidad** de masa.



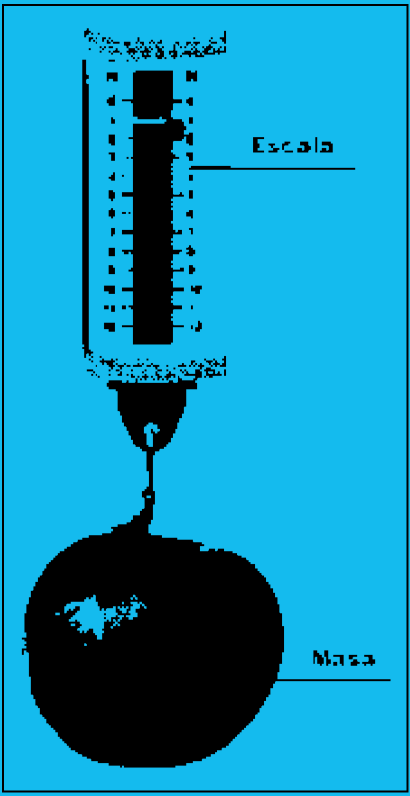
Un tipo de dinamómetro.

El dinamómetro

El dinamómetro, el aparato que sirve par cuantificar el peso, está formado por un resorte con un extremo libre y posee una escala graduada en unidades de peso. Para saber el peso de un objeto solo se debe colgar del extremo libre del resorte, el que se estirará; mientras más se estire, más pesado es el objeto.

El kg es, como hemos repetido, una unidad de masa, no de peso. Sin embargo, muchos aparatos utilizados para medir pesos (básculas, balanzas, por ejemplo), tienen sus escalas graduadas en kg, pero en realidad son **kg-fuerza**. El kg-fuerza es otra unidad de medida de peso (arbitraria, para uso corriente, que no pertenece al Sistema Métrico, que se conoce también como **kilopondio**), que es equivalente a 9,8 Newtons, y que se utiliza cotidianamente para indicar el peso de algo.

Esto no suele representar, normalmente, ningún problema ya que 1 kg-fuerza es el peso en la superficie de la Tierra de un objeto de 1 kg de masa, lo que equivale a 9,8 Newtons. Por lo tanto, una persona de 60 kg de masa pesa en la superficie de la Tierra 60 kg-fuerza (o 588 Newtons). Sin embargo, la misma persona en la Luna pesaría solo 10 kg-fuerza (o 98 Newtons), aunque su masa seguiría siendo de 60 kg. (El peso de un objeto en la Luna, representa la fuerza con que ésta lo atrae).



Así se pesa una masa.

ENTONCES:

MASA ES LA CANTIDAD DE MATERIA DE UN CUERPO QUE SE MIDE EN UNA BALANZA, Y SU UNIDAD DE MEDIDA ES EL KILOGRAMO (kg).

PESO ES LA CUANTIFICACIÓN DE LA FUERZA DE ATRACCIÓN GRAVITACIONAL EJERCIDA SOBRE UN CUERPO Y SE OBTIENE CON LA FÓRMULA **P = m . g**, o BIEN SE MIDE EN UN DINAMÓMETRO (aparato que consiste en un resorte y del cual debe «colgarse» el cuerpo que, en rigor, se está PESANDO), Y SU UNIDAD DE MEDIDA ES EL NEWTON (N).

En la Tierra, entonces, un kilogramo masa es equivalente a un kilogramos fuerza y este último es igual a 9,8 Newtons

Diferencia entre masa y peso

Características de masa	Características de peso
1. Es la cantidad de materia que tiene un cuerpo. 2. Es una magnitud escalar. 3. Se mide con la balanza. 4. Su valor es constante, es decir, independiente de la altitud y latitud. 5. Sus unidades de medida son el gramo (g) y el kilogramo (kg). 6. Sufre aceleraciones	1. Es la fuerza que ocasiona la caída de los cuerpos. 2. Es una magnitud vectorial. 3. Se mide con el dinamómetro. 4. Varía según su posición, es decir, depende de la altitud y latitud. 5. Sus unidades de medida en el Sistema Internacional son la dina y el Newton. 6. Produce aceleraciones.

Lo importante es que entiendas el concepto y la diferencia entre PESO Y MASA, aunque siempre sigas «pesándote» y creas que pesas, por ejemplo 50, 55 ó 60 kilos.

Ver: Concepto de masa
Es propiedad: www.profesorenlinea.cl

Concepto de fuerza

La fuerza es un concepto difícil de definir, pero muy conocido. Sin que nos digan lo que es la fuerza podemos intuir su significado a través de la experiencia diaria.

Una fuerza es **algo** que cuando actúa sobre un cuerpo, de cierta masa, le provoca un efecto.

Fuerza para levantar pesas

Por ejemplo, al levantar pesas, al golpear una pelota con la cabeza o con el pie, al empujar algún cuerpo sólido, al tirar una locomotora de los vagones, al realizar un esfuerzo muscular al empujar algo, etcétera siempre hay un efecto.

El efecto de la aplicación de una fuerza sobre un objeto puede ser:

- **modificación del estado de movimiento** en que se encuentra el objeto que la recibe
- **modificación de su aspecto físico**

  También pueden ocurrir los dos efectos en forma simultánea. Como sucede, por ejemplo, cuando alguien patea una lata de bebida: la lata puede adquirir movimiento y también puede deformarse.

  De todos los ejemplos citados podemos concluir que:

- La fuerza es un **tipo de acción** que un objeto ejerce sobre otro objeto. Esto puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

  — un objeto empuja a otro: un hombre levanta pesas sobre su cabeza

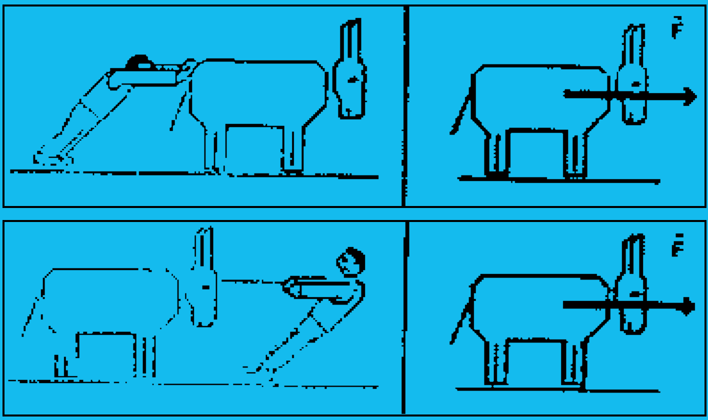
  — un objeto atrae a otro: el Sol atrae a la Tierra

  — un objeto repele a otro: un imán repele a otro imán

  — un objeto impulsa a otro: un jugador de fútbol impulsa la pelota con un cabezazo

  — un objeto frena a otro: un ancla impide que un barco se aleje.

- Debe haber **dos cuerpos:** de acuerdo a lo anterior, para poder hablar de la existencia de una fuerza, se debe suponer la presencia de dos cuerpos, ya que debe haber un cuerpo que atrae y otro que es atraído, uno que impulsa y otro que es impulsado, uno que empuja y otro que es empujado, etc.



Un hombre ejerce una fuerza sobre el burro, empujando o tirando de él.

Dicho de otra manera, si se observa que sobre un cuerpo actúa una fuerza, entonces se puede decir que, en algún lugar, hay otro u otros cuerpos que constituyen el origen de esa fuerza.

- Un cuerpo **no puede ejercer fuerza sobre sí mismo**. Si se necesita que actúe una fuerza sobre mi persona, tendré que buscar algún otro cuerpo que ejerza una fuerza, porque no existe ninguna forma de que un objeto ejerza fuerza sobre sí mismo (yo no puedo empujarme, una pelota no puede «patearse» así misma).

- La fuerza siempre **es ejercida en una determinada dirección**: puede ser hacia arriba o hacia abajo, hacia adelante, hacia la izquierda, formando un ángulo dado con la horizontal, etc.

Fuerza de contacto sobre la pelota.

Para representar la fuerza se emplean **vectores**. Los vectores son entes matemáticos que tienen la particularidad de ser direccionales; es decir, tienen asociada una dirección. Además, un vector posee **módulo,** que corresponde a su longitud, su cantidad numérica y su **dirección** (ángulo que forma con una línea de referencia).

Se representa un vector gráficamente a través de una flecha en la dirección correspondiente

Resumiendo:

En física, fuerza es toda causa capaz de modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo.

Clasificación de las fuerzas

Las fuerzas se pueden clasificar de acuerdo a algunos criterios: según su punto de aplicación y según el tiempo que dure dicha aplicación.

Según su punto de aplicación:

a) **Fuerzas de contacto:** son aquellas en que el cuerpo que ejerce la fuerza está en contacto directo con el cuerpo que la recibe.

Un golpe de cabeza a la pelota, sujetar algo, tirar algo, etc.

b) **Fuerzas a distancia:** el cuerpo que ejerce la fuerza y quien la recibe no entran en contacto físicamente.

El ejemplo más familiar de una fuerza de este tipo es la atracción gravitatoria terrestre, responsable de que todos los cuerpos caigan hacia el suelo. Otro ejemplo es la fuerza que un imán ejerce sobre otro imán o sobre un clavo.

Fuerzas gravitacionales a distancia entre el Sol, la Tierra y la Luna.

Según el tiempo que dura la aplicación de la fuerza:

a) **Fuerzas impulsivas:** son, generalmente, de muy corta duración, por ejemplo: un golpe de raqueta.

b) **Fuerzas de larga duración:** son las que actúan durante un tiempo comparable o mayor que los tiempos característicos del problema de que se trate.

Por ejemplo, el peso de una persona es una fuerza que la Tierra ejerce siempre sobre la persona. La fuerza que ejerce un cable que sostiene una lámpara, durará todo el tiempo que la lámpara esté colgando de ese cable. La fuerza que ejerce el cable sobre un teleférico durará mientras ahí esté.

Asimismo, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden ser **exteriores e interiores**.

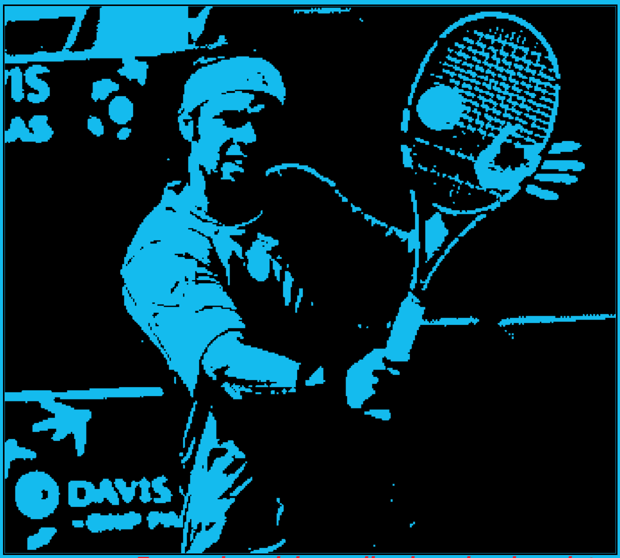
a) **Fuerzas exteriores:** son las que actúan sobre un cuerposiendo ejercidas por otros cuerpos.

b) **Fuerzas interiores:** son las que una parte de un cuerpo ejerce sobre otra parte de si mismo.

Unidades de fuerza

El primer paso para poder cuantificar una **magnitud física** es establecer una unidad para medirla.

En el Sistema Internacional (SI) de unidades la fuerza se mide en **newtons** (símbolo: **N),** en el CGS en **dinas** (símbolo, dyn) y en el sistema técnico en **kilopondio** (símbolo: **kp),** siendo un kilopondio lo que comúnmente se llama un kilogramo, un kilogramo fuerza o simplemente un kilo.



Fuerza impulsiva aplicada sobre la pelota.

Un newton es la fuerza que, al ser aplicada a un cuerpo de masa 1 Kilogramo, le comunica una aceleración de 1 metro por segundo al cuadrado.

Ver: Masa y peso

Cantidad vectorial

Una fuerza es una cantidad vectorial. ¿Qué significa esto?

Significa que tiene tres componentes:

— **un valor**, que viene dado por un número y una unidad de medida (25 Newton, por ejemplo).

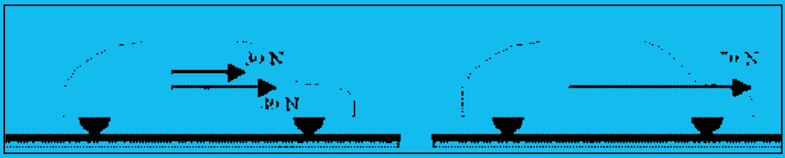
— **una dirección**, que vendría a ser la línea de acción de la fuerza (dirección vertical, por ejemplo).

— **un sentido**, que vendría a ser la orientación, el hacia dónde se dirige la fuerza (hacia arriba, por ejemplo).

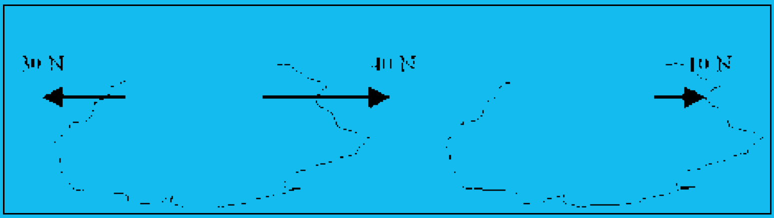
Estos tres componentes deben estar incluidos en la información de una fuerza.

Las fuerzas se pueden sumar y restar. No tiene sentido físico el multiplicarlas o dividirlas.

Si sumas dos fuerzas que van en la misma dirección y en el mismo sentido, entonces la suma es la suma aritmética de ellas. Si sus valores son 40 Newton y 30 Newton, el resultado sería 70 Newton en la dirección y sentido común que tienen.



Si sumas dos fuerzas que van en la misma dirección pero sentidos distintos (una a la derecha y la otra a la izquierda, por ejemplo) entonces la suma es la diferencia entre ellas (resta), con la misma dirección pero el sentido de la fuerza mayor. Si sus valores son 40 Newton a la derecha y 30 Newton a la izquierda, entonces la suma sería 10 Newton a la derecha.



Si sumas dos fuerzas que van en la misma dirección pero sentidos opuestos y resulta que las dos fuerzas tienen el mismo valor numérico, entonces la suma de ellas dará como resultado el valor 0. En este caso se puede decir que las fuerzas se anulan.

Pero ojo: las dos fuerzas deben estar actuando sobre el mismo cuerpo, de lo contrario no se pueden anular, incluso no podrían sumarse.

Si las fuerzas que se van a sumar no tienen la misma dirección, el problema se complica bastante y habría que recurrir a procedimientos geométricos e incluso de trigonometría.

Cuando graficamos una fuerza que actúa sobre un cuerpo, se dibuja con una **flecha** partiendo desde el centro del cuerpo que la recibe.

Fuente Internet:

http://www.profisica.cl/menus/menureforma.html

Es propiedad: www.profesorenlinea.cl

Pregunta 1

Defina los términos de masa y peso y encuentre cuáles son sus diferencias si existen.

Pregunta 2

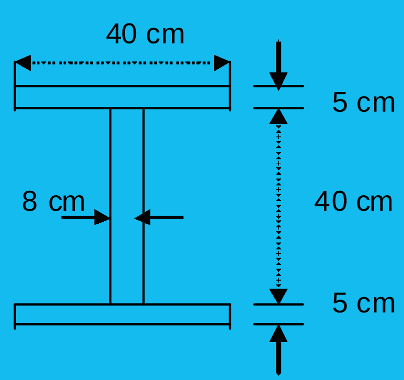
Asumiendo que Ud. ha nacido el 28 de Marzo de 1983, cuantas horas de vida tiene a la fecha.

Problema 3

Cuantos gramos de cobre son necesarios para construir un cascaron esférico hueco con un radio interior de 5.70 cm y un radio exterior de 5.75 cm. La densidad del cobre es 8.93 gr / cm^3.

Problema 4

Una viga estructural en forma de riel está hecha de acero. La figura muestra una vista de su sección transversal y sus dimensiones. Que peso tiene la viga si su longitud es 1.5 m. Datos: La densidad del acero es 7.56 x10^3 Kg / m^3 y la aceleración de la gravedad es 9.80 m /s^2



Problema 5

El periodo T de un péndulo simple (tiempo que demora en realizar una oscilación completa) está dado por la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Donde *l* es la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad. Demostrar que esta ecuación es dimensionalmente correcta.

Problema 6

La ley de Newton para la gravitación universal es:

$$F = G\,\frac{Mm}{r^2}$$

En la cual F es la fuerza de atracción gravitatoria, M y m las masas de los cuerpos y r la distancia entre ellas. Cuáles son las unidades de la constante G en el SI.

Problema 7

Un salón de clases mide 40.0 m x 20.0 m x 12.0 m. La densidad del aire es 1.29 Kg / m^3. Cuál es el volumen del cuarto en pies cúbicos y cuál es el peso en libras del aire en el cuarto.

Problema 8

Un terreno tiene un área de 1 milla cuadrada y contiene 640 acres. Determine el número de metros cuadrados que hay en 1 acre.

Problema 9

La altura de una pirámide es de 481 pies y su base cubre una área de 13.0 acres (1 acre = 43560 pies ^{2}). Si el volumen de la pirámide esta dado por la expresión: V = (1 / 3) B h, donde B es el área de la base y h la altura. Hallar el volumen de la pirámide en metros cúbicos.

Problema 10

Efectúe las siguientes operaciones aritméticas:

a) La suma de los números 756, 37.2, 0.83 y 2.5
b) El producto 3.2 x 3.563 x 0.43
c) El producto 5.6 π.
d) La operación 39.54 x 8.74 / 0.89.
e) Extraer la raíz cuadrada a 2.34 x1.023.

Problema 11

Cuál es el peso de un cubo hueco de cobre de 15 cm de arista y en cuyo interior hay una cavidad de 6.3 cm de radio. La densidad del cobre es 8.93 gr/cm^3 y la aceleración de la gravedad 9.8 m/s^2.

Problema 12

Una casa tiene 50 pies de largo, 26 pies de ancho y 100 pulgadas de altura. Encontrar:

a) El área de la superficie de la casa en m^2.

b) El volumen de la casa en pulgadas cúbicas.

c) El volumen de la casa en m^3.

Problema 13

En la expresión $x = \dfrac{kv^n}{a}$; donde x representa una distancia, v una velocidad, a una aceleración y k una constante adimensional. ¿Cuánto vale n para que la expresión sea dimensionalmente correcta?

Problema 14

La presión P de un gas varia con su densidad ñ y su velocidad v según la relación: $P = 3\,ñ^{á} v^{â}$. Determinar los valores de los exponentes á y â para que la expresión sea dimensionalmente correcta.

Problema 15

a) En la ecuación $A = Bv^2+Cd^2$, A esta dado en joule, v es la velocidad y d la distancia. Determine las dimensiones de los coeficientes B y C.
b) Las unidades en el SI de la relación B/C.

Problema 16

Determine las dimensiones del coeficiente B que aparece en la ecuación dimensionalmente homogénea: $ñ = At^2 + (Bt/R^2 + Ch)^2$. En la ecuación: ñ = densidad, R = radio, t = tiempo, h = altura.

Problema 17

La aceleración radial o aceleración centrípeta a_c de una partícula que se mueve sobre una trayectoria circular depende de la velocidad tangencial «v» y del radio de la trayectoria «R». Hallar la formula empírica para la aceleración radial.

Problema 18

La ecuación $x = k_1 + k_2 t + k_3 t^2$ es dimensionalmente homogénea. Si las variables son x = longitud y t = tiempo. Determinar las dimensiones de k_1, k_2 y k_3.

Problema 19

La fuerza de resistencia F a un disco que se mueve en el aire depende del área A de la superficie del disco, de su rapidez v y de la densidad del aire ρ ¿Cuál es la ecuación de F en función de A, v y ρ ?

Problema 20

El periodo de un péndulo físico es dado por la siguiente expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Donde T es el periodo, m la masa del péndulo, g el valor de la gravedad, d una distancia e ***I*** el momento de inercia del péndulo alrededor del punto de oscilación. Con la información dada cual es la dimensión del momento de inercia ***I*** y cuales sus unidades en el sistema internacional.

Problema 21

Si en la ecuación $P = \sqrt{\frac{a^2 + b + c^{2/3}}{d + e^2}}$, «b» se mide en metros y «e» en m/s², determine las unidades de $Q = \sqrt[3]{\frac{c}{P}}$ en el Sistema Internacional, si ambas ecuaciones son dimensionalmente homogéneas.

Problema 22

La siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea, donde: S representa la presión, v la velocidad, ρ la densidad, t el tiempo y A y C son coeficientes:

$$S = A v^2 - C\, t / \rho$$

Determinar las dimensiones de los coeficientes A y C y sus unidades en el sistema internacional.

Problema 23

Dada la ecuación dimensionalmente homogénea:

$$W = A\frac{v^2}{t} + B\frac{t^2}{a}$$

Donde W es el trabajo, v la velocidad, t el tiempo y a la aceleración. Encontrar:

a) Las dimensiones de los coeficientes A y B.
b) Las unidades de los coeficientes A y B en el Sistema Internacional.
c) Con la calculadora encuentre el valor de W y sus unidades si: v = 3.0 m/s, t = 10 s, a = 1.5 m/s^2 y los valores numéricos de los coeficientes A y B en el SI son respectivamente A = 3.25 y B = 0.75. Tome en cuenta las cifras significativas en la respuesta.

Problema 24

La velocidad v de un cuerpo en movimiento varia con el tiempo t según la ecuación dimensionalmente homogénea:

$$v = \alpha t + \hat{a}(t+\gamma)^{-1}.$$

a) Halle las dimensiones de α, â y γ.
b) La dimensión y las unidades en el Sistema Internacional de $\left[\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right]$.

Problema 25

Un lote de terreno rectangular mide 550 pies por 30 pies. Determine el área del lote de terreno en pie^2, m^2 y acres.

Problema 26

La vida media de un núcleo radiactivo es 1,5 x 10^{-8} s. ¿Cuál es la vida media en nanosegundos (ns), microsegundos (is), pico segundos (ps), milisegundos (ms) y en minutos (min.)?

Problema 27

Responder a las siguientes preguntas:

a) Un campo de fútbol tiene 300 pies de largo y 160 pies de ancho. ¿Cuál es el perímetro del campo en metros y el área en centímetro cuadrados?
b) Su respuesta debe ser dada tomando en cuenta las cifras significativas.

Problema 28

La fórmula para hallar el volumen de un cilindro recto de sección circular es:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h$$

Donde D es el diámetro y h la altura del cilindro. Hallar el volumen de un cilindro cuyo radio es 1.25 m y su altura 7 pies.

a) En pies cúbicos.
b) En metros cúbicos.
c) En galones.

Problema 29

Se tiene un cono cuya base circular tiene un diámetro de 15 pies 8 pulgadas y una altura de 256 cm. Calcular el volumen del cono en metros cúbicos. De su respuesta redondeando a dos decimales.

Problema 30

Se tiene un cilindro de acero cuya densidad es $\rho = 7{,}86 \times 10^3$ Kg/m^3. Si el radio del cilindro es 13,55 cm. y su altura es 16,40 cm, encontrar:

a) El volumen del cilindro expresado en litros.
b) El peso del cilindro expresado en libras.

Problema 31

Un terreno rectangular tiene las siguientes dimensiones 115,1m de largo y 39,24m de ancho. Considerando las cifras significativas, calcular:

a) El perímetro del terreno.
b) El área del terreno en cm^2.
c) El área del terreno en pie^2

Problema 32

Una piscina infantil tiene la forma de un paralelepípedo rectangular con las siguientes dimensiones: largo = 2,40m, ancho = 1,20m y profundidad = 75cm. Encontrar:

a) El volumen de la piscina en m^3.
b) El volumen de la piscina en pie^3.
c) Cuantos galones de agua entran en la piscina.

Problema 33

El consumo de gasolina de un coche pequeño se anuncia como 12.0 km/litro, expresar este consumo en millas/gal.

Problema 34

Un vehículo recorre la distancia de 557 millas en 5 horas y 45 minutos. Si el vehículo se desplaza con rapidez constante. ¿Cuál es su rapidez?
Dato: (1 milla = 1 610 m 1 pie= 0,3048 m)

a) En millas por hora.
b) En Km. por hora.
c) En pies por segundo.
d) En metros por segundo.

Problema 35

El área de la superficie de una esfera de radio R es dado por la ecuación:

$$A = 4\pi R^2$$

Cuál es el área de una esfera de 5 pulgadas de diámetro:

a) En pulgadas cuadradas.
b) En centímetros cuadrados.

Problema 36

Una esfera sólida de 9,0 kg tiene un radio de 12 cm. Considerando las cifras significativas, determinar:

a) El área de su superficie en cm^2 y en m^2.
b) Su densidad en kg/m^3.

Datos: Área de la esfera: 4ðR², Volumen de la esfera: 4ðR³/3. R: radio de la esfera ñ(densidad) = M(masa) / V(volumen)

Capítulo II

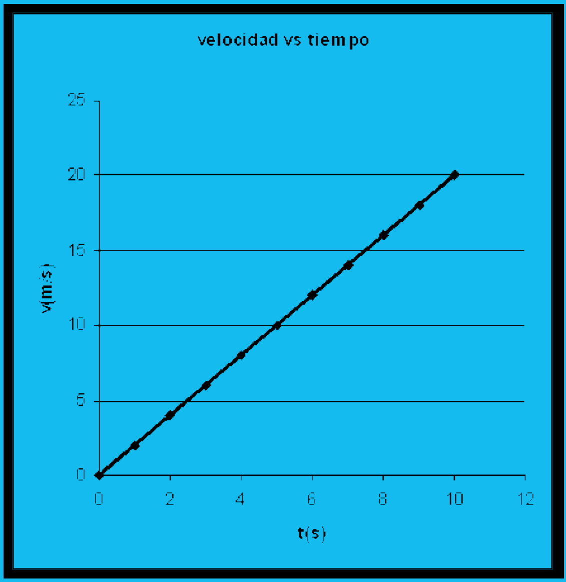
FUNCIONES Y GRÁFICAS

INTRODUCCIÓN

En ingeniería y en física frecuentemente se tienen que realizar interpretaciones de gráficos en las que se han representado dos magnitudes físicas. A partir de dichos gráficos se puede llegar a describir la relación entre dichas magnitudes o la función que las relaciona.

Cuando se llevan a cabo experimentos en el laboratorio, se realizan mediciones de magnitudes físicas (Datos) con diversos tipos de instrumentos. Posteriormente las medidas registradas (**TAMBIÉN DENOMINADAS VARIABLES**) son representadas gráficamente en un Sistema de Coordenadas Cartesianas (SCC) o en otro Sistema de Coordenadas, escogido previamente, y se busca la relación que existe entre ellas o la función que las relaciona.

La figura muestra la representación grafica en el SCC en el plano XY de la rapidez v (magnitud o modulo de la velocidad), de una partícula que realiza movimiento rectilíneo en el eje X en función del tiempo t.



En un análisis rápido de dicho grafico podemos observar lo siguiente:

1. Que la rapidez v(m/s) cambia con el tiempo. No permanece constante.
2. Que en el instante de tiempo t = 0 s la rapidez es cero. Parte del reposo.
3. La línea recta mostrada en el grafico pasa por el origen. Este resultado nos indica que la relación entre las variables v y t es lineal.
4. Más tarde aprenderemos a encontrar que la función que relaciona la rapidez (v) con el tiempo (t) tiene la forma:
   $v = 2\,t$ donde v esta dado en m/s y t en segundos.
   Donde 2 es una constante de proporcionalidad.
5. Que a partir de la función o ecuación hallada, podemos conocer la rapidez en cualquier instante de tiempo.
6. Más tarde identificaremos en el grafico que la aceleración de la partícula es 2 m/s^2.

En este capítulo aprenderemos a realizar gráficos de dos magnitudes físicas en un Sistema de Coordenadas Cartesianas. A partir del grafico reconoceremos la función que relaciona a dichas magnitudes o variables.

Dependiendo del tipo de relación entre las magnitudes registradas o entre las variables como también se les denominan, existen varios tipos de funciones. Esta relación funcional normalmente se escribe:

$$y = f(x)$$

Donde x e y son las variables que representan a las magnitudes físicas. La ecuación se lee de la siguiente manera: la variable y es función de la variable x. Normalmente a la variable y se denomina dependiente y a la variable x independiente en la función mostrada.

Como se ha señalado para analizar y hallar la dependencia entre dos magnitudes registradas en un experimento, hay necesidad de realizar un grafico y al método se denomina **método gráfico**. A partir del grafico obtenido se realiza el análisis entre las magnitudes graficadas para conocer su dependencia o relación funcional.

En otros casos la **relación funcional** (o función) entre las magnitudes registradas se conoce. En este caso se les representa gráficamente para conocer la forma o figura de dicha función.

Para familiarizarnos con estos métodos, representaremos gráficamente funciones conocidas, lo que nos permitirá reconocer la forma o representación gráfica de dichas funciones y conoceremos otras que le sean semejantes.

2.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

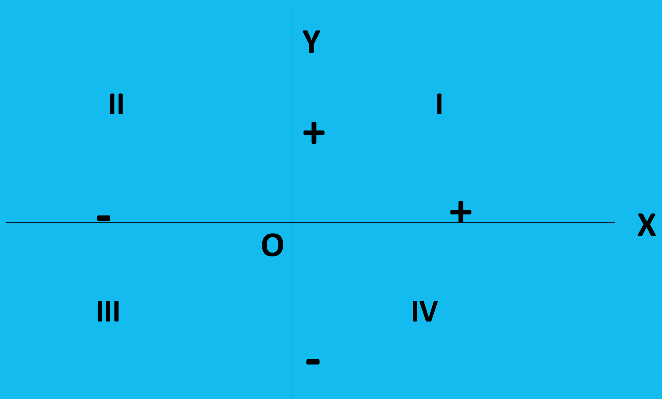
SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANO

Lo primero que debemos conocer es donde se va a llevar a cabo la representación grafica. Se debe definir primero un sistema de coordenadas, por ello analizaremos el Sistema de Coordenadas Cartesiano.

El sistema más usado es el de las **Coordenadas Cartesianas**, basado en un juego de 2 o 3 ejes perpendiculares entre sí. Si los ejes son dos se denomina Sistema de Coordenadas en el plano y si son 3 se denomina Sistema de Coordenadas en el espacio.

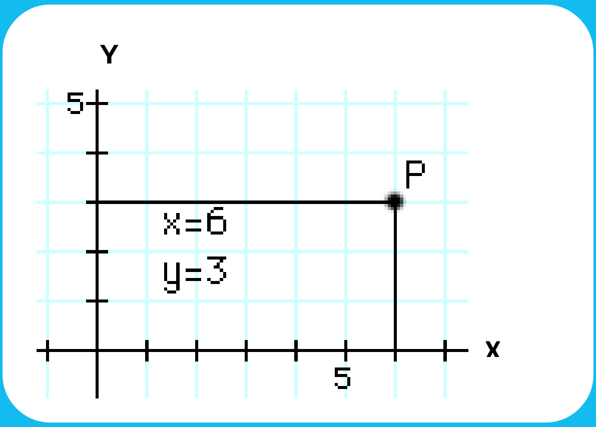
Un punto en el plano queda definido por las distancias perpendiculares a los ejes y en el espacio por la distancia perpendicular a los planos. Dicha representación fue conocida con el nombre de **René Descartes**, científico y filósofo francés que hacia el año 1600 ideó una forma sistemática de designar cada punto en el plano por medio de dos números.

En geometría plana dos líneas rectas, llamadas eje X y eje Y forman la base de un Sistema de Coordenadas Cartesianas en dos dimensiones o en el plano. Por lo general, el eje X es horizontal y el eje Y perpendicular al primero. Al punto de intersección de los dos ejes se le llama origen (O).



El origen 0 divide al eje X en dos secciones: A la derecha del eje se toman los valores + y a la izquierda los valores - ; igualmente el origen 0 divide también al eje Y en + y - . Además los ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes y cuya designación se toma en el sentido contario al movimiento de las agujas del reloj.

Definido los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el plano se pueden identificar cualquier punto en este plano por un par ordenado de números que representan las distancias a los dos ejes. Por ejemplo, el punto P (6, 3) que se lee el punto P de coordenadas 6 y 3 se representa en el plano como se muestra en la figura.

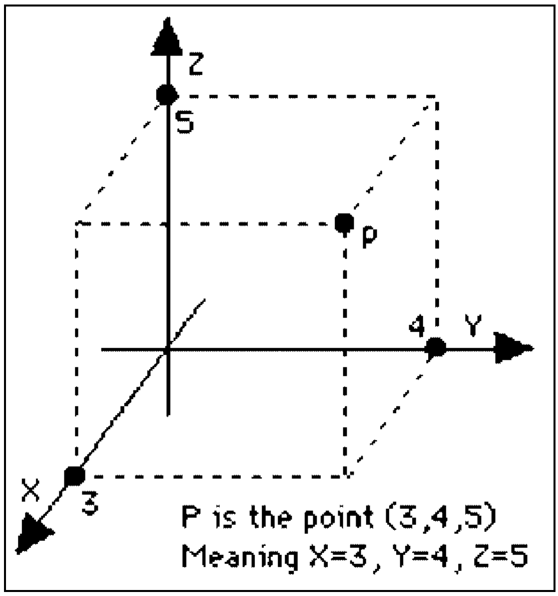


El punto P está a la distancia de 6 unidades del eje Y, en la dirección positiva del eje X y a 3 unidades del eje X en la dirección positiva del eje Y.

Funciona bien en una hoja de papel cuadriculado, pero el mundo real es tridimensional y a veces es necesario designar los puntos en dicho espacio tridimensional. El sistema cartesiano en el plano XY puede extenderse hacia las tres dimensiones añadiendo un tercer eje o una tercera coordenada Z, la que es perpendicular a las otras dos.

Si (x, y) son las coordenadas de un punto en el plano, entonces el punto de coordenadas (x, y, z) en el espacio se consigue situándose en el punto (x, y) y elevándose una distancia z sobre el plano XY (los puntos por debajo del plano XY tienen valores de z negativo).

En el sistema de coordenadas Cartesianas, los tres ejes se encuentran a ángulos rectos entre sí. Por ello, un punto se determina por tres números (x, y, z).



REPRESENTACIÓN GRAFICA EN EL PLANO A PARTIR DE UNA FUNCIÓN CONOCIDA

Comenzaremos representando gráficamente funciones conocidas en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano. Las funciones que vamos a representar relacionan a dos variables y se les escribe en forma general como $y = f(x)$. Donde x e y son las variables y se denominan: variable independiente x, variable dependiente y. Seguiremos el siguiente procedimiento.

FUNCIÓN y=f(x) → TABLA DE DATOS → GRÁFICO

Ejemplo 1

Tomemos la función $y = 3x$ la cual vamos a representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas (SCC) en el plano dado que existen solo dos variables, x e y.

Primer paso

Construimos una tabla de datos en la que se encuentre representado los valores de x e y hallados a partir de la función:

$$y = 3x.$$

Primero demos valores a la variable independiente x luego encontremos los valores de y reemplazando en la función. Como resultado tenemos la tabla mostrada a continuación.

x	***y***
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

Podemos observar que los valores de x (variable independiente) han sido previamente asignados (0, 1, 2, 3, 4, 5). Los valores de y (variable dependiente) fueron hallados cuando el valor de x es reemplazado en la función y = 3x. Así para el valor de x =0, y =0, para x =2, y =6 etc.

Segundo paso

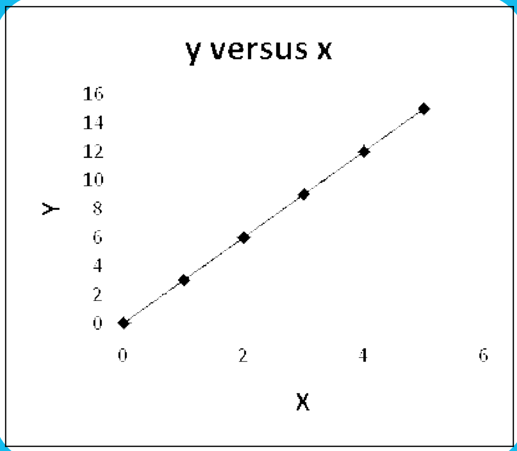
Dibujemos un sistema de coordenadas cartesianas. El eje X corresponde al eje horizontal (donde se ubicaran los valores correspondientes a la variable independiente x) y dibujamos sobre dicho eje una escala que va desde 0 hasta 6.

Luego se dibuja el eje vertical Y (donde se ubicaran los valores correspondientes a la variable dependiente y) perpendicular al eje X. En el eje Y dibujamos una escala desde 0 hasta 16.

A continuación colocamos en el plano XY los puntos correspondientes a los pares (0, 0), (1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15). Luego unimos los puntos y obtendremos el grafico de la función:

$$y = 3x$$

El grafico corresponde a una línea recta que pasa por los puntos graficados y por el origen del sistema de coordenadas XY.



Para obtener un buen grafico hay que seguir las siguientes reglas:

1. Deben elegirse apropiadamente las escalas de cada eje. **Es una regla general escoger el tamaño de los ejes aproximadamente del mismo tamaño.** En nuestro caso el eje X y el eje Y son aproximadamente de la misma longitud pero sus escalas son diferentes.

2. El eje horizontal siempre corresponde a la variable independiente (en nuestro caso a x) y el eje vertical a la variable dependiente.

Como resultado de la representación grafica de la función $y = 3x$ se obtiene **una línea recta que pasa por el origen**. Este resultado, la representación de una línea recta que pasa por el origen puede ser extendido a cualquier otra función que tenga la misma forma o expresión matemática, por ejemplo:

$x = 4t$ $\qquad$ $m = 8.7\ V$ $\qquad$ $y = a\ x$

En el ejemplo se muestran tres funciones: $x = f(t)$, $m = f(V)$, $y = f(x)$. En este caso las variables independientes son t, V, x; las variables dependientes x, m, y. En las mismas funciones que 4, 8.7 y a son coeficientes constantes.

Cada una de las funciones indicadas cuando se representan en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano dará lugar a una línea recta que pasa por el origen.

Debe tenerse en cuenta que cada una de las variables así como las constantes tienen sus propias unidades, las que deberán ser indicadas en los ejes respectivos cuando las funciones se representan gráficamente.

1 ***Tarea para el alumno***

Represente gráficamente las funciones $x = 4\ t$ y $m = 8.7\ V$. Considere en el primer caso a x como el eje vertical y t al horizontal; en el segundo caso m el eje vertical y V el eje horizontal.

Ejemplo 2

En el movimiento rectilineo uniformemente acelerado la función que representa la posición de la partícula a lo largo del eje X, cuando esta parte del reposo, está dado por la función o ecuación:

$$x = ½\ a\ t^2$$

En la ecuación x es la posición en metros, t el tiempo en segundos y a la aceleración. Consideremos la función:

$$x = 4\ t^2$$

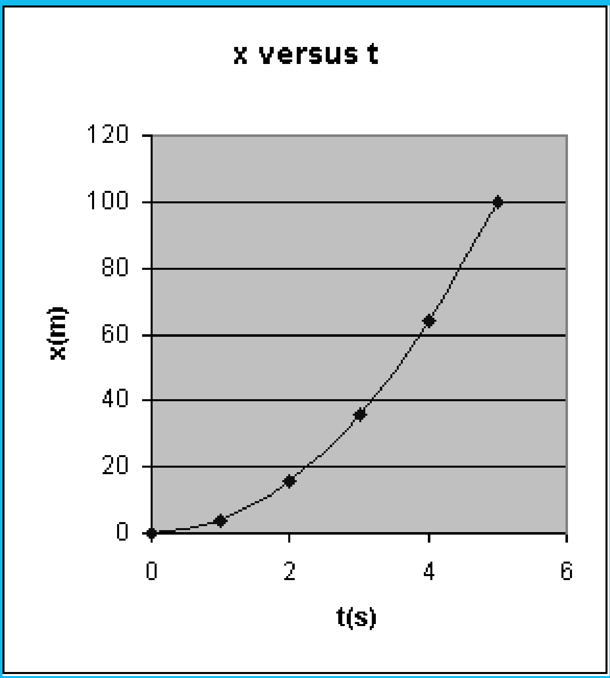
Que representa el movimiento rectilineo uniformemente acelerado donde se ha reemplazado a la aceleración $a = 8\ m/s^2$.

Construyamos una tabla de datos a partir de la función dando valores a la variable independiente t y encontremos los valores de x correspondientes.

Çmmmm	t(s)	$t^2(s^2)$
0	0	0
4	1	1
16	2	4
36	3	9
64	4	16
100	5	25

En el extremo derecho de la tabla se ha agregado una columna que contiene a t^2.

Con los datos de la tabla primero graficamos x versus t. **Esto significa que los valores de x van en el eje vertical y los de t en el eje horizontal.**



Se observa que dicha representación no es una línea recta sino más bien una curva que pasa por el origen de coordenadas y a la que por su forma en matemáticas se le denomina la **parábola**.

Toda parábola que pasa por el origen está representada por una función cuya forma general es:

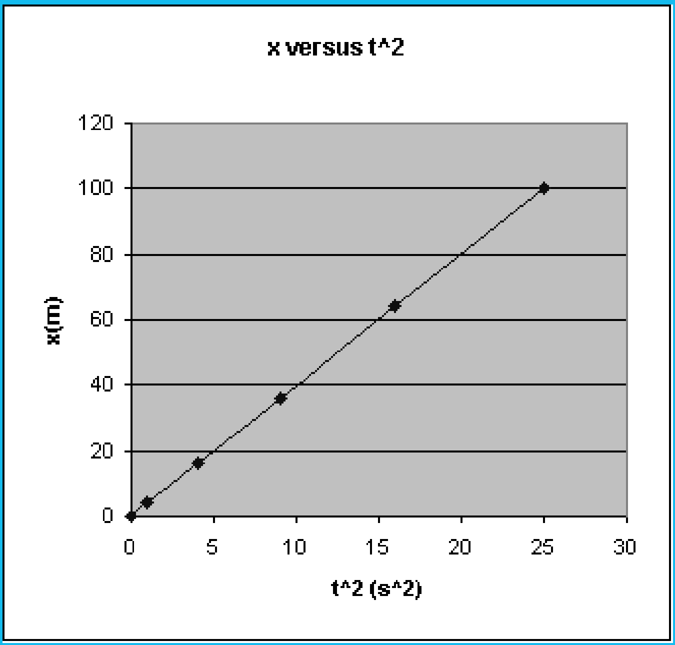
$$y = a\ x^2$$

Donde a es una constante.

Por ejemplo todas las funciones que a continuación mostramos, cuando se grafican en un SCC en el plano se obtienen curvas que pasan por el origen y a las que se les llama parábola:

$y = 3\ x^2$ $x = -4\ t^2$ $v = 6.23\ x^2$ $F = 3.5\ t^2$

Continuando con el problema y tomando los datos de la tabla se grafica x versus t^2.



La grafica muestra la representación de x versus t^2 donde se obtiene **una línea recta que pasa por el origen**. Cuando las representaciones graficas dan lugar a líneas rectas que pasan por el origen, se suele decir que las variables son directamente proporcionales. En nuestro caso el grafico muestra que **x es directamente proporcional a t^2** o que x y t^2 están en **proporción directa.**

En el capítulo I mostramos que cuando x es directamente proporcional a t^2 se indica como: x á t^2, la que se escribe como: $x = k\,t^2$, donde k es una constante de proporcionalidad y cuyo valor en nuestro problema es 4

En el ejemplo 1, anteriormente resuelto, al graficar la función $y = 3x$ también se obtiene una línea recta que pasa por el origen. Por consiguiente y con x son directamente proporcionales y 3 es una constante de proporcionalidad

Ejemplo 3

A continuación se dan una serie de funciones para que UD. reconozca en cuál de ellas existe una relación directa entre sus variables:

a) $x = 24\ s$	Entre las variables x y s existe una relación directa.
b) $x = 4 + 12\ s$	No.
c) $u = 4\ t^2$	Si entre u y t^2. No entre u y t.
d) $w = -3\ v^{1/2}$	Si entre w y $v^{1/2}$. No entre w y v.
e) $s = -3 + 2\ t^2$ ´	No.

Ejemplo 4

Representar en una hoja de papel milimetrado o en una hoja cuadriculada las gráficas correspondientes a las funciones:

a) $y = 2x + 3$
b) $y = 2\ x^2 – 4$
c) $y = 4 / x$
d) $y = -2x + 3$
e) $y = 2\ t^2$

Como primer paso construya una tabla con valores asignados a las variables para cada una de las funciones, y luego haga la representación grafica. Cuales representaciones graficas corresponden a una línea recta que pasa o no por el origen.

En esta sección hemos aprendido a representar en un SCC en el plano solo funciones que nos han sido dadas. Para realizar la grafica correspondiente se procedió primero a construir una tabla de datos a partir de la función.

Hoy en día existen programas que permiten graficar las funciones conocidas muy rápidamente sin tener que escribir

la tabla de valores previa que hemos realizado. Un programa muy común que es encontrado en la web es él:

fooPlot: On line graphing calculator and function plotter

Cuya página web se puede abrir con:

http://fooplot.com/index.php?&type0=0&type1=0&type2=0&type3=0&type4=0&y0=&y1=&y2=3*x%5E2%2B2*x-1&y3=&y4=&r0=&r1=&r2=&r3=&r4=&px0=&px1=&px2=&px3=&px4=&py0=&py1=&py2=&py3=&py4=&smin0=0&smin1=0&smin2=0&smin3=0&smin4=0&smax0=2pi&smax1=2pi&smax2=2pi&smax3=2pi&smax4=2pi&thetamin0=0&thetamin1=0&thetamin2=0&thetamin3=0&thetamin4=0&thetamax0=2pi&thetamax1=2pi&thetamax2=2pi&thetamax3=2pi&thetamax4=2pi&ipw=0&ixmin=-5&ixmax=5&iymin=-3&iymax=3&igx=1&igy=1&igl=1&igs=0&iax=1&ila=1&xmin=-5&xmax=5&ymin=-3&ymax=3

REPRESENTACIÓN GRAFICA EN EL PLANO A PARTIR DE UNA TABLA DE DATOS

La segunda manera de hacer representaciones graficas de dos variables, es cuando conocemos sus valores (Tabla de Datos) **pero no conocemos la función** que las relaciona. En este caso los Datos de la Tabla se representan en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano y de acuerdo al gráfico obtenido podemos hallar la función que relaciona a las variables.

TABLA DE DATOS → GRÁFICO → FUNCIÓN y=f(x)

Ejemplo 5

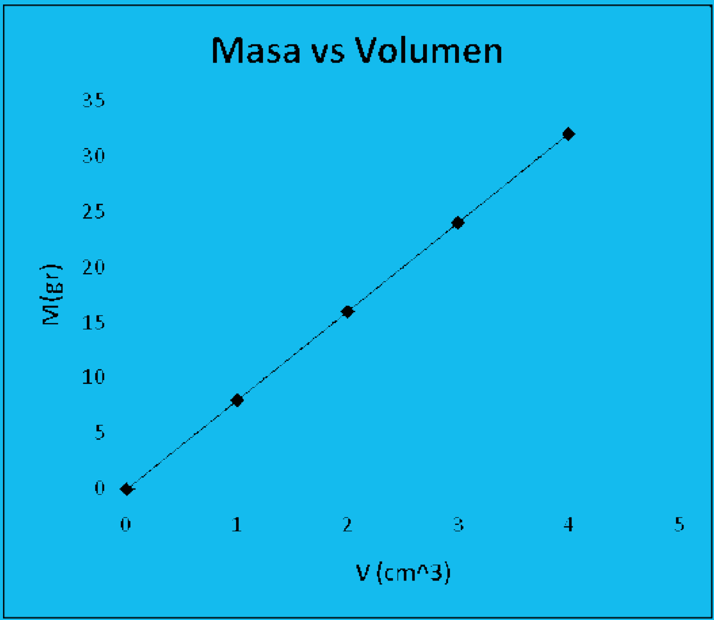
Supongamos que llevamos a cabo el siguiente experimento: medimos la masa de bloques de hierro de diferentes volúmenes y recogemos dicha información en una tabla como la que se muestra a continuación:

$V(cm^3)$	M(gr)
0	0
1	8
2	16
3	24
4	32

Con los datos realizamos un gráfico de masa versus volumen (M vs V)

Dibujamos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano. Representamos en el eje vertical a la variable dependiente M en gramos y en el eje horizontal a la variable independiente V en centímetros cúbicos.

Trasladamos a dicho sistema de coordenadas los valores que están en la tabla de datos y unimos los puntos. El resultado se muestra en el grafico a continuación.



Al unir los puntos se obtiene una línea recta que pasa por el origen. Como se ha mencionado esto solo sucede cuando dos magnitudes o dos variables están en una **proporción directa o relación directa.**

En nuestro caso el grafico muestra que las variables M (masa) y V (volumen) dan lugar a una línea recta que pasa por el origen por tanto entre ellas existe **una relación directa**. Con esta información se puede escribir la función que relaciona a las variables M y V:

$$M = a\ V \qquad (1)$$

Donde M y V son las variables y a una constante de proporcionalidad que deberá ser hallada.

La constante de proporcionalidad a, puede conocerse si reemplazamos los valores o coordenadas de un punto de la línea recta en la probable función (1), por ejemplo (1, 8) es decir V = 1 cm^3 y M = 8 gr se obtiene a = 8 gr/cm^3. Si tomamos otro punto (4, 32) también da a = 8 gr/cm^3. Por consiguiente el valor de la constante de proporcionalidad es 8 y sus unidades gr/cm^3 y la función tiene la forma definitiva:

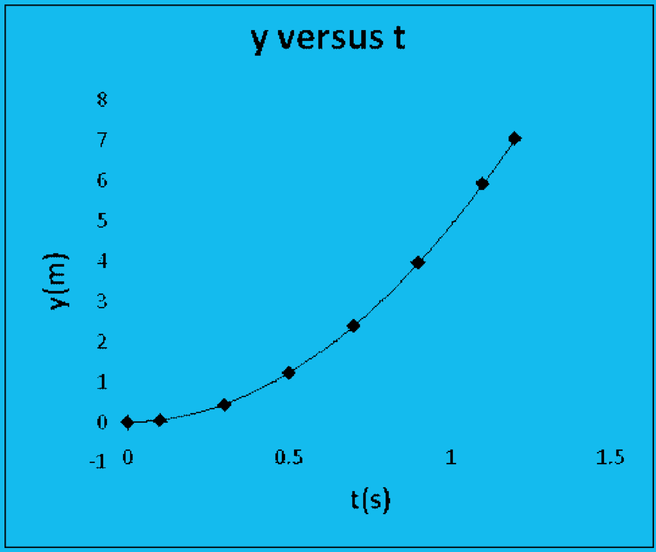
$$M = 8\ V \qquad \text{donde M esta en gr y V en cm}^3$$

Ejemplo 6

En el laboratorio se lleva a cabo el siguiente experimento. Se suelta un objeto desde el reposo y se mide la distancia vertical recorrida y el tiempo empleado en recorrerla, obteniéndose los siguientes datos.

y(m)	t(s)
0	0
0.049	0.1
0.441	0.3
1.225	0.5
2.401	0.7
3.969	0.9
5.929	1.1
7.056	1.2

A partir de la tabla de datos graficamos y versus t en un SCC en el plano. El eje vertical corresponde a y (m) y el eje horizontal a t (s), obteniéndose:



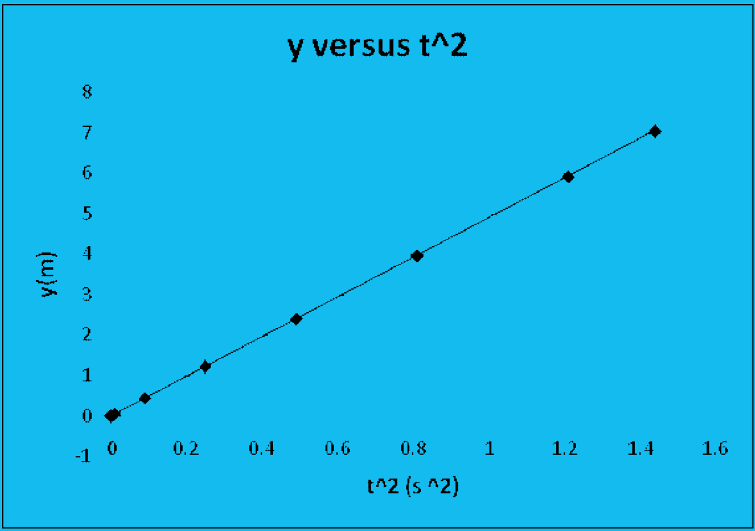
El grafico muestra una curva que pasa por el origen del sistema de coordenadas. Como no es una línea recta las variables graficadas no guardan una relación de proporcionalidad directa o no son directamente proporcionales. Es decir la variable y no es directamente proporcional a la variable t. No se cumple.

y á t o y = k t

En la tabla de datos elevamos la columna del tiempo al cuadrado. A partir de la nueva tabla de datos graficamos y versus t^2 en un SCC en el plano. El eje vertical corresponde a y (m) y el eje horizontal a t^2 (s^2).

La Tabla de Datos y el grafico obtenido es:

y(m)	t^2 (s^2)
0	0
0.049	0.01
0.441	0.09
1.225	0.25
2.401	0.49
3.969	0.81
5.929	1.21
7.056	1.44



El grafico muestra una línea recta que pasa por el origen. Por consiguiente la variable y es directamente proporcional a t^2, entonces podemos escribir:

$$y = a\,t^2$$

Donde a es una constante de proporcionalidad que encontraremos posteriormente. También puede ser hallada a partir de las coordenadas de los puntos reemplazadas en la función. El valor de la constante de proporcionalidad es $a = 4.9\ m/s^2$.

Conclusión:

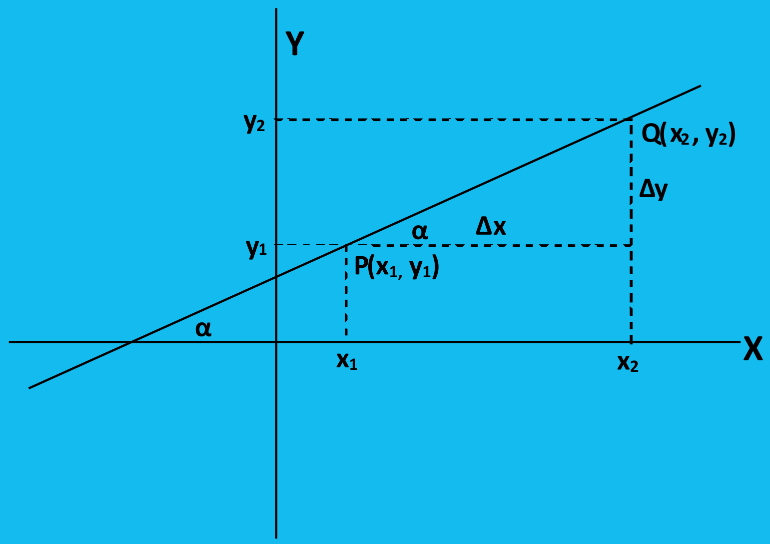
En todo grafico en la que una magnitud física o variable varía en proporción directa o es directamente proporcional respecto de otra, se obtiene una línea recta que pasa por el origen.

2.2 LA LINEA RECTA

PENDIENTE DE UNA LINEA RECTA

Toda línea recta que está dibujada o representada en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, que pase o no por el origen del sistema de coordenadas puede estar inclinada con respecto al eje horizontal, como se muestra en la figura, y el ángulo de inclinación á puede ser menor de 90° o mayor de 90°.

La medida de la inclinación se denomina la pendiente de la línea recta y se representa mediante la letra m y se define de la siguiente manera:



La línea recta mostrada en la figura en el plano XY pasa por dos puntos de la recta: El punto P cuyas coordenadas son P(x_1, y_1) y el punto Q de coordenadas Q(x_2, y_2). Trazando líneas paralelas a los ejes X e Y que pasan por el punto Q y por el punto P, se obtiene el triangulo rectángulo cuyos catetos son Δy y Δx.

El cateto Δy es la diferencia en coordenadas en el eje Y del punto Q menos las coordenadas del punto P.

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

El cateto Δx es la diferencia en coordenadas en el eje X del punto Q menos las coordenadas del punto P.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

La relación entre dichas cantidades define la pendiente m de la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

La pendiente caracteriza a la recta y su valor m es constante e independiente de los puntos sobre la recta que hallan sido tomados para calcularla. En otras palabras a cada recta que tengamos en dicho plano le corresponderá un único valor de la pendiente.

Las unidades de la pendiente m corresponde a las unidades de los ejes Y y X respectivamente.

En el mismo grafico podemos observar que Äx y Äy corresponden a los catetos de un triangulo rectángulo. Por geometría tenemos que la longitud del segmento PQ, hipotenusa del triangulo es:

$$PQ = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ecuación que permite encontrar la distancia entre los puntos P y Q. Además sí á es el ángulo que hace la línea recta con el eje X, por geometría se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

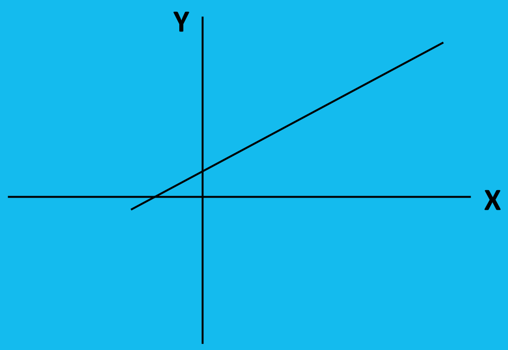
Desarrollaremos algunos ejemplos para calcular la pendiente de una línea recta.

Ejemplo 7

Una línea recta en el plano XY pasa por los puntos cuyas coordenadas son: P (- 4, -1) y Q (12, 25). ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta?

Solución.

Un dibujo aproximado de la línea recta se muestra en la figura.



Con la información dada se encuentra la pendiente de la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25+1}{12+4} = 1.625$$

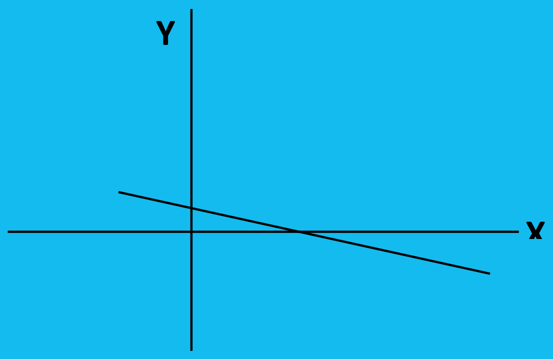
La distancia entre los puntos P y Q es: 30.53

Ejemplo 8

Una línea recta en el plano XY pasa por los puntos cuyas coordenadas son: P (-5, 4) y Q (25, - 6). ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta?

Solución

Un dibujo aproximado de la línea recta se muestra en la figura.

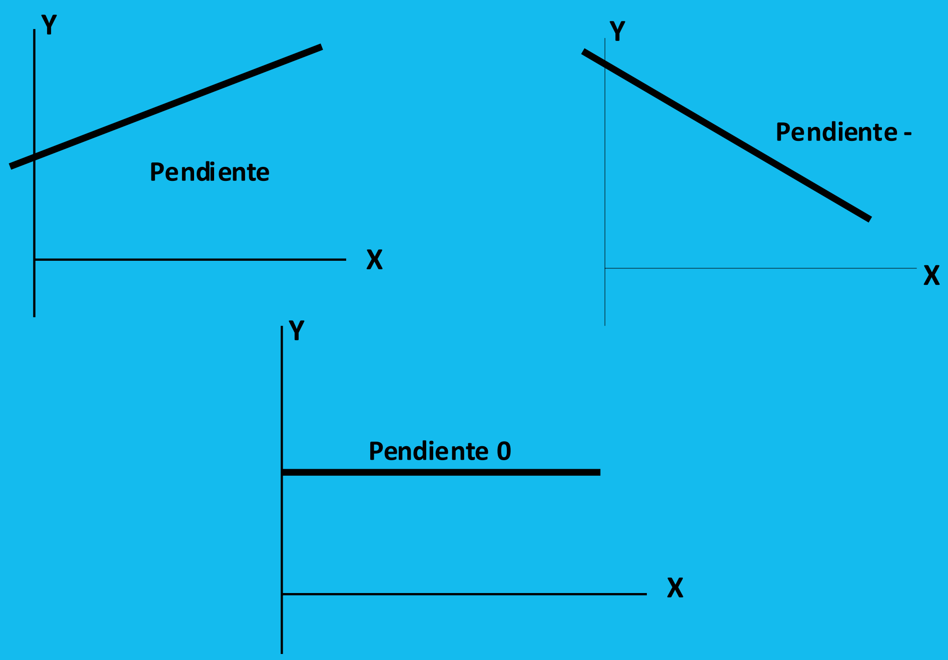


La pendiente de dicha recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6-4}{25+30} = -0.18$$

La distancia entre los puntos P y Q es: 55.90

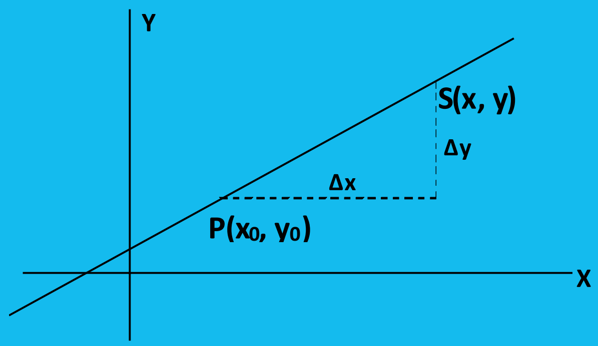
En los ejemplos 7 y 8 se pudo observar que la pendiente de una recta puede ser una cantidad positiva o negativa, dependiendo de la inclinación. Es positiva cuando el ángulo de inclinación con respecto al eje X es menor de 90° y negativa para los ángulos mayores a 90°. La figura muestra tres rectas cuyas pendientes tienen los siguientes signos:



ECUACIÓN DE LA LINEA RECTA

Si se conoce la pendiente m de una recta en el SCC en el plano, se puede hallar la relación funcional entre las variables x e y (ecuación de la línea recta o función de la línea recta) si se conoce además un punto del plano por donde pasa la recta.

Consideremos una recta en el plano XY y dos puntos sobre ella. Un punto cualquiera S de la recta cuyas coordenadas son S(x, y) y otro punto P cuyas coordenadas son conocidas $P(x_0, y_0)$.



A partir de los puntos S y P se encuentran los valores de los catetos Ä x, Ä y.

$$\Delta x = x - x_0 \qquad \Delta y = y - y_0$$

La pendiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Resolviendo**:**

$$y = y_0 + m\,(x - x_0) \tag{2}$$

Donde la pendiente m y las coordenadas del punto P se conocen. La ecuación obtenida corresponde a la ecuación o función de la línea recta representada gráficamente. A la ecuación (2) se le denomina la ecuación general de la línea recta.

Ejemplo 9

Se tienen los datos de una línea recta cuya pendiente es 3 y pasa por el punto cuyas coordenadas son conocidas (5, 12). Con la información hallar la ecuación de la línea recta o su función.

Solución:

Con la información dada reemplazamos en la ecuación (2) y se obtiene:

$$m = 3, \quad x_0 = 5, \quad y_0 = 12$$

La ecuación de línea recta es:

$$y = 12 + 3\,(x - 5) \longrightarrow y = 3x - 3$$

Caso particular

Al analizar la ecuación (2) podemos tener el siguiente caso particular. Cuando la línea recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, podemos tomar el punto P en el origen y por consiguiente sus coordenadas son:

$$P\,(0,0) \quad \text{es decir} \quad x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (2) esta se reduce a la ecuación:

$$y = m\,x \tag{3}$$

Ecuación o función que representa a una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas.

Ejemplo 10

Hallar la ecuación de una línea recta cuya pendiente es 4 y que pasa por un punto del plano XY cuyas coordenadas son (4, 8).

Solución:

Como datos tenemos la pendiente m = 4 y los puntos de coordenadas $x_0 = 4$, $y_0 = 8$. Reemplazando en la ecuación (2) se obtiene:

$$y = 8 + 4\,(x - 4)$$

Ecuación que después de ser simplificada nos da:

$$y = 4\,x - 8$$

La ecuación finalmente encontrada corresponde a la **ecuación de la línea recta solicitada**. En dicha ecuación podemos observar que 4 es la pendiente de la recta y – 8 su intersección con el eje Y. Para demostrarlo responderemos a las siguientes preguntas.

a) Hallar la intersección de la recta con el eje X.

Cuando la recta cruza al eje X, el valor de y = 0. Reemplazando en la ecuación esta condición se tiene:

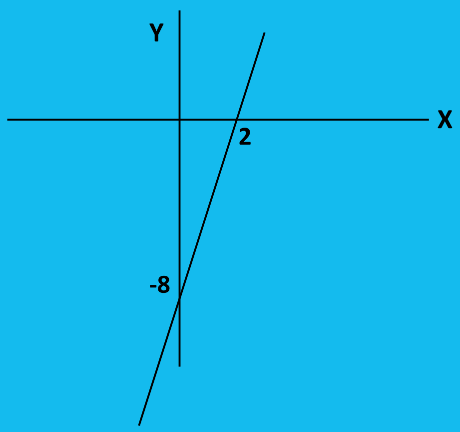
$$x = 2$$

b) Hallar la intersección de la recta con el eje Y.

Cuando la recta cruza al eje Y, el valor de x = 0. Reemplazando en la ecuación esta condición se tiene.

$$y = -8$$

c) Dibujar aproximadamente la línea recta con la información recogida.



d) Cuál es el valor de la pendiente hallado a partir de la ecuación de la recta.

Tomemos dos puntos cualquiera de la recta: P (2, 0) y Q (0, -8). El valor de la pendiente es:

$$m = \frac{-8-0}{0-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Ejemplo 11

Hallar la pendiente de la recta obtenida en el gráfico Masa versus Volumen del ejemplo 5.

Solución:

Para hallar la pendiente tomamos dos puntos de la recta tales como:

P (1,8) y Q (3,24)

Con dichos puntos encontramos la pendiente de la recta:

$$m = 16 / 2 = 8 \text{ gr/cm}^3$$

Conocido el valor de la pendiente y sabiendo que la recta pasa por el origen, la función que relaciona la masa con el volumen o la ecuación de la línea recta es usando la ecuación (3).

$$M = 8 V$$

En la ecuación hallada 8 corresponde al valor de la pendiente.

Este último ejemplo refuerza lo ya mencionado anteriormente; si dos magnitudes físicas al ser representadas gráficamente dan lugar a una línea recta que pasa por el origen del SCC, dichas magnitudes o variables están en proporción directa y la función que las relaciona es de la forma:

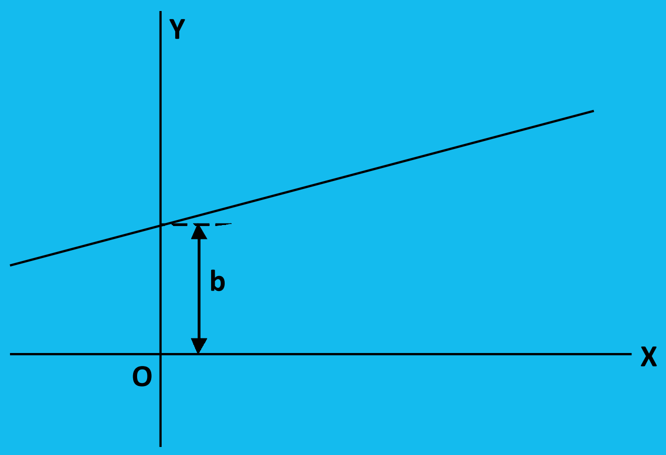
$$y = m x$$

Donde m es una constante de proporcionalidad que representa a la pendiente de dicha recta.

2.3 VARIACIÓN LINEAL

Cuando se representa gráficamente a dos variables en un SCC en el plano y se obtiene una línea recta, como la mostrada en la figura, que no pasa por el origen O del sistema de coordenadas, se dice que ambas variables están relacionadas entre sí, pero no guardan entre ellas una proporción directa o relación directa.

La relación entre las variables se denomina generalmente: **variación lineal entre las variables**. En el grafico mostrado abajo, las variables graficadas dan lugar a una línea recta, por consiguiente existe entre las variables una relación que da lugar a una variación lineal.



En la figura la línea recta cruza al eje Y (cuando x = 0) en **b** y su pendiente es denominada en este caso **a**. La función que representa a la relación entre dichas variables tiene la forma:

$$y = \mathbf{a}\,x + \mathbf{b} \qquad (4)$$

Esta ecuación es una forma particular de escribir la ecuación de la recta (2). En donde se ha escrito **a** = m.

Ejemplo 12

Describa las funciones que se muestran a continuación:

1. La función y = 3 x - 4

   La grafica y versus x representa a una línea recta que no pasa por el origen. Su pendiente es 3 y cruza al eje Y en – 4.

2. La función x = - 4 t + 5

   El grafico x versus t representa a una línea recta que no pasa por el origen. Su pendiente es – 4 y cruza al eje x en 5.

3. La función $x = 2t^2$

El grafico x versus t representa a una curva que pasa por el origen. La curva representada se denomina parábola. El grafico x versus t^2 representa a una línea recta que pasa por el origen y su pendiente es 2. La variable x es directamente proporcional o proporcional a t^2.

4. La función $y = 3t^2 + 3$

El grafico y versus t representa a una curva que no pasa por el origen. La curva representada se denomina parábola. El grafico y versus t^2 representa a una línea recta que no pasa por el origen cuya pendiente es 3 e intercepta al eje y en 3.

Ejemplo 13

Consideremos la siguiente Tabla de Datos.

X(cm)	Y(cm)
0	-4
1	-1
2	2
3	5
4	8
5	11

Representar gráficamente x versus y en un SCC y encontrar:

a) Si el grafico es una línea recta hallar su pendiente.
b) La intersección de la recta con el eje Y
c) La ecuación de la recta.
d) La intersección de la recta con el eje X.

2.4 LA PARÁBOLA

La parábola o ecuación cuadrática, es un tipo de función muy frecuente en física sobre todo en el estudio de la cinemática. La expresión general para la parábola o función cuadrática en el SCC en el plano es la siguiente:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad (5)$$

Donde x e y son las variables y a, b y c son coeficientes.

Comenzaremos realizando los graficos de una parábola considerando que los coeficientes b y c son iguales a 0.

Ejemplo 14

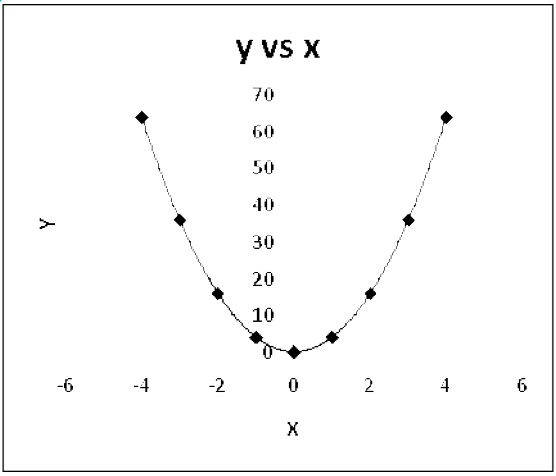
Dada la función $y = 4\,x^2$ representarla gráficamente.

Solución

Para poder representar gráficamente la función debemos construir una tabla de valores o datos

X	Y
-4	64
-3	36
-2	16
-1	4
0	0
1	4
2	16
3	36
4	64

La representación grafica y versus x de la función $y = 4\ x^2$ nos da el siguiente grafico.



En el grafico podemos observar:

1. La función representa a una curva (parábola) que pasa por el origen de coordenadas.
2. La parábola es simétrica respecto del eje Y.

También debemos recordar que si graficamos y versus x^2 tendríamos una línea recta que pasa por el origen y cuya pendiente debe ser 4.

Ejemplo 15

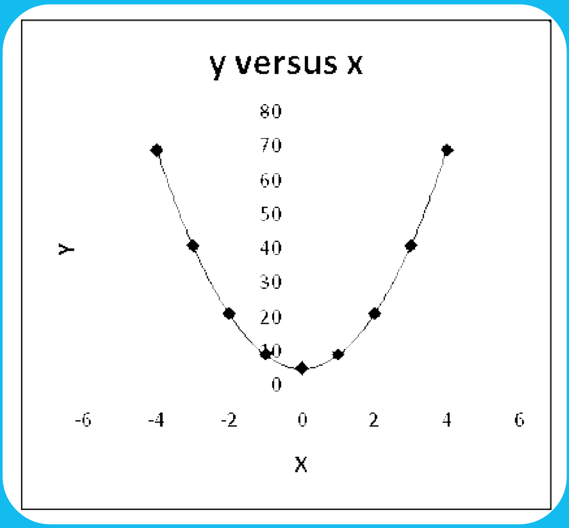
Grafiquemos la siguiente función cuadrática: $y = 4\ x^2 + 5$

Solución:

Para poder representar gráficamente la función debemos construir una tabla de valores o datos

x	y
-4	69
-3	41
-2	21
-1	9
0	5
1	9
2	21
3	41
4	69

La representación grafica y versus x de la función $y = 4x^2 + 5$, nos da el siguiente grafico.



En el grafico podemos observar:

1. La función representa a una parábola que no pasa por el origen.
2. El grafico corta al eje Y en 5, pero es simétrica con respecto a él.

Si se representa gráficamente y versus x^2 se tiene una línea recta que no pasa por el origen. Su pendiente es 4 y corta al eje Y en 5.

Ejemplo 16

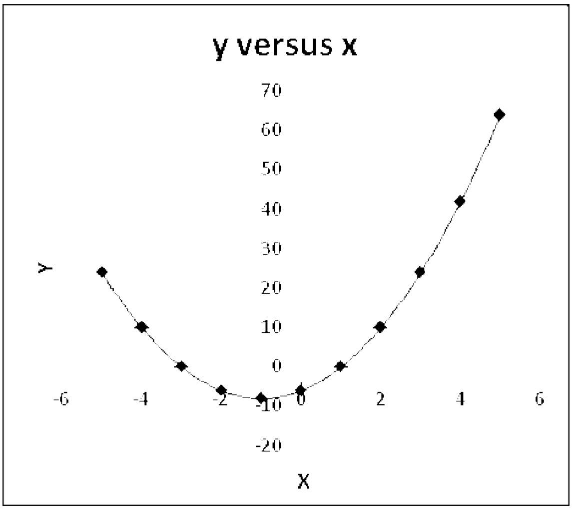
Grafiquemos la siguiente función cuadrática $y = 2x^2 + 4x - 6$

Solución

Construimos una tabla de valores a partir de la función:

X	Y
-5	24
-4	10
-3	0
-2	-6
-1	-8
0	-6
1	0
2	10
3	24
4	42
5	64

A partir de la tabla realizamos el grafico y versus x obteniendo:



La representación grafica de la función $y = 2x^2 + 4x - 6$, nos da una parábola que tiene las siguientes características:

1. La función representa a una parábola que no pasa por el origen.
2. El eje de simetría no es el eje Y. Es un eje paralelo al eje Y que pasa por el punto más bajo de la parábola.
3. La intersección con el eje Y es – 6. Cuando en la ecuación se reemplaza $x = 0$.
4. La intersección con el eje X se puede encontrar cuando $y = 0$.

Desde el problema 14 al 16 hemos conocido la función y la representamos gráficamente, pero ¿cómo podemos construir la función a partir de una tabla de datos que se nos presenta? ¿Cómo podemos construir la función a partir de un grafico que se nos presenta?

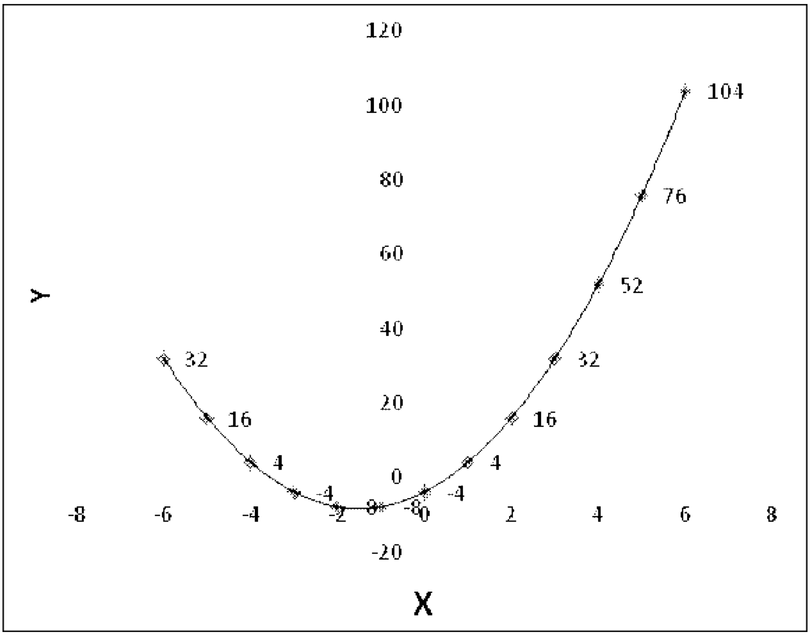
Para llevar a cabo el proceso inverso, conocer la función a partir de una tabla de datos, debemos primero realizar un grafico, luego reconocer si el grafico es y una línea recta o una parábola. En el primer caso sabemos hallar la función de una línea recta, en el caso de la parábola debemos identificar 3 puntos y reemplazarlos en la ecuación general:

$$\mathbf{y = a\,x^2 + b\,x + c}$$

Para conocer el procedimiento procederemos con un ejemplo.

Ejemplo 17

La figura muestra una parábola en el plano XY. Los números indicados sobre cada punto de la parábola corresponden a la coordenada y. Por ejemplo el punto numerado 104 tiene como coordenadas (6, 104). A partir de la información proporcionada encontrar:



a) La ecuación de la parábola.

Identificamos tres puntos visibles de la parábola y sus coordenadas.

P (-6, 32), Q (2, 16) y R (4, 52)

Reemplazamos las coordenadas de cada punto en la ecuación general de la parábola y se obtiene el conjunto de ecuaciones:

$$32 = 36\,a - 6\,b + c$$
$$16 = 4\,a + 2\,b + c$$
$$52 = 16\,a + 4\,b + c$$

Resolviendo el sistema de tres ecuaciones se obtienen los siguientes valores para los coeficientes:

$a = 2$ $\qquad b = 6$ $\qquad c = -4$

La ecuación de la parábola será:

$$y = 2x^2 + 6x - 4$$

b) Las coordenadas del punto de intersección de la parábola con el eje Y.

Para hallar el punto de intersección con el eje Y, tomamos x = 0. Nos da y = - 4. Las coordenadas del punto sobre el eje Y es.

$$(0, -4)$$

c) Las coordenadas del punto de intersección de la parábola con el eje X.

Cuando la parábola intercepta al eje X el valor de y = 0. Reemplazando en la ecuación de la parábola, se tiene

$$2x^2 + 6x - 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen los siguientes valores:

$$x_1 = 0.56 \qquad\qquad x_2 = -3.56$$

Como resultado de la solución de la ecuación de segundo grado se obtienen dos puntos cuyas coordenadas son:

$$(0.56, 0) \text{ y } (-3.56, 0)$$

Lo cual confirma lo que puede ser visualizado en el grafico.

2.5 INTERSECCIÓN

Cuando dos funciones se representan en el plano de un SCC existe la posibilidad que los graficos de dichas funciones se intercepten. Las coordenadas de los puntos de intersección pueden conocerse si se conocen las funciones.

INTERSECCIÓN DE DOS LINEAS RECTAS

Cuando dos líneas rectas están representadas en el plano XY se interceptan en un punto, si las rectas no son paralelas.

Ejemplo 18

Las funciones que representan a dos líneas rectas en el plano XY son:

$$y = -3x + 5 \qquad (a)$$
$$y = 4x - 6 \qquad (b)$$

Encontrar las coordenadas del punto de intersección de las dos líneas rectas.

Solución:

Las coordenadas del punto de intersección de las dos líneas rectas corresponde a ambas líneas. Para cumplir con esta condición debemos igualar las ecuaciones (a) y (b).

$$-3x + 5 = 4x - 6$$

Simplificando:

$$-7x = -11$$
$$x = 11/7$$

Reemplazando el valor de x hallado en la ecuación (a) o (b) se tiene el valor de y.

$$y = 2/7$$

Las coordenadas del punto de intersección son: (11/7, 2/7)

INTERSECCIÓN DE UNA LINEA RECTA CON UNA PARABOLA

La parábola y la línea recta representada en un mismo SCC en el plano pueden cruzarse en dos puntos.

Ejemplo 19

Las funciones que representan a una línea recta y a una parábola en un plano XY son:

$$y = 3x^2 - 4x + 6 \qquad\qquad y = 2x - 8$$

Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de dichas funciones.

Solución.

Igualando ambas funciones, de la misma manera que en el ejemplo 18 se tiene:

$$3x^2 - 4x + 6 = 2x - 8$$

Simplificando se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$3x^2 - 6x + 14 = 0$$

La solución nos da:

$$x_1 = 1 + 1.9\,i \qquad\qquad x_2 = 1 - 1.9\,i$$

En este caso las soluciones halladas son imaginarias. Por consiguiente la línea recta y la parábola no se cruzan en ningún punto.

Ejemplo 20

Las funciones que representan a una línea recta y a una parábola en el plano XY son:

$$y = 2x^2 + 6x - 10 \qquad\qquad y = 4x + 8$$

Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de dichas funciones:

Solución:

Igualando ambas funciones se tiene la ecuación de segundo grado:

$$2x^2 + 2x - 18 = 0$$

Cuya solución nos da:

$$x_1 = 2.54 \qquad\qquad x_2 = -3.54$$

Cuando estos valores se remplazan en cualquiera de las dos funciones se obtienen los valores de la coordenada y:

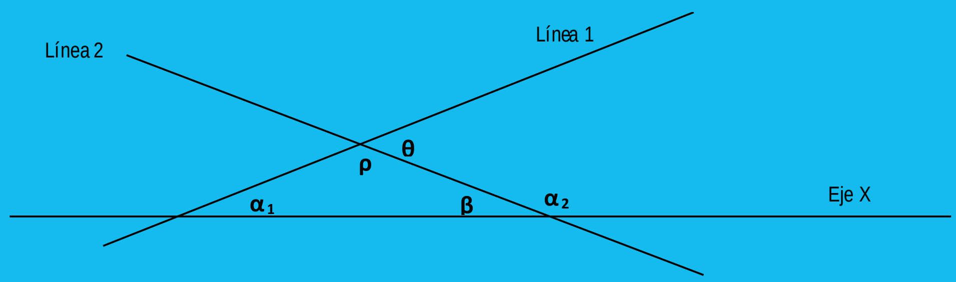
$$y_1 = 18.16 \qquad\qquad y_2 = -\ 6.16$$

Con estos resultados, las coordenadas de los puntos de intersección entre la recta y la parábola son:

(2.54, 18.16) y (- 3.54, - 6.16)

ÁNGULO ENTRE DOS LINEAS RECTAS

La figura muestra dos líneas rectas ubicadas en un plano. Entre si hacen un ángulo è o ñ el cual es hallado a partir de las funciones que representan a cada una de las líneas rectas.



Los ángulos $á_1$ y $á_2$ son los que forman cada recta con respecto al eje horizontal (eje X). Como se vio en la sección 2.2 la tangente de cada uno de los ángulos corresponde a la pendiente de la recta.

$$m_1 = \text{tang } á_1 \qquad\qquad m_2 = \text{tang } á_2$$

Por geometría se demuestra que:

$$ñ = á_2 - á_1 \qquad \text{o} \qquad è = 180° - ñ$$

Ejemplo 21

Las ecuaciones de dos líneas rectas en el plano XY son:

$$y = -\ 4\ x + 12 \qquad\qquad y = 10\ x + 8$$

¿Qué ángulo forman las rectas entre sí?

Solución:

La pendiente de la recta 2 es – 4 (ángulo mayor de 90°) y el ángulo que forma con el eje X es:

$$á_2 = \tan^{-1}(-4) = 104°$$

La pendiente de la recta 2 es 10 y el ángulo que forma con el eje X es:

$$á_1 = \tan^{-1}(10) = 84°$$

El ángulo entre las dos rectas es 104° - 84° = 20° o 160°.

Problema 1

La tabla muestra los datos tomados en un experimento realizado en el laboratorio, donde las variables son el desplazamiento s de un móvil en metros (m) y t el tiempo empleado en recorrerlo en segundos (s).

s(m)	t(s)
4	1
8	2
12	3
16	4
20	5

a) Graficar s vs t
b) La función s = f (t) que relaciona la variable s con t.
c) La posición cuando t = 7 s.
d) En que instante de tiempo s = 27 m.

Problema 2

Con los datos mostrados en la tabla encontrar:

x(cm)	y(cm)
1	6
2	8
3	10
4	12
5	14

a) El gráfico y versus x
b) La función y = f(x)
c) El valor de y cuando x=12 cm.

Problema 3

Con los datos mostrados en la tabla encontrar.

x(m)	t(s)
-5	1
-8	2
-11	3
-14	4
-17	5

a) El gráfico x versus t
b) La función $x = f(t)$
c) El instante de tiempo cuando $x = -19$ m
d) El valor de x cuando $t = 10.5$ s

Problema 4

Se tiene los siguientes datos recogidos en un experimento.

y(cm)	t(s)
0	0
3	1
12	2
27	3
48	4

a) Graficar y versus t.
b) Graficar y vs t^2.
c) En el grafico donde haya obtenido una recta encuentre su pendiente y la función que la representa.
d) El valor de y cuando $t = 6.5$ s

Problema 5

En un servicio de taxi en cierta ciudad se debe pagar $ 10.00 de «banderazo» y $ 4.00 por kilómetro. Sea d la distancia recorrida por el taxi, y P el importe por pagar:
a) Complete la tabla de este problema.

d (Km)	P (pesos)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Usando los valores tabulados, trace la gráfica P vs d.
c) Por medio del gráfico, determine el precio de un servicio de 3.5 Km.
d) ¿Cuál es el tipo de relación entre P y d?
e) Escriba la expresión matemática o ecuación que relaciona P y d.

Problema 6

Un carpintero fabrica discos de madera con diámetros de 10 cm y de 20 cm, ambos con el mismo grosor. Siendo $ 10.00 el precio de los discos más chicos , ¿cuánto deben costar los grandes? Cuánto costaría un disco de 35 cm de diámetro.

Problema 7

El área de la superficie de una esfera esta dada por la ecuación:

$$A = 4\pi R^2$$

Donde R esta en metros, A en m^2 y 4π una constante que puede ser escogida con tres cifras significativas.

a) Completar la tabla siguiente

A(m^2)	R(m)
	1
	23
	3
	4
	5

a) Graficar A vs R
b) Graficar A vs R^2
c) En el grafico donde haya obtenido una línea recta encuentre su pendiente y la función que la representa.
d) ¿El valor encontrado de la pendiente es igual a 4π?

Problema 8

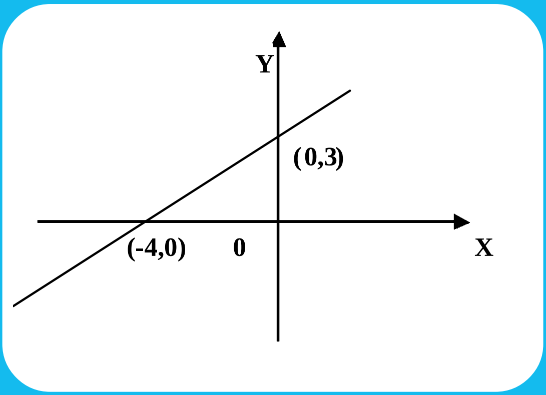
Se tiene un resorte cuya longitud inicial L_o es de 10cm. Cuando se le aplica una fuerza F (en Newton) el resorte se estira y alcanza la longitud L (en cm.), cuyos valores están representados en la siguiente tabla:

F(N)	0	0,45	0,90	1,35	1,80
L (cm)	10	15	20	25	30

a) Graficar F(N) versus L (cm) y trazar la recta más probable que pasa por dichos puntos.
b) Hallar el valor de la pendiente de la recta y sus unidades.
c) Hallar la ecuación que representa a la recta y el valor de sus coeficientes.

Problema 9

Determine la ecuación de la línea recta que pasa por el punto P (-1,5) y es perpendicular a la recta que se muestra en la figura.



Problema 10

Una magnitud física F es función de otra magnitud física X. Las mediciones realizadas por un estudiante de la URP, dieron como resultado:

X	2	4	8	12	16	20
F	3,5	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0

Sin tomar en consideración las unidades de las magnitudes físicas.

a) Graficar F vs X.
b) Del grafico hallar la ecuación o función F = f(X).
c) ¿Para qué valor de X el valor de F = 35?

Problema 11

Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,5) y es perpendicular a la recta $y = -2 + 2x$.

Problema 12

Determinar la ecuación de la recta L_1 que pasa por los puntos P (2,3) y Q (-3,-5).

Problema 13

Determinar la ecuación de la recta L_2 que pasa por el punto (-2,0) y es paralela a la recta L_1 hallada en el problema anterior.

Problema 14

Dada las rectas L_1: $2y-5x-4=0$ y L_2: $3y-4x-2=0$, determine las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas y el ángulo que forman.

Problema 15

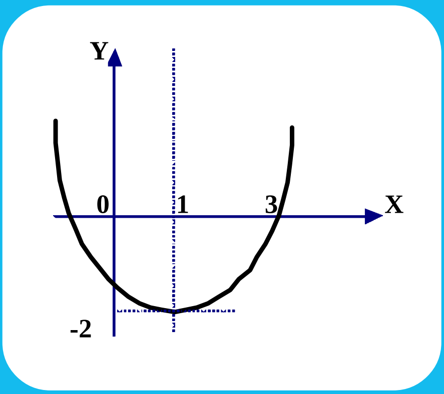
Responder a las siguientes preguntas:

a) Encuentre la ecuación de la parábola con vértice V (-2,-5) que pasa por el punto P (2,3) y su eje es paralelo al eje Y.
b) Determine el valor de y cuando x = 1.

Problema 16

Para la parábola que se muestra en la figura, determine:

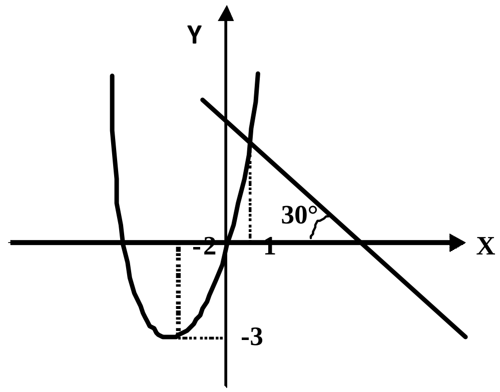
a) Su ecuación.
b) Su intersección con el eje Y.
c) El valor de y cuando x =10



Problema 17

La figura muestra una parábola y una recta.

a) Determinar la ecuación de la parábola y el valor de «y» cuando x =1
b) La ecuación de la recta.



Problema 18

En un Sistema de Coordenadas Cartesiano, por los puntos A (-5,23) y B (4,-13) pasa la línea recta L_1 y por los puntos C (-4,-14) y D (3,7) pasa la línea recta L_2. Encontrar:

a) Las pendientes de las rectas L_1 y L_2.
b) La ecuación de la línea recta L_1 y la ecuación de la línea recta L_2.
c) El ángulo que forman dichas líneas rectas.

Problema 19

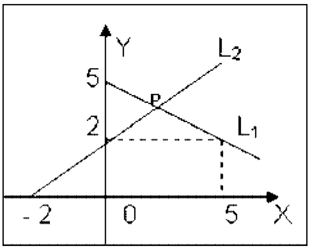
Se tienen dos líneas rectas ubicadas en un plano. La línea recta L_1 pasa por los puntos A (2,6) m y B (-5,-10) m, la línea recta L_2 pasa por los puntos P (-6,8) m y Q (5,-25) m. Encontrar en relación con un sistema de coordenadas cartesianas XY:

a) La ecuación de la línea recta L_1 y de la línea recta L_2.
b) Las coordenadas del punto de intersección de las dos líneas rectas.
c) El ángulo que forman entre si las dos líneas rectas.

Problema 20

Dadas las rectas L_1 y L_2 que se muestran en la figura, determinar:

a) Sus ecuaciones.
b) Las coordenadas del punto de intersección (punto P).



Problema 21

Dada la recta $2x + 3y - 12 = 0$, determinar su pendiente y las coordenadas de intersección con los ejes cartesianos.

Problema 22

La ecuación mostrada corresponde a una línea recta:

$$2(3y-4)+3(2x-6)-8=0$$

Encontrar:

a) La pendiente
b) La intersección con el eje X
c) La intersección con el eje Y
d) Cuáles son las coordenadas de un punto sobre la recta si y = -3.

Problema 23

En un sistema de coordenadas en el plano X Y, se tienen tres puntos cuyas coordenadas son M (0;2), N (3;1) y P (1;-3). Hallar:

a) Las ecuaciones de los tres lados del triangulo.
b) El ángulo del triangulo en el vértice M.

Problema 24

Con los datos de un experimento graficados en un SCC en el plano XY, se encuentra que la línea recta trazada por los puntos, tiene una pendiente m = - 2.5 y pasa por el punto de coordenadas P (-4, 6). Con esta información determinar:

a) La ecuación de la línea recta trazada.
b) Las coordenadas de los puntos de intersección de la línea recta con los ejes X e Y respectivamente.
c) Trazar un gráfico aproximado, a mano alzada, de la línea recta.

Problema 25

La ecuación de una línea recta está dada por la función:

$$3x + y = 2x + 4y - 6$$

Encontrar:

a) Su pendiente.
b) El valor de la intersección con el eje X.
c) El valor de la intersección con el eje Y.

Problema 26

En el plano XY se tiene una parábola y una línea recta cuyas ecuaciones son respectivamente:

$$y = -3x^2 + 2x + 3 \quad , \quad y = -2x - 2$$

Encontrar:

a) Las coordenadas de los puntos de intersección de la línea recta con los ejes X e Y.
b) Las coordenadas de los puntos de intersección de la línea recta con la parábola.

Problema 27

En el plano X, Y de un Sistema de Coordenadas Cartesianas se tiene una línea recta cuya pendiente es – 3 y pasa por el punto P (-2, -4); y una parábola cuya ecuación está dada por la función:

$$y = 3x^2 - 2x - 12$$

Encontrar:

a) La ecuación de la línea recta.
b) Las coordenadas de los puntos de intersección de la línea recta con la parábola.

Capítulo III

ÁLGEBRA VECTORIAL

INTRODUCCIÓN

En el capítulo I se definieron las magnitudes físicas que usamos en ingeniería y una de las formas en que fueron clasificadas fue como magnitudes físicas escalares y magnitudes físicas vectoriales.

Las **magnitudes físicas escalares** como por ejemplo la longitud, la masa, el tiempo, densidad, rapidez etc. están perfectamente determinadas cuando se expresan mediante un número o un escalar seguido de la unidad correspondiente.

- la longitud de una barra es de 10 metros.
- la masa del bloque es de 16 kilogramos.
- el volumen de la botella de gaseosa es de 2.5 litros.
- la temperatura que tiene el agua es 373 grados kelvin.
- El trabajo realizado para mover la caja fue de 20 joule.

Las **magnitudes físicas vectoriales** como la fuerza, la velocidad, la aceleración, el desplazamiento etc. para expresarlas es necesario además de su modulo o intensidad, de una dirección y de un sentido. Por ejemplo cuando nos referimos a un barco que se traslada en el océano es común escuchar que lleva una velocidad de 16 nudos en la dirección norte 30° este. En toda esta oración se expresa el modulo de la velocidad, la dirección y el sentido en la que se mueve el barco.

Otra magnitud física que necesita ser expresada como magnitud vectorial es la fuerza. No basta decir que sobre un cuerpo se aplica una fuerza de 50 Newton, sino que es necesario conocer en qué dirección y en qué sentido está siendo aplicada porque los efectos físicos que se producen son diferentes. Por ejemplo decir solamente que un bloque es jalado con una fuerza de 50 N, es diferente al decir que bloque es jalado con una fuerza de 50 Newton que hace un ángulo de 30° con la horizontal.

CUADRO DE MAGNITUDES FÍSICAS VECTORIALES

Desplazamiento	Velocidad	Aceleración
Fuerza	Peso	Torque
Momento lineal	Momento angular	Velocidad angular
Aceleración angular	Campo eléctrico	Campo magnético

Los elementos matemáticos que representan simultáneamente el modulo, dirección y sentido de una magnitud física se denominan **vectores.**

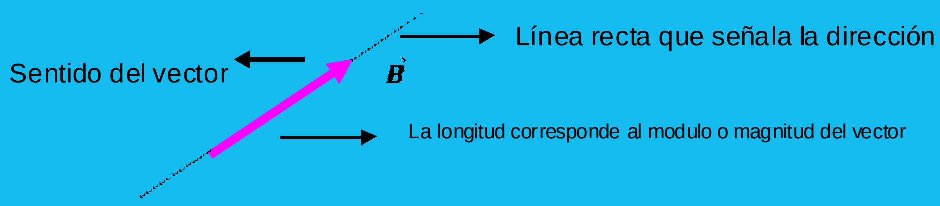
En este capítulo aprenderemos a representar los vectores y realizar operaciones algebraicas con ellos.

3.1 REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR

En física representamos a los vectores de dos maneras: gráficamente y analíticamente. Gráficamente lo hacemos considerándolo como una flecha y analíticamente lo describimos en un Sistema de Coordenadas Cartesianas.

REPRESENTACIÓN GRAFICA

Cuando un vector es representado gráficamente o dibujado, lo hacemos como una flecha (o segmento orientado). La longitud de la flecha corresponde a su modulo, su dirección está dada por la línea recta a lo largo de la cual sigue la flecha y el sentido por la punta que sigue la flecha. La figura muestra la representación grafica del vector $\vec{\mathbf{B}}$.



Generalmente los vectores se representan mediante una letra mayúscula o minúscula en negritas tales como:

A, **R**, **T, a, i, j, k,……..**

También se les representa por letras, encima de las que se ha dibujado una flecha:

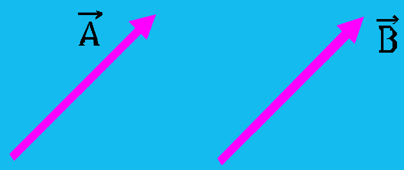
$$\vec{A}\ ,\vec{R}\ ,\vec{T}\ ,\overrightarrow{a}\ ,\overrightarrow{\imath}\ ,\overrightarrow{\jmath}\ ,\overrightarrow{k}$$

En el texto usaremos la representación de letras mayúsculas o minúsculas con flechas encima. El modulo del vector estará dado solo por la letra o por el símbolo usado en matemáticas:

El modulo del vector $\vec{F}$ se escribe como F o $\left|\vec{F}\right|$

IGUALDAD DE VECTORES

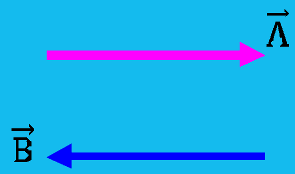
Antes de aprender a realizar operaciones con los vectores en forma grafica o analítica debemos conocer algunas propiedades que tienen los vectores. Dos vectores $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ son iguales si tienen el mismo modulo, la misma dirección y el mismo sentido.



En la figura los vectores graficados son iguales y se expresan como: $\overrightarrow{\mathrm{A}} = \overrightarrow{\mathrm{B}}$. Los vectores son iguales solo si sus módulos son iguales (A = B), son paralelos (tienen la misma dirección) y están en el mismo sentido.

Los vectores mostrados en la figura inferior son paralelos, del mismo modulo pero de sentidos contrarios. En este caso se dice que **los vectores no son iguales.** Pero por tener el mismo modulo y la misma dirección se escriben como:

$$\vec{A} = -\vec{B}$$



En la ecuación el signo menos indica que los vectores tienen sentidos opuestos. Al vector $\vec{B}$ se le denomina el negativo del vector $\vec{A}$.

OPERACIONES BÁSICAS CON VECTORES

Con los vectores se pueden realizar las siguientes operaciones: suma, resta y producto. Todas las operaciones indicadas pueden realizarse gráficamente o analíticamente.

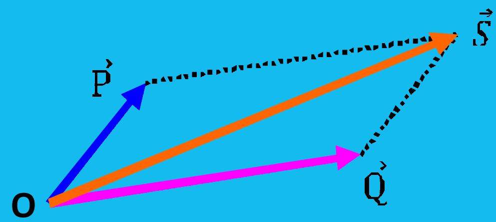
Comenzaremos realizando las operaciones de suma y de resta de vectores que están representados gráficamente.

SUMA DE VECTORES

En general cuando se sumen vectores debe tenerse el cuidado de que todos correspondan a la misma magnitud física y que tengan las mismas unidades. La representación gráfica de la suma de dos vectores puede ser realizada por el método del paralelogramo o el método del polígono:

MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

Consideremos dos vectores cualesquiera $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ que están en el espacio. Si los vectores se trasladan a un punto u origen común O, se encontraran en un plano como se muestra en la figura:

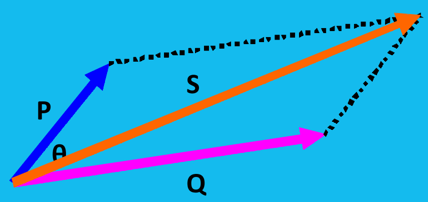


Con los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ construimos el paralelogramo mostrado. Se define la suma de los dos vectores al vector $\vec{S}$ que se dibuja en la diagonal del paralelogramo:

$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{Q}$$

Haciendo uso de la geometría el modulo del vector $\vec{S}$ corresponde a la longitud de la diagonal mayor del paralelogramo. Si se conocen los módulos o magnitudes (también suele llamarse así) de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ y el ángulo è que forman entre sí, la longitud de la diagonal es:

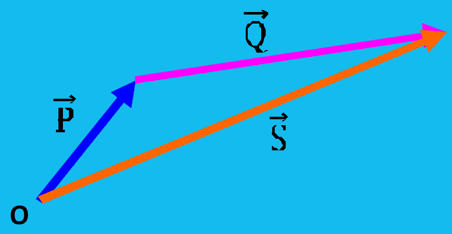
$$S^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \text{ Cos } \theta$$



Donde P, Q y S son los módulos de los vectores y è el ángulo entre los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.

MÉTODO DEL POLÍGONO

El método del polígono es más práctico que el método del paralelogramo y lo usaremos con más frecuencia. Consideremos la suma de los mismos vectores anteriores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$. Para sumar los dos vectores por el método del polígono dibujamos los vectores uno a continuación del otro a partir del punto O. Primero dibujamos el vector $\vec{P}$ y a continuación el vector $\vec{Q}$ como se muestra en la figura:

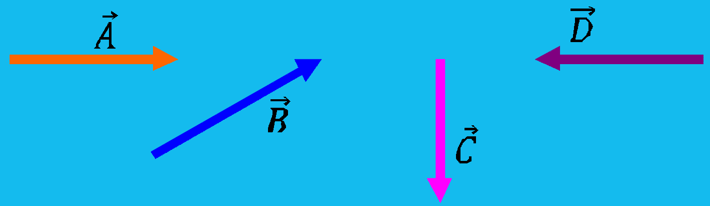


$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{Q}$$

El vector suma $\vec{S}$ se traza desde el punto O, donde comienza el vector $\vec{P}$, hasta el punto final del vector $\vec{Q}$. El vector $\vec{S}$ obtenido por este método es el mismo vector obtenido por el método del paralelogramo, es decir tiene el mismo modulo, dirección y sentido.

Ejemplo 1

Usando el método gráfico encontrar el vector resultante $\vec{R}$, resultado de la suma de los vectores representados en el plano.

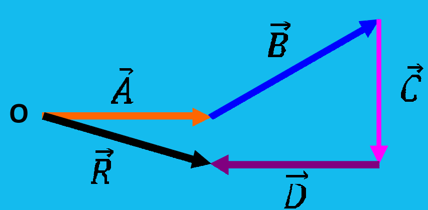


Solución:

El vector resultante de los vectores representados es dado por la operación suma:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$

Usando el método del polígono para sumar los cuatro vectores, trasladamos uno por uno colocándolos uno a continuación de otro. Comenzamos el proceso desde el punto O escogido arbitrariamente sobre el papel. El vector resultante $\vec{R}$ es el que va desde O hasta la punta del último vector dibujado.



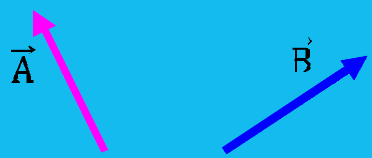
Si se conoce el modulo de cada vector y los ángulos que forman entre ellos, estaríamos en condiciones de calcular por geometría el modulo, dirección y sentido del vector resultante $\vec{R}$.

RESTA O DIFERENCIA DE VECTORES

La operación resta o diferencia de dos vectores puede realizarse como una operación de suma, y utilizar cualquiera de los métodos gráficos desarrollados anteriormente para la suma.

Consideremos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como los mostrados en la figura. La diferencia entre el vector $\vec{A}$ y el vector $\vec{B}$, operacionalmente se escribe como:

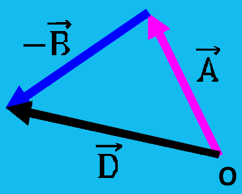
$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$



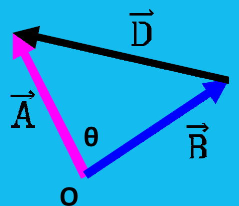
La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\vec{D} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

En esta última ecuación el vector diferencia $\vec{D}$ es el resultado de una operación de suma del vector $\vec{A}$ más el vector $-\vec{B}$. Usando cualquiera de los dos métodos de la suma podemos hallar el vector diferencia. Por ser más cómodo usaremos el método del polígono.



También podemos hallar el vector diferencia si trasladamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ a un origen común como se muestra en la figura:



Según la figura $\vec{A} = \vec{B} + \vec{D}$ de la cual se despeja el Vector diferencia $\vec{D}$.

Comparando las figuras podemos ver que se ha obtenido el mismo vector diferencia $\vec{D}$. En este último caso el vector diferencia es trazado desde la punta del vector $\vec{B}$ hasta la punta del vector $\vec{A}$.

Si se conocen los módulos de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo θ que forman entre ellos, por geometría podemos encontrar el modulo del vector diferencia.

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

Donde A, B y D son los módulos o las magnitudes de los vectores respectivamente.

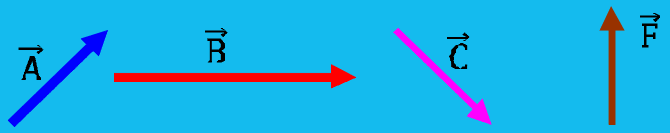
OPERACIONES GRAFICAS CON LOS VECTORES

Cuando se tiene la representación grafica de los vectores se pueden realizar operaciones de suma, resta o combinaciones usando las propiedades que tienen los vectores.

Ejemplo 2

La figura muestra cuatro vectores en el plano. Encontrar el vector resultante de la siguiente operación, gráficamente:

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{F}$$

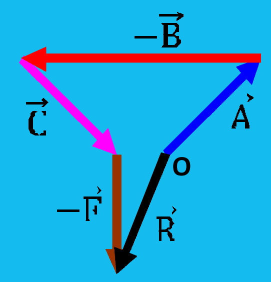


Solución:

La operación solicitada puede escribirse como:

$$\vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B}) + \vec{C} + (-\vec{F})$$

Usando el método del polígono para la suma fijemos el origen O. A partir de ahí vamos dibujando el vector $\vec{A}$, luego a continuación $-\vec{B}$ y sucesivamente:



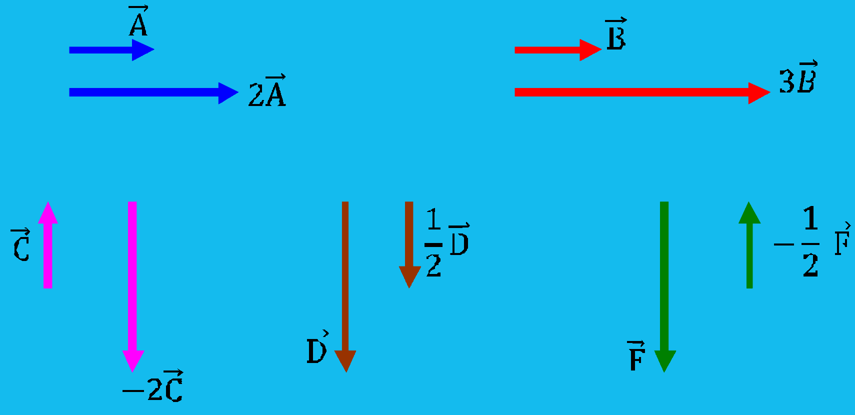
El vector $\vec{\mathbf{R}}$ resultado de la operación propuesta, es el que va desde el origen O hasta la punta o extremo del vector $-\vec{\mathbf{F}}$.

MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Si se multiplica un vector por una escalar se tiene nuevamente un vector paralelo al primero. Si el escalar es m y positivo, el nuevo vector es paralelo y en la misma dirección; si el escalar es negativo el nuevo vector será paralelo y de sentido contrario. En general este producto se escribe como:

$$\vec{R} = m\,\vec{S}$$

En donde el vector $\vec{S}$ se multiplica por el escalar m obteniéndose un nuevo vector $\vec{R}$. La figura muestra gráficamente el producto de un escalar por un vector:



En las representaciones gráficas podemos observar:

- El vector $2\vec{A}$ es dos veces más grande que el vector paralelo $\vec{A}$, donde el número 2 es el escalar.
- El vector ½ $\vec{D}$ es la mitad del vector paralelo $\vec{D}$, donde ½ es el escalar.
- El vector $-2\vec{C}$ es el doble en modulo o magnitud que el vector $\vec{C}$ pero su sentido es contrario indicado por el signo menos. 2 es el escalar.

REPRESENTACIÓN ANALITICA DE UN VECTOR

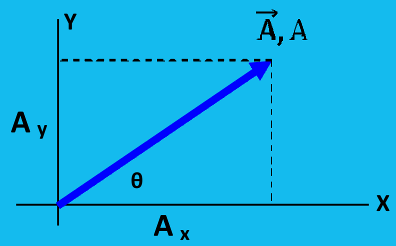
La representación analítica de un vector se refiere a escribirlo algebraicamente sin necesidad de tener que hacer una representación grafica (flecha). Para representar analíticamente un vector debemos usar un sistema de coordenadas. En nuestro caso representaremos un vector en un SCC. Primero lo haremos en el plano XY y luego en el espacio XYZ.

Para representar al vector en el plano XY debemos conocer las proyecciones geométricas del vector con respecto a los ejes X e Y

COMPONENTES DE UN VECTOR EN UN SISTEMA DE COORDENADAS EN EL PLANO XY.

Consideremos un vector $\vec{A}$ cuyo modulo es A. Ubiquemos al vector en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas en el plano XY como se muestra en la figura.

El vector se proyecta sobre cada uno de los ejes y sus proyecciones podemos encontrarlas haciendo uso de la geometría.



La proyección del vector $\vec{A}$ sobre el eje X es A_x, donde:

$$A_x = A \cos \theta$$

La proyección sobre el eje Y es A_y, donde:

$$A_y = A \operatorname{Sen} \theta$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que forma el vector con sus proyecciones nos permite escribir:

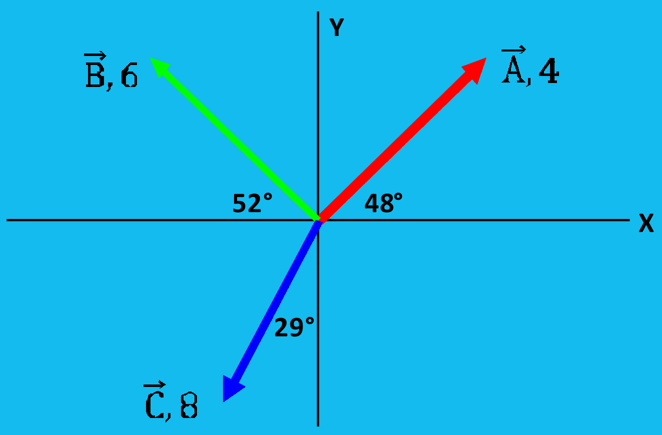
$A^2 = A^2_x + A^2_y$ o lo que es lo mismo $A = (A^2_x + A^2_y)^{1/2}$

Además por trigonometría el ángulo è se encuentra a partir de la relación entre los catetos del triángulo mediante la ecuación:

$\operatorname{tg} \theta = (A_y / A_x)$ o $\theta = \operatorname{tg}^{-1} (A_y / A_x)$

Ejemplo 3

La figura muestra tres vectores $\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}$ **y** $\vec{\mathbf{C}}$ ubicados en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, y cuyos módulos son 4, 6 y 8 unidades respectivamente. Cada uno de los vectores hace con los ejes X e Y los ángulos mostrados. Encontrar las proyecciones de cada vector en este sistema de coordenadas cartesianas**.**



Solución:

*Proyecciones del vector **A***

Según la figura este vector se encuentra en el primer cuadrante y forma con el eje +X un ángulo de 48^0. Sus proyecciones a lo largo de los ejes X e Y son:

$$A_x = 4 \text{ Cos } 48^0 = 2.68 \text{ unidades}$$
$$A_y = 4 \text{ Sen } 48^0 = 2.97 \text{ unidades}$$

*Proyecciones del vector **B***

Este vector se encuentra en el segundo cuadrante y forma con el eje –X un ángulo de 52^0. Sus proyecciones a lo largo de los ejes X e Y son:

$$B_x = -6 \text{ Cos } 52° = -3.69 \text{ unidades} \quad \text{o}$$
$$B_x = 6 \text{ Cos } 128° = -3.69 \text{ unidades}$$

$$B_y = 6 \text{ Sen } 52° = 4.73 \text{ unidades}$$

*Proyecciones del vector **C***

Este vector se encuentra en el tercer cuadrante y forma con el eje – Y un ángulo de 29^0.

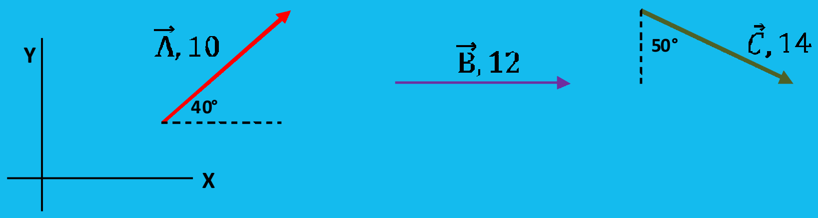
Sus proyecciones a lo largo de los ejes X e Y son:

$$C_x = -8 \text{ Sen } 29^0 = -3.88 \text{ unidades}$$
$$C_y = -8 \text{ Cos } 29^0 = -7.00 \text{ unidades}$$

El problema muestra que las proyecciones de un vector son escalares con signo + o - dependiendo del cuadrante en el que esté ubicado el vector y sus unidades son las mismas que las que corresponde al vector.

Ejemplo 4

La figura muestra 3 vectores $\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}$ **y** $\vec{\mathbf{C}}$ ubicados en el plano XY. Encontrar las proyecciones de cada uno de los vectores a lo largo de los ejes X e Y.



Componentes del vector $\vec{A}$:

$$A_x = 10 \cos 40° = 7.66$$
$$A_y = 10 \operatorname{Sen} 40° = 6.43$$

Componentes del vector $\vec{B}$:

$$B_x = 12$$
$$B_y = 0$$

Componentes del vector $\vec{C}$:

$$C_x = 14 \operatorname{Sen} 50° = 10.72$$
$$C_y = -14 \cos 50° = -9.00$$

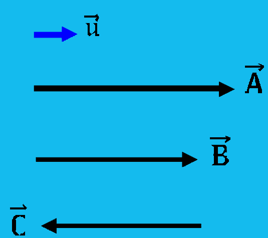
3.2 VECTOR UNITARIO

Vector unitario es aquel cuyo modulo es la unidad. Todo vector paralelo al vector unitario puede expresarse en función del mismo.

Consideremos el vector unitario $\vec{u}$ y los vectores $\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}$ **y** $\vec{\mathbf{C}}$ paralelos entre si y paralelos al vector unitario como se muestra en la figura. El vector unitario debe cumplir la siguiente condición, su modulo es la unidad:

Modulo del vector unitario:

$$|\vec{u}| = 1$$



En la figura y midiendo cada uno de los vectores podemos comprobar que el vector $\vec{A}$ contiene 4 veces al vector unitario $\vec{u}$ por consiguiente el vector $\vec{A}$ puede expresarse como:

$$\vec{A} = 4\,\vec{u}$$

Como el modulo o magnitud del vector unitario es la unidad, el coeficiente o factor 4 corresponde al modulo del vector $\vec{A}$, en relación con el vector $\vec{u}$. De la misma manera se representa al vector $\vec{B}$

$$\vec{B} = 3\,\vec{u}$$

Donde 3 es el modulo del vector $\vec{B}$ tomando como referencia al vector unitario.

En el caso del vector $\vec{C}$ este es paralelo al vector unitario pero su sentido es contrario. Para representar al vector $\vec{C}$ en función del vector unitario, se escribirá de la siguiente manera:

$$\vec{C} = -3\,\vec{u}$$

Donde 3 es el modulo del vector $\vec{C}$. El signo menos indica que el sentido del vector $\vec{C}$ es contrario a la del vector unitario $\vec{u}$.

En términos generales cualquier vector puede ser representado en función de un vector unitario, siempre y cuando el vector sea paralelo al vector unitario. Cualquier vector puede escribirse como:

$$\vec{P} = P\,\vec{u}$$

Donde $\vec{P}$ es el vector cuya modulo es P y $\vec{u}$ el vector unitario. A partir de esta ecuación podemos construir o escribir un vector unitario si conocemos el vector $\vec{P}$ y su magnitud P, usando la siguiente relación:

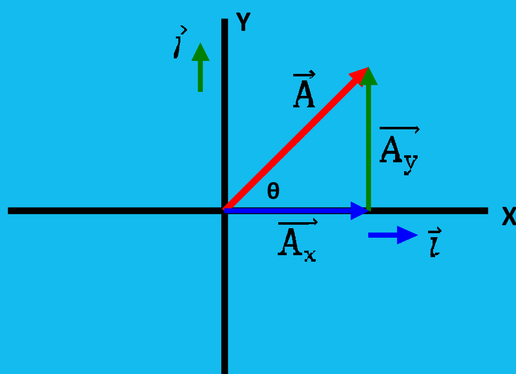
$$\vec{u} = \frac{\vec{P}}{P} \qquad \text{o} \qquad \vec{u} = \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}$$

Estas últimas ecuaciones muestran que los vectores unitarios pueden ser construidos a partir de cualquier vector. El vector unitario será paralelo a dicho vector.

Una condición importante que se desprende del análisis anterior es que solamente podemos escribir un vector en función del vector unitario si solo son paralelos entre si.

3.3 REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR EN UN SCC EN EL PLANO EN FUNCIÓN DE LOS VECTORES UNITARIOS.

La figura muestra un sistema de coordenadas cartesianas en el plano XY. A lo largo de los ejes están dos vectores unitarios. Paralelo al eje X el vector unitario $\vec{\imath}$ y a lo largo del eje Y el vector unitario $\vec{\jmath}$.



$$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = 1$$

En el primer cuadrante del sistema de coordenadas se ubica un vector $\vec{A}$ que hace con el eje X un ángulo θ . El vector $\vec{A}$ puede ser construido como la suma de dos vectores:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

Vectores que son paralelos a los ejes X e Y respectivamente y por tanto perpendiculares entre sí. En la misma figura se puede observar que el modulo del vector $\vec{A}_x$ es igual a la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el eje X y el modulo del vector $\vec{A}_y$ a la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el eje Y.

Como el vector $\vec{A}_x$ es paralelo al vector unitario $\vec{i}$, se puede escribir como:

$$\vec{A}_x = A_x\ \vec{i}$$

Donde A_x es la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el eje X.

$$\vec{A}_y = A_y\ \vec{j}$$

Donde A_y es la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el eje Y.

Expresados los vectores $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ en función de los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$, el vector $\vec{A}$ se puede escribir como:

$$\boxed{\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j}}$$

Esta ecuación representa al vector $\vec{A}$ expresado en un SCC en el plano XY o en función de los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Las proyecciones geométricas A_x y A_y del vector $\vec{A}$ sobre los ejes en la ecuación se les denomina las **componentes** del vector en el eje X e Y respectivamente.

Conocidas las componentes de un vector a lo largo de los ejes X e Y se puede representar al vector en dicho sistema de coordenadas, además de dicha representación podemos encontrar las siguientes relaciones:

$$A = (A^2_x + A^2_y)^{1/2} \qquad \text{y} \qquad \theta = tg^{-1}\,(A_y\ /\ A_x)$$

Ejemplo 5

Considerando los vectores dados en el ejemplo 3, encontrar:

a) La representación de cada uno de los vectores en el sistema de coordenadas cartesianas.

En el ejemplo 3 encontramos las proyecciones de cada vector a lo largo de los ejes X e Y. Usando ese resultado representemos cada vector en el SCC:

$$\vec{A} = 2.68\,\vec{i} + 2.97\,\vec{j},\quad \vec{B} = -3.69\,\vec{i} + 4.73\,\vec{j},\quad \vec{C} = -3.88\,\vec{i} - 7.00\,\vec{j}$$

b) El vector resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

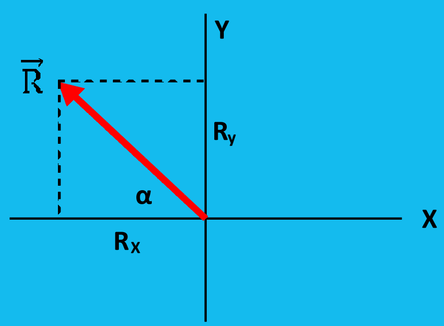
Reemplazando en la ecuación cada uno de los vectores:

$$\vec{R} = (2.68\,\vec{i} + 2.97\,\vec{j}) + (-3.69\,\vec{i} + 4.73\,\vec{j}) + (-3.88\,\vec{i} - 7.00\,\vec{j})$$

Factorizando los vectores unitarios, se obtiene finalmente:

$$\vec{R} = -4.89\,\vec{i} + 0.7\,\vec{j}$$

El vector $\vec{R}$ tiene como componentes $R_x = -4.89$ y $R_y = 0.7$. Usando las componentes del vector y graficándolo en un SCC en el plano XY, vemos que el vector se encuentra en el segundo cuadrante.



c) El ángulo que forma el vector $\vec{R}$ con el eje –X

Si α es el ángulo que forma $\vec{R}$ con el eje –X, su valor se puede encontrar a partir de la relación:
$\alpha = tg^{-1}\,(0.7/\ 4.89) = 8.15^0$

d) El ángulo θ que forma el vector $\vec{R}$ con el eje +X

$\theta = 180^0 - 8.15^0 = 171.85^0$

e) El modulo o la magnitud del vector $\vec{R}$

$$R = ((-4.89)^2 + (0.7)^2)^{1/2} = 4.94 \text{ unidades}$$

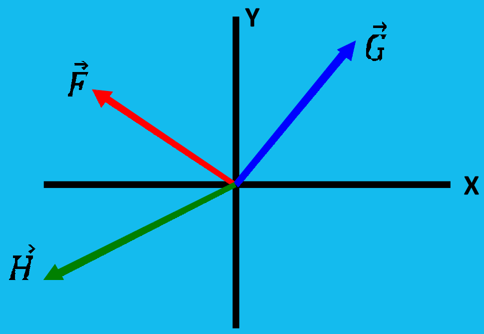
Ejemplo 6

Se tienen tres vectores en el plano XY:

$$\vec{F} = -3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} \qquad \vec{G} = 2\,\vec{i} + 5\,\vec{j} \qquad \vec{H} = -4\,\vec{i} - 6\,\vec{j}$$

a) En que cuadrante están representados cada uno de los vectores en el SCC y graficar aproximadamente su posición.

1. El vector $\vec{F}$ está en el segundo cuadrante y su modulo es 5.00 unidades.
2. El vector $\vec{G}$ está en el primer cuadrante y su modulo es 5.39 unidades.
3. El vector $\vec{H}$ está en el tercer cuadrante y su modulo es 7.21 unidades



b) Hallar el vector $\vec{R} = \vec{F} - 2\,\vec{G} + \vec{H}$.

Reemplazando en $\vec{R}$ los vectores dados:

$$\vec{R} = (-3\,\vec{i} + 4\vec{j}) - 2(2\,\vec{i} + 5\,\vec{j}) + (-4\vec{i} - 6\vec{j}) = -11\,\vec{i} - 12\,\vec{j}$$

El vector $\vec{R}$ está en el tercer cuadrante.

c) El modulo y el ángulo á que hace el vector $\vec{R}$ con el eje X.

$R = ((-11)^2 + (-12)^2)^{1/2} = 16.28$ unidades $\qquad$ á $= 227.49^0$

d) Hallar el vector $\vec{D} = 3\,\vec{F} + \vec{G} - 2\,\vec{H}$

Reemplazando en $\vec{D}$ los vectores dados:

$$\vec{D} = 3\,(-3\vec{i} + 4\vec{j}) + (2\,\vec{i} + 5\vec{j}) - 2\,(-4\vec{i} - 6\,\vec{j}) = \vec{i} + 29\,\vec{j}$$

El vector $\vec{D}$ está en el primer cuadrante.

e) El modulo y el ángulo á que hace el vector $\vec{D}$ con el eje X.

$D = ((1)^2 + (29)^2)^{1/2} = 29.02$ unidades á $= 88.02^0$

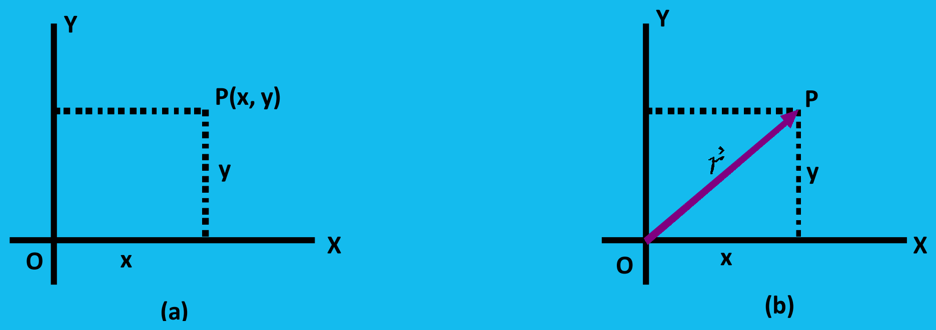
f) El ángulo è que forman entre si los vectores $\vec{R}$ y $\vec{D}$

Dibuje los vectores en el plano XY y obtendrá que el ángulo entre los vectores es 139.47^0 o 220.53°.

3.4 El VECTOR DE POSICIÓN EN EL PLANO XY

En el capítulo 2 de Funciones y Graficas representamos puntos en un SCC y realizamos graficos. Aprendimos que un punto queda definido en el sistema de coordenadas cartesianas en el plano, si se conocen las coordenadas x e y del punto.

La figura (a) muestra el punto P(x, y):



Desde el origen O del Sistema de Coordenadas hasta el punto P trazamos el vector $\vec{r}$ como muestra en la figura (b). Al vector $\vec{r}$ se le denomina **«vector de posición del punto P con respecto al origen O»**.

A partir de la figura (b) podemos representar el vector de posición en el SCC en el plano tomando como sus componentes las coordenadas del punto P. La representación del vector de posición es:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Entonces para cualquier punto del plano podemos trazar entre el origen del sistema de coordenadas y el punto un vector de posición $\vec{r}$ en el que sus componentes son las coordenadas del punto. **El vector de posición siempre va desde el origen al punto.**

Ejemplo 7

En el plano XY se ubican dos puntos P (4, 6) y Q (-3, 7). Escribir los vectores de posición correspondientes a los puntos P y Q.-

Solución

De acuerdo a la definición el vector de posición que va del origen al punto P es:

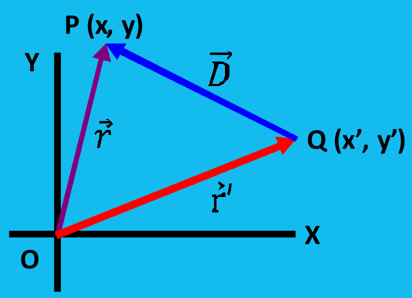
$$\overrightarrow{r_P} = 4\,\vec{i} + 6\,\vec{j}.$$

El vector de posición que va del origen al punto Q es:

$$\overrightarrow{r_Q} = -3\,\vec{i} + 7\,\vec{j}$$

VECTOR DESPLAZAMIENTO EN EL PLANO XY

Consideremos dos puntos en el plano XY, P(x, y) y Q (x', y') que dan lugar a los vectores de posición $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ como se muestra en la figura.



Desde el punto Q al punto P se traza el vector $\vec{D}$. Este nuevo vector que va desde un punto a otro del plano XY se denomina **vector desplazamiento** cuyo valor puede ser hallado mediante la ecuación:

$$\vec{r}\,' + \vec{D} = \vec{r}$$

Despejando se tiene $\vec{D} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

Donde $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ son los vectores de posición de los puntos P y Q respectivamente.

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{r}\,' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

Por tanto el vector desplazamiento es:

$$\vec{D} = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j}$$

Su magnitud: $D = ((x - x')^2 + (y - y')^2)^{1/2}$

Ejemplo 8

Las coordenadas de dos puntos en el plano XY son: P (2.0,-4.0) y Q (-3.0, 3.0), donde sus unidades están dadas en metros. Determine la distancia entre estos dos puntos.

Solución:

Consideremos al vector $\vec{D}$ que va desde el punto P al punto Q. Dicho vector se construye restando las coordenadas del punto Q menos las coordenadas del punto P.

$$\vec{D} = (-3.0 - 2.0)\,\vec{i} + (3.0 + 4.0)\,\vec{j} = -5.0\,\vec{i} + 7.0\,\vec{j}$$

El modulo del vector es la distancia d entre los puntos:

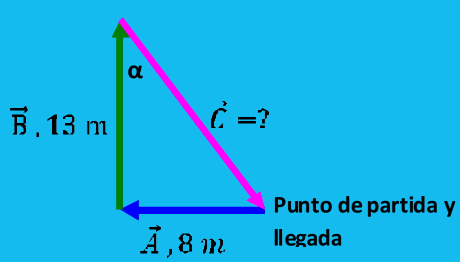
$$d = ((-5.0)^2 + (7.0)^2)^{1/2} = 8.6 \text{ m}$$

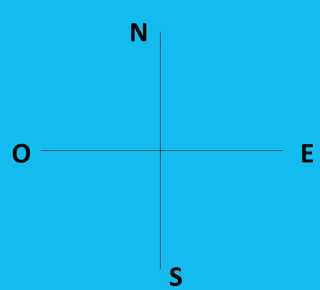
Ejemplo 9

Una partícula realiza tres desplazamientos consecutivos de manera que su desplazamiento total es cero (quiere decir que vuelve al punto de partida). El primer desplazamiento es 8 m hacia el oeste. El segundo es 13 m hacia el norte. Encuentre el modulo y la dirección del tercer desplazamiento.

Solución:

Si el desplazamiento total es cero significa que el punto de partida coincide con el de llegada. Gráficamente tendríamos:





Del gráfico podemos observar que $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$, donde $\vec{C}$ es el vector que contiene la información para dar respuesta al problema.

$$\vec{C} = -(\vec{A} + \vec{B})$$

Representando los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el SCC en el plano XY se tiene:

$$\vec{A} = -8\vec{i} \quad \text{y} \quad \vec{B} = 13\vec{j}$$

El vector $\vec{C}$ es:

$$\vec{C} = 8\vec{i} - 13\vec{j} \quad \text{y su modulo} \quad C = 15.26 \text{ m}$$

El valor del ángulo α es:

$$\alpha = tg^{-1}(8/13) = 31.61^0$$

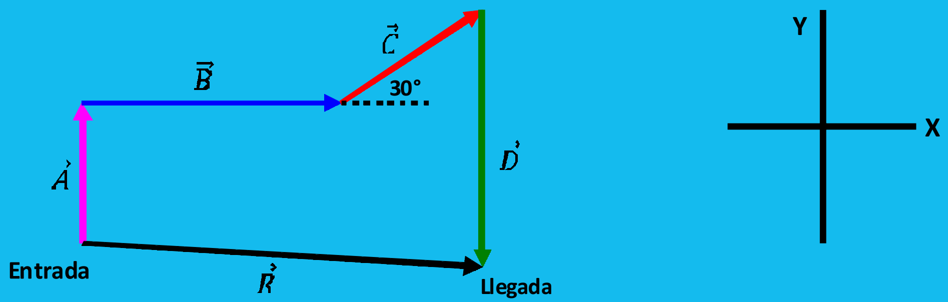
La respuesta al problema es: la magnitud del tercer desplazamiento es de 15.26 m y su dirección es Sur – 31.61^0 – Este (S- 31.61^0- E)

Ejemplo 10

Al explorar una cueva, una espeleóloga parte de la entrada y recorre las siguientes distancias. Ella va 75 m hacia el norte, 250 m hacia el este y 125 m haciendo un ángulo de 30^0 hacia el norte del este, y finalmente 150 m hacia el sur. Encuentre el desplazamiento resultante desde la entrada de la cueva.

Solución:

Construyamos mediante vectores de desplazamiento el recorrido:



Con relación al sistema de coordenadas cartesianas podemos construir cada uno de los vectores. El desplazamiento resultante desde la entrada de la cueva hasta el punto de llegada está dado por el vector $\vec{R}$.

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$

Representando cada uno de los vectores en el sistema de coordenadas cartesianas se tiene:

$\vec{A} = 75\,\vec{j}$ $\quad$ $\vec{B} = 250\,\vec{i}$ $\quad$ $\vec{C} = 108.5\,\vec{i} + 62.5\,\vec{j}$ $\quad$ $\vec{D} = -150\,\vec{j}$

Reemplazando los vectores en la ecuación, el vector desplazamiento $\vec{R}$ es:

$$\vec{R} = 358.25\,\vec{i} - 12.5\,\vec{j}$$

El modulo y dirección del vector $\vec{R}$ es:

R = 358.47 m y su dirección es Sur- 88^0 -Este

Ejemplo 11

Un vector $\vec{A}$ tiene como componentes $A_x = -8.7$cm y $A_y = 15$ cm. El vector $\vec{B}$ tiene como componentes $B_x = 13.2$ cm y $B_y = -6.6$ cm.

a) Cuáles son las componentes del vector $\vec{C}$ para que se cumpla la siguiente relación: $\vec{A} - \vec{B} + 3\,\vec{C} = 0$

Reemplazamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en la ecuación.

$$-8.7\,\vec{i} + 15\,\vec{j} - 13.2\,\vec{i} + 6.6\,\vec{j} + 3\,\vec{C} = 0$$

$$\vec{C} = 7.3\,\vec{i} - 7.2\,\vec{j}$$

Las componentes del vector $\vec{C}$ son 7.3 cm y – 7.2 cm respectivamente. El vector está en el cuarto cuadrante.

b) El ángulo â que hace el vector $\vec{C}$ con el eje Y.

$$\hat{a} = 134.6°$$

c) El ángulo que hacen entre si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Ángulo que hace el vector $\vec{A}$ con el eje X.

$$\alpha_1 = 120.11^0$$

Ángulo que forma el vector $\vec{B}$ con el eje X

$$á_2 = 26.57^0$$

Ángulo entre los vectores:

$$è = á_1 + á_2 = 120.11^0 + 26.57^0 = 146.68^0$$

d) El modulo de la suma $\vec{A} + \vec{B}$

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = 4.5\,\vec{i} + 8.4\,\vec{j}$$

$$S = 9.53 \text{ cm}$$

e) El modulo de la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = -21.9\,\vec{i} + 21.6\,\vec{j}$$

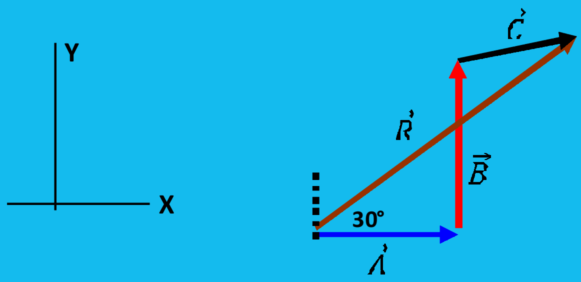
$$D = 30.76 \text{ cm}$$

Ejemplo 12

Una partícula realiza tres desplazamientos consecutivos. El primero es hacia el este 25 m. El segundo es hacia el norte 42 m. Si el desplazamiento resultante es 38 m y está dirigido 30^0 al noreste, ¿cuál es la magnitud y la dirección del tercer desplazamiento?.

Solución:

Dibujemos aproximadamente los desplazamientos de la partícula considerándolos como vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y el desplazamiento resultante como $\vec{R}$.



Representando cada uno de los vectores con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas XY:

$$\vec{A} = 25\,\vec{i} \qquad \vec{B} = 42\,\vec{j} \qquad \vec{R} = 19\vec{i} + 33\,\vec{j}$$

Reemplazando en la ecuación:

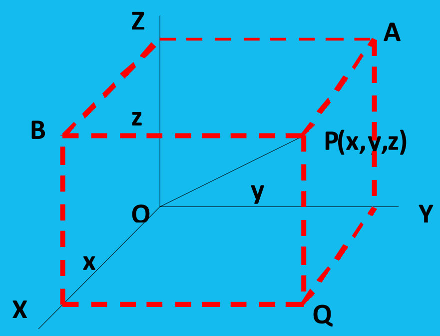
$$25\,\vec{i} + 42\vec{j} + \vec{C} = 19\vec{i} + 33\,\vec{j}$$
$$\vec{C} = -6\vec{i} - 9\vec{j}$$

El tercer desplazamiento tiene una longitud de 10.82 m y su dirección es:

33.7^0 suroeste o S - 33.7^0 – O

3.5 EL SISTEMA DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

Hasta ahora hemos representado a los vectores en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, considerando la existencia de dos ejes de referencia perpendiculares. Para representar al vector en el espacio debemos escoger un sistema de coordenadas cartesiano en el espacio, el cual comprende tres ejes mutuamente perpendiculares entre sí a los que denominaremos ejes X, Y, Z como se muestra en la figura.



Cada par de ejes forma un plano, así tenemos los planos XY, YZ y ZX. Desde el punto P ubicado en el espacio se trazan rectas perpendiculares a los planos y con ellas se forma un paralelepípedo (en color rojo) donde las aristas tienen longitud x, y, z.

En la figura x, y, z corresponden a las coordenadas del punto P y se escribe P(x, y, z). En la misma figura podemos ver otros puntos cuyas coordenadas son:

- El punto A esta en el plano YZ y sus coordenadas son A (0, y, z).
- El punto B está en el plano ZX y sus coordenadas son B (x, 0, z).
- El punto Q está en el plano XY y sus coordenadas son Q (x, y, 0).

Para fijar un punto en el espacio debe conocerse las coordenadas correspondientes a cada uno de los ejes; por ejemplo el punto P(3,4,5) significa que la coordenada tomada sobre el eje X es 3, sobre el eje Y es 4 y sobre el eje Z es 5. En general cualquier punto P(x, y, z) puede ser ubicado si conocemos los valores correspondientes a x, y, z.

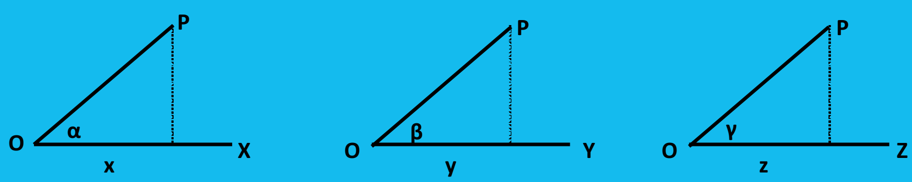
El paralelepípedo mostrado es una figura geométrica en el espacio, cuyas caras son paralelas y perpendiculares entre sí. Si entre el punto O (origen del sistema de coordenadas) y el punto P trazamos el segmento OP (diagonal del paralelepípedo) su longitud, conocida por la geometría es:

$$OP = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \qquad (1)$$

Donde x, y, z son las aristas del paralelepípedo pero también pueden ser observadas como las proyecciones del segmento OP sobre cada uno de los ejes.

La proyección sobre el eje X es x, la proyección sobre el eje Y es y, la proyección sobre el eje Z es z. Además puede observarse que la diagonal OP hace con cada uno de los ejes ángulos a los que se denominan:

- Angulo de OP con el eje X se denomina á.
- Angulo de OP con el eje Y se denomina â.
- Angulo de OP con el eje Z se denomina ã.



Por la geometría sabemos que cada una de las proyecciones de OP sobre los ejes es:

$x = OP \text{ Cos } \alpha$ $\qquad$ $y = OP \text{ Cos } \beta$ $\qquad$ $z = OP \text{ Cos } \gamma$

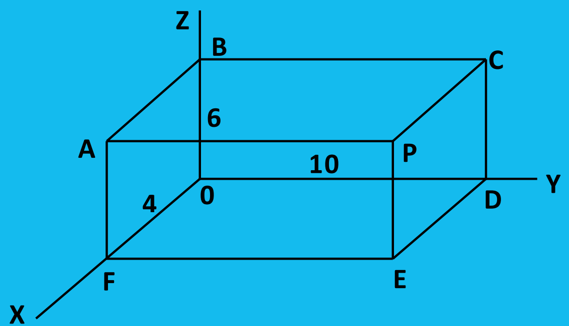
Los que reemplazados en la ecuación (1) se obtiene la siguiente relación entre los ángulos:

$$\text{Cos}^2\ \alpha + \text{Cos}^2\ + \text{Cos}^2\ \gamma = 1 \qquad (2)$$

En geometría se conocen como los cosenos directores de los ángulos á, â y ã.

Ejemplo 13

Se tiene un paralelepípedo cuyas aristas valen 4 m, 6 m y 10 m respectivamente y cuyo vértice se ubica en el origen de un SCC en el espacio como se muestra en la figura. Usando la geometría encontrar.



a) Cuáles son las coordenadas de cada uno de los vértices del paralelepípedo con respecto al SCC.

Observando la figura del paralelepípedo y los ejes escogidos del SCC tenemos:

A (4, 0, 6)	B (0, 0, 6)	C (0, 10, 6)	P (4, 10, 6)
O (0, 0, 0)	D (0, 10, 0)	E (4, 10, 0)	F (4, 0, 0)

b) La longitud de la diagonal OP.

$$\mathrm{OP} = \sqrt[2]{4^2 + 10^2 + 6^2} = 12.33 \text{ m}$$

c) La longitud de la diagonal FP.

$$\mathrm{FP} = \sqrt[2]{10^2 + 6^2} = 11.66 \text{ m}$$

d) La longitud de la diagonal BP.

$$\mathrm{BP} = \mathrm{OE} = \sqrt[2]{4^2 + 10^2} = 10.77 \text{ m}$$

e) El ángulo de BP con BC.

è = tg^{-1} (4/10) = 21.8°

f) El ángulo de OP con el eje X.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{12.33}\right) = 71.07°$$

g) El ángulo de BE con OE.

$$\theta = \tan^{-1}(6/10.77) = 29.12°$$

h) El ángulo de OP con el eje Y.

$$\beta = \cos^{-1}(10/12.33) = 35.8°$$

i) El volumen del paralelepípedo.

Volumen = a.b.c

donde a, b, c son las aristas del paralelepípedo

Volumen = 240 m^3

j) El área total del paralelepípedo.

Área = 2 ab + 2 bc + 2 ac = 248 m^2

REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR EN EL SISTEMA DE COORDENADAS EN EL ESPACIO.

Consideremos un SCC en el espacio y dibujemos un vector $\vec{A}$ entre el origen O y el punto P como se muestra en la figura. De la misma manera que el segmento OP, el vector $\vec{A}$ tiene componentes a lo largo de los ejes X, Y, Z. Dichas componentes se denominan:

- A_x componente en el eje X.
- A_y componente en el eje Y.
- A_z componente en el eje Z.

Si el modulo del vector $\vec{A}$ es A; las proyecciones (componentes) del vector sobre cada eje deben ser por geometría:

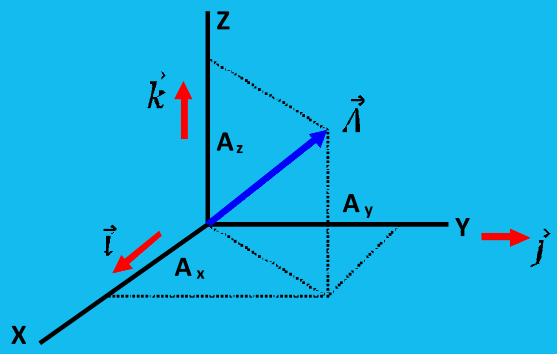
$A_x = A \cos \alpha$ $\qquad$ $A_y = A \cos \beta$ $\qquad$ $A_z = A \cos \gamma$

A partir de estas ecuaciones se encuentra los ángulos que hace el vector con cada uno de los ejes:

$$\alpha = \cos^{-1}(A_x/A)$$

$$\beta = \cos^{-1}(A_y/A)$$

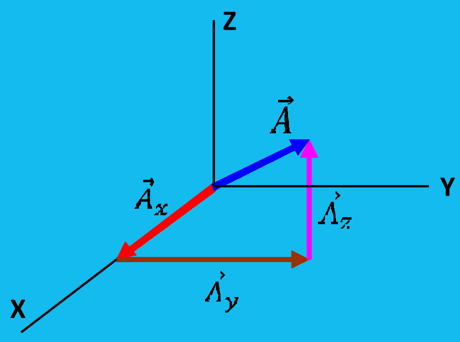
$$\gamma = \cos^{-1}(A_z/A)$$



De la misma manera que en el SCC en el plano consideremos que a lo largo de cada uno de los ejes existen los vectores unitarios

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ como se muestran en la figura.

A lo largo de cada eje construimos los vectores $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$ cuyos módulos son respectivamente A_x, A_y y A_z. Los vectores son paralelos a los ejes y a los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



La figura muestra que cada vector puede expresar en función de los vectores unitarios de la siguiente manera:

$$\vec{A}_x = A_x \vec{i} \qquad \vec{A}_y = A_y \vec{j} \qquad \vec{A}_z = A_z \vec{k}$$

Usando el método del polígono para la suma grafica de los vectores se obtiene:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

Reemplazando cada uno de los vectores en función de los vectores unitarios se tiene:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

La ecuación representa al vector $\vec{A}$ en un sistema de coordenadas cartesiano en el espacio en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

El modulo del vector $\vec{A}$ es por geometría:

$$A = (A^2_x + A^2_y + A^2_z)^{1/2}$$

Ejemplo 14

Se tienen tres vectores expresados en un SCC en el espacio.

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} \qquad \vec{B} = -4\vec{i} - 6\vec{j} \qquad \vec{C} = 5\vec{j} + 6\vec{k}$$

Encontrar:

a) Los ángulos que hace el vector $\vec{A}$ con cada uno de los ejes.

El modulo del vector $\vec{A}$ es:

$$A = (3^2 + 2^2 + (-5)^2)^{1/2} = 6.16$$

El ángulo del vector con el eje X es:

$$á = Cos^{-1} (3/6.16) = 60.9°$$

El ángulo del vector con el eje Y es:

$$â= Cos^{-1} (2/6.16) = 71.1°$$

El ángulo del vector con el eje Z es:

$$ã = Cos^{-1} (-5/6.16) = 144.3°$$

b) Hallar el vector $\vec{R}$ tal que:

$$\vec{R} = 3\,\vec{A} - 2\,\vec{B} - \vec{C}$$

Reemplazando los vectores $\vec{A}, \vec{B},$ y $\vec{C}$ encontramos:

$$\vec{R} = 17\,\vec{i} + 13\,\vec{j} - 21\,\vec{k}$$

c) El ángulo que hace el vector $\vec{R}$ con el eje Z.

ã = Cos^{-1} (- 21/29.98) = 134.5°

d) Un cuarto vector $\vec{D}$ tal que sumado con los otros tres el resultado sea cero.

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = 0$$

Despejando de la ecuación el vector $\vec{D}$ se tiene:

$$\vec{D} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

Ejemplo 15

Se tienen dos vectores

$$\vec{A} = -2\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k} \quad y \quad \vec{B} = 5\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$$

Encontrar:

a) Un tercer vector $\vec{C}$ tal que $3\,\vec{A} + 2\,\vec{B} - \vec{C} = 0$.

Reemplazando en la ecuación los valores de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tendremos:

$$\vec{C} = 4\,\vec{i} + 9\,\vec{j} - 13\,\vec{k}$$

b) ¿Cuál es el modulo de los vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$?

A = 3.74 B = 6.16 C = 16.31

EL VECTOR DE POSICIÓN EN EL ESPACIO

El vector de posición en el espacio tiene el mismo significado que el vector de posición de un punto en el plano. Si consideramos un punto del espacio de coordenadas P(x, y, z), podemos trazar el vector de posición **r** del punto P con respecto al origen O del sistema de coordenadas, tal que:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Donde x, y, z son las componentes del vector a lo largo de cada uno de los ejes respectivamente.

3.6 El VECTOR DESPLAZAMIENTO EN EL ESPACIO

Si consideramos dos puntos del espacio P(x, y, z) y Q (x', y', z'), entre dichos puntos trazamos el vector desplazamiento $\vec{D}$ que va por ejemplo, desde el punto Q al punto P y cuyo valor es (coordenadas del punto P menos las coordenadas del punto Q):

$$\vec{D} = (x - x')\,\vec{i} + (y - y')\,\vec{j} + (z - z')\,\vec{k}$$

Su modulo es:

$$D = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

El modulo es la distancia entre los dos puntos P y Q.

Ejemplo 16

Se tienen tres puntos en el espacio cuyas coordenadas son: A (-3, 6, 8), B (0, -4, 5) y C (-2, 0, 0) y sus unidades están dadas en metros. Los tres puntos se encuentran en un plano y forman un triangulo cuyos vértices son A, B y C. Encontrar:

1. El perímetro del triángulo.

Los lados de cada triangulo son:

AB = 10.86 m   BC = 6.71 m   CA = 10.05 m

El perímetro del triángulo es: 27.62 m.

2. El vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = 3\,\vec{i} - 10\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{i} - 6\,\vec{j} - 8\,\vec{k}$$

3. Hallar el área del triangulo.

Para encontrar el área del triángulo usaremos la formula de Heron que se escribe:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde a, b y c son los lados del triángulo y s el semiperímetro:

$$s = \frac{1}{2}\,(a+b+c)\,.$$

Reemplazando los valores hallados para los lados del triángulo se tiene:

Área = 32.98 m^2

3.7 PRODUCTO DE VECTORES

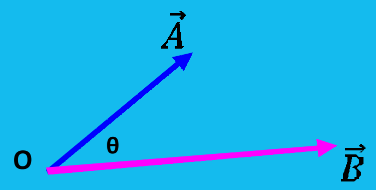
En el álgebra vectorial existen dos tipos de producto entre vectores, el producto escalar y el producto vectorial.

PRODUCTO ESCALAR. DEFINICIÓN.

La operación producto escalar entre dos vectores está definido por la ecuación:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\,\cos\theta$$

Donde $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores cualquiera y A y B sus módulos. El ángulo θ es el que hacen los vectores entre sí cuando son trasladados a un origen común O, como se muestra en la figura:



La ecuación que define el producto escalar tiene las siguientes propiedades:

1. El resultado de la operación producto escalar es un escalar o un número.

2. El producto escalar es conmutativo: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

3. Si el ángulo $\theta = 90^0$, los vectores son perpendiculares entre sí. El producto escalar es nulo: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

4. Si el ángulo $\theta = 0^0$, los vectores son paralelos y en el mismo sentido. El producto escalar es el producto de sus módulos: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B$

5. Si el ángulo $\theta = 180^0$, los vectores son paralelos pero de sentido contrario. El producto escalar es: $\vec{A} \cdot \vec{B} = -A\,B$

6. Si se conocen los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se puede hallar el ángulo que hacen los vectores a partir de la definición del producto escalar:

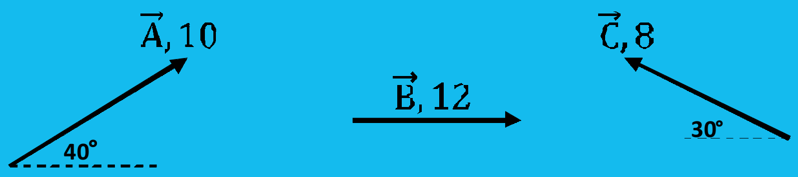
$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A\,B}$$

7. La proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ es $A \cos\theta$ es decir:

Proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ = $(\vec{A} \cdot \vec{B})/B$

Ejemplo 17

La figura muestra tres vectores en el plano. Se conocen sus módulos y los ángulos que hacen con la horizontal.



Hallar:

a) El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 10\ x\ 12\ \cos 40° = 91.93$$

b) El producto escalar $\vec{B} \cdot \vec{C}$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = 12x8\ \cos 150° = -83.14$$

c) El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{C}$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = 10x8\ \cos 110° = -27.36$$

PRODUCTO ESCALAR CUANDO LOS VECTORES ESTÁN REPRESENTADOS EN UN SCC.

Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están representados en un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, estos se escriben de la siguiente manera:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

Donde A_x, A_y.....etc. son las componentes de cada uno de los vectores a lo largo de los ejes coordenados. Si los multiplicamos escalarmente tendremos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x(\vec{i} \cdot \vec{i}) + A_xB_y(\vec{i} \cdot \vec{j}) + A_xB_z(\vec{i} \cdot \vec{k}) + A_yB_x(\vec{j} \cdot \vec{i})$$
$$+ A_yB_y(\vec{j} \cdot \vec{j}) + A_yB_z(\vec{j} \cdot \vec{k}) + A_zB_x(\vec{k} \cdot \vec{i}) + A_zB_y(\vec{k} \cdot \vec{j})$$
$$+ A_zB_z(\vec{k} \cdot \vec{k})$$

Aplicando las propiedades del producto escalar a los vectores unitarios:

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ Por ser vectores paralelos entre sí.

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ Por ser vectores perpendiculares entre sí.

Reemplazando en la ecuación el resultado del producto escalar de los vectores unitarios se tiene finalmente:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Ecuación que permite hallar el producto escalar de dos vectores que se encuentran representados en un SCC.

Ejemplo 18

Se tienen los vectores

$$\vec{A} = -3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = 2\,\vec{i} - 5\,\vec{k} + 4\,\vec{k}.$$

Encontrar:

a) El modulo de cada uno de los vectores:

A = 5.39 B = 6.71

b) El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -6 - 20 + 8 = -18$$

c) El ángulo que forman entre si los vectores $\vec{\mathrm{A}}$ y $\vec{\mathrm{B}}$

$$\cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{B}/A\ B$$

Cos θ = - 18 / (5.39x6.71)

θ = 119.85^0

d) El ángulo que hace el vector $\vec{A}$ con el eje X.

A lo largo del eje X esta el vector unitario $\vec{\imath}$. El ángulo solicitado es el que hace el vector $\vec{A}$ con el vector $\vec{\imath}$ **.**

El producto escalar del vector $\vec{A}$ con el vector unitario $\vec{\imath}$ es:

$$\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{\mathrm{i}} = -3$$

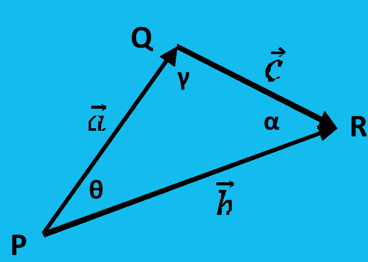
θ = 123.82^0

Ejemplo 19

Se tienen tres puntos en el espacio, P (-2, 3,-2), Q (1, -1, 4) y R (0. -3, 0) metros, los cuales forman un triángulo. Encontrar:

a) La longitud de cada lado del triángulo.

La figura muestra los tres puntos que necesariamente deben encontrarse sobre un plano.



Entre los puntos P y Q podemos construir el vector **a** y entre P y R el vector **b** y entre Q y R el vector **c**:

$$\vec{a} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$
$$\vec{b} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$
$$\vec{c} = -1\,\vec{i} - 2\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$$

La longitud de cada lado del triángulo es el modulo de cada vector:

a = 7.81 m b = 6.63 m c = 4.58 m

b) Los ángulos internos del triángulo.

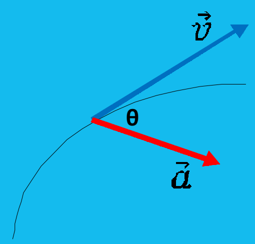
El valor del ángulo θ = 35.8^0
El valor del ángulo α = 86.22^0
El valor del ángulo γ = 57.92^0

c) El área del triángulo. A = ½ b h

h = a Sen è = 5.57 m Area = 18.46 m^2

Ejemplo 20

La trayectoria que sigue una partícula en el plano XY es una curva como se muestra en la figura. La velocidad es un vector tangente a la trayectoria y en el instante mostrado tiene el valor $\vec{v} = 16\,\vec{i} + 20\,\vec{j}\ m/s$ y su aceleración es $\vec{a} = 4\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$ m/s^2. Encontrar:



a) El ángulo que forman la velocidad y la aceleración en ese instante.

$\vec{v} \cdot \vec{a} = 4$ v = 25.61 m/s a = 5.0 m/s^2

$$\theta = \cos^{-1}(4/25.61x5.0) = 88°$$

b) La proyección de la aceleración a lo largo de la velocidad. También se le conoce como la aceleración tangencial.

$$a_t = a \cos\theta = 0.17 \text{ m/s}^2$$

c) El vector aceleración tangencial es paralelo a la velocidad por consiguiente la aceleración tangencial se puede escribir como.

$$\vec{a_t} = a_t \vec{u}$$

Donde $\vec{u}$ es el vector unitario paralelo a la velocidad

El vector unitario $\vec{u}$ es igual a:

$$\vec{u} = \vec{v}/v = 0.62\,\vec{i} + 0.78\,\vec{j}$$

$$\vec{a_t} = 0.11\,\vec{i} + 0.13\,\vec{j} \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 21

En el plano XY esta una línea recta cuya ecuación es y = 4 x + 12. Sobre el mismo plano está ubicado un vector fuerza $\vec{F} = 35\,\vec{i} + 20\,\vec{j}$ Newton. Hallar:

a) Un vector paralelo a la línea recta.

Para construir un vector paralela a la línea recta, tomamos dos puntos de la recta. Por ejemplo P (2, 20) y Q (4, 28) y tenemos al vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = 2\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$$

b) El ángulo que hacen el vector $\vec{F}$ y $\overrightarrow{PQ}$

A partir del producto escalar el ángulo es:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{230}{\sqrt{68}\sqrt{1625}}\right) = 46.2°$$

c) La proyección del vector $\vec{F}$ sobre la línea recta:

La proyección sobre la línea recta es: F Cos è = 27.9 Newton.

Problemas Capítulo III

Algunos de los problemas han sido tomados del archivo de los problemas de Física Básica del Área de Física del Departamento de Ciencias de la URP. En todos los cálculos que realice tenga en consideración el número de cifras significativas que debe tener la respuesta.

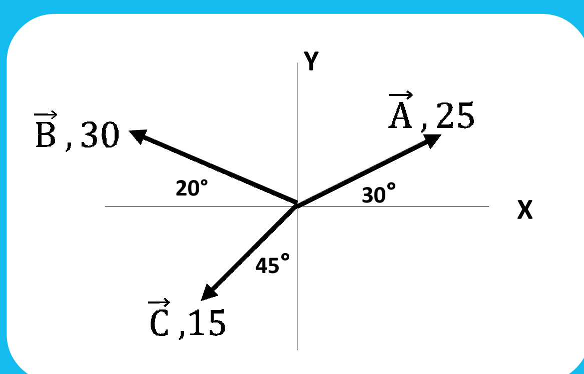
Problema 1

Un caminante sale del punto A y recorre 25 Km en la dirección N-30^0-O hasta el punto B. Sale de B y recorre 25 Km hasta C en la dirección Este. Sale de C y recorre 50 Km al Sur hasta el punto D y desde ahí 25 Km al Este hasta el punto E.

a) Que distancia hay entre A y E.
b) En qué dirección se encuentra el punto E respecto de A.

Problema 2

La figura muestra tres vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ en el plano XY.



a) Representar cada uno de los vectores en el SCC en el plano.

b) El vector resultante $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ y su ubicación en el plano.

c) El ángulo que forma el vector $\vec{S}$ con el eje X.

d) Encontrar el vector $\vec{R} = 2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C}$ y su ubicación en el plano.

e) El ángulo que forma el vector $\vec{R}$ con el eje X.

f) El ángulo que forman entre si los vectores $\vec{R}$ y $\vec{S}$

g) La magnitud del vector $\vec{D} = \vec{R} - \vec{S}$

Problema 3

Sobre un cuerpo se aplican dos fuerzas. La primera de 50 Newton que hace un ángulo de 65^0 con la horizontal y la segunda de 30 Newton que hace un ángulo de 20^0 con la horizontal. Encontrar:

a) La magnitud de la fuerza resultante.
b) El ángulo que hace la fuerza resultante con la horizontal.

Problema 4

En el plano XY están los puntos A (-3,2) m, B (4,7) m y C (5,-6) m, encontrar:

a) Los vectores de posición de cada uno de los puntos.
b) La distancia AB, BC y CA.
c) Los ángulos internos del triángulo ABC.
d) El área del triángulo.

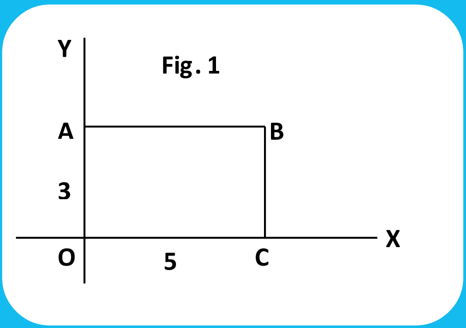
Problema 5

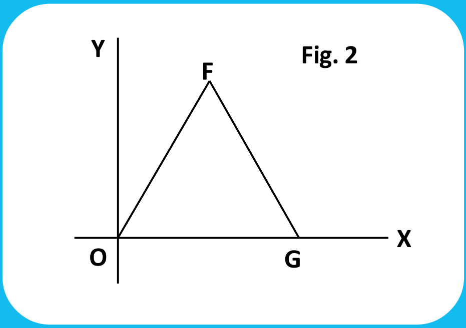
En el primer cuadrante de un sistema de coordenadas XY se encuentra un vector $\vec{A}$ de 9 m de longitud y ángulo de 35^0 con el eje Y. En el segundo cuadrante un vector $\vec{B}$ de 12 m de longitud y ángulo de 27^0 con el eje Y, y en el cuarto cuadrante un vector $\vec{C}$ de 15 m de longitud que hace un ángulo de - 36^0 con el eje X. Encontrar:

a) La representación de los vectores en el SCC en el plano XY.
b) El vector resultante.
c) El ángulo que forman los vectores $\vec{P} = \vec{A} - \vec{B}$ y $\vec{Q} = \vec{B} - \vec{C}$

Problema 6

La figura 1 muestra un rectángulo cuyos lados miden 3 m y 5 m y la figura 2 un triángulo equilátero de 25 cm de lado. Encontrar:





Con respecto al SCC en el plano XY encontrar:

a) Los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.

b) El ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{CB}$

c) El ángulo que forman las diagonales OB y AC

d) Los vectores $\overrightarrow{OF}$ y $\overrightarrow{FG}$

e) El ángulo que forman los segmentos OF y OG.

Problema 7

Se tienen los puntos del espacio P (2, 3, 4), Q (-1, 5, -3), R (0, 2, -1) y S (1, 0, 1) en metros. Encontrar:

a) Los vectores de posición correspondientes a cada punto.

b) Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ y sus módulos.

c) El vector resultante de la suma de los vectores $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{PS}$ y el valor de su modulo.

d) La longitud de PQRSP.

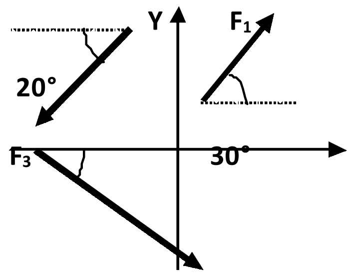
Problema 8

La figura muestra tres vectores en un SCC en el plano XY cuyas magnitudes o módulos son: F_1 = 5N, F_2 = 15N y F_3 = 10N.

a) Expresar cada vector en función de los vectores unitarios i y j.

b) Determinar el vector: $2\left(\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}\right) + \overrightarrow{F_3}$

c) Determinar el producto: $\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_3}$

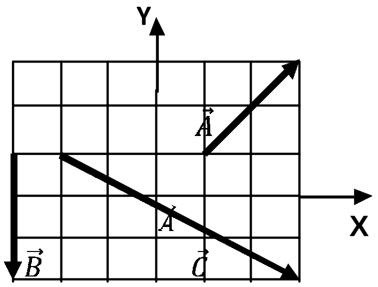


Problema 9

En la figura se muestra los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$. Si el lado del cuadrado vale 1m.

a) Expresar cada vector en función de los vectores unitarios i y j.

b) Determinar un cuarto vector $\vec{D}$ tal que $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} - 2\,\vec{C}$



Problema 10

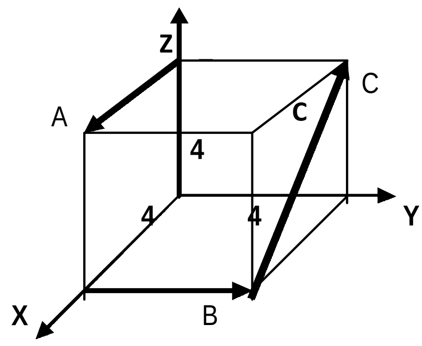
Dado los vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ que se muestran en la figura, determinar:

a) La representación en el SCC cada uno de los vectores.

b) El vector $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

c) El vector unitario en la dirección del vector $\vec{R}$.

d) El ángulo entre el vector R y el vector $\vec{D} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$



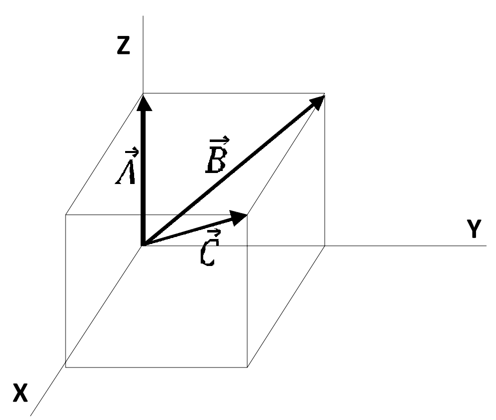
Problema 11

En la figura se muestran un cubo de arista 2 cm y los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$.
Encontrar:

a) El vector $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

b) El ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{C}$.

c) Un vector de modulo 30 cm a lo largo del vector $\vec{B}$



Problema 12

Dado los siguientes vectores:

$$\vec{A} = -3\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}\,, \qquad \vec{B} = 2\,\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 2\,\vec{k}\,, \qquad \vec{C} = 4\,\vec{\jmath} + \ 3\,k$$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $\vec{R} = 2\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C}$ y el ángulo que forma con el eje X.

b) $\vec{S} = \vec{A} - 2\vec{B}$ y el ángulo que forma con el eje Y.

c) $\vec{D} = \vec{R} - \vec{S}$.

d) El ángulo entre los vectores $\vec{R}$ y $\vec{S}$.

Problema 13

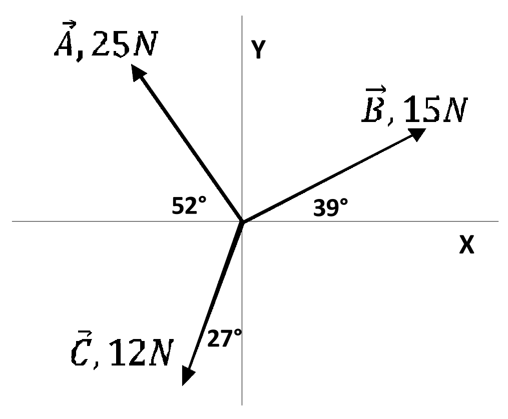
La figura muestra tres vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ cuyas unidades están dadas en Newton, ubicados en un sistema de coordenadas cartesiano en el plano XY. Determinar:

a) Los vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ en el SCC.

b) El vector $\vec{R} = 3\vec{A} - 2\vec{C} + \vec{B}$.

c) El ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{R}$

d) El vector $\vec{P} = (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - 3\vec{B}$



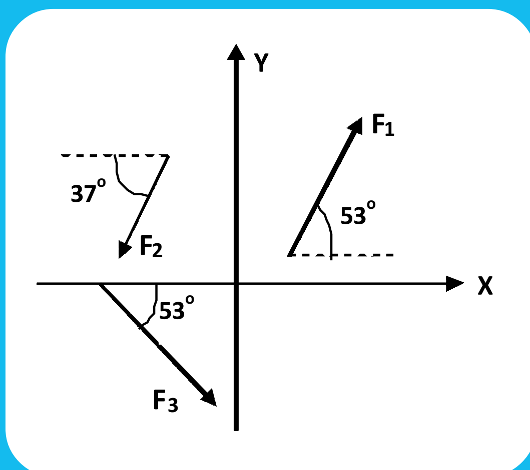
Problema 14

La figura muestra tres vectores en el plano XY y sus unidades están dadas en Newton. Sus módulos son: $F_1 = 5$, $F_2 = 10$ y $F_3 = 15$. Determinar:

a) $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ en función de los vectores unitarios y .

b) El vector $2\vec{F}_1 \square \vec{F}_2 \square \frac{1}{2}\vec{F}_3$

c) Un vector unitario en la dirección del vector $\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_3\right)$



Problema 15

Se tienen cuatro puntos cuyas coordenadas son P (-1, 3, 0), Q (0, 0,-1), R (2,-3,1) y S (-4, 0,1) metros. Encontrar:

a) El vector $\vec{A}$ que va desde el punto P a Q.

b) El vector $\vec{B}$ que va desde el punto Q a R.

c) El vector $\vec{C}$ que va desde el punto S a R.

d) Realizar la siguiente operación: $\vec{R} = (\vec{A} \cdot \vec{B})\, \vec{C} - 3\,(\vec{B} + \vec{C})$

e) El ángulo que forma el vector $(\vec{A} + \vec{B})$ con el vector $\vec{C}$.

Problema 16

Se dan los siguientes vectores:

$$\vec{A} = 3\hat{i} \square 2\hat{j} \square 4\hat{k}$$
$$\vec{B} = \square 4\hat{i} \square 3\hat{k}$$
$$\vec{C} = 3\hat{i} \square \hat{k}$$

Encontrar:

a) El vector $\vec{R} = 3\vec{A} \square 2(\vec{B} \square 3\vec{C})$

b) El vector $\vec{S} = (\vec{A} \square \vec{B})\vec{C} \square (\vec{B} \square \vec{C})\vec{A}$

c) El ángulo entre los vectores $\vec{R}$ y $\vec{S}$.

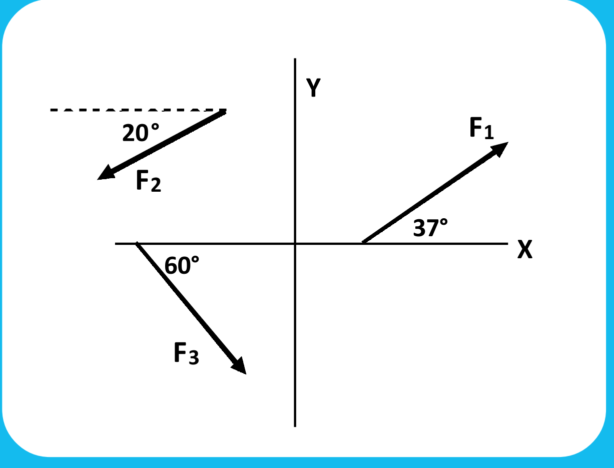
Problema 17

Dado los vectores en el plano XY y cuyos módulos son $F_1 = 5\sqrt{2}\,\mathrm{N}$, $F_2 = 10\mathrm{N}$ y $F_3 = 20\mathrm{N}$

a) Expresar cada vector en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

b) Determinar el vector $2(\vec{F}_1 \square \vec{F}_2)$

c) Determinar un vector unitario en la dirección del vector $(\vec{F}_1 \square \vec{F}_3)$



Problema 18

Dado los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que cumplen con las siguientes relaciones:

$$\vec{A} \square \vec{B} \square 2\hat{i} \square 3\hat{j}$$

$$\vec{A} \square \vec{B} \square 4\hat{i} \square 5\hat{j}$$

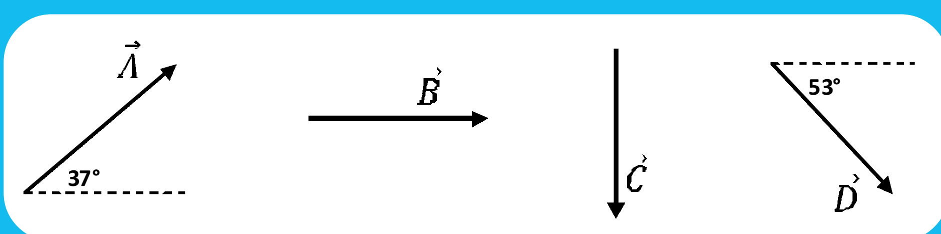
Determinar:

a) Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

b) Un vector unitario en la dirección y sentido del vector $\vec{P} \square \vec{A} \square 2\vec{B}$

Problema 19

En el plano XY se muestran los vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C},$ y $\vec{D}$ cuyos módulos son todos iguales a 10 unidades.



a) La representación de cada vector, en función de los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$

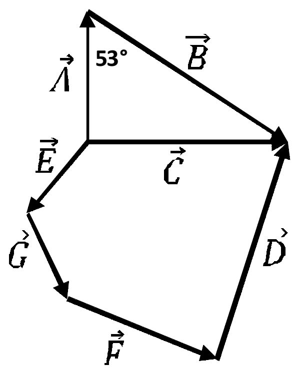
b) El vector: $\vec{R} = 2\,\vec{A} - 2\,\vec{D} + \vec{C} - \vec{B}$

c) El vector: $\vec{Q} = \square(\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{C} + \vec{D})\square\vec{D}$.

d) El ángulo entre los vectores $\vec{R}$ y $\vec{A}$.

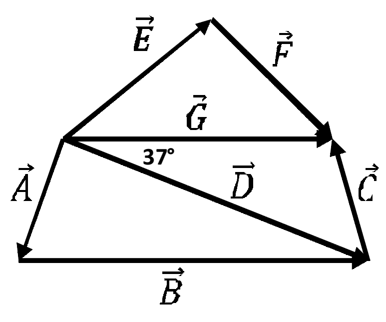
Problema 20

Determinar el modulo del vector resultante de los vectores mostrados en la figura. El modulo del vector $\vec{B}$ es igual a 15 unidades y el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{C}$ es 90°.



Problema 21

Dado los vectores que se muestran en el plano de la figura, determinar el modulo del vector resultante, si el modulo de los vectores $\vec{D}$ y $\vec{G}$ son 5 y 3 unidades respectivamente.



Capítulo IV

LEYES DE NEWTON

INTRODUCCIÓN

El conjunto de leyes que permite explicar el equilibrio o el movimiento de las partículas, o de los cuerpos rígidos, debido a las fuerzas que actúan sobre ellos fueron enunciadas por el físico ingles Isaac Newton (1642-1727) quien estableció los principios básicos de la mecánica (leyes de la mecánica).

El concepto de fuerza es lo primero que debemos comprender para poder entender las leyes de Newton. Todos estamos familiarizados con el concepto de fuerza de acuerdo a nuestra experiencia diaria. Cuando alguien empuja o tira de un objeto, independientemente de si se mueve o no, concluimos que sobre el objeto se está aplicando una fuerza. Una definición más apropiada de fuerza es considerar que es el resultado de la interacción de dos objetos.

Basado en observaciones astronómicas del movimiento de los planetas y de los cuerpos en el espacio, cuyas mediciones realizaron astrónomos anteriores y contemporáneos a él, Newton estableció los principios fundamentales de la mecánica. Estas observaciones le permiten postular la no necesidad del contacto físico entre los cuerpos para que uno ejerza fuerza sobre el otro.

Un ejemplo es el movimiento que realiza la tierra alrededor del sol o el movimiento de la luna alrededor de la tierra. Las fuerzas que se ejercen son consideradas como una fuerza a distancia que ejerce uno sobre el otro y entre sí. Este tipo de fuerzas a distancia las denomino fuerzas gravitacionales y la medición de las trayectorias, velocidades y distancias le permiten descubrir la Ley de Gravitación Universal.

Otro principio planteado por Newton, está referido al movimiento que un objeto realiza con velocidad constante a lo largo de una línea recta. Newton plantea que dicho objeto no requiere de ninguna fuerza actuando sobre él para mantener dicho movimiento con velocidad constante; pero si se observa que el objeto cambia su velocidad, sobre el debe estar actuando una fuerza.

Este planteamiento lo lleva a establecer su primer principio. Para que un cuerpo se acelere y/o se mueva a lo largo de una trayectoria curva es necesario que sobre el actúe una fuerza resultante. Si se mueve con velocidad constante y a lo largo de una línea recta la fuerza resultante es nula.

La fuerza necesaria para acelerar a un cuerpo se denomina fuerza neta o fuerza resultante. Una partícula o un cuerpo rígido sobre el cual actúan varias fuerzas, recordando que la fuerza es una magnitud física vectorial, la fuerza resultante o neta será la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas sobre ella.

Cuando una partícula se mueve con velocidad constante a lo largo de una línea recta o se encuentra en reposo (su velocidad es cero) se dice que **la partícula está en equilibrio**.

En este capítulo vamos a conocer las condiciones necesarias y suficientes para que una partícula o un cuerpo rígido se encuentren en equilibrio, como lo es definido por Newton.

CLASIFICACIÓN DE LAS FUERZAS

En física hay varias formas de clasificar a las fuerzas. En esta oportunidad solo consideraremos dos de ellas:

PRIMERA CLASIFICACIÓN DE LAS FUERZAS

De acuerdo a como actúan las fuerzas sobre los cuerpos o las partículas, se les denomina:

- **fuerzas de contacto.**
- **fuerzas de acción a distancia.**

Las **fuerzas de contacto** son las que se aplican directamente sobre el cuerpo o la partícula, por ejemplo cuando empujamos o jalamos, cuando golpeamos, cuando estiramos un resorte, cuando jalamos de una cuerda etc.

Las fuerzas de **acción a distancia** son las que se ejercen entre dos cuerpos sin que entre ellos exista contacto físico, por ejemplo la fuerza de atracción que se ejerce entre los cuerpos celestes (planetas, meteoritos, satélites, estrellas etc.), fuerza que se denomina de **atracción gravitatoria** y que es debido a la masa de los cuerpos. La ecuación planteada por Newton para el modulo o la magnitud de la fuerza de atracción gravitatoria es:

$$F_g = G\frac{Mm}{d^2}$$

Donde F_g es la fuerza de atracción gravitatoria, M y m son las masas de los cuerpos, d la distancia de separación y G la constante de gravitación universal.

$$G = 6.672\text{x}10^{-11}\ \text{N.m}^2/\text{kg}^2 \quad \text{en el SI}$$

También existen otras fuerzas de acción a distancia en el mundo físico por ejemplo la que se ejerce entre partículas cargadas eléctricamente; la fuerza que se ejerza entre dos imanes etc.

SEGUNDA CLASIFICACIÓN DE LAS FUERZAS

Las fuerzas de contacto a su vez pueden ser denominadas:

- **fuerzas concurrentes**
- **fuerzas no concurrentes.**

Las fuerzas concurrentes se llaman a si por que los vectores que las representan al ser prolongadas sus líneas de acción o dirección pasan por un solo punto como se muestra en la figura 1(a) y 1(b):

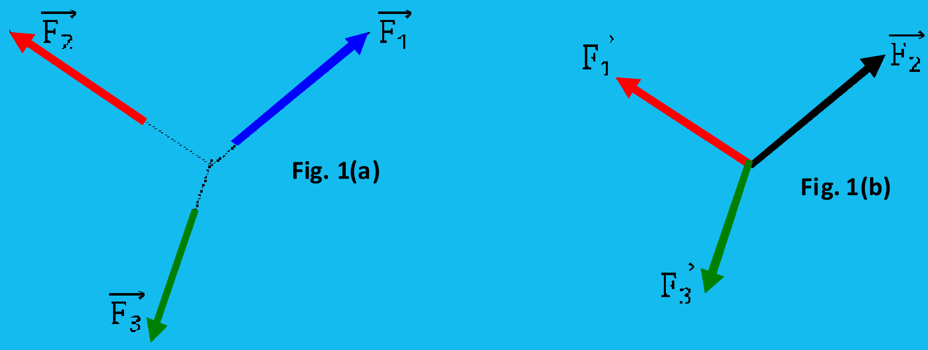


Fig. 1(a) Fig. 1(b)

Cuando se trata de una partícula las fuerzas que actúan sobre ella **siempre son concurrentes.**

Las fuerzas no concurrentes se caracterizan por que si se prolonga la línea de acción o dirección de cada una de las fuerzas estas no pasan por un mismo punto. Además las fuerzas no concurrentes pueden ser consideradas como coplanares, si todas están ubicadas en un plano y no coplanares si las fuerzas están ubicadas en el espacio. La figura 2(a) muestra una barra sobre la que actúan fuerzas no concurrentes y coplanares:

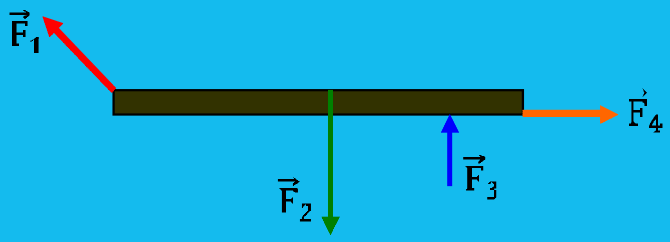


Fig. 2(a)

4.1 PRIMERA LEY DE NEWTON

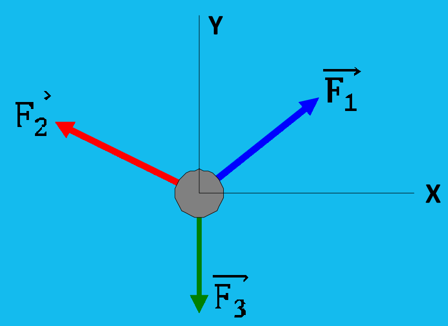
Isaac Newton basado en los experimentos de sus predecesores y en experiencias propias establecio una ley acerca del movimiento de los cuerpos y que hoy día es conocida como la primera Ley de Newton:

« Un cuerpo en reposo permanecera en reposo a no ser que sobre el actue una fuerza neta o resultante, que obligara al cuerpo a moverse aceleradamente. Un cuerpo en movimiento a lo largo de una línea recta con velocidad constante se desplazara con la misma velocidad, a no ser que sobre el actue una fuerza neta o resultante que lo obligue a cambiar la velocidad y por consiguiente se acelerara. La trayectoria puede seguir siendo una línea recta o puede ser una curva»

4.2 EQUILIBRIO DE UNA PARTICULA

Como se señalo anteriormente si sobre una particula se aplican fuerzas, necesariamente estas fuerzas deben ser concurrentes, siendo el punto de aplicación de las fuerzas la misma particula.

La figura muestra una particula de masa m sobre la que actuan N fuerzas coplanares en el plano XY, $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}, \ldots \ldots \ldots . \overrightarrow{F_N}$.



La fuerza neta o resultante $\overrightarrow{F_R}$ que actúa sobre la particula es la suma vectorial de todas las fuerzas aplicada sobre la partícula.

$$\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots \ldots \ldots . . + \overrightarrow{F_N} \qquad (1)$$

ecuación que puede escribirse como:

$$\overrightarrow{F_R} = \sum_{1}^{N} \overrightarrow{F_i} \quad \text{donde } \mathbf{i} = 1,2,3.....N \qquad (2)$$

De acuerdo a la primera Ley de Newton, si la partícula está en equilibrio se cumplira que:

$$\overrightarrow{F_R} = 0 \tag{3}$$

Este resultado debe entenderse que el resultado de la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula es nulo. La ecuación (3) tambien es valida si las fuerzas que actuan sobre la particula estan en el espacio.

FUERZAS EXPRESADAS EN UN SCC.

Si la particula está ubicada en el origen de un SCC en el espacio, cada una de las fuerzas debe ser expresada en función de los vectores unitarios de dicho sistema. Consideremos la expresión de la fuerza resultante $\overrightarrow{F_R}$ en función de sus componentes en el SCC.

$$\overrightarrow{F_R} = F_{Rx}\,\vec{i} + F_{Ry}\,\vec{j} + F_{Rz}\,\vec{k} \tag{4}$$

donde F_{Rx} , F_{Ry} , F_{Rz} son las componentes de la fuerza resultante a lo largo de los ejes X, Y y Z respectivamente. Si la partícula está en equilibrio la fuerza resultante es nula, por consiguiente cada una de sus componentes es nula.

$$F_{Rx} = 0 \qquad F_{Ry} = 0 \qquad F_{Rz} = 0 \tag{5}$$

La ecuación (1) da la fuerza resultante como la suma de todas las fuerzas aplicadas sobre la particula, donde cada una de las fuerzas está expresada en el SCC.

$$\overrightarrow{F_1} = F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j} + F_{1z}\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{F_2} = F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} + F_{2z}\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{F_3} = F_{3x}\,\vec{i} + F_{3y}\,\vec{j} + F_{3z}\,\vec{k}$$
$$\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\ \cdots\cdots \qquad .$$

$$\overrightarrow{F_N} = F_{Nx}\,\vec{i} + F_{Ny}\,\vec{j} + F_{Nz}\,\vec{k}$$

Sumando todas las fuerzas se obtiene la fuerza resultante:

$$\overrightarrow{F_R} = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots\ldots + F_{Nx})\vec{i} + \left(F_{1y} + F_{2y} \ldots\ldots\ldots + F_{Ny}\right)\vec{j} + (F_{1z} + F_{2z} + \ldots\ldots + F_{Nz})\vec{k}$$

Los terminos entre parentesis corresponden a la suma de las componentes de cada una de las fuerzas aplicadas sobre la particula.

$$F_{Rx} = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots\ldots + F_{Nx}) = \sum_{1}^{N} F_{ix}$$
$$F_{Ry} = \left(F_{1y} + F_{2y} \ldots\ldots\ldots + F_{Ny}\right) = \sum_{1}^{N} F_{iy}$$
$$F_{Rz} = (F_{1z} + F_{2z} + \ldots\ldots + F_{Nz}) = \sum_{1}^{N} F_{iz}$$

Si la partícula está en equilibrio la fuerza resultante es cero y sus componentes son nulas como se muestra en la ecuación (5). Por tanto se debe cumplir:

$$\sum_{1}^{N} F_{ix} = 0$$
$$\sum_{1}^{N} F_{iy} = 0 \qquad (6)$$
$$\sum_{1}^{N} F_{iz} = 0$$

Ecuaciones que se leen como: En el equilibrio de una partícula, la suma de las componentes de las fuerzas en el eje X debe ser igual a cero; la suma de las componentes de las fuerzas en el eje Y debe ser igual a cero y la suma de las componentes de las fuerzas en el eje Z debe ser igual a cero.

De lo establecido anteriormente, si sobre la particula actua una fuerza resultante diferente de cero, la particula no está en equilibrio sino mas bien se encuentra acelerada. Por consiguiente para que la partícula este en equilibrio la fuerza resultante debe ser nula o cero.

Para que una partícula este en equilibrio se debera cumplir lo siguiente:

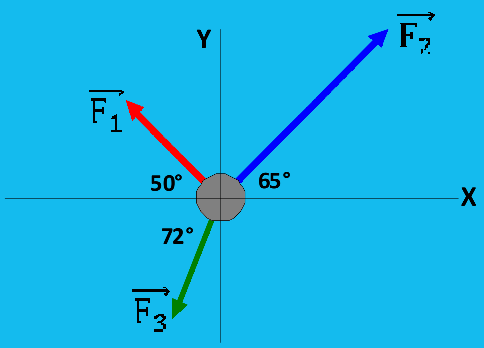
La condición necesaria y suficiente para que una particula este en equilibrio, la fuerza resultante aplicada sobre ella debe ser nula. En otras palabras debe cumplirse la siguiente condición:

$$\overrightarrow{F_R} = \sum_{1}^{N} \overrightarrow{F_1} = 0 \qquad (7)$$

La ecuación (7) es la **condición general** para que una particula se encuentre en equilibrio y esta representada en forma vectorial e independiente del sistema de coordenadas. Si las fuerzas aplicadas sobre la particula puedan ser representadas en un SCC la ecuación (6) representa la misma condición de equilibrio que la ecuación (7).

Ejemplo 1

La figura muestra una particula sobre la que actuan tres fuerzas concurrentes y coplanares, cuyas magnitudes son F_1 = 15 N, F_2 = 25 N y F_3 = 20 N y hacen con los ejes los ángulos mostrados. Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza resultante.



Solución:

Para resolver el problema se debe trazar un sistema de coordenadas cartesianas XY con centro en la partícula como se muestra en la figura. Luego escribir cada uno de los vectores en función de sus componentes a lo largo de los ejes X e Y:

$\overrightarrow{F_1}$ = - 9.64 $\vec{i}$ + 11.50 $\vec{j}$ $\quad$ $\overrightarrow{F_2}$ = 10.57 $\vec{i}$ + 22.66 $\vec{j}$ $\quad$ $\overrightarrow{F_3}$ = - 6.18 $\vec{i}$ – 19.02 $\vec{j}$

La fuerza resultante es:

$$\overrightarrow{F_R} = -5.25\,\vec{i} + 15.14\,\vec{j}$$

El vector fuerza resultante esta en función de los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Se encuentra en el segundo cuadrante y su modulo y dirección son:

F_R = 16.02 Newton, y hace un ángulo de 19.08^0 con el eje Y

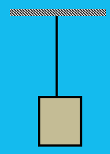
El resultado obtenido muestra que la particula **no esta en equilibrio** por que la fuerza resultante es diferente de cero, mas bien realiza un movimiento acelerado por acción de la fuerza resultante.

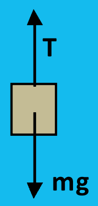
4.3 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Los Diagramas de Cuerpo Libre son las representaciones graficas de los cuerpos en la que se encuentran representadas todas las fuerzas efectivas que actúan sobre él. En los DCL se escoge el cuerpo y se le aísla reemplazando las cuerdas, superficies, fuerzas de rozamiento, reacciones y otros elementos por los vectores fuerzas necesarios para que el cuerpo este en equilibrio o en movimiento.

EJEMPLO DE DCL

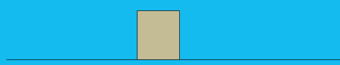
1. Bloque de masa m suspendido de una cuerda.

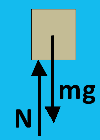




En el DCL están representadas la tensión T en la cuerda y el peso mg del bloque

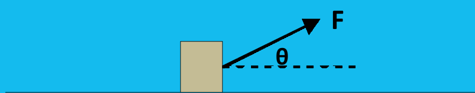
2. ***Bloque de masa m sobre una superficie horizontal.***

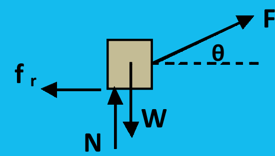




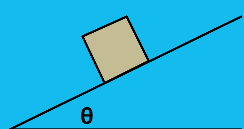
En el DCL se representa por N la reacción normal de la superficie.

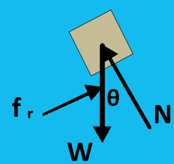
3. ***Bloque de peso W sobre una superficie horizontal rugosa y jalada por una fuerza.***



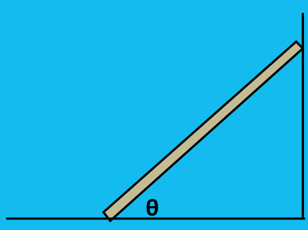


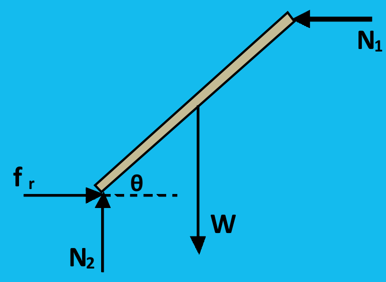
4. ***Bloque de peso W en equilibrio sobre una superficie inclinada rugosa.***





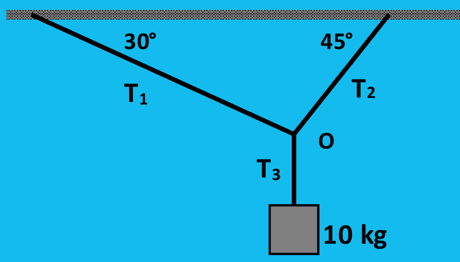
5. ***Escalera de peso W apoyada en una pared lisa y sobre una superficie rugosa.***





Ejemplo 2

La figura muestra un bloque de 10 Kg suspendido del techo de una habitación mediante tres cuerda. Encontrar la Tensión o la fuerza que se ejerce sobre cada una de las cuerdas, considerando que el sistema está en equilibrio.

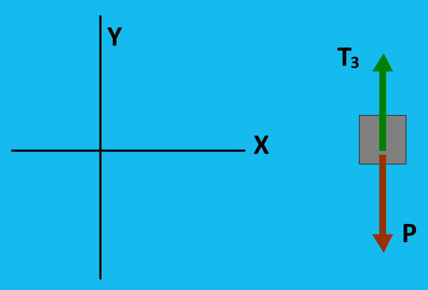


Solución:

El punto O es el lugar de concurrencia de las tres cuerdas, donde cada una de ellas ejerce una fuerza o tensión para sostener en equilibrio el bloque de 10 kg. Por ello las fuerzas las fuerzas o tensiones que ejercen las cuerdas son concurrentes y el sistema se comporta como una particula en equilibrio.

Si el sistema está en equilibrio la fuerza resultante de las fuerzas que concurren en O debe ser nula. El procedimiento que debemos seguir para resolver este sistema, se inicia elaborando los diagramas de cuerpo libre (DCL) que sean necesarios para interpretar la condición de equilibrio.

1. DCL del bloque de 10 kg.



Por acción de la gravedad sobre la masa de 10 Kg se jerce una fuerza dirigida hacia abajo igual al peso P, cuyo valor o magnitud es de 98 Newton considerando el valor de la gravedad igual a 9.8 m/s^2. La otra fuerza que actua sobre el cuerpo es la que ejerce la cuerda a la que esta sujeta y esta dirigida hacia arriba y cuyo valor desconocido es T_3.

Al costado del DCL se ha dibujado un sistema de coordenadas cartesianas (SCC) y podemos observar que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de 10 Kg se encuentran a lo largo del eje Y y no hay fuerzas ni componentes a lo largo del eje X. Aplicando las ecuaciónes necesarias para el equilibrio de una partícula se tiene:

Suma de las componentes en el eje Y: $\sum F_{iy} = 0$

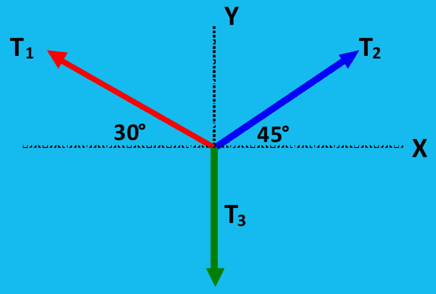
$$T_3 - P = 0$$
$$T_3 = P = 98 \text{ Newton}$$

Al escribir la ecuación de equilibrio se ha tenido en cuenta el sentido de los vectores fuerzas. T_3 es una fuerza dirigida hacia arriba y por eso es + y P esta dirigido hacia abajo y por eso es – . La fuerza que ejerce la cuerda o tensión, para mantener en equilibrio al cuerpo de 10 Kg es de 98 N.

$$T_3 = 98 \text{ Newton}$$

2. DCL del punto O.

Como las tres cuerdas concurren en O se obtiene siguiente gráfico:



Las fuerzas dibujadas son concurrente y coplanares. Con relación al SCC existen componentes de las fuerzas a lo largo del eje X y componentes a lo largo del eje Y. Aplicando la condición para el equilibrio tendremos:

Componentes en el eje X: $\sum F_{ix} = 0$

$$T_2 \text{ Cos } 45^0 - T_1 \text{ Cos } 30^0 = 0 \qquad (1)$$

Componentes en el eje Y: $\sum F_{iy} = 0$

$$T_1 \text{ Sen } 30^0 + T_2 \text{ Sen } 45^0 - T_3 = 0 \qquad (2)$$

Como la tensión T_3 ya se conoce, se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido y se encuentran los valores de las tensiones T_1 y T_2 :

$T_1 = 72.3$ Newton $\qquad T_2 = 87.5$ Newton

La respuesta al problema planteado es que la tensión que ejerce cada una de las cuerdas para mantener el sistema en equilibrio es:

$T_1 = 72.3$ N $\qquad T_2 = 87.5$ N $\qquad$ y $\qquad T_3 = 98$ N

Ejemplo 3

Una partícula está sometida a la acción de cuatro fuerzas concurrentes y coplanares manteniendo a la partícula en equilibrio. Tres de las fuerzas son conocidas y la cuarta desconocida. Si las fuerzas conocidas son: F_1 de 25 N ubicada en el primer cuadrante y hace un ángulo de 35^0 con el eje +Y, F_2 de 19 N ubicada en el tercer cuadrante y ángulo de 48^0 con el eje –Y y F_3 de 22 N ubicada en el cuarto cuadrante y ángulo de 25^0 con el eje –Y . ¿Cuál es el modulo o la magnitud de la cuarta fuerza y cual es su dirección?

Solución:

Según el problema la particula esta en equilibrio, por consiguiente la fuerza resultante que actua sobre ella debe ser nula.

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = 0 \qquad (1)$$

Cada uno de los términos en la ecuación corresponden a los vectores fuerza. Como primer paso debemos expresar cada una de las fuerzas dadas en forma de un vector con relación a un sistema de coordenadas cartesianas en el plano.

$$\vec{F}_1 = 14.34\,\vec{i} + 20.48\,\vec{j} \qquad \vec{F}_2 = -\,14.12\,\vec{i} - 12.71\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = 9.30\,\vec{i} - 19.94\,\vec{j}$$

Reemplazando los vectores fuerza en la ecuación (1) tendremos:

$$14.34\,\vec{i} + 20.48\,\vec{j} - 14.12\,\vec{i} - 12.71\,\vec{j} + 9.30\,\vec{i} - 19.94\,\vec{j} + \vec{F}_4 = 0$$

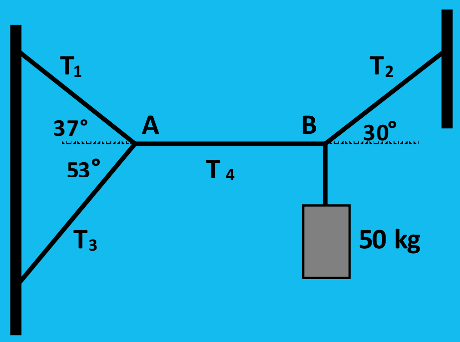
$$\vec{F}_4 = -\,9.52\,\vec{i} + 12.17\,\vec{j}$$

La cuarta fuerza $\overrightarrow{F_4}$ necesaria para que la partícula este en equilibrio esta en el segundo cuadrante. Su modulo y direción es:

F_4 = 15.45 N y hace un ángulo de 51.96^0 con el eje – X

Ejemplo 4

El sistema mostrado en la figura esta en equilibrio. Hallar el valor de las tensiones T_1, T_2, T_3 y T_4 en cada una de las cuerdas.

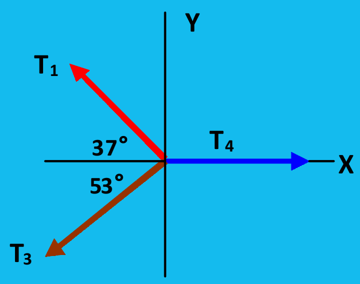


Solución:

El cuerpo que está suspendido de una cuerda al punto B tiene una masa de 50 Kg. Sui peso es P = 50x9.8 = 490 Newton.

En los puntos A y B concurren las cuerdas y por consiguiente las fuerzas o tensiones son concurrentes y el sistema está en equilibrio. Tomemos cada punto por separado y hagamos el DCL correspondiente, escribiendo las ecuaciones necesarias para el equilibrio:

DCL en el punto A:



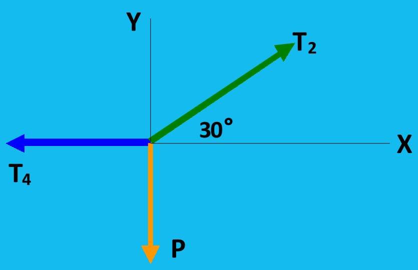
$\sum F_{ix} = 0$

$T_4 - T_1 \text{ Cos } 37^0 - T_3 \text{ Cos } 53^0 = 0 \quad (1)$

$\sum F_{iy} = 0$

$T_1 \text{ Sen } 37^0 - T_3 \text{ Sen } 53^0 = 0 \quad (2)$

DCL en el punto B:



$\sum F_{ix} = 0$

$T_2 \text{ Cos } 30^0 - T_4 = 0 \quad (3)$

$\sum F_{iy} = 0$

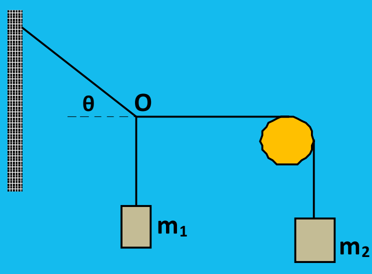
$T_2 \text{ Sen } 30^0 - P = 0 \quad (4)$

Resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones, conociendo que el peso P es de 490 Newton, encontramos:

$T_1 = 586.17$ N $\qquad T_2 = 980$ N $\qquad T_3 = 439.74$ N $\qquad T_4 = 848.7$ N

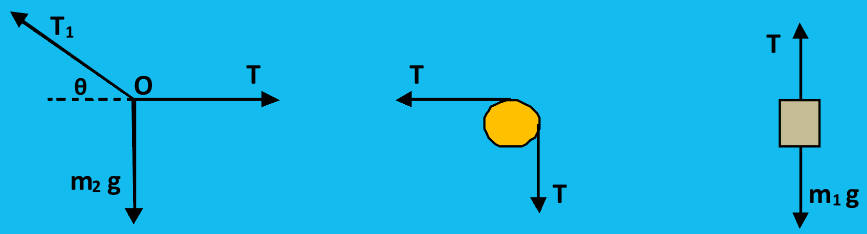
Ejemplo 5

La figura muestra un sistema en equilibrio. El bloque de masa $m_1 = 30$ kg y el bloque de masa $m_2 = 50$ kg sujeto a un cuerda que pasa por una polea sin rozamiento y masa despreciable. Hallar el valor del ángulo è, para que el sistema este en equilibrio.



Solución:

En el dibujo vemos tres cuerdas sobre las que se ejercen fuerzas y concurren en el punto O. Al realizar los DCL se tiene:



El primer DCL muestra las tres fuerzas concurrentes en O. El segundo DCL muestra la polea y dado que no tiene masa ni fuerza de rozamiento la cuerda trasmite la misma intensidad de la fuerza T y el tercer DCL muestra el bloque masa m_2.

Escribiendo las ecuaciones necesarias para el equilibrio:

Primer DCL:

$$\sum F_{xi} = 0 \qquad T - T_1 \text{ Cos è} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{yi} = 0 \qquad T_1 \text{ Sen è} - m_2\, g = 0 \qquad (2)$$

Tercer DCL:

$$\sum F_{yi} = 0 \qquad T - m_1\, g = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$$T_1 \text{ Sen è} = m_2\, g$$
$$T_1 \text{ Cos è} = m_1\, g$$

De las cuales se obtiene el ángulo:

$$\theta = \tan^{-1}(m_2/m_1)$$
$$\text{è} = 59°$$

4.4 TERCERA LEY DE NEWTON

Newton observo que las fuerzas no existen aisladamente sino que es el resultado de la interacción entre dos objetos. Por ejemplo la interacción entre un martillo y un clavo; el martillo ejerce una fuerza sobre el clavo y lo introduce en la madera, pero a su vez debe existir otra fuerza que detenga al martillo, esta fuerza la ejerce el clavo.

De aquí se deduce que cuando el martillo ejerce una fuerza sobre el clavo, el clavo a su vez ejerce una fuerza sobre al martillo. Por tanto en la interacción entre el martillo y el clavo existe un par de fuerzas, una que actúa sobre el martillo y otra que actúa sobre el clavo.

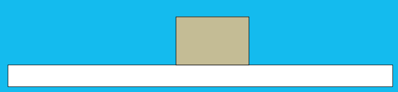
Observaciones de esta naturaleza llevaron a Newton a formular su tercera ley: la ley de la acción y la reacción.

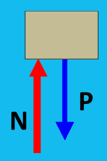
«Siempre que un objeto ejerce una fuerza sobre otro, el segundo objeto ejerce sobre el primero una fuerza igual y en sentido opuesto «.

A una de las fuerzas se le llama **fuerza de acción** y a la otra **fuerza de reacción**. No importa a cuál de ellas llamemos acción y a cual reacción. Lo importante es que ambas son parte de una sola interacción y que ninguna de las dos existe sin la otra. Las fuerzas tienen la misma intensidad pero sentidos opuestos.

La tercera ley de Newton se suele enunciar como: **«a toda acción corresponde una reacción de igual magnitud y en sentido contrario».** En toda interacción las fuerzas se dan por pares.

Consideremos un cuerpo de peso P en reposo sobre el tablero de una mesa. El cuerpo ejerce sobre la mesa una fuerza P.





El DCL mostrado muestra las fuerzas que actúan sobre el bloque. El hecho de que el cuerpo este en reposo significa que para que este en equilibrio sobre él debe estar actuando otra fuerza de la misma magnitud pero de sentido contrario. Esta otra fuerza es ejercida por la mesa y se muestra en el DCL. Se le conoce como la reacción de la mesa sobre el cuerpo y se le denomina fuerza de reacción normal porque es perpendicular a la superficie de la mesa. Visto en términos de la Tercera Ley de Newton una debe ser la fuerza de acción y la otra de reacción.

En muchas situaciones de nuestra vida diaria está presente la tercera Ley de Newton. Cuando me inclino y me apoyo sobre una pared para no caerme, ejerzo sobre la pared una fuerza. Como me encuentro en equilibrio la pared ejerce sobre mí persona la misma fuerza pero en sentido contrario. Podemos considerar que la fuerza que ejerzo sobre la pared es la fuerza de acción y la de reacción es la que ejerce la pared sobre mí.

Cuando una persona se cuelga de una cuerda que está suspendida del techo, se ejerce sobre la cuerda una fuerza igual al peso de la persona. Como la persona y la cuerda están en equilibrio la cuerda debe ejercer la misma fuerza que el peso pero en sentido contrario. A la fuerza que ejerce la cuerda se le denomina generalmente la tensión de la cuerda.

4.5 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO

El cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas posiciones son fijas y que tiene forma geométrica y dimensiones; también se le conoce como un sólido. Podemos observar que un sólido puede realizar movimientos de traslación y de rotación o ambos simultáneamente.

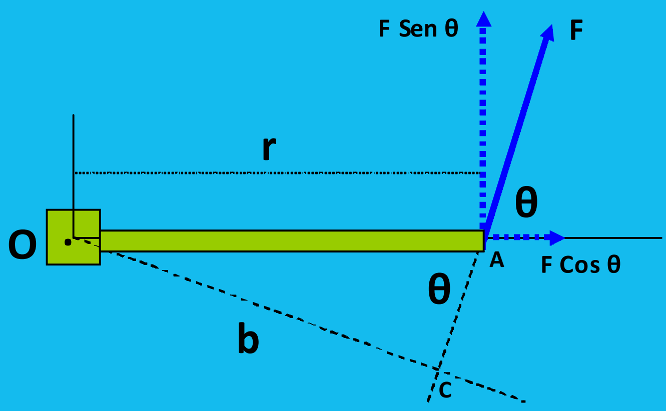
Para que un sólido este en equilibrio es necesario que no haya traslación ni rotación. Una situación derivada de la primera ley de Newton es que el sólido se traslade en línea recta con velocidad constante y sin rotar.

Para establecer las condiciones necesarias de equilibrio de un cuerpo rígido o un sólido es necesario introducir el concepto de torque producido por una fuerza sobre el sólido.

TORQUE O MOMENTO DE UNA FUERZA

El torque es una magnitud física vectorial cuyas unidades en el SI es Nm (newton metro). Físicamente puede ser interpretado como el efecto que produce una fuerza sobre un objeto o un sólido el cual puede girar por efecto de la fuerza alrededor de un eje.

La figura muestra una barra OA ubicada en el plano y pivotada en el punto O alrededor del cual puede girar. En el punto A de la barra se aplica una fuerza que hace un ángulo è con la dirección de la barra:



Para efectos del análisis consideramos que la barra y la fuerza están en el mismo plano. Si descomponemos la fuerza $\vec{F}$ en una componente perpendicular a la barra y otra a lo largo de la barra, solo la componente F Sen è perpendicular a la barra podrá ser la responsable del giro en el sentido contrario a las agujas del reloj. La otra no hace girar a la barra porque su línea de acción pasa por el punto O.

Se define la magnitud o el modulo del momento o torque producido por la fuerza a la relación:

τ = r F Sen è (1)

Donde τ es el torque, F la magnitud de la fuerza y r la distancia entre el centro de rotación O y el punto A de aplicación de la fuerza. Se puede observar que la ecuación (1) depende además de Senθ. **La dependencia del torque del es la razón para que este pueda tomar valores positivos, negativos o nulos dependiendo.**

1. El torque es **positivo** si el ángulo θ es mayor que 0° y menor que 180°. La barra gira en el sentido **anti horario**.
2. Es **negativo** si el ángulo θ es mayor de 180° y menor de 360°. La barra gira en el sentido **horario**.
3. Es nulo o **cero** cuando al ángulo θ es 0° y 180°. La barra **no gira**.

Los términos de la ecuación (1) pueden ser agrupados de la manera siguiente:

τ = F (r Sen è) = F b (2)

Prolongando en la figura la dirección de la fuerza mediante puntos suspendidos y trazando desde O una perpendicular a dicha dirección se tiene el triángulo rectángulo OCA recto en C. Por geometría el cateto b es:

$$b = r \sin\theta$$

Donde b se le llama **brazo de palanca** de la fuerza $\vec{F}$. Geométricamente es la distancia desde el centro de rotación O hasta la línea de acción o dirección de la fuerza $\vec{F}$.

Cuando se calcula el torque producido por una fuerza mediante la ecuación (1) o (2) siempre hay que agregar el signo correspondiente a la dirección de giro que produce la fuerza.

Las ecuaciones (1) y (2) dan el valor o modulo del torque pero debe tenerse en cuenta que es una magnitud física vectorial. Para poder conocer geométricamente el vector torque consideremos las figuras mostradas a continuación.

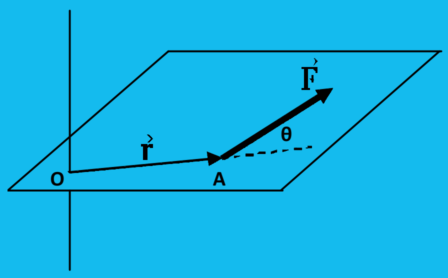


Fig. 1

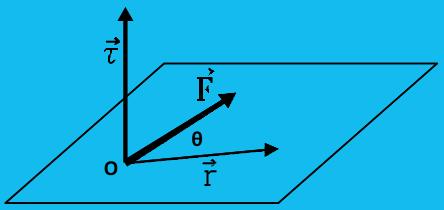


Fig. 2 (anti horario)

La figura 1 muestra un plano y los puntos O y A. En A se aplica la fuerza $\vec{F}$ sobre el plano, la cual hace girar al plano alrededor de O. El vector de posición del punto A respecto de O es $\vec{r}$.

La fuerza hace girar al plano en sentido anti horario alrededor de un eje perpendicular y produce un torque cuyo modulo o magnitud esta dado por la ecuación (1) o (2). El vector torque es paralelo al eje y perpendicular al plano donde están los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ como se muestra en la figura 2. Vectorialmente el torque es el resultado de una operación producto vectorial que se escribe como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Si imaginamos que en el plano están los ejes XY, el eje perpendicular al plano es el eje Z. De acuerdo a este diagrama el eje de giro es paralelo al eje Z y por consiguiente el torque es paralelo al eje Z y en la dirección + cuando la rotación del plano es anti horaria.

Las figuras 3 y 4 muestran el efecto del torque al hacer girar al plano en el sentido horario. En ese caso el vector torque está en la dirección negativa del eje Z. En ambos casos la lectura es $\vec{r}$ por $\vec{F}$

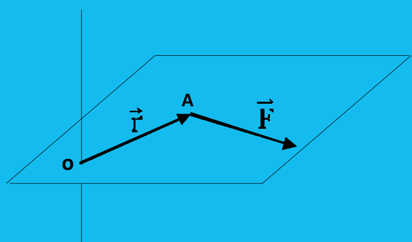


Fig. 3

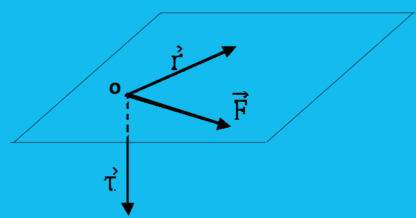
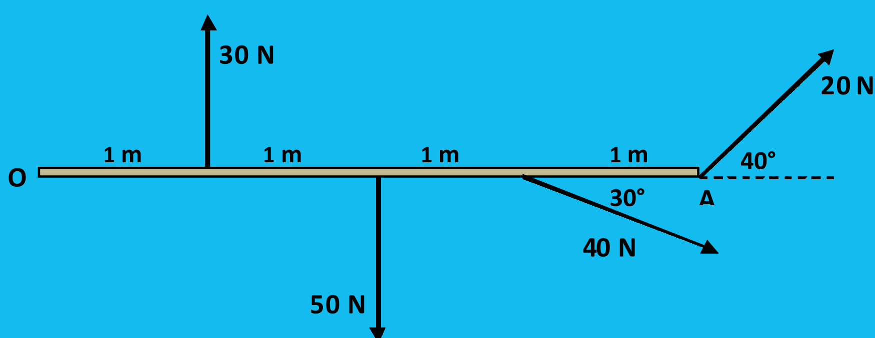


Fig. 4 (horario)

Ejemplo 6

La figura muestra una barra de 4 m de longitud y las fuerzas aplicadas sobre ella.



Encontrar:

a) El modulo del vector fuerza resultante.

Componentes de la fuerza resultante en los eje X e Y.

R_x = 20 Cos 40° + 40 Cos 30° = 49.96 Newton
R_y = 40 + 20 Sen 40° - 50 – 40 Sen 30° = - 17.14 Newton
R = 52.82 Newton.

b) *El torque de cada una de las fuerzas respecto del punto O.*

Torque de la fuerza de 40 N. $\tau_{o,30} = 30x1 = 30\ \mathrm{Nm}$
Torque de la fuerza de 50 N. $\tau_{o,50} = -50x2 = -100\ \mathrm{Nm}$
Torque de la fuerza de 40 N. $\tau_{o,40} = -30x\,3xSen\,30° = -45\ \mathrm{Nm}$
Torque de la fuerza de 20 N. $\tau_{o,20} = 20x4xSen\,40° = 51.4\ \mathrm{Nm}$

c) *Los vectores torques.*

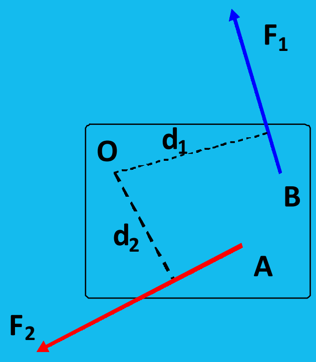
Si la barra y las fuerzas se encuentran en el plano XY de la hoja de papel, el eje Z es perpendicular a la hoja. Como se indica en el análisis anterior el torque es un vector perpendicular al plano donde están la fuerza y el punto de aplicación, por consiguiente los vectores torque son perpendiculares al papel y su sentido estará dado por el signo asignado. Son positivos (+) si el vector sale fuera de la hoja y negativo (-) si el vector entra.

En nuestro caso los vectores torque son:

$$\overrightarrow{\tau_{o,30}} = 30\,\vec{\mathrm{k}} \quad \mathrm{Nm}$$
$$\overrightarrow{\tau_{o,50}} = -100\,\vec{\mathrm{k}} \quad \mathrm{Nm}$$
$$\overrightarrow{\tau_{o,40}} = -45\,\vec{k} \quad \mathrm{Nm.}$$
$$\overrightarrow{\tau_{o,20}} = 51.4\,\vec{k} \quad \mathrm{Nm.}$$

TORQUE PRODUCIDO POR VARIAS FUERZAS

Si sobre un cuerpo rígido, actúan dos o más fuerzas, cada una de ellas tenderá a producir individualmente la rotación del cuerpo rígido. En la figura se muestra un cuerpo rígido que es una placa en el plano del papel, que es capaz de girar alrededor de un eje perpendicular a la hoja y que pasa por el punto O y dos fuerzas aplicadas en los puntos A y B.



Conforme a la definición de torque dado por la ecuación (2) la fuerza $\mathbf{F_1}$ produce un torque τ_1 alrededor de O, cuya modulo y signo son:

$$\tau_1 = F_1\ d_1$$

La fuerza $\mathbf{F_2}$ un torque $_2$ alrededor de O:

$$\tau_2 = - F_2 \, d_2$$

Por convención como la fuerza F_1 tiende a rotar al cuerpo rígido en el sentido contrario de las agujas del reloj le asignamos signo (+) y como la fuerza F_2 tiende a rotar al cuerpo rígido en el sentido de las agujas del reloj le asignamos signo (-). Por tanto el torque total sobre el cuerpo rígido realizado por las fuerzas alrededor del punto O será:

$$\tau_O = \tau_1 + \tau_2 = F_1 \, d_1 - F_2 \, d_2$$

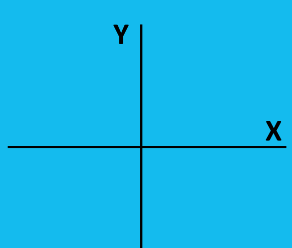
El torque total τ_O alrededor del punto O es un vector perpendicular al plano y su dirección estará dado por el signo resultante de la operación. Si los módulos de los torques producidos por cada fuerza son iguales pero los sentidos de rotación son contrarios el torque total será nulo o cero, por tanto el cuerpo rígido no rotara por acción de las fuerzas.

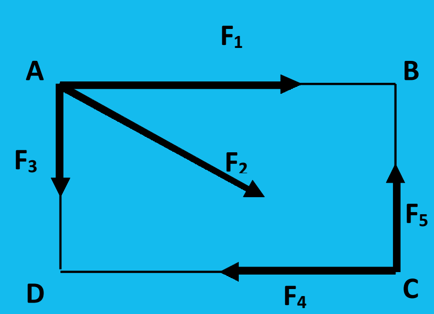
Ejemplo 7

Sobre un rectángulo rígido ABCD de las siguientes dimensiones AB = CD = 0.6 m y BC = DA = 0.4 m, actúan cinco fuerzas: en A, una fuerza de 6 N en la dirección AB, una fuerza de 4 N a lo largo de AC, y una fuerza de 3 N a lo largo de AD; en C, una fuerza de 5 N actuando a lo largo de la dirección CD y una fuerza de 4 N actuando a lo largo de la dirección CB. Determinar la fuerza resultante, y el torque con respecto a los puntos A y con respecto al punto B.

Solución:

Hagamos una representación gráfica del rectángulo y de las fuerzas aplicadas:





DATOS: AB = CD = 0.6
BC = DA = 0.4 m

F_1 = 6 N, F_2 = 4 N, F_3 = 3 N, F_4 = 5 N, F_5 = 4 N

a) Con relación al sistema de coordenadas cartesianas la representación de cada una de las fuerzas es:

$\vec{F}_1 = 6\,\vec{i}$ $\quad \vec{F}_2 = 3.33\,\vec{i} - 2.22\,\vec{j}$ $\quad \vec{F}_3 = -3\,\vec{j}$ $\quad \vec{F}_4 = -5\,\vec{i}$ $\quad \vec{F}_5 = 4\,\vec{j}$

El valor de la fuerza resultante es:

$$\vec{F}_R = 6\,\vec{i} + 3.33\,\vec{i} - 2.22\,\vec{j} - 3\,\vec{j} - 5\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_R = 4.33\,\vec{i} - 1.22\,\vec{j}$$

El modulo o magnitud de la fuerza resultante es: F_R = 4.50 Newton

b) El torque con respecto al punto A:

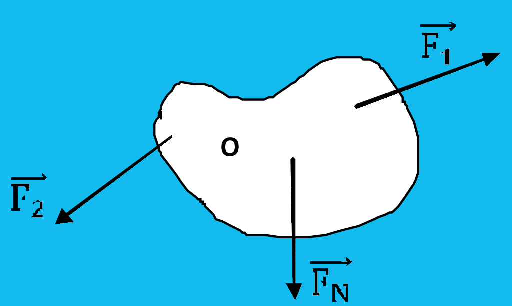
$$\tau_A = +\ 4x0.6 - 5x0.4 = +\ 0.4 \text{ Nm}$$

Torque respecto al punto B:

$$\tau_B = +\ 2.22x0.6 + 3x0.6 - 5x0.4 = +\ 1.132 \text{ Nm.}$$

CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO

El cuerpo rígido o solido es un objeto cuyas dimensiones son apreciables, y en el que las fuerzas aplicadas sobre el no necesariamente son concurrentes. Consideremos el caso de un cuerpo rígido sobre el cual actúan fuerzas coplanares no concurrentes.



Si sobre el cuerpo rígido se aplican N fuerzas y estas producen un torque total nulo alrededor de cualquier punto O tomado sobre el cuerpo rígido, este **no rotara**. Por consiguiente la condición para que el cuerpo rígido no rote es:

$$\tau_O = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots\ldots\ldots + \tau_N = 0$$
$$\tau_O = \sum \tau_{i\,O} = 0$$

Si además resulta que la suma de las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo rígido o fuerza resultante es nula, el cuerpo rígido no se traslada. Si no rota y no se traslada **el cuerpo rígido se encuentra en equilibrio**.

Las **dos condiciones necesarias y suficientes** para que un cuerpo rígido este en equilibrio son:

$$\sum \overrightarrow{F_i} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum \overrightarrow{\tau_{iO}} = 0 \qquad (2)$$

EJEMPLOS COMPLEMENTARIOS DE DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

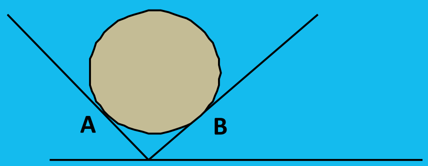
Como se ha indicado anteriormente el Diagrama de Cuerpo Libre es un esquema en el que están representados todas las fuerzas efectivas aplicadas sobre la partícula o el cuerpo rígido.

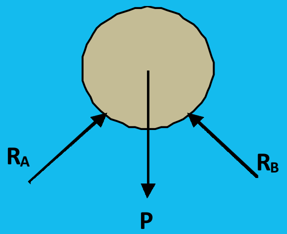
Caso de partículas: Cuando se representa el DCL de las fuerzas aplicadas sobre una partícula todas las fuerzas son concurrentes.

Caso de un cuerpo rígido o un sólido: Los DCL en este caso tienen que tener en cuenta el punto de aplicación de la fuerza.

Ejemplos complementarios.

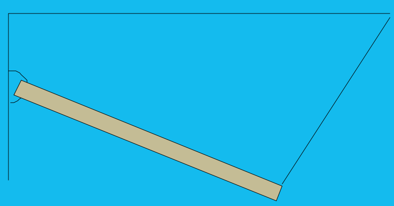
1. ***Esfera entre dos superficies lisas o rugosas.***

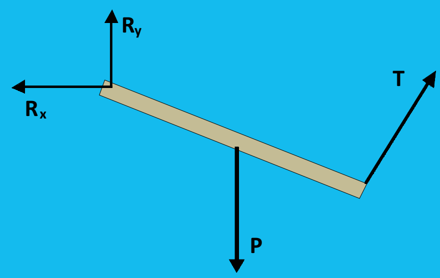




Donde A y B son los puntos de contacto de la esfera con las superficies y R_A y R_B son las reacciones de las superficies sobre la esfera.

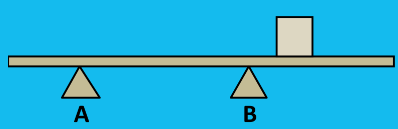
2. *Barra con bisagra.*

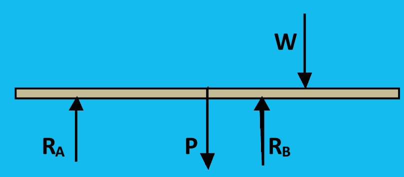




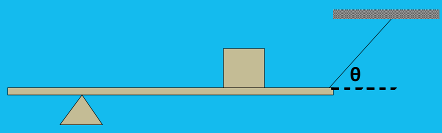
Donde T es la tensión en la cuerda, R_x y R_y las componentes horizontal y vertical de la fuerza de reacción en la bisagra.

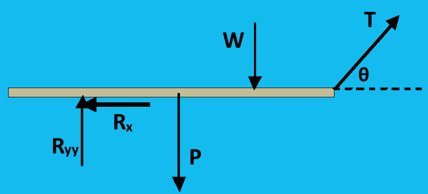
3. *Barra sobre punto de apoyo.*





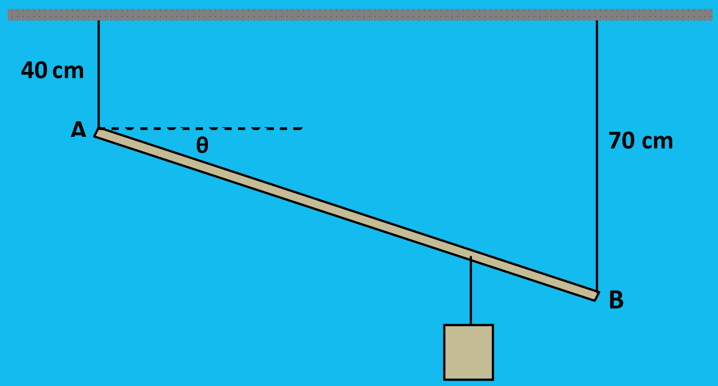
4. *Barra sobre punto de apoyo.*





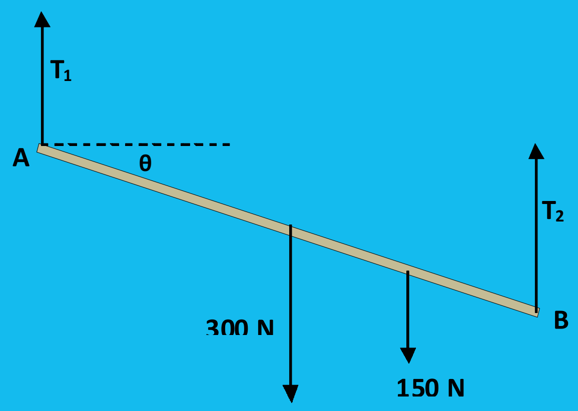
Ejemplo 8

La figura muestra una barra AB de 70 cm de longitud y 300 Newton de peso colgado mediante dos cuerdas de 40 y 70 cm cada una. A 15 cm del extremo B está suspendido un peso de 150 Newton. Encontrar la tensión de cada cuerda.



Solución:

DCL de la barra



Calculo del ángulo è

$$\bullet = \sin^{-1}(30/70) = 25.4°$$

Ecuaciones para el equilibrio:

$$\sum F_{xi} = 0 \qquad T_1 + T_2 - 300 - 150 = 0$$

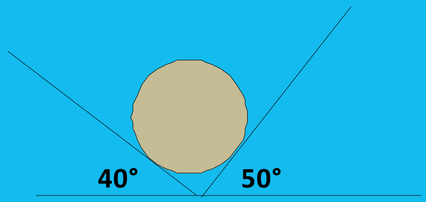
$$\sum \tau_{Ai} = 0 \qquad - 300x35x\ Cos^{-1}(25.4°) - 150x55x\ Cos^{-1}(25.4°) + T_2x\ 70x\ Cos^{-1}(25.4°) = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se tiene:

$T_1 = 267.9$ Newton $\qquad T_2 = 182.1$ Newton

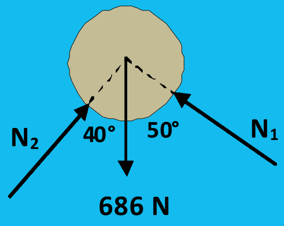
Ejemplo 9

La figura muestra una esfera de 70 kg apoyada sobre dos superficies lisas, perpendiculares entre sí. Encontrar la fuerza de reacción de las superficies sobre la esfera.



Solución:

DCL de la esfera:



Ecuaciones para el equilibrio

$$\sum F_{xi} = 0 \qquad N_2 \text{ Sen } 40° - N_1 \text{ Sen } 50° = 0$$

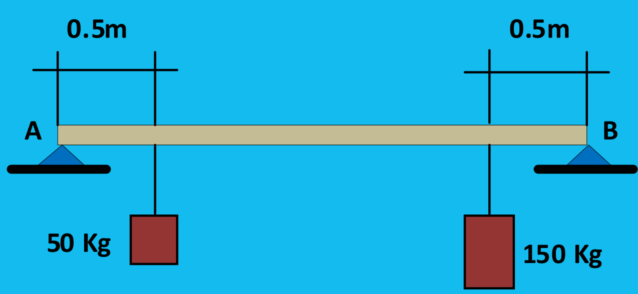
$$\sum F_{yi} = 0 \qquad N_1 \text{ Cos } 50° + N_2 \text{ Cos } 40° - 686 = 0$$

Resolviendo se tiene:

N_1 = 441.0 Newton $\qquad$ N_2 = 525.5 Newton

Ejemplo 10

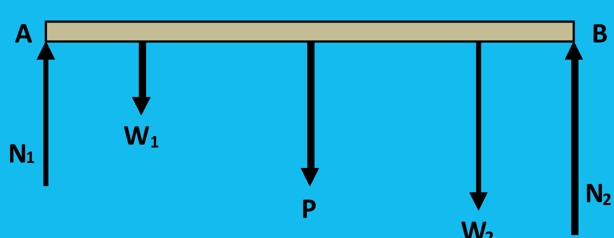
La viga AB de 100 Kg y 3 m de longitud es uniforme. Descansa en sus extremos A y B sobre dos apoyos y cuelgan de ella los bloques cuyas masas están indicadas en la figura. Hallar la reacción en los soportes.



Solución:

Lo primero que se debe tener presente es que el sistema está en equilibrio y que se trata de un cuerpo rígido. Por tanto debemos aplicar las dos condiciones para el equilibrio del cuerpo rígido.

DCL de la viga:



Considerando que el peso de la barra es P = 980N, W_1 = 490N y W_2 = 1470N.

Aplicando la primera condición para el equilibrio de un cuerpo rígido y teniendo en consideración que todas las fuerzas son paralelas al eje Y:

$$\sum F_{yi} = 0 \quad N_1 + N_2 - W_1 - W_2 - P = 0 \qquad (1)$$

Reemplazando valores: $N_1 + N_2 = 2940$

Aplicando la segunda condición de equilibrio, tomando torques con respecto al punto A tendremos:

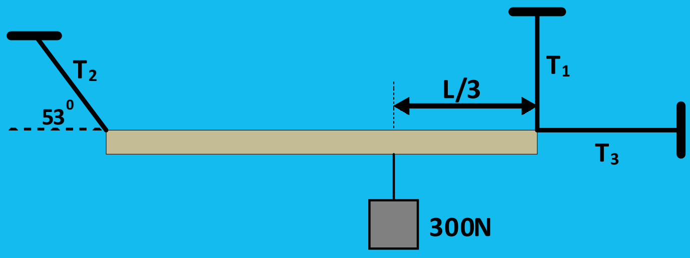
$$\sum \tau_{iA} = 0 \quad - 490x0.5 - 980x1.5 - 1470x2.5 + N_2x3 = 0 \qquad (2)$$

Las reacciones en los soportes son:

N_2 = 1796.7 Newton y N_1 = 1143.3 Newton

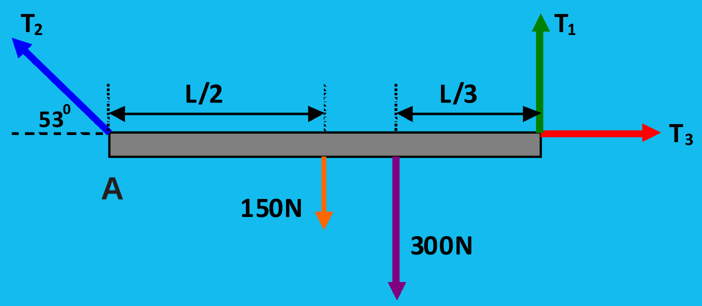
Ejemplo 11

El sistema mostrado en la figura esta en equilibrio. Determinar el valor de las tensiones T_1, T_2 y T_3 si la viga es homogénea tiene longitud L y pesa 150N.



Solución:

Hagamos el DCL de la viga.



Como el sistema está en equilibrio, apliquemos la primera condición para el equilibrio:

$$\sum F_{xi} = 0 \qquad T_3 - T_2 \text{ Cos } 53^{o} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{yi} = 0 \qquad T_1 + T_2 \text{ Sen } 53^{o} - 300 - 150 = 0 \qquad (2)$$

Aplicando la segunda condición para el equilibrio tomando torques con respecto al punto A.

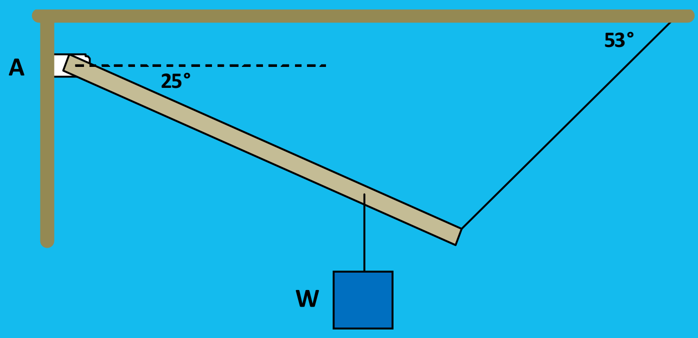
$$\sum \tau_{iA} = 0 \qquad -150 \times L/2 - 300 \times 2L/3 + T_1 \times L = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema de tres ecuaciones tendremos:

T_1 = 275 Newton $\qquad$ T_2 = 219 Newton $\qquad$ T_3 = 131 Newton

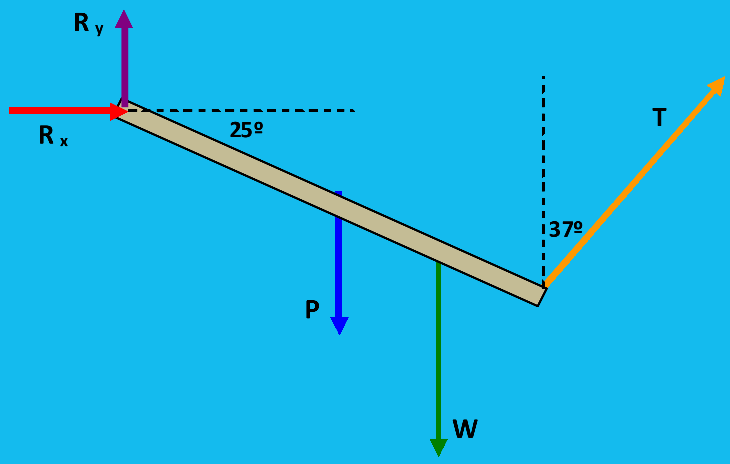
Ejemplo 12

La barra mostrada en la figura es uniforme y pesa 500N. Si W = 1000N y se encuentra a L/4 de un extremo, hallar la tensión en la cuerda y las componentes de la fuerza en la bisagra A.



Solución:

Como el sistema se encuentra en equilibrio, debemos aplicar las dos condiciones que se establecen para que un cuerpo este en equilibrio. Comencemos dibujando el DCL para la barra.



En el punto A que corresponde a la bisagra consideramos la existencia de una reacción R cuya componente horizontal es R_x y una componente vertical R_y. Aplicando la primera condición de equilibrio.

$$\sum F_{xi} = 0 \qquad R_x + T \text{ Sen } 37^o = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{yi} = 0 \qquad R_y + T \text{ Cos } 37^o - P - W = 0 \qquad (2)$$

Aplicando la segunda condición de equilibrio tomando los torques con respecto al punto A.

$$\sum \tau_{iA} = 0$$

$$- P\ (L/2)\ Cos\ 25° - W\ (3/4L)\ Cos\ 25° + T\ L\ Sen\ 78° = 0 \qquad (3)$$

Considerando que P = 500N y W = 1000N, podemos resolver el sistema de tres ecuaciones planteadas y obtener:

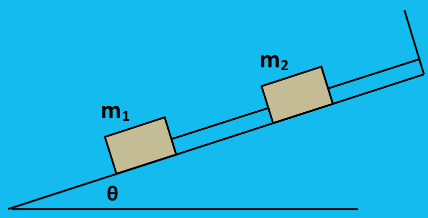
T = 926.6 Newton $\quad R_x = -557.6$ Newton $\quad R_y = 760.1$ Newton

El valor obtenido de R_x sale negativo; esto significa que la dirección escogida en el DCL para esta fuerza debe ser en sentido contrario. Podemos hallar la reacción en la bisagra A de la siguiente manera.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 942.7 \text{ Newton.}$$

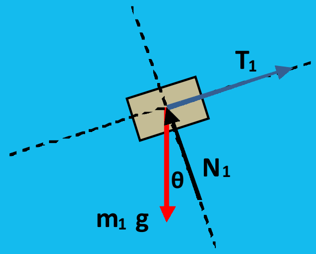
Ejemplo 13

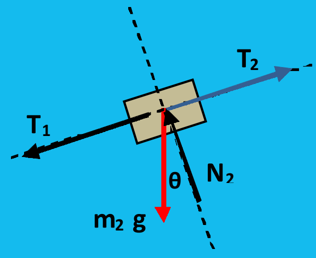
La figura muestra un plano inclinado cuya superficie es lisa y sobre la que se encuentran en equilibrio dos bloques de masas m_1 y m_2 unidos mediante cuerdas. Encontrar la tensión en cada cuerda con la información dada.



Solución:

Diagramas de cuerpo libre de cada uno de los bloques





En este problema se ha escogido el eje X paralelo a la superficie. Las ecuaciones para el equilibrio son:

Masa m_1:

$$T_1 - m_1 g \text{ Sen } è = 0 \qquad (1)$$
$$N_1 - m_1 g \text{ Cos } è = 0 \qquad (2)$$

Masa m_2:

$$T_2 - T_1 - m_2 g \text{ Sen } è = 0 \qquad (3)$$
$$N_2 - m_2 g \text{ Cos } è = 0 \qquad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

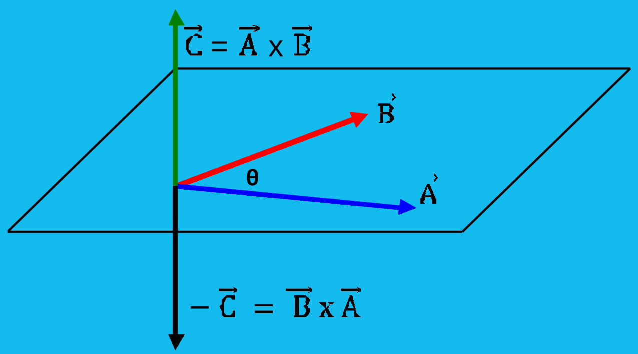
$$T_1 = m_1 g \text{ Sen } è \qquad T_2 = (m_1 + m_2)\ g \text{ Sen } è$$

4.6 PRODUCTO VECTORIAL

Como se ha mencionada anteriormente muchas magnitudes físicas tienen características vectoriales y por consiguiente se les deben representar como tales. En este caso el **torque es un vector** que tiene magnitud, dirección y sentido, y debemos representarlo como tal.

El torque es el resultado de una operación vectorial llamada producto vectorial, vamos a conocer como esta operación se lleva a cabo y como se representa geométricamente.

Consideremos dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ **y** $\vec{B}$, los que pueden ser ubicados en un plano como se muestra en la figura:



Si multiplicamos vectorialmente el vector $\vec{A}$ por el vector $\vec{B}$ (en ese orden), obtendremos un nuevo vector $\vec{C}$, y las características geométricas de la operación son las siguientes:

1. Los vectores $\vec{A}$ **y** $\vec{B}$ se encuentran en un plano.

2. El nuevo vector $\vec{C}$ es perpendicular al plano y por consiguiente perpendicular a los otros dos vectores.

3. La operación producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ **y** $\vec{B}$ y el vector resultante $\vec{C}$ es dado por la siguiente expresión:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

4. Si se intercambian los factores del producto vectorial se tiene lo siguiente:

$$-\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A}$$

5. El modulo del vector $\vec{C}$ es dado por la expresión:

$$C = |\vec{A} \times \vec{B}| = A\,B\,\text{Sen}\,\theta \qquad (1)$$

   Donde A y B son las magnitudes de los vectores y θ el ángulo que forman en el plano.

6. En la ecuación (1) podemos observar que la magnitud del vector $\vec{C}$ depende de las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ **y** $\vec{B}$, y del ángulo θ que forman dichos vectores.

   - Si el ángulo $\theta = 0^{o}$ el modulo del vector $C = 0$.

   - Si el ángulo $\theta = 90^{o}$ el modulo del vector $C = A\,B$ y es perpendicular al plano.

   - Si el ángulo $\theta = 180^{o}$ el modulo del vector $C = 0$

REPRESENTACIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL EN UN SCC

Si los vectores A y B están representados en un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, la operación producto vectorial puede ser realizada analíticamente.

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x \vec{\mathbf{i}} + A_y \vec{\mathbf{j}} + A_z \vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x \vec{\mathbf{i}} + B_y \vec{\mathbf{j}} + B_z \vec{\mathbf{k}}$$

Donde A $_x$,……….B $_z$ son las componentes de cada vector. Por tanto la operación:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} = {} & A_x B_x (\vec{i} \times \vec{i}) + A_x B_y (\vec{i} \times \vec{j}) + A_x B_z (\vec{i} \times \vec{k}) + A_y B_x (\vec{j} \times \vec{i}) \\ & + A_y B_y (\vec{j} \times \vec{j}) + A_y B_z (\vec{j} \times \vec{k}) + A_z B_x (\vec{k} \times \vec{i}) \\ & + A_z B_y (\vec{k} \times \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \times \vec{k})\end{aligned}$$

Entre paréntesis tenemos los productos vectoriales de los vectores unitarios. Desarrollando dichos productos podemos concluir en lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array}$$

Reemplazando los productos vectoriales de los vectores unitarios.

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{\mathbf{i}} - (A_x B_z - A_z B_x) \vec{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{\mathbf{k}}$$

Expresión que puede escribirse en forma matricial:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo 14

Dado dos vectores $\vec{A}$ **y** $\vec{B}$, encontrar el producto vectorial de ambos.

$$\vec{\mathbf{A}} = 3\,\vec{\mathbf{i}} - 2\,\vec{\mathbf{j}} + 3\,\vec{\mathbf{k}} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = -4\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

Solución:

Remplacemos las componentes de cada vector en la matriz y desarrollemos.

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6\,\vec{i} - 12\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$$

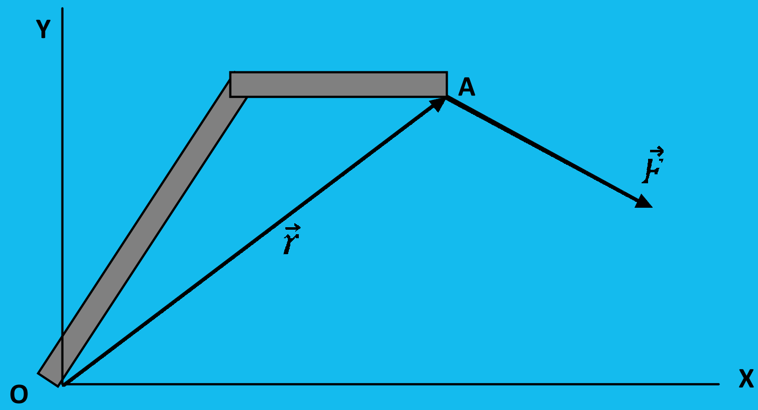
4.7 TORQUE DE UNA FUERZA COMO PRODUCTO VECTORIAL.

En física la definición formal del torque ejercido por una fuerza alrededor de un determinado punto es una expresión vectorial:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,x\,\vec{F}$$

Donde el torque $\vec{\tau}$ es el vector resultante del producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ del punto donde esta aplicada la fuerza, y la fuerza $\vec{F}$ que realiza el torque.

En la figura se muestra una barra que se encuentra en el plano XY pivotada en el punto O. En el punto A de la barra se aplica una fuerza $\vec{F}$. Si tenemos que encontrar el torque que ejerce la fuerza sobre la barra alrededor del punto O, debemos desarrollar el producto vectorial del vector $\vec{r}$ con el vector $\vec{F}$, siendo estos los indicados en el esquema.



Donde el torque es:

$$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

Ejemplo 15

En la figura las coordenadas del punto son A (10, 5) m y el vector fuerza está representado por el vector.

$$\vec{F} = 150\,\vec{i} - 110\,\vec{j} \quad \text{Newton}$$

El torque respecto del punto O es:

Vector de posición del punto A respecto de O:

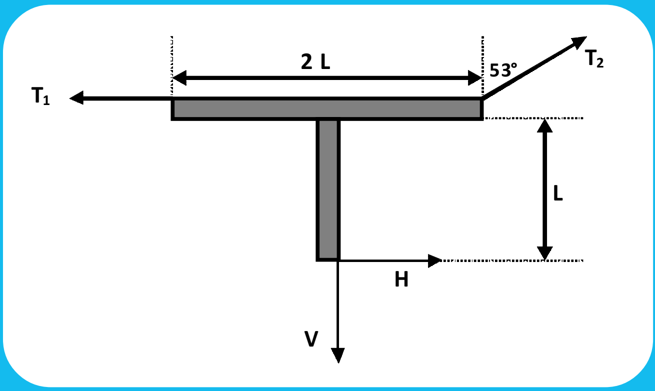
$$\vec{r} = 10\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$$

$$\vec{\tau}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 5 & 0 \\ 150 & -110 & 0 \end{vmatrix} = -1850\,\vec{k} \quad \text{Nm}$$

Algunos de los problemas han sido tomados del archivo de los problemas de Física Básica del Área de Física del Departamento de ciencias de la URP. En todos los cálculos que realice tenga en consideración el número de cifras significativas que debe tener la respuesta.

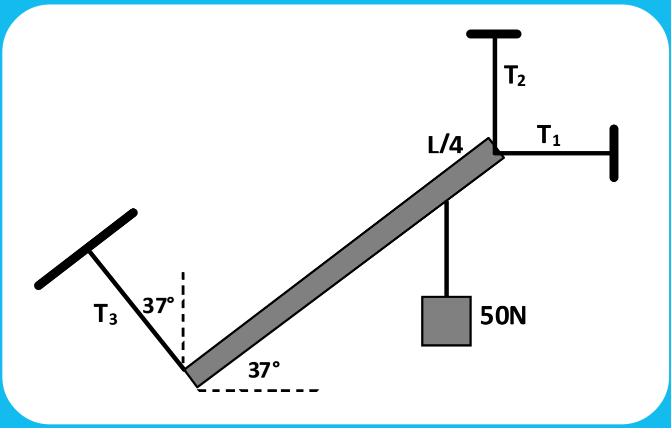
Problema 1

La estructura en forma de T mostrada en la figura tiene peso despreciable. Si T_2 es igual a 50 N, ¿cuál debe ser la magnitud de T_1, H y V para que la estructura este en equilibrio?



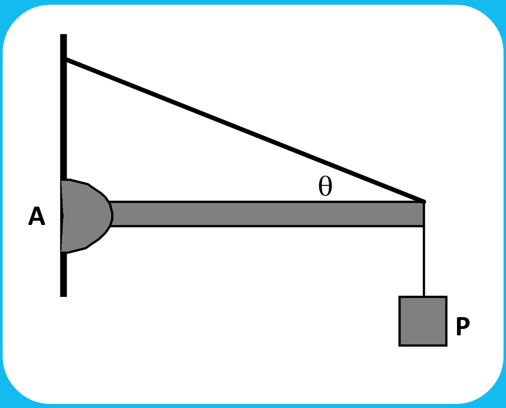
Problema 2

La barra de longitud L mostrada en la figura pesa 50 N. ¿Cuáles son las magnitudes de las tensiones T_1, T_2 y T_3?



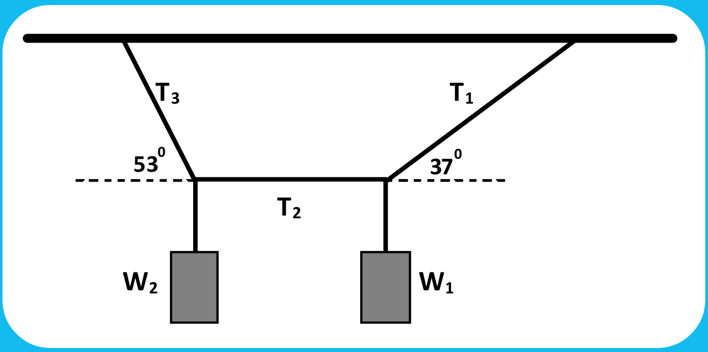
Problema 3

La figura muestra una barra homogénea de longitud L y peso W. Un extremo de la barra está sujeto a la pared mediante una bisagra A y el otro a una cuerda. Si el peso del bloque suspendido es P, encontrar las componentes horizontal y vertical de la reacción en la bisagra.



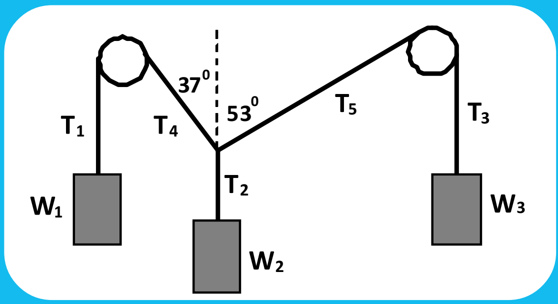
Problema 4

El peso W_1 mostrado en la figura es de 300 N. Encontrar las tensiones T_1, T_2, T_3 y W_2 para que el sistema este en equilibrio.



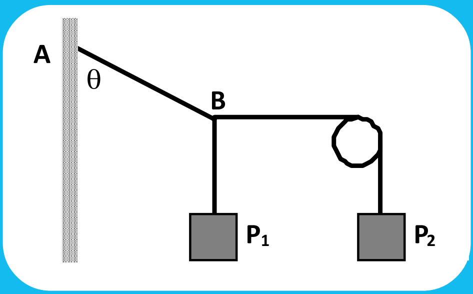
Problema 5

Dos poleas prácticamente sin fricción sostienen en equilibrio el sistema formado por los pesos y las cuerdas como se muestra en la figura. Si W_1 es igual a 100 Kg, encontrar las tensiones T_1, T_2, T_3, T_4, W_2 y W_3.



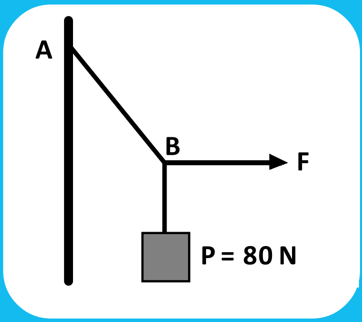
Problema 6

Para la figura mostrada, calcular el ángulo θ y la tensión en la cuerda AB si $P_1 = 300$ N y $P_2 = 400$ N.



Problema 7

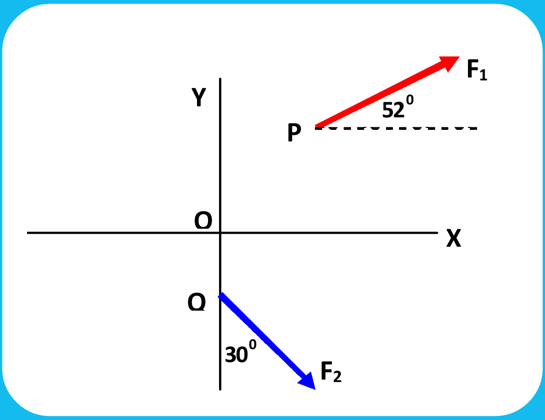
El cuerpo mostrado en la figura pesa 80 N y está en equilibrio mediante la cuerda AB y la acción de la fuerza horizontal $\vec{F}$. Si la longitud de la cuerda AB = 150 cm y que la distancia del punto B a la pared es 90 cm, encontrar la magnitud de la fuerza y la tensión en la cuerda.



Problema 8

La figura muestra un sistema de coordenadas cartesianas en el plano XY. En el punto P (3,2) m está aplicada una fuerza F_1 de 20 N y en el punto Q (0,-4) m una fuerza F_2 de 15 N. Encontrar:

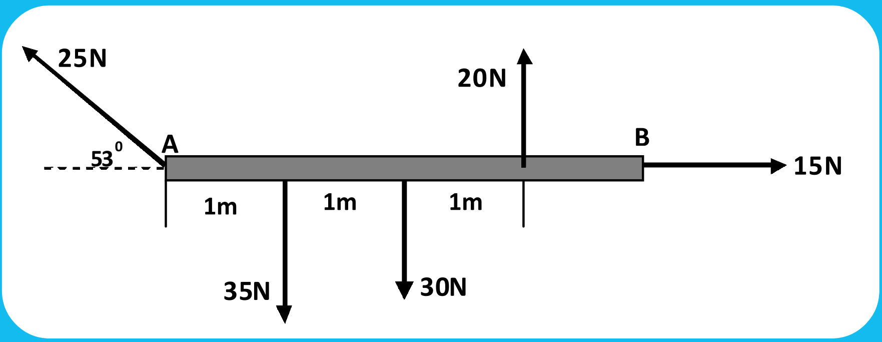
a) La fuerza resultante.
b) El torque con respecto al punto O, origen del sistema de coordenadas.
c) El torque con respecto al punto S (-2,4) m.



Problema 9

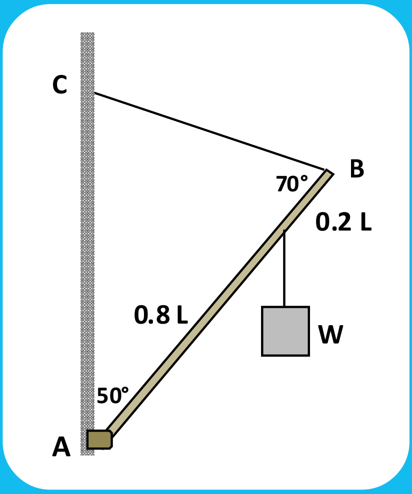
La figura muestra una barra de masa despreciable y 4 m de longitud, sobre la cual actúan las fuerzas coplanares no concurrentes indicadas. Encontrar:

a) La fuerza resultante.
b) El torque respecto al punto A.
c) El torque respecto al punto B.



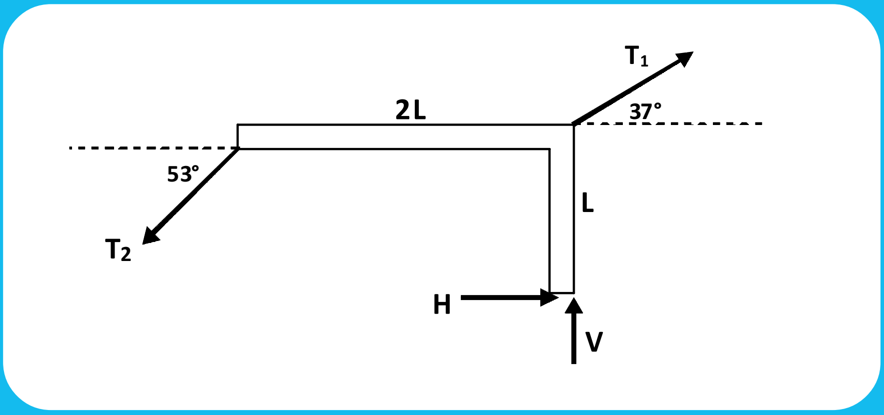
Problema 10

En la figura la viga AB es uniforme y pesa 200 N y el tirante BC puede soportar una tensión máxima de 1000 N. Cuál debe ser el peso máximo W que puede soportar el tirante para no romperse y cuál es la magnitud de la reacción en la bisagra A.



Problema 11

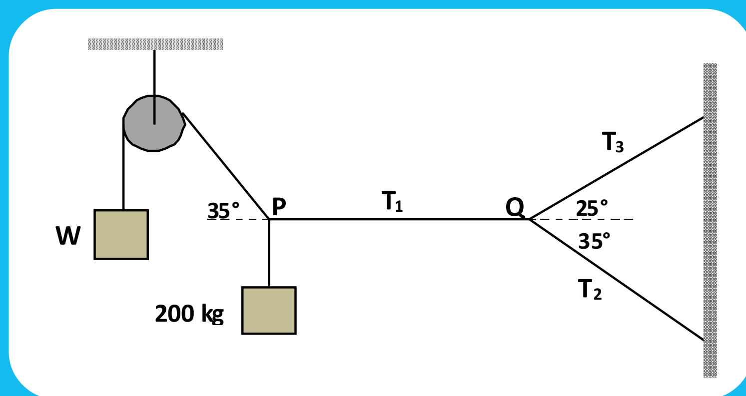
Considérese que la escuadra mostrada en la figura tiene peso despreciable. Si T_1 = 40N, ¿Cuáles son los valores de T_2, V y H para que la escuadra este en equilibrio?



Problema 12

El sistema mostrado en la figura está en equilibrio. Encontrar:

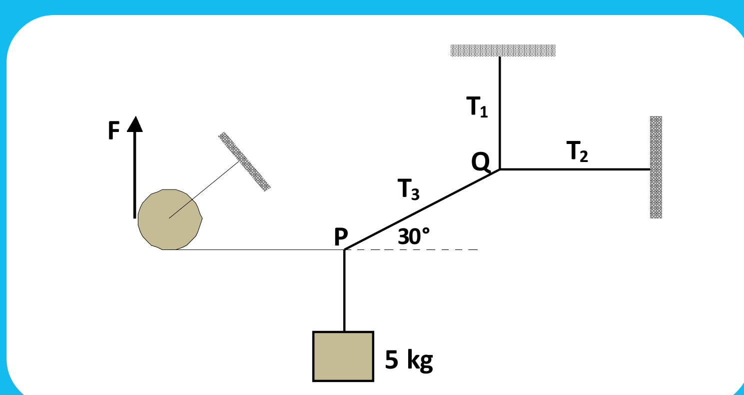
a) Los diagramas de cuerpo libre en los puntos P y Q.
b) El peso W.
c) Las tensiones en las cuerdas T_1, T_2 y T_3.



Problema 13

La figura muestra un sistema en equilibrio.

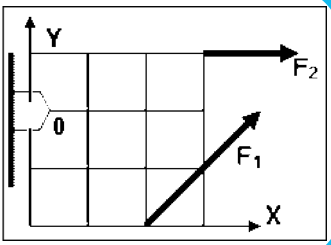
a) Dibujar los diagramas de cuerpo libre en los puntos P y Q.
b) Escribir las ecuaciones de equilibrio del punto P y determinar F y T_3.
c) Escribir las ecuaciones de equilibrio del punto Q y determinar T_1 y T_2.



Problema 14

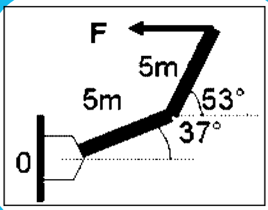
La placa de la figura se encuentra bajo la acción de las fuerzas F_1 = 40N y F_2 = 20N.

a) Determinar el torque total resultante de las fuerzas F_1 y F_2 respecto del punto 0, si la arista de cada cuadrado vale 1m.
b) ¿Cuál debe ser el nuevo valor de F_2 para que el torque total resultante respecto del punto 0 sea cero?



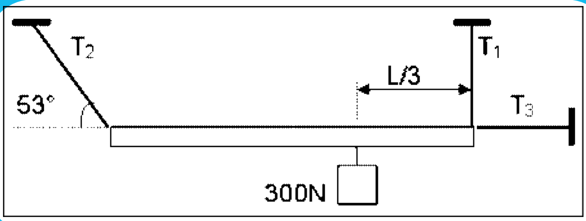
Problema 15

Se tiene una viga uniforme de 10kg y longitud 10 m, doblada por el centro como se muestra en la figura. Cada sección de 5 m de la viga forma los ángulos mostrados. Determinar el torque total respecto del punto 0 si se aplica la fuerza horizontal F = 50N



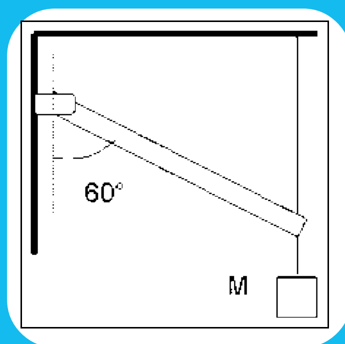
Problema 16

El sistema mostrado en la figura está en equilibrio. Determinar el valor de las tensiones T_1, T_2 y T_3, si la viga es uniforme y homogénea y pesa 150N.



Problema 17

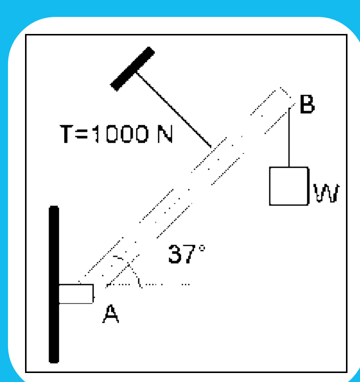
La figura muestra una viga uniforme y homogénea de 20 Kg en equilibrio. Está articulada mediante una bisagra en la pared y sostenida por un cable vertical en su otro extremo. Determinar la tensión en el cable cuando la masa del bloque M es 40 Kg.



Problema 18

La figura muestra una viga uniforme AB de 4m de longitud y 20 kg en equilibrio. La viga se encuentra sujeta por un cable perpendicular soldado a 3m de la articulación A. La tensión que soporta el cable es de 1000 N. Encontrar:

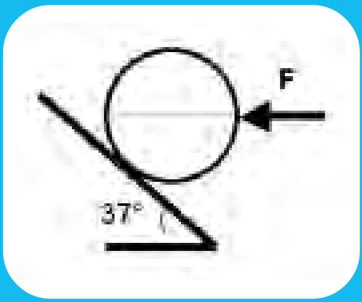
a) El DCL de la viga AB.
b) El valor del peso W suspendido en el extremo B de la viga.
c) Las componentes horizontal y vertical de la fuerza de reacción ejercida por la articulación en A.



Problema 19

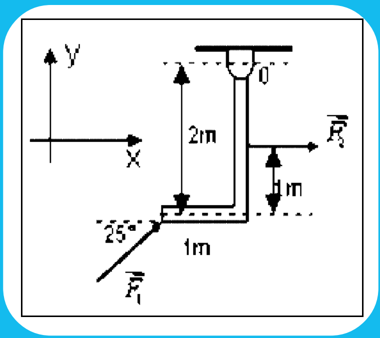
La esfera de la figura de 40 kg esta en equilibrio por acción de la fuerza horizontal F.

a) Dibujar el DCL de la esfera.
b) Escribir las ecuaciones para el equilibrio de la esfera.
c) Hallar la magnitud de la fuerza F



Problema 20

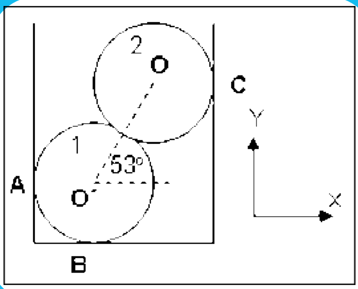
Determinar el momento o torque resultante respecto del punto 0 de las fuerzas que se muestran en la figura si $\left|\vec{F}_1\right| = 100N$ y $\left|\vec{F}_2\right| = 400N$



Problema 21

Dos esferas idénticas de 300N de peso cada una, se encuentran en equilibrio en el interior de una caja rectangular apoyadas en los puntos A, B y C como se muestra en la figura. Los centros de las esferas son O y O´ y todas las superficies son completamente pulidas. Determinar:

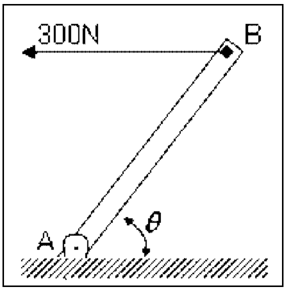
a) Los DCL de la esfera 1 y de la esfera 2.
b) Las ecuaciones de equilibrio para cada una de las esferas con relación a los ejes X e Y de la figura.
c) La fuerza de reacción que ejerce la caja sobre las esferas en los puntos de apoyo A, B y C, y la fuerza que ejerce la esfera 1 sobre la esfera 2.



Problema 22

La viga homogénea AB de la figura pesa 400N y esta articulada a una bisagra en A y se encuentra en equilibrio por acción de la fuerza horizontal de 300N. Determinar:

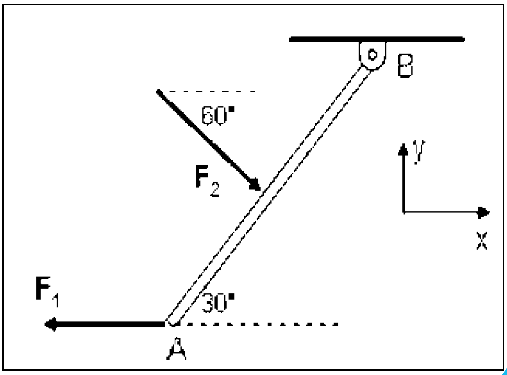
a) El DCL de la viga AB.
b) El ángulo θ
c) Las componentes horizontal y vertical de la fuerza de reacción sobre la viga en A.



Problema 23

La viga uniforme AB de masa despreciable se encuentra articulada en el punto B y está en equilibrio por acción de las fuerzas F_1=100 N y F_2 que es perpendicular a la viga en su punto medio. Determinar:

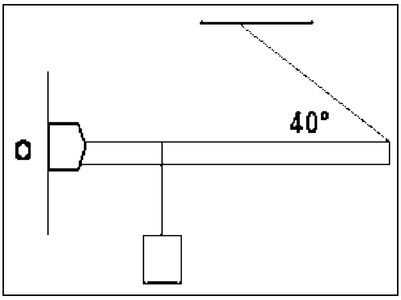
a) El DCL de la viga.
b) La magnitud de la fuerza F_2
c) Las componentes horizontal y vertical de la reacción en B.



Problema 24

La figura muestra una viga recta y uniforme de 100 Kg. A la distancia L/3 de la bisagra O está suspendido un peso de 350 N. Encontrar:

a) El DCL de la viga.
b) Las ecuaciones necesarias para el equilibrio.
c) La tensión en la cuerda y la reacción en la bisagra.



Capítulo V

CINEMÁTICA

INTRODUCCIÓN

Cinemática es el estudio del movimiento de los cuerpos sin tomar en cuenta la causa que produce dicho movimiento. Cuando observamos un objeto que está moviéndose, generalmente nos fijamos en su posición, su velocidad y su aceleración, términos que son necesarios definirlos previamente.

Es necesario hacernos las siguientes preguntas:

- **¿Qué es el desplazamiento?**
- **¿Qué es la velocidad?**
- **¿Qué es la rapidez?**
- **¿Qué es la aceleración?**

En este capítulo primero describiremos el movimiento rectilineo o movimiento unidimensional por ser el más sencillo que puede realizar una partícula, para definir los términos antes mencionados.

Un punto muy importante a considerar en el estudio de la cinemática, es que todo movimiento es relativo. Esto quiere decir que para hacer un análisis del movimiento, primero es necesario definir un sistema de coordenadas en el cual se encuentre el observador, dado que en diferentes sistemas de coordenadas el movimiento analizado puede tener diferente interpretación.

Un objeto que está en reposo para un observador puede estarlo en movimiento para otro observador. Tomemos el ejemplo de un observador A sentado dentro de un tren que se mueve uniformemente respecto de la estación en la que se encuentra parado otro observador B. Para el observador A un libro que está sobre una mesa dentro del tren está en reposo; pero para el observador B, que esta fuera del tren, el mismo libro está en movimiento junto con el tren. Esta diferencia en la observación del movimiento del libro que realiza cada observador se denomina relativo, porque depende del lugar en el cual se encuentre cada observador.

5.1 MOVIMIENTO RECTILINEO O UNIDIMENSIONAL

El movimiento rectilineo o unidimensional es el que realiza una partícula o un móvil a lo largo de una línea recta, en cualquiera de los dos sentidos. La línea recta a la que hacemos referencia es cualquiera y puede ser horizontal, vertical o inclinada.

Para poder definir los términos antes señalados, consideraremos que dicho movimiento es a lo largo del eje X, es decir un eje horizontal.

DESPLAZAMIENTO

En el capítulo 3 definimos dos vectores muy importantes: el vector de posición y el vector desplazamiento.

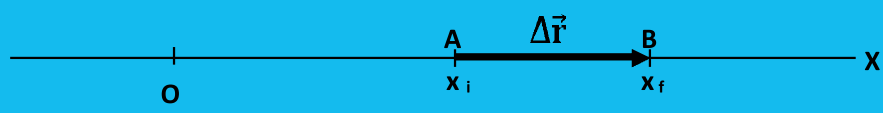
El vector de posición es un vector que va del origen del SCC al punto donde se encuentra la partícula; en nuestro caso de movimiento rectilineo en el eje X la figura muestra el vector de posición $\vec{r}$.

Siendo el vector $\vec{r}$ igual a:

$$\vec{r} = x\,\vec{i}$$

Donde x corresponde a la coordenada e $\vec{i}$ al vector unitario en el eje X.

Si consideramos dos puntos A y B sobre el eje X cuyas coordenadas son x_i e x_f, podemos definir el vector desplazamiento de A a B como $\Delta\vec{r}$:



Donde:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = x_f\,\vec{i} - x_i\,\vec{i} = (x_f - x_i)\vec{i}$$

Si llamamos $\Delta x = x_f - x_i$ se tiene entonces que:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{i}$$

Donde Δx es una cantidad que puede ser + (si $x_f > x_i$), - (si $x_f < x_i$), 0 (si $x_f = x_i$). El signo que tiene Δx señala el sentido del vector $\Delta\vec{r}$.

En el análisis del movimiento rectilineo a lo largo del eje X al término Δx denominaremos el desplazamiento en dicho eje y el signo que adquiera indicara el sentido del movimiento. Si se escribe el vector desplazamiento debemos multiplicarlo por el vector unitario en el eje X es decir $\vec{i}$

Ejemplo 1

Una partícula se desplaza a lo largo del eje X. Primero pasa por el punto A cuya posición es x = 4 m y posteriormente por el punto B cuya posición es x = 12 m. Cuál es el desplazamiento de la partícula.

Solución

De la lectura del problema las coordenadas de posición de la partícula son x_i = 4 m y x_f = 12 m.

El desplazamiento de A a B será:

$$\Delta x = 12 - 4 = 8\ \text{m}$$

Esto significa que se desplaza en la dirección + del eje X la distancia de 8 m.

Ejemplo 2

Una partícula se desplaza a lo largo del eje X. Primero pasa por el punto A cuya posición es x = 14 m y posteriormente por el punto B cuya posición es x = 4 m. Cuál es el desplazamiento de la partícula.

Solución.

De la lectura del problema las coordenadas de posición de la partícula son $x_i = 14$ m y $x_f = 4$ m.

El desplazamiento de A a B será:

$$\Delta x = 4 - 14 = -10 \text{ m}$$

Esto significa que se desplaza en la dirección - del eje X la distancia de 10 m.

Ejemplo 3

Una partícula se desplaza a lo largo del eje X. Primero pasa por el punto A cuya posición es x = 6 m y posteriormente por el punto B cuya posición también es x = 6 m. Cuál es el desplazamiento de la partícula.

Solución.

De la lectura del problema las coordenadas de posición de la partícula son $x_i = 6$ m y $x_f = 6$ m.

El desplazamiento de A a B será:

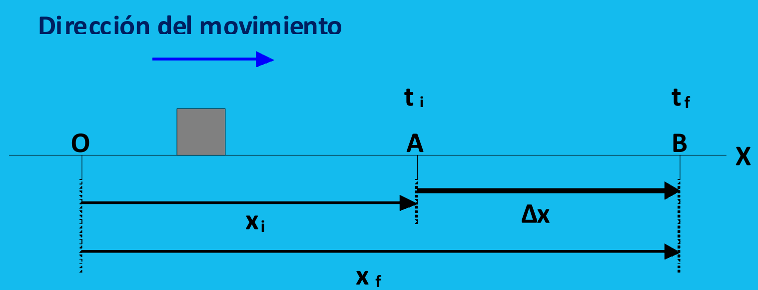
$$\Delta x = 6 - 6 = 0 \text{ m}$$

Esto significa que entre dichos puntos no existe desplazamiento.

INTERVALO DE TIEMPO

Una partícula se desplaza a lo largo del eje X como se muestra en la figura. Cuando pasa por el punto A lo hace en el instante de tiempo t_i y su posición es x_i, cuando pasa por el punto B lo hace en el instante de tiempo posterior t_f y su posición es x_f.

Los subíndices i y f se refieren a los valores inicial y final como se muestra en la figura, tomando como referencia el origen o el punto O para las posiciones:



Cuando la partícula pasa por las posiciones A y B su desplazamiento Äx está dado por:

$$\text{Äx} = x_f - x_i$$

El tiempo empleado en recorrer dicho desplazamiento es:

$$\text{Ät} = t_f - t_i$$

El cual siempre es una cantidad positiva.

LA VELOCIDAD

La velocidad es una magnitud física vectorial que mide el cambio de posición de una partícula en el tiempo. En cinemática se definen dos tipos de velocidad:

- Velocidad Media.
- Velocidad instantanea.

Velocidad media.

La velocidad media se mide en un intervalo de tiempo. Se define como la relación o razón del desplazamiento (Äx) realizado por la partícula en el intervalo de tiempo (Ät) empleado para recorrer dicho desplazamiento:

$$< v > = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

La velocidad media es independiente de la trayectoria lineal que haya seguido la partícula entre los puntos A y B, depende solo de la coordenada inicial y final alcanzada por la partícula en el eje X.

La dimensión de la **velocidad media** es (LT^{-1}) y sus unidades dependen del sistema en el que nos encontremos trabajando.

Si una partícula pasa por el punto A y después de cierto tiempo pasa nuevamente por el mismo punto A, su desplazamiento (Äx) es igual a cero, pero el tiempo empleado en ir y regresar (Ä t) es diferente de cero, cuando hayamos la velocidad media nos resulta cero. Debemos tener presente que existe diferencia entre el significado de **desplazamiento** y el **recorrido de una partícula**, este último es la longitud del espacio recorrido y nunca es cero, a no ser que la partícula permanezca en reposo.

La **velocidad media** puede ser una cantidad **positiva** o **negativa**, según el signo del **desplazamiento**.

Ejemplo 4

Una partícula que se mueve a lo largo del eje X está localizada en x = 15 m en el instante de tiempo t = 12 s y en x = 6 m en el instante de tiempo t = 18 s. Encontrar:

a) El valor del desplazamiento de la partícula.
b) La velocidad media de la partícula.

Solución:

De la lectura del problema se desprende que $x_i = 15m$ cuando $t_i = 12$ s y que $x_f = 6m$ cuando $t_f = 18$ s. Con los datos obtenidos tendremos:

a) Desplazamiento e intervalo de tiempo.

Äx = $x_f - x_i = 6 - 15 = -9$ m
Ät = $t_f - t_i = 18 - 12 = 6$ s.

La velocidad media es según la definición es:

$$< v > = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{6-15}{18-12} = -1.5 \text{ m/s}$$

El resultado obtenido nos permite afirmar que la partícula se desplaza en el sentido negativo del eje X, con una velocidad media de 1.5 m/s entre las posiciones indicadas.

Ejemplo 5

Un automovilista conduce hacia el norte durante 35 minutos a 85 Km/h y se detiene 15 minutos. Luego

Continúa viajando hacia el norte recorriendo 130 Km en 2 horas. a) ¿Cuál es su desplazamiento total? b) ¿Cuál es su velocidad media?

Solución:

a) El automovilista siempre conduce en una misma dirección, hacia el norte. Las distancias recorridas por tramos son:

Tramo AB:

Este tramo lo recorre a una velocidad de 85 Km/h durante 35 min.
AB = (85 x35)/60 = 49.6 Km

Se detiene en B durante 15 min.

Tramo BC:

Este tramo de 130 Km lo recorre en 120 min.

El desplazamiento total (AC = AB + BC) será:

$$AC = 49.6 + 130 = 179.6 \text{ Km.}$$

b) La velocidad media con la que recorrió la distancia de 179.6 Km.

El tiempo empleado en recorrer dicha distancia es de:

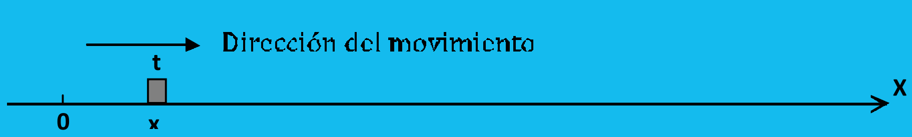
$$\Delta t = 35 + 15 + 120 = 170 \text{ min.}$$

La velocidad media sería:

$$< v > = 179.6/170 = 1.06 \text{ Km/min.} \qquad \text{o} \qquad 63.4 \text{ Km/h}$$

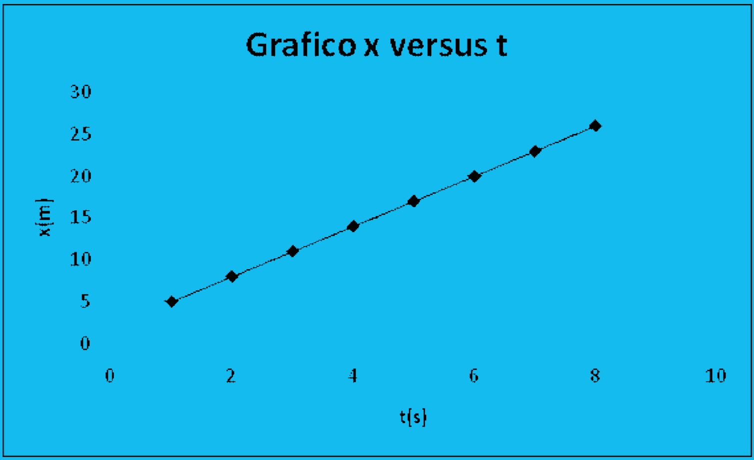
5.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

Para realizar la representación grafica de la posición en función del tiempo en el movimiento rectilineo, supondremos el siguiente experimento. Consideremos que estamos en el laboratorio y que un carrito sobre la mesa realiza movimiento rectilineo a lo largo del eje X. Podemos medir su posición x a partir de un origen O y el instante de tiempo que pasa por dicha posición. Este experimento permite obtener los siguientes datos:



x(m)	5	8	11	14	17	20	23	26
t(s)	1	2	3	4	5	6	7	8

Con los datos obtenidos podemos realizar un grafico en el que representamos la posición del móvil x en función del tiempo t (x vs t).



El grafico muestra como varia la posición de la partícula en el eje X en función del tiempo. El grafico resultado de dicha representación es una línea recta, cuya ecuación puede ser hallada a partir de la información que nos ha sido dada y del grafico.

Aplicando el método dado en el capítulo 2 la ecuación o función que relaciona las dos variables $x = f(t)$ es.

$$x = 3t + 2$$

La ecuación obtenida se denomina **Ecuación del Movimiento Rectilineo**. Conocida la ecuación del movimiento, podemos encontrar la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo. Por ejemplo cual es la posición de la partícula cuando $t = 7.8$ s

$$x = 25.4 \text{ m}$$

Ejemplo 6

Usando la ecuación del movimiento hallada anteriormente, encontrar:

Solución.

a) Cuál es la posición de la partícula en el instante de tiempo t = 0 s o instante inicial.

$$x = 3(0) + 2 = 2 \text{ m}$$

b) La velocidad media entre los instantes de tiempo t = 3 s y t = 8 s.

Con los datos encontremos las posiciones en los tiempos dados:

$x_i = 3x3 + 2 = 11$ m $x_f = 3x8 + 2 = 26$ m

El desplazamiento será:

Äx = 26 – 11 = 15 m

El intervalo de tiempo es:

Ät = 8 – 3 = 5 s

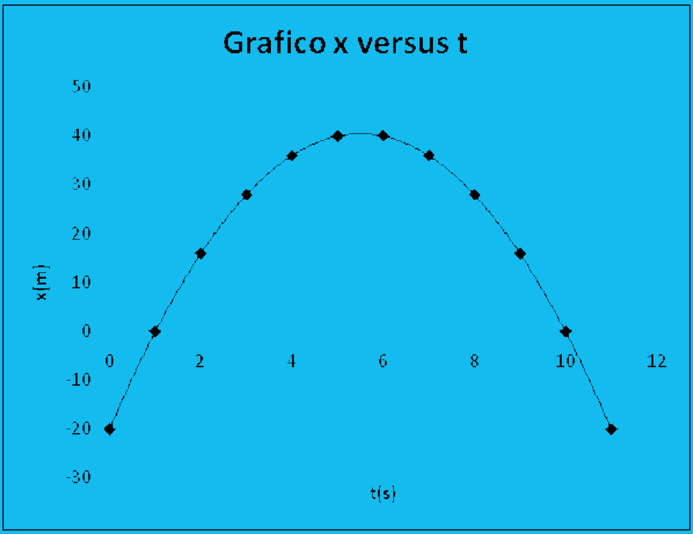
La velocidad media es.

$$\langle v \rangle = 3 \text{ m/s}$$

Consideremos otro movimiento rectilineo también a lo largo del eje X, y de la misma forma que lo hicimos anteriormente, medimos posición y tiempo obteniendo los siguientes datos:

x(m)	-20	0	16	28	36	40	40	36	28	16	0	-20
t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Realizado el gráfico se obtiene:



A partir del grafico se encuentra la ecuación del movimiento o la función x = f(t) que permite hallar la posición de la partícula en el eje X en función del tiempo.

$$x = -2t^2 + 22t - 20$$

Donde x está en metros y t en segundos.

El grafico y la función corresponden a una parábola. Esto no significa que el movimiento o la trayectoria seguida sean parabólicos.

Ejemplo 7

Usando la ecuación del movimiento obtenido anteriormente responder a las siguientes preguntas.

Solución.

a) Cuál es la posición de la partícula cuando t = 2.5 s

Reemplazando el valor del tiempo en la ecuación del movimiento.

$$x = -2t^2 + 22t - 20$$

Se tiene:

$$x = 22.5 \text{ m}$$

b) La posición de la partícula cuando t = 4.5 s

$$x = 38.5 \text{ m}$$

c) La posición de la partícula cuando t = 11.5 s

$$x = -31.5 \text{ m}$$

d) La velocidad media en el intervalo de tiempo entre t = 2.5 s y t = 4.5 s

<v> = 8 m/s

e) La velocidad media en el intervalo de tiempo entre t = 4.5 s y t = 11.5 s.

<v> = - 10 m/s

f) Los instantes de tiempo cuando la partícula pasa por x = 0 m o el origen.
Reemplazando en la ecuación del movimiento x = 0 se tiene:

$$2\,t^2 - 22\,t + 20 = 0$$

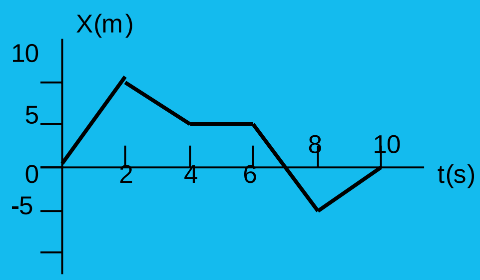
La solución de la ecuación de segundo grado obtenida dará los valores para los cuales la partícula pasa por x = 0

$$t_1 = 1 \text{ s} \qquad\qquad t_2 = 10 \text{ s}$$

La solución nos da dos valores para el tiempo. Por tanto la partícula pasa dos veces, en el instante t = 1 s pasa en el dirección + del eje X y en el instante t = 10 s pasa nuevamente por x =0 pero en sentido contrario, es decir regresa.

Ejemplo 8

En la figura se muestra la gráfica del desplazamiento versus el tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje X. Encontrar la velocidad media en los intervalos de tiempo: a) de 0 a 2s, b) de 0 a 4s, c) de 2 a 6s, d) de 4 a 6s, e) de 6 a 10s.



Solución:

a) $\Delta x = 10 - 0 = 10m$, $\Delta t = 2 - 0 = 2s$ $< v > = 10 / 2 = 5$ m/s
b) $\Delta x = 5 - 0 = 5m$, $\Delta t = 4 - 0 = 4s$ $< v > = 5/4 = 1.25$ m/s
c) $\Delta x = 5 - 10 = - 5m$, $\Delta t = 6 - 2 = 4s$ $< v > = - 5/4 = -1.25$ m/s
d) $\Delta x = 5 - 5 = 0m$, $\Delta t = 6 - 4 = 2s$ $< v > = 0/2 = 0$ m/s
e) $\Delta x = 0 - 5 = - 5m$, $\Delta t = 10 - 6 = 4s$ $< v > = -5/4 = - 1.25$ m/s

Ejemplo 9

La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje X está dada por la función $x = 3t^3 - 7t$, donde t está dado en segundos y x en metros. ¿Cuál es la velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo comprendido entre t = 2.0s y t = 5.0s?

Solución:

La función o ecuación del movimiento: $x = 3t^3 - 7t$, permite encontrar la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo. Cuando t = 2s su posición es x = 10m y cuando t = 5s su posición es x = 340m.

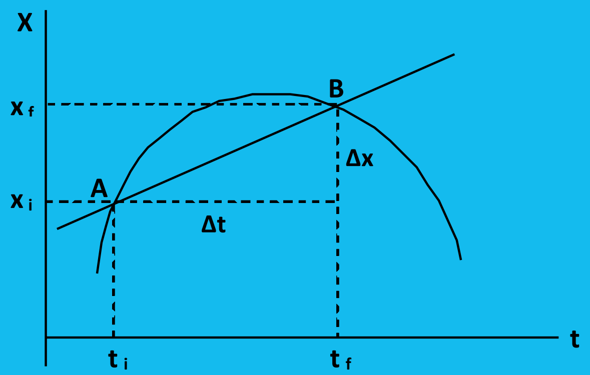
La velocidad media en el intervalo de tiempo $\Delta t = 5s$ será:

$$<v> = \frac{340 - 10}{5 - 2} = 110 \text{ m/s}$$

5.3 LA VELOCIDAD MEDIA OBTENIDA A PARTIR DEL GRAFICO ESPACIO – TIEMPO.

Los graficos obtenidos anteriormente representan la posición de la partícula en su recorrido a lo largo del eje X en función del tiempo. En los mismos graficos se puede interpretar geométricamente la velocidad media.

La figura representa la posición (x) en función del tiempo (t) de una partícula que se desplaza a lo largo del eje X. Tomemos dos puntos A y B de dicho gráfico cuyas coordenadas son A(x_i, t_i) y B(x_f, t_f).



En el gráfico podemos leer que la partícula en el instante de tiempo t_i se encuentra en la posición x_i y un tiempo posterior t_f en la posición x_f. El desplazamiento de la partícula es por definición:

$$Äx = x_f - x_i$$

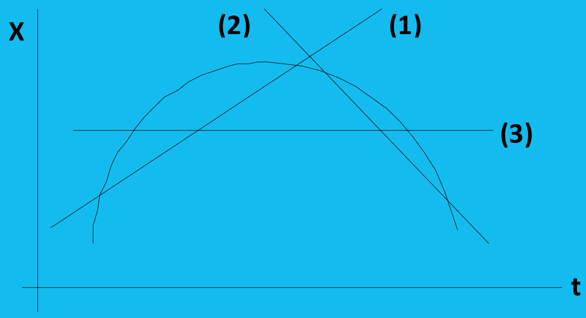
Y el tiempo empleado en recorrer dicho desplazamiento:

$$Ät = t_f - t_i$$

Al unir los puntos A y B mediante una recta secante, se construye un triángulo rectángulo donde Äx y Ät son sus catetos. La pendiente de la recta AB es igual a Äx / Ät que es lo mismo por definición la velocidad media entre las posiciones A y B oi en el intervalo de tiempo Ät.

La pendiente de una línea recta secante trazada en un grafico espacio-tiempo (x vs t), representa la velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo Ät.

De lo observado podemos asegurar que en una gráfica espacio-tiempo, que representa el movimiento rectilíneo, la velocidad media de la partícula entre dos instantes de tiempo es la pendiente de la recta secante. Dicha pendiente puede ser positiva, negativa o cero como se muestra en los gráficos siguientes:



En la grafica la secante (1) su velocidad media es + porque su pendiente es +. En la secante (2) su velocidad media es – porque su pendiente es -. En la secante (3) la velocidad media es cero.

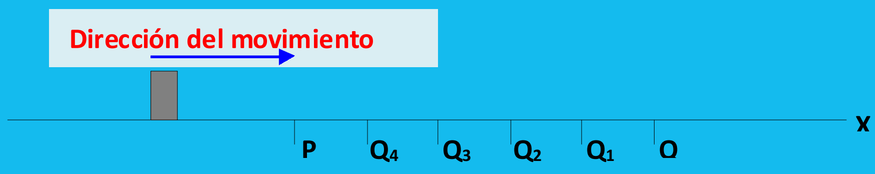
Velocidad instantánea

La velocidad instantanea de una partícula es la que se mide en un instante de tiempo. Se diferencia de la velocidad media por que ésta es medida en un intervalo de tiempo.

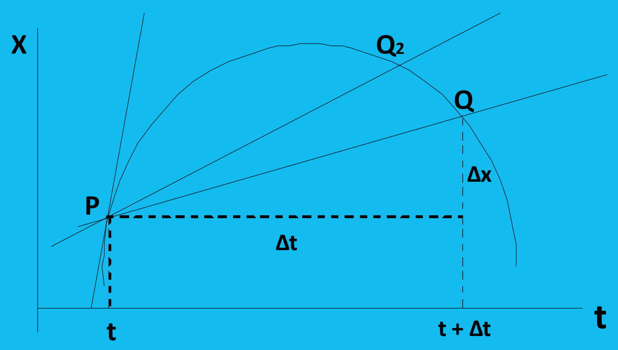
Se halla tomando el límite a la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero y se expresa de la siguiente manera:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Una manera de visualizar gráficamente la velocidad instantanea es analizar el movimiento rectilineo en un grafico espacio – tiempo. Consideremos por ejemplo una partícula que se desplaza a lo largo del eje X entre los puntos P y Q. Los puntos Q_1, Q_2, Q_3,…, son posiciones intermedias entre P y Q.



Si se representa en una gráfica espacio - tiempo la posición en función del tiempo el movimiento de la partícula, se obtiene en general una grafica que como hemos visto representa la ecuación del movimiento. Además hemos encontrado que las pendientes de las secantes trazadas nos dan las velocidades medias en el intervalo de tiempo considerado.

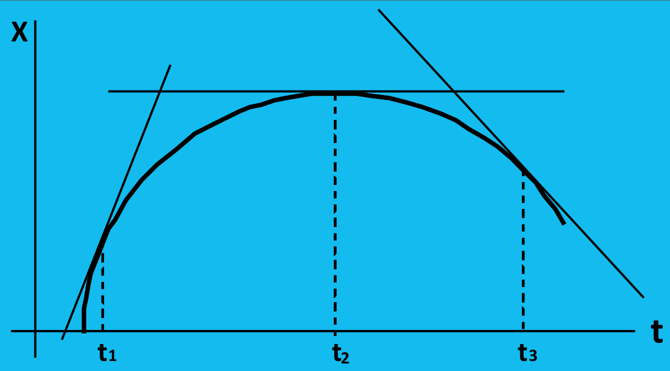


La pendiente de la secante PQ es la velocidad media entre los puntos P y Q o en el intervalo t y t + Ät. Si consideramos en el grafico a P como punto fijo y nos movemos de Q hasta Q_2 se tiene una nueva secante cuya pendiente es la velocidad media entre P y Q_2; en el cual podemos observar que el valor de Ät ha disminuido.

¿Qué pasa cuando el punto Q coincide con el punto P? En ese caso las sucesivas secantes terminan convirtiéndose en una línea recta tangente al grafico en P en el instante de tiempo t y la pendiente de dicha recta tangente es la llamada velocidad instantanea en el instante de tiempo t. En ese momento Ät alcanzo el valor de cero.

Estos resultados nos llevan a señalar que en el grafico espacio-tiempo las pendientes de las secantes nos dan la velocidad media en un intervalo de tiempo y la pendiente de una línea tangente nos da la velocidad instantanea en un instante de tiempo t.

La **velocidad instantánea** es una magnitud física vectorial. Lo que encontramos a partir del grafico solo es su modulo y su sentido ya que la dirección corresponde al eje X. Al hallarla a partir del grafico nos da valores positivos, negativos o cero, valores y signos que dependen de la pendiente de la recta tangente en el grafico. **Es común referirse a la velocidad instantánea solamente como la velocidad**.



El gráfico muestra que la velocidad instantánea para t_1 es > 0, por que la pendiente de la recta en dicho punto es positiva; para t_2 la velocidad instantánea es = 0, por que la pendiente de la recta en dicho punto es cero y para t_3 la velocidad instantánea es < 0, por que la pendiente de la recta en dicho punto es negativa.

Un término que se usaremos frecuentemente es el de **rapidez instantánea** o **rapidez**, el cual significa la magnitud o el modulo de la velocidad instantánea y por tanto siempre es positiva.

Ejemplo 10

Una partícula se mueve a lo largo del eje X y la ecuación o posición en función del tiempo es:

$$x = 4t - 12$$

Donde x esta en metros y t en segundos. Hallar la velocidad instantanea cuando t = 5 s

Solución:

Para encontrar la velocidad instantanea usaremos su definición.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Posición en el instante de tiempo t:

$$x(t) = 4t - 12$$

Posición en el instante de tiempo t + Ät

x(t+Ät) = 4 (t+Ät) - 12

Desplazamiento Äx en el intervalo de tiempo Ät

Äx = x(t+Ät) – x(t) = 4 Ät

Hallando la velocidad media.

$$\frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t}} = 4$$

Hallando el limite a la velocidad media cuando Ät = 0

$$\mathrm{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim 4 = 4$$

El resultado da la función de la velocidad instantanea el cual es igual a 4 m/s y es independiente del tiempo. Para responder a la pregunta del problema de la velocidad instantanea a los 5 s, debemos señalar que como sale independiente del tiempo su valor será igual también a 4 m/s.

Esto nos lleva a concluir que el movimiento de la partícula dada por la ecuación:

$$x = 4\,t - 12$$

Es un movimiento con velocidad constante 4 m/s a lo largo del eje X y siempre en la dirección +.

Ejemplo 11

Una partícula se mueve a lo largo del eje X, y su posición en función del tiempo está dada por la siguiente función:

$$x = 3\,t^2 - 2\,t + 5$$

donde x esta en metros y t en segundos.

Hallar la velocidad instantanea de la partícula cuando t = 5 s.

Solución.

La posición de la partícula en el instante t es:

$$x(t) = 3t^2 - 2t + 5$$

La posición de la partícula en el instante t = t + Ä t es:

$$x(t + \text{Ä}t) = 3(t + \text{Ä}t)^2 - 2(t + \text{Ä}t) + 5$$

El desplazamiento en dicho intervalo de tiempo es:

$$\text{Ä}x = x(t + \text{Ä}t) - x(t)$$
$$\text{Ä}x = 3(\text{Ä}t)^2 + 6t(\text{Ä}t) - 2(\text{Ä}t)$$

Hallando la velocidad media:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 3\,\text{Ä}t + 6t - 2$$

Tomando el límite a la expresión encontrada cuando Ä t = 0, nos da por definición la velocidad instantanea:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (3\,\Delta t + 6\,t - 2)$$

$$v = 6t - 2$$

La ecuación representa la velocidad instantanea de la partícula en cualquier instante de tiempo. Por consiguiente si una partícula se desplaza a lo largo del eje X y su posición en función del tiempo está dada por la función:

$$x = 3t^2 - 2t + 5$$

Su velocidad instantanea está dada por la función:

$$v = 6t - 2$$

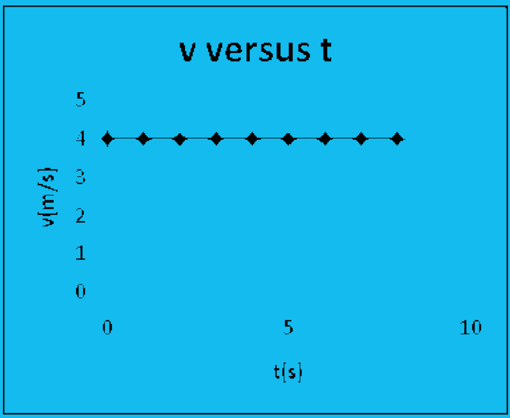
El problema nos muestra que a partir de la función de posición de la partícula lo largo del eje X se encuentra la función de la velocidad en función del tiempo.

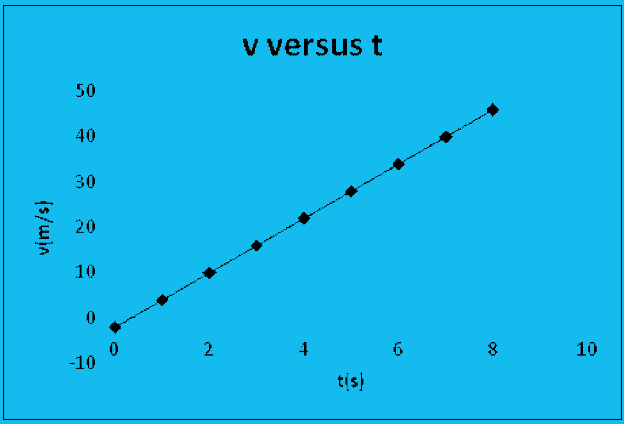
La velocidad instantanea se encuentra reemplazando t = 5 s

$$v = 28 \text{ m/s}$$

Los ejemplos 6 y 7 nos muestran como hallar la velocidad instantanea de una partícula que se desplaza a lo largo del eje X si conocemos la función de posición x = f(t). En el ejemplo 6 nos salió que la velocidad es constante e independiente del tiempo igual a 4 m/s y en el ejemplo 7 la velocidad depende del tiempo.

Si graficamos ambas funciones velocidad versus tiempo (v vs t) vamos a tener.





La primera grafica efectivamente muestra que la velocidad es constante e igual a 4 m/s y la segunda que la velocidad varía linealmente con el tiempo.

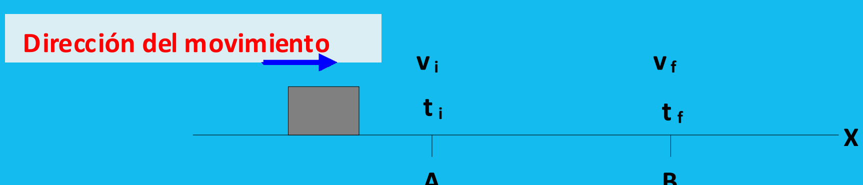
LA ACELERACIÓN

uando una partícula esta en movimiento y su velocidad cambia en el tiempo, se dice que la partícula esta acelerada. La aceleración en general es definida como una medida **del cambio de la velocidad de la partícula en el tiempo.** La aceleración es una magnitud física vectorial.

Se pueden definir dos tipos de aceleración: la aceleración media y la aceleración instantanea.

Aceleración media

La aceleración media se define como la medida del cambio de la velocidad en un intervalo de tiempo. Sigamos analizando el movimiento rectilineo de una partícula a lo largo del eje X. De acuerdo a la figura cuando pasa por el punto A tiene una velocidad instantanea v_i en el instante de tiempo t_i y cuando pasa por el punto B tiene una velocidad instantanea v_f en el instante de tiempo t_f.



El intervalo de tiempo que le tomo a la partícula para pasar de A a B es:

$$\Delta t = t_f - t_i$$

El cambio de la velocidad en ese intervalo de tiempo es:

$$\Delta v = v_f - v_i$$

La aceleración media de la partícula en el intervalo de tiempo Δt, se define como la razón o relación:

$$< a > = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Las dimensiones de la aceleración son L/T^2 y sus unidades dependen del sistema de unidades en el que nos encontremos trabajando, por ejemplo m/s^2 o pie/s^2 etc.

La ecuación que define la aceleración media puede tener signo + o – dependiendo si $v_f > v_i$ o si $v_f < v_i$. También puede ser igual a cero cuando $v_f = v_i$.

Ejemplo 12

Una partícula que se mueve a lo largo del eje X pasa por la posición x = 10 m en el instante de tiempo t = 4 s con velocidad instantanea v = 16 m/s y por la posición x = 25 m en el instante de tiempo t = 12 s con velocidad instantanea v = 19 m/s. Cuál es la aceleración media en el intervalo de tiempo.

Solución.

De acuerdo a los datos el intervalo de tiempo es

Ät = 12 – 4 = 8 s

El cambio de velocidad en el intervalo de tiempo.

Äv = 19 – 16 = 3 m/s

La aceleración media por definición:

$$< a > = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{8}{3} = 2.7\ \mathrm{m}/s^2$$

Dado que la aceleración media es una magnitud física vectorial, el resultado obtenido da el modulo y el signo positivo el sentido ya que la dirección es el eje X.

Ejemplo 13

Una partícula que se mueve sobre el eje X tiene en el instante t = 4 s la velocidad v = 12 m/s y en el instante t = 16 s la velocidad v = - 10 m/s. Cuál es el valor de la aceleración media.

Solución

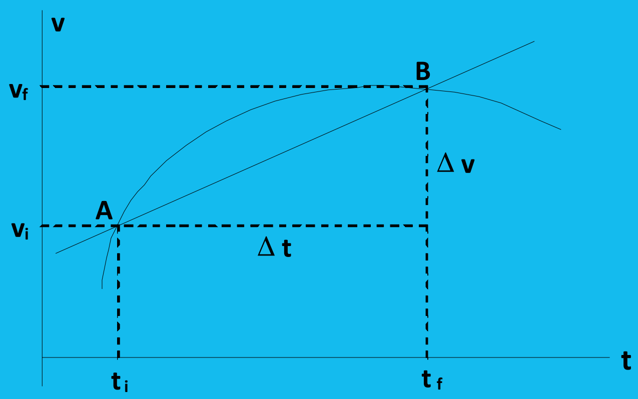
$$< a > = \frac{-10 - 12}{16 - 4} = -1.83\ \mathrm{m}/s^2$$

El resultado nos muestra que la aceleración media es un vector cuyo sentido está en la dirección negativa del eje X y su modulo es 1.83 m/s^2.

5.4 LA ACELERACIÓN MEDIA OBTENIDA A PARTIR DEL GRAFICO VELOCIDAD – TIEMPO.

De la misma manera que realizamos graficos espacio versus tiempo en el movimiento rectilineo y encontramos la representación de las velocidades, también podemos representar gráficamente la velocidad versus tiempo de una partícula que se desplaza a lo largo del eje X.

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo del eje X y en cada instante de tiempo durante su recorrido se conoce la velocidad instantanea que ella lleva, tal como se muestra en la figura.



En el gráfico la **aceleración media representa la pendiente de la secante** que une los puntos A y B, en el intervalo de tiempo Δt. Tanto en el gráfico como en la definición podemos observar que la aceleración media puede ser positiva, negativa o cero.

También podemos relacionar la aceleración media positiva de la partícula con un incremento de la velocidad, y la aceleración media negativa con una disminución de la velocidad.

Del grafico obtenido podemos encontrar la función que la representa v = f(t) usando los métodos propuestos en el capítulo 2. Las funciones pueden ser del tipo lineal o cuadrática. Tomemos el ejemplo 11 en el que la función velocidad es.

$$v = 6\,t - 2$$

La representación grafica de dicha función dio lugar a una línea recta que no pasa por el origen. Si hallamos la aceleración media entre los instantes t = 1s y t = 4 s vamos a encontrar que su valor es 6 m/s^2 y si tomamos cualquier otro intervalo de tiempo siempre tendremos que la aceleración media es 6 m/s^2.

Es decir la aceleración media en este caso corresponde a la pendiente de la función.

Ejemplo 14

La velocidad de una partícula que se desplaza a lo largo del eje X es dada por la función:

$$v = 10\ t^2 - 4\ t$$

Donde v está dado en m/s y t en s. Encontrar:

a) Las velocidades que tiene la partícula en los instantes de tiempo t = 2s y t = 4s.
b) La aceleración media en el intervalo de tiempo comprendido entre t = 2s y t = 4s.

Solución:

a) El valor de la velocidad cuando t = 2s es:

$$v = 32\ m/s$$

El valor de la velocidad cuando t = 4s es:

$$v = 144\ m/s$$

b) La aceleración media usando la definición es:

$$\langle a \rangle = \frac{144 - 32}{4 - 2} = 56\ m/s^2$$

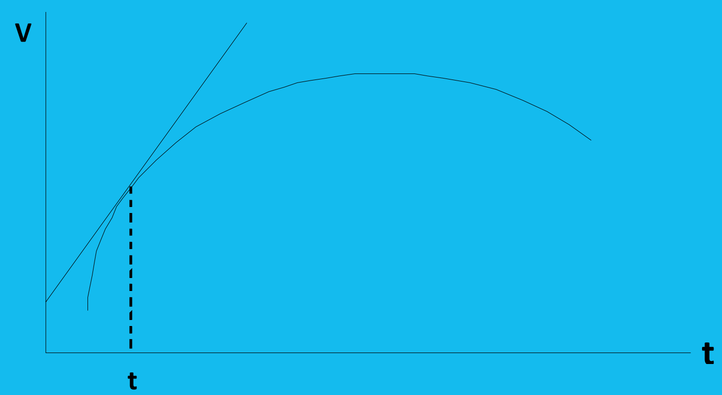
Aceleración instantánea.

La aceleración instantánea se mide en un instante de tiempo a diferencia de la aceleración media que se mide en un intervalo de tiempo.

Se halla tomando el límite a la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero y se expresa de la siguiente manera:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

De la misma manera que con la ayuda de un gráfico espacio-tiempo, fue representada la velocidad instantánea en el instante de tiempo t, como la pendiente de la línea recta tangente a la curva; en un gráfico velocidad-tiempo podemos hallar la aceleración instantánea como la pendiente de la línea recta tangente a la curva en el instante de tiempo t.



De la misma manera que la velocidad instantanea la aceleración instantánea puede tomar valores positivos, negativos o nulos dependiendo del valor que toma la pendiente.

El signo en la aceleración instantanea para el movimiento rectilineo indica el sentido de esta respecto al eje X.

Ejemplo 15

La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje X es dado por la función:

$$x(t) = 3\ t^2 + 2,$$

Donde x está dado en m y t en s.

Encontrar:

a) La posición que tiene la partícula cuando t = 2s y t = 5s.

Reemplazando en la función los valores dados de t tendremos:

$$x(2) = 14 \text{ m}$$
$$x(5) = 77 \text{ m}$$

b) La velocidad media en el intervalo de tiempo entre t = 2s y t = 5s.

De acuerdo a la definición de la velocidad media:

$$< v > = \frac{77-14}{5-2} = 21.0 \text{ m/s}$$

c) La velocidad instantánea cuando t = 3s.

Para hallar la velocidad instantánea de la partícula en un determinado instante de tiempo t usaremos la definición de velocidad instantánea:

$$v = Lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Para hacerlo evaluemos la posición x en el instante de tiempo t y en el instante de tiempo posterior $t + \Delta t$

$$x(t) = 3\ t^2 + 2$$

$$x(t + \Delta t) = 3\ (t + \Delta\ t)^2 + 2$$

El valor de Δx es por definición:

$$\Delta x = x(t + \Delta\ t) - x(t)$$
$$\Delta x = 3\ (\Delta t)^2 + 6\ t\ (\Delta t)$$

Dividiendo entre Δt se tiene

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 3\ (\Delta t) + 6\ t$$

Si tomamos el límite a esta última expresión cuando $\Delta t = 0$, tendremos la velocidad instantánea en función del tiempo:

$$v = 6\ t$$

Como lo que se requiere es el valor de la velocidad instantánea cuando t = 3s, reemplazando obtendremos.

$$v = 18\ m/s$$

d) La aceleración media en el intervalo de tiempo entre t = 2s y t = 5s.

La ecuación obtenida para la velocidad instantánea $v = 6\ t$, es la función de la velocidad de la partícula en función del tiempo en su recorrido a lo largo del eje X.

Para aplicar la definición de la aceleración media, debemos conocer el valor de la velocidad en los instantes de tiempo t = 2s y t = 5s:

$$v(2) = 12\ m/s$$
$$v(5) = 30\ m/s$$

Entonces:

$$\Delta v = 30 - 12 = 18\ m/s \quad y \quad \Delta t = 5 - 2 = 3\ s$$

La aceleración media será por definición:

$$\langle a \rangle = \frac{30 - 12}{5 - 2} = 6\ m/s^2$$

e) La aceleración instantánea para el instante de tiempo t = 3s.

Para hallar la aceleración instantánea de la partícula en un determinado instante de tiempo t usaremos la definición de aceleración instantánea:

$$a = Lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Para hacerlo evaluemos la velocidad instantanea en t y en (t + Δ t) tomando la función de la velocidad en función del tiempo hallada anteriormente: $v = 6\ t$

$$v(t) = 6\ t$$
$$v(t + \Delta\ t) = 6\ (t + \Delta\ t)$$

Encontrando el valor de Δ v:

$$\Delta\ v = v(t + \Delta\ t) - v(t)$$
$$\Delta\ v = 6\ (\Delta\ t)$$

Dividiendo entre Δ t tendremos:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = 6$$

Si tomamos el límite a esta última expresión cuando $\Delta t = 0$, tendremos la aceleración instantánea en función del tiempo:

$$a = 6\ m/s^2$$

La que en este caso en particular resulta ser constante e igual a 6 m/s^2. Observamos que la partícula se mueve con aceleración instantánea constante o como normalmente nos expresamos con aceleración constante, es decir que en todo momento su valor siempre es el mismo. Así mismo también nos damos cuenta que en este caso la aceleración media y la aceleración instantánea tienen el mismo valor.

Un resultado que se debe tener en cuenta es cuando la aceleración instantánea es constante esta siempre es igual al de la aceleración media.

Ejemplo 16

La ecuación de movimiento de una partícula que se mueve en el eje X está dada por la función

$$x = -3\ t^2 + 8\ t - 10 \qquad (1)$$

Donde x es la posición en metros y t en segundos. Con esta información encontrar:

a) La ecuación de la velocidad en función del tiempo.

Nos referimos a la velocidad instantanea. Para hallarlo se usara la definición

$$v = Lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Posición en el instante de tiempo t:

$$x(t) = -3\,t^2 + 8\,t - 10$$

Posición en el instante de tiempo t + Ät:

$$x(t + Ät) = -3\,(t + Ät)^2 + 8\,(t + Ät) - 10$$

El desplazamiento Äx:

$$Äx = x(t + Ät) - x(t)$$

$$Äx = -3\,(Ät)^2 - 6\,t\,(Ät) + 8\,(Ät)$$

Hallando la velocidad media

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -3\,(\bullet\,t) - 6\,t + 8$$

Tomando el limite cuando Ät = 0, nos da la velocidad instantanea.

$$v = -6\,t + 8 \qquad (2)$$

Que es la ecuación de la velocidad en función del tiempo solicitada.

b) La ecuación de la aceleración en función del tiempo.

Nos referimos a la aceleración instantanea y para hallarla usaremos la definición.

$$a = Lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Encontremos la velocidad instantanea en el instante t y en el instante t + Ät:

$$v(t) = -6\,t + 8$$
$$v(t + Ät) = -6\,(t + Ät) + 8$$

El cambio de velocidad Äv:

$$Äv = - 6\ Ät$$

Hallando la aceleración media.

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = - 6$$

Tomando el limite a esta expresión cuando Ät = 0 nos da la aceleración instantanea

$$a = - 6 \qquad (3)$$

Que resulta ser la ecuación de la aceleración instantanea pero no es dependiente del tiempo. Este resultado se obtiene por la forma cuadrática de la función de posición del movimiento de la partícula.

Puede observarse que las ecuaciones (2) y (3) han sido deducidas por un proceso de límites y nos permiten conocer posición, velocidad y aceleración de una partícula en cualquier instante de tiempo.

5.5 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO RECTILINEO

Ahora que han sido definidas las magnitudes físicas más importantes de la cinemática, en relación con el movimiento rectilineo, estamos en condiciones de desarrollar las ecuaciones del movimiento rectilineo. Como ha sido descrito el movimiento rectilineo es el que realiza una partícula a lo largo de una línea recta la cual puede corresponder a un movimiento horizontal, vertical o a lo largo de un plano inclinado.

Como un resumen y considerando que el movimiento se realiza en el eje X, las definiciones más importantes son:

- **Posición de la partícula:** Punto sobre el eje X donde se encuentra la partícula, referida a un origen tomado sobre el mismo eje.

- **Desplazamiento:** Magnitud física vectorial que mide la distancia entre dos puntos del movimiento de la partícula en el eje X, su dirección y sentido.

- **Intervalo de tiempo:** Tiempo empleado por el móvil para desplazarse de un punto a otro en el eje X.

- **Velocidad**: Magnitud física vectorial que mide la razón en la que el espacio cambia en el tiempo. En cinemática se definen dos tipos de velocidad: media e instantanea.

- **Rapidez:** Se denomina al modulo de la velocidad.

- **Velocidad media:** Es la velocidad de la partícula medida en un intervalo de tiempo. Se define mediante la siguiente relación.

$$< v >= \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- **Velocidad instantanea:** Es la velocidad de la partícula medida en un instante de tiempo t. Se define mediante la siguiente relación:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- **Aceleración:** Magnitud física vectorial que mide el cambio de la velocidad en función del tiempo. En cinemática se definen dos tipos de aceleración media y aceleración instantanea

- **Aceleración media:** Aceleración de la partícula en un intervalo de tiempo. Se define mediante la siguiente ecuación:

$$< a > = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- **Aceleración instantanea:** Aceleración de la partícula medida en un instante de tiempo t. Se define mediante la siguiente relación:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A partir de las definiciones se desarrollaran las ecuaciones específicas del movimiento rectilineo. Para ello consideramos que el movimiento rectilineo puede ser clasificado en dos tipos:

- El Movimiento Rectilineo Uniforme (MRU)
- Movimiento Rectilineo Uniformemente Variado (MRUV).

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

Se define como movimiento rectilineo uniforme al que realiza una partícula con velocidad instantánea constante o simplemente su velocidad es constante. En otras palabras su velocidad tiene el mismo valor en modulo, dirección y sentido en cualquier punto de la trayectoria.

Consideremos que la partícula se desplaza a lo largo del eje X. En el MRU se cumple que la velocidad instantanea es igual a su velocidad media:

$$v = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \text{constante}$$

Al despejar la posición final x_f se tiene:

$$x_f = x_i + v\,(t_f - t_i)$$

Ecuación que se denomina la Ecuación General del MRU.

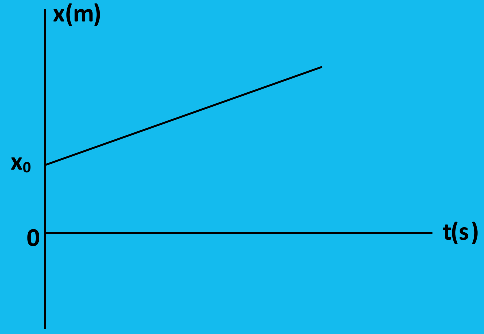
La Ecuación General del MRU puede escribirse de una forma más conocida si establecemos condiciones a dicho movimiento. Consideremos que en el instante inicial $t_i = t_0$ la partícula se encuentra en la posición inicial $x_i = x_0$, un instante de tiempo posterior $t_f = t$ la partícula se encontrara en $x_f = x$. **Reemplazando estas condiciones en la ecuación general para el MRU** se tendrá:

$$x = x_0 + v\,(t - t_0) \qquad (1)$$

Donde x_0 se denomina la posición inicial de la partícula en el instante de tiempo t_0. La ecuación (1) puede ser simplificada si consideramos que $t_0 = 0$ a una ecuación probablemente más conocida

$$x = x_0 + v\,t \qquad (2)$$

Si representamos en un grafico espacio-tiempo la ecuación (2) se tiene:



La representación grafica de la ecuación (2) corresponde a una línea recta como era de esperarse. La pendiente de dicha línea recta es la velocidad v y es constante en cualquier instante de tiempo y puede ser positiva (como la mostrada en la figura) o puede ser negativa. Además podemos observar que la posición inicial x_0 es la intersección de la línea recta con el eje coordenado.

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

El movimiento rectilíneo uniformemente variado se caracteriza por que la aceleración que tiene la partícula en su desplazamiento a lo largo del eje X es constante en el tiempo.

$$a = \text{constante}$$

Cuando la aceleración instantánea es constante es igual a la aceleración media:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

De la que al despejar la velocidad final v_f tendremos:

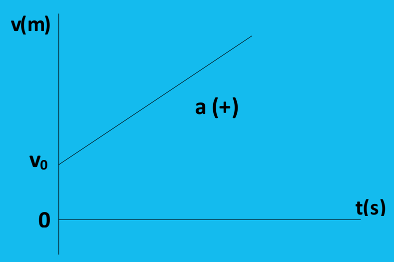
$$v_f = v_i + a(t_f - t_i)$$

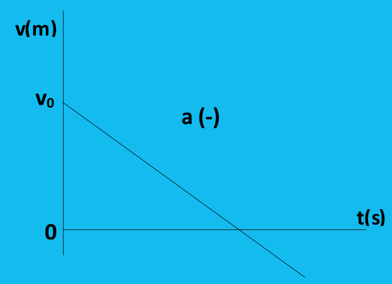
Si consideramos que en el instante inicial $t_i = 0$ la velocidad inicial de la partícula es $v_i = v_0$, y en un instante de tiempo posterior $t_f = t$ la velocidad final es $v_f = v$, la ecuación para la velocidad de la partícula es :

$$v = v_o + at \qquad (1)$$

Ecuación que permite conocer la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo t, si se conoce la velocidad inicial y la aceleración.

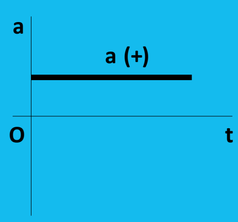
La representación en un gráfico velocidad-tiempo de la ecuación (1) corresponde a una línea recta cuya pendiente es el valor de la aceleración a y v_0 la intersección con el eje de las velocidades como se muestra en la figura.

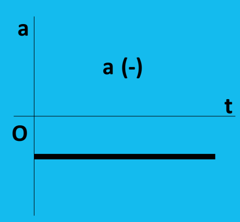


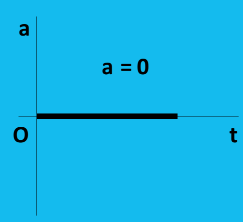


Como puede verse en los graficos la aceleración corresponde a la pendiente y es constante. La pendiente puede ser positiva (la partícula está acelerada) o negativa (la partícula está desacelerada) o es cero en cuyo caso la velocidad es constante y el grafico mostraría una línea recta paralela al eje de los tiempos.

De la misma manera que se han representado los gráficos espacio-tiempo y velocidad-tiempo, también puede representarse en un gráfico la aceleración-tiempo. En el caso del MRUV el gráfico toma las siguientes formas:



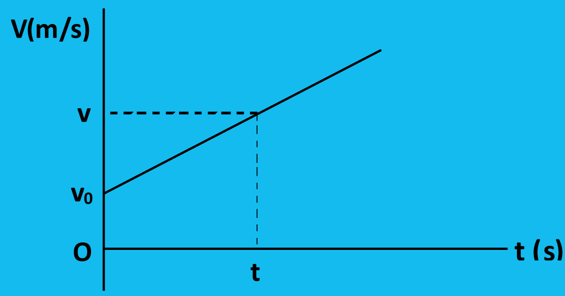




En los tres casos las rectas son paralelas al eje de los tiempos.

Posición en función del tiempo en el MRUV

En el MRUV la velocidad varía linealmente con el tiempo como se han mostrado en los graficos de la sección anterior. A partir de dicho grafico se puede demostrar que la velocidad media $< v >$ es la media aritmética de la velocidad inicial v_0 y la velocidad final v, en el intervalo entre $t = 0$ y $t = t$:



$$< v > = \frac{v_0 + v}{2}$$

Velocidad media en el intervalo de 0 a t. **Ecuación que solo es válida cuando la aceleración es constante, es decir en el MRUV.**

Como la velocidad media es:

$$< v > = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Consideremos las siguientes condiciones iniciales para la partícula que se desplaza a lo largo del eje X: en el instante inicial $t_i = 0$ la partícula está en la posición inicial $x_i = x_0$, en el instante de tiempo posterior $t_f = t$ la partícula se encuentra en la posición $x_f = x$. reemplazando estos valores en las ecuaciones tendremos:

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2} (v_0 + v)\, t \qquad (2)$$

Si reemplazamos en la ecuación (2) el valor de v de la ecuación (1) tendremos:

$$x = x_0 + v_0\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2 \qquad (3)$$

Ecuación que da la posición de una partícula que realiza movimiento rectilineo uniforme.

Podemos obtener además una ecuación para el MRUV que relaciona la velocidad con la posición si reemplazamos en la ecuación (2) el tiempo t que puede ser despejado de la ecuación (1) obteniendo:

$$v^2 = v_0^2 + 2\, a\, (x - x_0) \qquad (4)$$

Debemos tener presente que **estas ecuaciones han sido halladas considerando que la aceleración es constante, es decir cuando el movimiento es MRUV.**

RESUMEN DEL MOVIMIENTO RECTILINEO

Movimiento rectilineo uniforme MRU

Cuando el movimiento es MRU la velocidad es constante las ecuaciones son:

$$x = x_0 + v\,t$$

Movimiento rectilineo uniformemente variado MRUV

Cuando el movimiento es MRUV la aceleración es constante y sus ecuaciones más importantes son:

$$x = x_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$
$$v = v_0 + a\,t$$
$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(x - x_0)$$

Ejemplo 17

Un automóvil deportivo acelera uniformemente desde el reposo hasta alcanzar una rapidez de 110 Km/h en 8 segundos. Encontrar:

a) La aceleración del automóvil.

Primero convertimos la velocidad de 110 Km/h a m/s.

$$v = \frac{110x1000}{3600} = 30.56 \text{ m/s}$$

Despejando la aceleración de la ecuación: $v = v_0 + a\,t$:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{30.56 - 0}{8} = 3.82 \text{ m/s}^2$$

b) La distancia que recorre el automóvil en los primeros 8 segundos.

Como se trata de un movimiento MRUV

$x = x_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$ donde $v_0 = 0$ y $x_0 = 0$

Reemplazando valores tendremos:

$$x = 0 + 0 + ½ \times 3.82 \times 8^2 = 122.24 \text{ m}$$

c) Suponiendo que el automóvil se desplaza con la misma aceleración, cual debe ser su velocidad a los 12 segundos.

La velocidad para el MRUV es dada por la ecuación:

$$v = v_0 + a\,t \quad = 0 + 3.82 \times 12 = 45.84 \text{ m/s}$$

Convirtiéndolo en Km/h tendremos:

$$v = \frac{45.84x3600}{1000} = 165.02 \text{ Km/h}$$

Ejemplo 18

Un avión de propulsión a chorro aterriza con una velocidad de 100 m/s y puede desacelerar a razón de 5.0 m/s^2 hasta llegar al reposo.

a) ¿Cuál es el tiempo mínimo desde el momento que toca la pista de aterrizaje hasta alcanzar el reposo?

La aceleración con la que el avión se mueve después de tocar la pista es negativa y se le denomina desaceleración. La ecuación que permite encontrar el tiempo por tratarse de un MRUV es:

$v = v_0 + a\,t$ despejando el tiempo tendremos: $t = \dfrac{v - v_0}{a}$

Reemplazando valores considerando que $v = 0$, $v_0 = 100$ m/s y $a = -5.0$ m/s^2

$$t = 20 \text{ s.}$$

b) ¿Puede aterrizar este avión en el aeropuerto de una pequeña isla en donde la pista de aterrizaje tiene 0.8 Km de largo?

Encontremos la distancia que recorre el avión antes de detenerse:

$$x = x_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2$$

Reemplazando valores tendremos:

$$x = 0 + 100x20 - ½ \times 5 \times 20^2 = 1000 \text{ m}$$

Como la pista de aterrizaje tiene 800 m, es demasiado corta para que el avión pueda aterrizar.

Ejemplo 19

Una partícula parte del reposo desde lo alto de un plano inclinado y se desliza hacia abajo con aceleración constante. El plano inclinado tiene 2.0 m de largo y le toma a la partícula 3.0 s alcanzar la parte más baja del plano. Encuentre:

a) La aceleración de la partícula:

Como se trata de un MRUV, la ecuación que debemos usar es:

$$x = x_0 + v_0 t + ½ a t^2$$

Reemplazando valores:

$$2 = 0 + 0 + ½ a (3)^2$$

$$a = 0.44 \text{ m/s}^2$$

b) Su rapidez en la parte más baja del plano:

$$v = v_0 + a t$$

Reemplazando valores:

$$v = 0 + 0.44 \times 3$$
$$v = 1.32 \text{ m/s}$$

c) El tiempo que tarda en alcanzar el punto medio del plano:

$$x = x_0 + v_0 t + ½ a t^2$$

Considerando que el punto medio corresponde a $x = 1\text{m}$

$$1 = 0 + 0 + ½ \times 0.44 \times t^2$$
$$t = 2.13 \text{ s}$$

d) Su rapidez en el punto medio.

$$v = v_0 + a\,t$$

Reemplazando valores

$$v = 0 + 0.44 \times 2.13$$
$$v = 0.94 \text{ m/s.}$$

Ejemplo 20

Dos trenes salen de la estación con una diferencia de 5 minutos. Partiendo desde el reposo, cada uno es capaz de alcanzar una rapidez máxima de 160 Km/h después de acelerar uniformemente a lo largo de una distancia de 2.0 Km.

a) ¿Cuál es la aceleración de cada tren?

Primero vamos a convertir la velocidad de 160 Km/h a m/s:

$$v = \frac{160x1000}{3600} = 44.44 \text{ m/s}$$

Como se trata de un MRUV:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(x - x_0)$$

Considerando: $v_0 = 0$, $x_0 = 0$

$$a = \frac{v^2}{2x} = \frac{(44.44)^2}{2x2000} = 0.49 \text{ m/s}^2,$$

es la aceleración de cada tren.

b) ¿Cuán lejos está el primer tren cuando el segundo inicia su carrera?

El tiempo que demora el primer tren en alcanzar la velocidad de 160 Km/h o 44.44 m/s es:

$v = v_0 + a\,t$ despejando el tiempo

$$t = \frac{v}{a} = \frac{44.44}{0.49} = 90.7 \text{ s}$$

Esto quiere decir que antes de los 5 minutos el primer tren alcanzo la velocidad máxima recorriendo los 2 Km. El tiempo restante 300 – 90.7 = 209.3 segundo se desplazo a la velocidad constante de 44.44 m/s recorriendo una distancia de:

$$s = 44.44 \times 209.3 = 9301 \text{ m}$$

La distancia total recorrida por el primer tren en los primeros 5 minutos (300 s) es:

$$D = 2000 + 9301 = 11302 \text{ m}$$

Distancia a la que se encuentra cuando el segundo tren arranca.

c) ¿Cuán lejos están uno del otro cuando viajan a la rapidez máxima?

Cuando el segundo tren arranca el primero ya se encuentra a 11302 m de distancia. El segundo tren recorre los 2 Km en un tiempo de 90.7 s para alcanzar la velocidad máxima de 44.44 m/s. En ese mismo tiempo el primer tren recorre la distancia de:

$$d = 44.44 \times 90.7 = 4031 \text{ m}$$

Encontrándose desde el punto de partida a la distancia

$$11302 + 4031 = 15333 \text{ m}$$

y a la distancia del segundo tren de:

$$15333 - 2000 = 13333 \text{ m}$$

Ejemplo 21

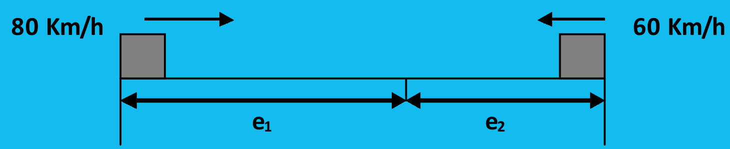
Supongamos que la distancia entre Chosica y Lima es 40 Km. Del paradero de Chosica sale un ómnibus hacia Lima con velocidad constante de 60 Km/h. Después de 10 minutos sale otro ómnibus de Lima hacia Chosica con velocidad constante de 80 Km/h. ¿Después de que tiempo que salió el ómnibus de Lima se encontrarán los dos?

Solución:

El ómnibus que sale de Chosica a la velocidad de 60 Km/h recorre en los primeros 10 minutos la distancia:

$$d_1 = \frac{60x10}{60} = 10 \text{ Km.}$$

Por consiguiente la distancia que queda entre los dos ómnibus es de 30 Km. cuando parte el ómnibus de Lima. Es lo que se muestra en la figura.



Consideremos que e_1 es la distancia que recorre el ómnibus que sale de Lima y e_2 la distancia que recorre el ómnibus que viene de Chosica. El tiempo empleado por cada ómnibus en recorrer dichas distancias es el mismo, por tanto:

$$e_1 + e_2 = 30 \text{ Km}$$

Como el movimiento no es acelerado sino MRU

$$v_1 t + v_2 t = 30$$

Donde $v_1 = 80$ Km/h y $v_2 = 60$ Km/h. Reemplazando y despejando el tiempo se tiene el que demora el ómnibus que sale de Lima para alcanzar al que salió de Chosica.

$$t = 12.86 \text{ minutos.}$$

5.6 CAIDA LIBRE

Cuando un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba o hacia abajo desde la parte superior de un edificio este realiza un movimiento **MRUV** con aceleración constante por efecto de atracción de la tierra debido a la gravedad. El valor de la aceleración con la que se desplaza el cuerpo es conocido como aceleración de la gravedad y se denota con la letra g.

La gravedad es una magnitud física vectorial siempre dirigida hacia el centro de la tierra y su valor es casi constante sobre la superficie. Varía con la altitud y ligeramente con la latitud. Su valor o magnitud es aproximadamente 9.8 m/s^2 o 980 cm/s^2 o 32 $pies/s^2$.

Un objeto en caída libre no significa necesariamente que parte del reposo sino que es un objeto que se mueve libremente bajo la acción de la gravedad y con la aceleración de la gravedad. **Debemos entender que la aceleración de la gravedad siempre actúa sobre el objeto hacia**

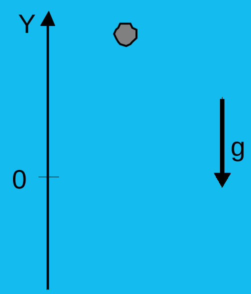
abajo es decir hacia la tierra, se encuentre el objeto subiendo o se encuentre bajando.

Como se trata de un movimiento **MRUV** y se lleva a cabo verticalmente consideremos que lo hace a lo largo del eje Y. Por consiguiente las ecuaciones que describen dicho movimiento tienen la siguiente forma:

$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$v = v_0 - g t$$
$$v^2 = v_0^2 - 2g (y - y_0)$$

Donde solo se ha cambiado la variable x por y. La aceleración g aparece con signo negativo por estar siempre dirigida hacia abajo.

Estas ecuaciones están escritas teniendo en cuenta el sistema de coordenadas que se muestra en la figura.



Debemos tener en cuenta que y_0 es la posición desde donde se lanza el proyectil en el instante de tiempo t = 0s y v_o su velocidad inicial. El signo de la velocidad inicial es + cuando se lanza hacia arriba el proyectil y – cuando se lanza hacia abajo.

Ejemplo 22

Desde lo alto de un edificio se deja caer una piedra (parte del reposo). Despreciando la resistencia del aire encontrar:

a) La distancia vertical recorrida en el primer segundo.

Consideremos que el origen de coordenadas está en lo alto del edificio, y que a partir de ahí se miden los desplazamientos verticales. Considerando la ecuación:

$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$ para la cual $y_0 = 0$, $v_0 = 0$

$y = - \tfrac{1}{2} \times 9.8 \times 1^2 = - 4.9$ m

Donde el signo negativo significa que la piedra ha bajado la distancia de 4.9 m.

b) El desplazamiento de la piedra entre el tercer y cuarto segundo.

$y(3) = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times 3^2 = -44.1$ m
$y(4) = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times 4^2 = -78.4$ m

El desplazamiento será:

$\Delta y = -78.4 + 44.1 = -34.3$ m

c) La velocidad de la piedra a los 4 segundos.

La velocidad que tiene la piedra puede ser encontrada mediante la ecuación:

$v = v_0 - g\,t$ donde $v_0 = 0$

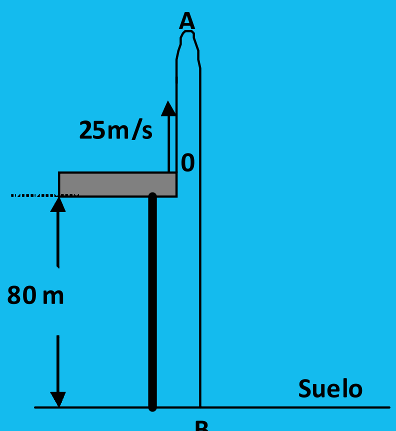
$v = -9.8 \times 4 = -39.2$ m/s

El signo negativo significa que la piedra está bajando con dicha velocidad.

Ejemplo 23

Se lanza una piedra hacia arriba desde la azotea de un edificio de 80 m de altura, con una velocidad inicial de 25 m/s. Encontrar:

a) El tiempo que demora la piedra en llegar al suelo.



Considerando que el origen del sistema de coordenadas 0 está en la azotea, lugar desde donde se lanza la piedra, podemos usar la ecuación:

$y = y_0 + v_0 t – ½ g t^2$ donde $y_0 = 0$ e $y = - 80$ m

Reemplazando

$-80 = 25 t – 4.9 t^2$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$4.9 t^2 – 25 t – 80 = 0$ tenemos $t = 7.33$ s

El tiempo que demora la piedra en llegar al suelo desde el punto 0 hasta B es de 7.33 s.

b) La altura máxima que alcanza la piedra medida desde el suelo

Primero encontremos la distancia OA que sube hasta alcanzar la velocidad final igual a cero usando la ecuación:

$v^2 = v^2_0 – 2g (y – y_0)$ donde $v_0 = 25$ m/s, $y_0 = 0$, $v = 0$
$0 = 25^2 – 2 \times 9.8 y$
$y = OA = 31.89$ m

La altura máxima alcanzada es igual a AB.

$AB = OA + 80 = 31.89 + 80 = 111.89$ m

c) La velocidad de la piedra cuando de bajada pasa por el punto O

Usando la ecuación:

$v^2 = v^2_0 – 2g (y – y_0)$ donde $v_0 = 25$ m/s, $y = 0$, $y_0 = 0$
$v^2 = 25^2$
$v = 25$ m/s y dirigida hacia abajo.

d) La velocidad de la piedra a los 6 segundos.

Reemplazando en la ecuación $v = v_0 – g t$ donde $v_0 = 25$ y $t = 6$ s

$v = 25 – 9.8 \times 6$
$v = - 33.8$ m/s dirigida hacia abajo.

e) A qué altura del suelo se encuentra a los 6 segundos.

Reemplazando en la ecuación

$y = y_0 + v_0 t - ½\ g\ t^2$ donde $y_0 = 0$, $v_0 = 25$ m/s, $t = 6$ s
$y = 25 \times 6 - ½ \times 9.8 \times 6^2$
$y = -26.4$ m

Medidos a partir de O hacia abajo. La altura a la que se encuentra la piedra medida desde el suelo es:

$h = 80 - 26.4 = 53.6$ m

f) La velocidad con la que la piedra golpea el suelo.

Reemplazando en la ecuación

$v = v_0 - g\ t$ donde $v_0 = 25$ m/s y $t = 7.33$ s
$v = 25 - 9.8 \times 7.33$
$v = -46.83$ m/s

La piedra llegara al suelo con una velocidad de 48.33 m/s dirigida hacia abajo.

Ejemplo 24

Un globo de aire caliente viaja verticalmente hacia arriba a una rapidez constante de 5 m/s. Cuando está a 21.0 m sobre el suelo, se suelta un paquete desde el globo.

a) ¿Cuánto tiempo está el paquete en el aire, después que se ha soltado?
b) ¿Cuál es la velocidad del paquete justo antes de su impacto con el suelo?

Solución:

a) En el momento que se suelta el paquete desde el globo, este tiene la misma velocidad del globo dirigida hacia arriba y se encuentre a 21 m desde el suelo. Considerando que el sistema de referencia esta en el globo, el tiempo que demora el paquete en llegar al suelo se puede encontrar a partir de la ecuación:

$y = y_0 + v_0 t - ½\ g\ t^2$ donde $y_0 = 0$, $v_0 = 5$ m/s, $y = -21$ m
$-21 = 5\ t - 4.9\ t^2$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$4.9\ t^2 - 5\ t - 21 = 0$ tendremos $t = 2.64$ s

b) La velocidad con la que llega el paquete al suelo es $v = v_0 - g\ t$

$V = 5 - 9.8 \times 2.64$
$V = -\ 20.87$ m/s

Llega al suelo con una velocidad de 20.87 m/s dirigida hacia abajo.

5.7 MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL

Todo lo estudiado hasta ahora corresponde al movimiento rectilineo y las ecuaciones cinemáticas que pueden ser halladas para dicho movimiento. A partir de esta sección hablaremos del movimiento bidimensional o en dos dimensiones, cuyos ejemplos mas representativos son el movimiento de proyectiles y el movimiento circular, los cuales pueden ser considerados en el plano.

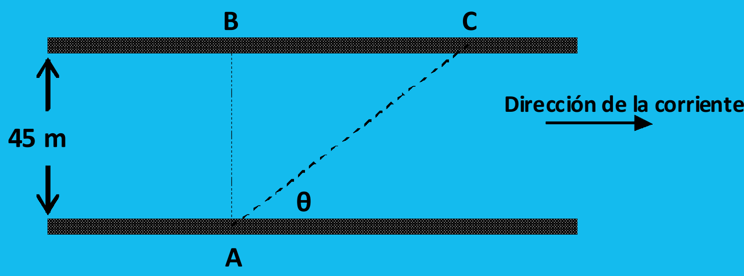
Una manera de hacerlo es considerar que el movimiento bidimensional es un movimiento combinado de dos movimientos perpendiculares. Para tener una idea de lo señalado comenzaremos con un ejemplo.

Ejemplo 25

Un nadador trata de cruzar un rio de una orilla a otra distante 45 m perpendicular a la corriente. El nadador es capaz de moverse a una velocidad V_n aproximada de 0.75 m/s perpendicular a la orilla y sin la corriente del rio. La velocidad con la que se desplaza la corriente V_r del rio es de 1.7 m/s medida desde la orilla. Hallar el punto de la orilla a donde llega el nadador después de cruzar el rio.

Solución.

Si no hubiera la corriente del rio el nadador sale de A y debe alcanzar el punto B. Sin embargo debido a la corriente llega al punto C en la otra orilla.



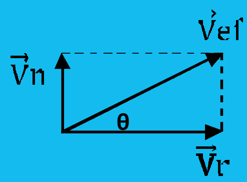
El nadador al moverse a lo largo de AC, lo hace con una velocidad efectiva que resulta ser la suma de las velocidades. Se debe tener en cuenta que las velocidades son magnitudes físicas vectoriales

$$\vec{V}ef = \vec{V}r + \vec{V}n$$

$$\vec{V}ef = Vr\,\vec{j} + Vn\,\vec{i}$$

$$\vec{V}ef = 1.7\,\vec{i} + 0.75\,\vec{j}$$

La velocidad efectiva con la que se mueve el nadador es a lo largo de AC y la composición vectorial muestra:

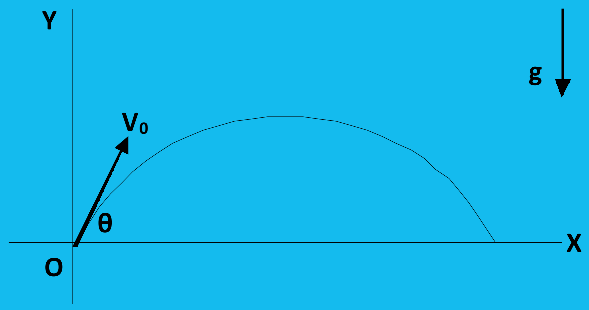


Donde el modulo de la velocidad efectiva es 1.86 m/s y el ángulo è es igual a 23.8°. Con la información obtenida el nadador llega al punto C distante de B 102 m.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Un cuerpo (proyectil) que es lanzado desde la superficie de la tierra con rapidez inicial V_0 y ángulo θ con el piso o la horizontal sigue una trayectoria curva y cae nuevamente al suelo.

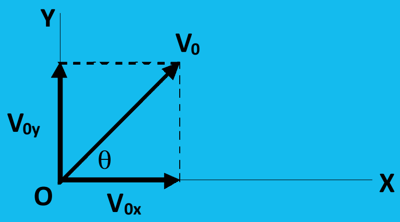
Si consideramos que la resistencia del aire es despreciable y que el valor de la aceleración de la gravedad g en todo momento es constante, se demuestra que la trayectoria que sigue el proyectil es una **parábola**. Dicha trayectoria puede ser descrita en un sistema de coordenadas cartesianas XY como el que se muestra en la figura.



El movimiento del proyectil puede considerarse como la composición de dos movimientos rectilíneos perpendiculares, uno a lo largo del eje Y otro a lo largo del eje X. Cuando el proyectil se desplaza por el espacio la acción de la aceleración de la gravedad actúa sobre él a lo largo de toda la trayectoria en la dirección del eje Y en sentido negativo como se muestra en la figura. El movimiento a lo largo del eje Y debe ser un movimiento rectilineo uniformemente acelerado. En el eje X no hay ninguna aceleración, por tanto podemos considerarlo como un movimiento rectilineo uniforme.

Considerado el movimiento del proyectil como la composición de dos movimientos perpendiculares, uno a lo largo del eje Y como MRUV y el otro a lo largo del eje X como MRU, se puede describir por separado dichos movimientos y luego componerlos o integrarlos.

La velocidad inicial V_0 hace con el eje X un ángulo è al momento de partir del punto O y podemos descomponerla en una componente de la velocidad inicial en el eje X y una componente en el eje Y como se muestra en la figura.



Donde V_{0x} y V_{0y} son las componentes de la velocidad inicial V_0. Por geometría estas componentes tienen los valores:

$$V_{0x} = V_0 \text{ Cos è}$$
$$V_{0y} = V_0 \text{ Sen è}$$

Considerando que el movimiento a lo largo del eje X es MRU, la posición del proyectil a lo largo de dicho eje es:

$$x = V_{0x}\ t \tag{1}$$

El movimiento a lo largo del eje Y es MRUV, la posición del proyectil a lo largo de dicho eje es:

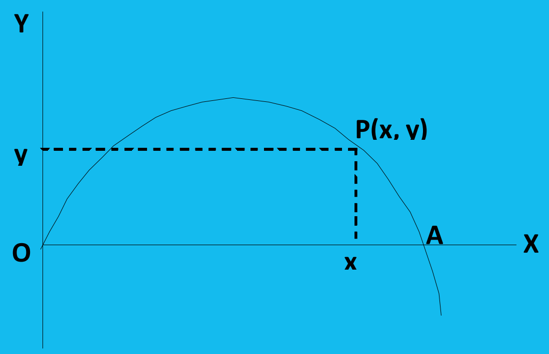
$$y = V_{0y}\ t - \tfrac{1}{2}\ g\ t^2 \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) dan las **coordenadas x e y de posición de un punto en el plano, que tiene el proyectil en función del tiempo**.

Si despejamos el tiempo de la ecuación (1) y lo reemplazamos en la ecuación (2) se tiene la siguiente ecuación.

$$y = x\ \tan\theta - \frac{g\,x^2}{2V_{ox}^2} \tag{3}$$

Esta ultima ecuación y = f(x) relaciona a las variables x e y. La grafica de esta función corresponde a la trayectoria que sigue el proyectil y corresponde al de una parábola en el plano XY como se muestra en la figura.



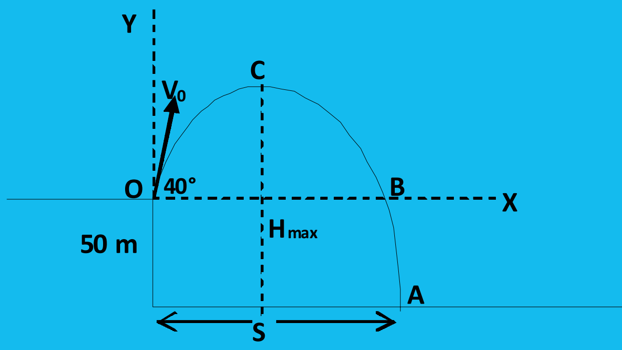
Parábola que se inicia desde el origen O, lugar de lanzamiento del proyectil.

Ejemplo 26

Desde el borde de un acantilado de 50 m se lanza un proyectil con velocidad inicial de 25 m/s y ángulo de 40° con la horizontal. Encontrar:

Solución.

Tracemos un esquema de la trayectoria del proyectil.



En el dibujo O es el origen del sistema de coordenadas.

a) Cuáles son las componentes de la velocidad inicial.

V_{0x} = 19.2 m/s V_{0y} = 25.7 m/s

b) Cuáles son las coordenadas de posición del proyectil a los 1.5 s

$x = V_{0x}\, t = 19.2 \text{x} 1.5 = 28.8$ m
$y = V_{0y}\, t - ½\, g\, t^2 = 25.7 \text{x} 1.5 - 4.9 \text{x}\, 1.5^2 = 27.5$ m

c) En que instante de tiempo la trayectoria cruza al eje X (Punto B).

Cuando la trayectoria cruza al eje X el valor de y = 0. Reemplazando este valor en la ecuación (2) tenemos.

$0 = V_{0y}\, t - ½\, g\, t^2$ • $t = \dfrac{2\, V_{0y}}{g}$

Reemplazando valores el tiempo es:

$$t = 5.24 \text{ s}$$

d) ***El desplazamiento sobre el eje X (OB) cuando la trayectoria lo cruza.*** Usando la ecuación (1)

$$X_{max} = 19.2x5.24 = 100.6 \text{ m}$$

e) ***El tiempo que demora el proyectil en alcanzar la base del acantilado.***

Las coordenadas del punto A en la base del acantilado son A (x, -50). Reemplazando el valor de y = -50m en la ecuación (2) se tiene la siguiente ecuación:

$$4.9 t^2 - 25.7 t - 50 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se tienen las siguientes raíces:

$$t_1 = 6.76 \text{ s} \qquad\qquad t_2 = -1.51 \text{ s}$$

Tomamos solo la solución + dado que los tiempos no pueden ser negativos. El proyectil demora para llegar a la base del acantilado o al punto A, 6.76 s.

f) ***A qué distancia de la base del acantilado (punto A) cae el proyectil.***

$$S = 19.2x6.76 = 129.8 \text{ m}$$

g) ***Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil medida desde la base del acantilado.***

La trayectoria parabólica es una figura simétrica, por consiguiente el tiempo que demora el proyectil para ir de O a B es 5.24 s. El tiempo que demora para ir de O a P es 2.62 s. Con este dato y la ecuación (2) encontramos el valor de y.

$$y = 25.7x2.62 - 4.9x2.62^2 \quad \bullet \quad y = 33.7 \text{ m}$$

La altura máxima debe ser:

$$H_{max} = 33.7 + 50 = 83.7 \text{ m}$$

ECUACIONES PARA LA VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO DE PROYECTILES

De la misma manera en la que encontramos las ecuaciones para la posición del proyectil en el movimiento parabólico, también podemos hallar la velocidad del proyectil en cualquier punto de la trayectoria.

Tomando en cuenta que hemos establecido que el movimiento a lo largo del eje X es MRU, la velocidad a lo largo de dicho eje debe permanecer constante e igual a:

$$V_x = V_{0x} \tag{4}$$

Donde V_x es la componente de la velocidad en el eje X. La velocidad a lo largo del eje Y cambia con el tiempo, por que en dicha dirección actúa la aceleración de la gravedad g, por consiguiente siendo el MRUV se tiene:

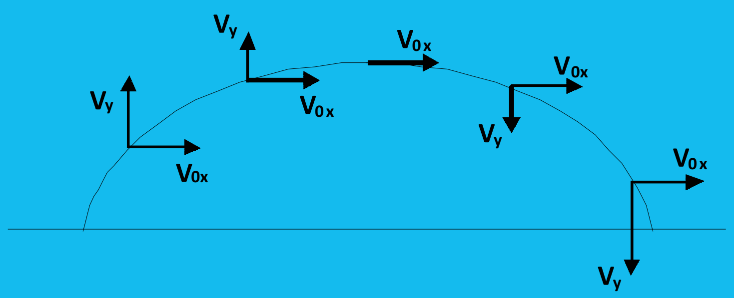
$$V_y = V_{0y} - g\ t \tag{5}$$

Donde V_y es la componente de la velocidad a lo largo del eje Y. Con los resultados obtenidos se tiene el vector velocidad del proyectil y su modulo o rapidez en cualquier instante.

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} \tag{6}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \tag{7}$$

Si representamos en un gráfico como son las componentes de la velocidad del proyectil a lo largo de la trayectoria parabólica tendremos:



El vector velocidad dado por la ecuación (6) es la composición de las componentes de la velocidad en los ejes X e Y. Se demuestra **que el vector velocidad $\vec{V}$ es siempre tangente a la trayectoria**.

En la figura se muestra que la componente horizontal $V_x = V_{0x}$ es constante en todo el trayecto, mientras que la componente vertical de la velocidad V_y tiene módulos y sentidos diferentes dependiendo de la posición o el tiempo donde se encuentre el proyectil.

En resumen, las ecuaciones que describen el movimiento parabólico de un proyectil son:

$$x = V_{0x}\ t \quad (1)$$

$$y = V_{0y}\ t - \tfrac{1}{2}\ g\ t^2 \quad (2)$$

$$y = x\ \tan\theta - \frac{g\,x^2}{2V_{ox}^2} \quad (3)$$

$$V_x = V_{0x} \quad (4)$$

$$V_y = V_{0y} - g\ t \quad (5)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (6)$$

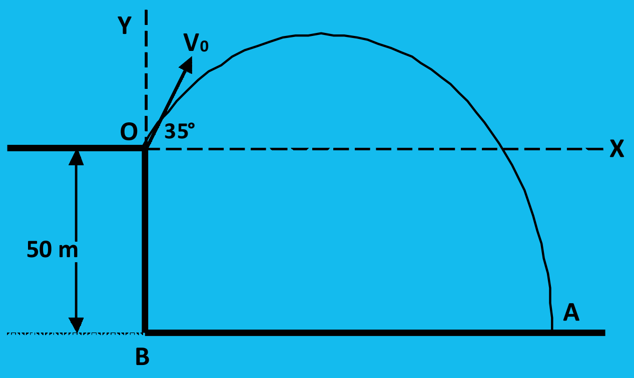
Considerando que el origen del sistema de coordenadas ha sido tomado en el punto desde donde se lanza el proyectil.

Ejemplo 27

Desde el borde de un acantilado de 50 m de altura se dispara un proyectil con una velocidad inicial de 20m/s y un ángulo de 35° por encima de la horizontal. Encontrar:

a) ***Cuáles son los valores de las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial del proyectil.***

Consideremos que el origen del sistema de coordenadas es tomado en el borde del acantilado.



La velocidad inicial del proyectil es V_0 = 20 m/s y sus componentes son:

V_{0x} = 20 Cos 35° = 16.38 m/s y
V_{0y} = 20 Sen 35° = 11.47 m/s

b) El tiempo que demora el proyectil en llegar a la base del acantilado A.

En la base del acantilado las coordenadas del punto A son A (x, -50). Si reemplazamos en la ecuación (2) tenemos:

$$-50 = 11.47\ t - \tfrac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$4.9\ t^2 - 11.47\ t - 50 = 0$ tenemos $t = 4.57$ s

El tiempo que demora el proyectil en llegar al punto A, base del acantilado es de 4.57 s.

c) La rapidez del proyectil cuando el tiempo transcurrido es 0.5 s y a qué altura se encuentra desde la base del acantilado.

Encontremos las componentes de la velocidad a los 0.5 s mediante las ecuaciones (4) y (5):

$V_x = V_{0x}$ = 16.38 m/s y
$V_y = V_{0y} - g\ t$ = 11.47 – 9.8 x 0.5 = 6.57 m/s

Mediante la ecuación (6) se tiene la rapidez:

$$V = \sqrt{16.38^2 + 6.57^2} = 17.65 \text{ m/s}$$

Encontremos la coordenada de posición y del proyectil a los 0.5 s:

$$y = V_{0y}\ t - \tfrac{1}{2}\ g\ t^2 = 11.47 \times 0.5 - 4.9 \times 0.5^2 = 4.51 \text{ m}$$

La altura medida desde la base del acantilado es:

$$h = 50 + 4.51 = 54.51 \text{ m}$$

d) ***La rapidez del proyectil cuando el tiempo transcurrido es de 3.5 s y a qué altura se encuentra desde la base del acantilado.***

Encontremos las componentes de la velocidad a los 3.5 s mediante las ecuaciones (4) y (5):

$V_x = V_{0x} = 16.38$ m/s y
$V_y = 11.47 - 9.8 \times 3.5 = -22.83$ m/s

Mediante la ecuación (6) se obtiene la rapidez a los 3.5 s:

$$V = \sqrt{16.38^2 + 22.83^2} = 28.10 \text{ m/s}$$

Las coordenadas de posición y del proyectil a los 3.5 s son:

$$y = v_{0y}\, t - ½\, g\, t^2 = 11.47 \times 3.5 - 4.9 \times 3.5^2 = -19.88 \text{ m}$$

La altura a la que se encuentra desde la base del acantilado es:

$$h = 50 - 19.88 = 30.12 \text{ m}$$

e) ***La velocidad con la que choca el proyectil en la base del acantilado o en el punto A.***

El proyectil demora 4.57 s para llegar a la base del acantilado y las componentes de su velocidad son:

$V_x = 16.38$ m/s y $V_y = -33.32$ m/s

La velocidad del proyectil será:

$$\vec{V} = 16.38\,\vec{i} - 33.32\,\vec{j}$$

Su rapidez es:

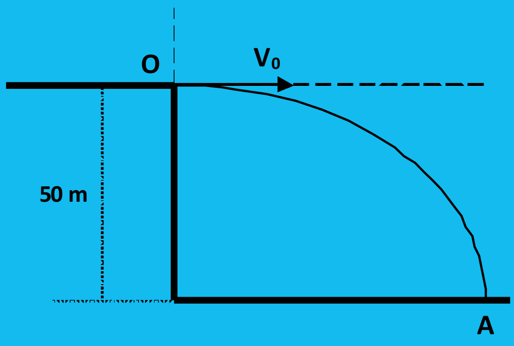
$$V = \sqrt{16.38^2 \square 33.32^2} = 37.13 \text{ m/s}$$

Con la choca el suelo del acantilado

Ejemplo 28

Desde el borde de un acantilado de 50 m de altura, se lanza horizontalmente una piedra con una velocidad inicial de 18 m/s. Encontrar:

a) El tiempo que demora la piedra en llegar a la base del acantilado (punto A).



Como la piedra es lanzada horizontalmente:

$$V_{0x} = 18 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_{0y} = 0 \text{ m/s}$$

Como el origen de coordenadas está en O, cuando la piedra llega al punto A, el valor de la coordenada y = - 50 m. Reemplazando en la ecuación (2) se tiene:

$$-50 = -4.9\, t^2$$

El tiempo que le toma a la piedra en llegar al punto A es:

$$t = 3.19 \text{ s}$$

b) Con que rapidez y con qué ángulo golpeara la base del acantilado.

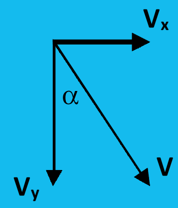
Encontremos las componentes de la velocidad en el punto A mediante las ecuaciones (4) y (5).

$$V_x = 18 \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad V_y = -31.26 \text{ m/s}$$

La rapidez en el punto A es:

$$V = \sqrt{18^2 + 31.26^2} = 36.07 \text{ m/s}$$

Si hacemos un diagrama con las componentes de la velocidad en el punto A tendremos:



El ángulo α que hace la velocidad con el eje Y es:

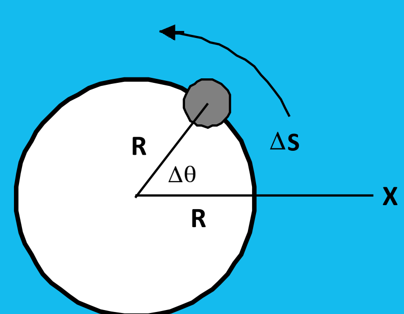
$$\alpha = 30^{\circ}$$

5.8 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

El movimiento circular también es un movimiento bidimensional y la trayectoria que describe es un círculo de radio R. Se clasifica en movimiento circular uniforme MCU y movimiento circular uniformemente variado MUCV.

El MCU se caracteriza por que la rapidez con la que la partícula se mueve es constante, es decir que el tiempo que demora en dar una vuelta completa (Periodo) es constante.

Para analizar el MCU observemos la figura en la que se muestra una partícula que gira en un círculo de radio R en el sentido anti horario y que recorre el arco de longitud ÄS, medido desde un eje de referencia X, en un intervalo de tiempo Ät. Durante este intervalo de tiempo el arco subtiende un ángulo Äè en radianes.



Por geometría la longitud del arco ÄS y el ángulo Äè están relacionados mediante la ecuación:

$$\Delta S = R\ \Delta\theta$$

Si dividimos ambos miembros de la ecuación entre el intervalo de tiempo Ät tenemos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Ecuación en la cual podemos definir los siguientes términos:

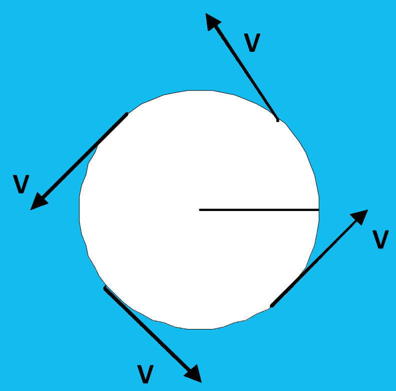
$$V = \Delta S\ /\ \Delta t \qquad \text{y} \qquad w = \Delta\theta\ /\ \Delta t$$

Donde V es la velocidad lineal (rapidez) de la partícula y w su velocidad angular. Las unidades de w son rad/s.

$$V = w\ R \tag{3}$$

Como se está analizando el movimiento circular es uniforme, la velocidad angular w es constante y por consiguiente también lo es la rapidez de la partícula V.

La velocidad V es la velocidad lineal y es una magnitud física vectorial. La velocidad en general como vector siempre es tangente a la trayectoria; en nuestro caso el vector velocidad debe ser tangente a la trayectoria circular y como es constante lo será solo en modulo, porque su dirección y sentido cambian en diferentes puntos de la trayectoria circular. Si dibujamos el vector velocidad en cada punto de la trayectoria circular, tendremos:



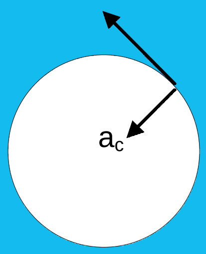
Podemos observar que el vector velocidad en cada punto es tangente a la trayectoria circular y diferente debido a su dirección, pero por ser un movimiento circular uniforme su modulo o magnitud es la misma.

Por esta razón el vector velocidad cambia en el tiempo. Cuando en el movimiento de una partícula se detecta cambio en la velocidad, la partícula se encuentra acelerada y por consiguiente en nuestro caso de análisis del movimiento circular hay cambio en la velocidad y existe una aceleración.

Cuando se trata del movimiento circular uniforme, la aceleración es perpendicular a la velocidad y su valor está dado por la ecuación:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

La aceleración recibe el nombre de «aceleración centrípeta» o «aceleración central» y es una magnitud física vectorial y gráficamente podemos representarla para un punto de la trayectoria de la siguiente manera.



La aceleración centrípeta como vector siempre está dirigida hacia el centro de la trayectoria circular y es perpendicular al vector velocidad.

El Periodo (T)

Se denomina periodo (T) al tiempo que demora la partícula en dar una vuelta completa o una revolución. En el caso del movimiento circular uniforme la longitud de la trayectoria cuando la partícula da una vuelta completa es:

$$L = 2\pi R = V T$$
$$2\pi R = w R T$$

Despejando de la última ecuación el periodo T:

$$T = 2\pi / w$$

Como la velocidad angular w es constante el periodo es constante en este caso. Las unidades de T están dadas en segundos o en general en unidades de tiempo.

La frecuencia angular (f)

La frecuencia angular (f) es el número de vueltas o revoluciones que realiza la partícula por unidad de tiempo, y esta dado por la relación:

$$f = 1 / T \qquad \text{o} \qquad f = w / 2\pi$$

$$w = 2\pi f$$

Ecuaciones que relacionan la velocidad angular con la frecuencia angular. Solo en el MCU la velocidad lineal V, el periodo T, la velocidad angular w y la frecuencia angular son constantes.

Además debemos tener en cuenta que en el MCU solo hay aceleración centrípeta o radial y es un vector perpendicular en cada punto de la trayectoria a la velocidad lineal V.

Ejemplo 29

Una piedra sujeta del extremo de una cuerda gira en una circunferencia de 1.6 m de diámetro y con una frecuencia de 16 revoluciones por segundo. Encontrar:

a) El tiempo que demora la piedra en dar una vuelta completa o el periodo.

De acuerdo a la ecuación que relaciona frecuencia f con el periodo T, tendremos:

$$T = 1 / f = 1 / 16 = 0.0625 \text{ segundos}$$

b) La velocidad angular w de la piedra.

Tenemos que $w = 2\pi f$, reemplazando el valor de f dado como dato:

$$w = 2\pi \times 16 = 100.53 \text{ rad/s}$$

c) La rapidez o velocidad lineal de la piedra.

Tenemos que $V = w R$, reemplazando valores

$$V = 100.53 \times 0.8 = 80.42 \text{ m/s}$$

d) La aceleración centrípeta de la piedra.

La aceleración centrípeta está dada por la ecuación $a_c = v^2 / R$, reemplazando los valores tendremos:

$$a_c = 80.42^2 / 0.8 = 8084.22 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 30

La órbita de la luna respecto a la tierra es aproximadamente circular, con un radio promedio de 3.84×10^8 m. A la luna le toma 27.3 días para completar una revolución alrededor de la tierra. Encontrar:

a) La velocidad angular promedio de la luna alrededor de la tierra.

Tenemos que la velocidad angular es:

$$w = 2 \pi / T$$

Reemplazando valores:

$$w = 2 \pi / 27.3 = 0.23 \text{ rad/día}$$

b) La rapidez o velocidad lineal con la que la luna gira alrededor de la tierra.

Tenemos que la velocidad V es:

$$V = w R$$

Reemplazando los valores:

$$V = 0.23 \times 3.84 \times 10^8 = 0.88 \times 10^8 \text{ m/día} \quad \text{o}$$
$$V = 1018.52 \text{ m/s}$$
$$V = 1.019 \text{ Km/s}$$

c) La aceleración centrípeta sobre la luna.

De acuerdo a la ecuación para la aceleración centrípeta:

$$a_c = v^2 / R = (1018.52)^2 / 3.84 \times 10^8 = 2.70 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 31

En el ciclo de secado de una lavadora, el cilindro tiene un radio de 0.30 m y desarrolla una frecuencia de 630 rpm (revoluciones por minuto). ¿Cuál es la rapidez o velocidad lineal con la cual el agua sale de la maquina?

Solución:

La frecuencia de 630 rpm pasemos a rev/s

$$f = 630 / 60 = 10.5 \text{ rev/s}$$

Encontrando el valor de V nos dará:

$$V = w R = 2 \pi f R = 2 \pi \times 10.5 \times 0.30$$
$$V = 19.79 \text{ m/s}$$

Problema 1

Un trotador corre en línea recta con una velocidad media de 5 m/s durante 4 min, y después con una velocidad media de 4 m/s, durante 3 min. A) ¿Cuál es su desplazamiento total? b) ¿Cuál es su velocidad media durante todo el tiempo?

Problema 2

Un atleta nada la distancia de 50m en una piscina en 20 s y recorre la distancia de regreso hasta la posición de salida en 22 s. Determine su velocidad media en: a) La primera mitad del recorrido. b) La segunda mitad del recorrido y c) el recorrido completo.

Problema 3

Una partícula se mueve a lo largo del eje X de acuerdo a la función:

$$x = 40\,t - 6\,t^2$$

donde x está en m y t en s.

Encontrar:

a) El desplazamiento de la partícula entre t = 2s y t = 5s.
b) La velocidad media de la partícula entre los instantes de tiempo t = 2s y t = 5s.
c) La velocidad instantánea de la partícula para t = 3s.
d) La aceleración media de la partícula entre los instantes de tiempo t = 2s y t = 5s.
e) La aceleración instantánea de la partícula para t = 3s.

Problema 4

Un objeto se mueve a lo largo del eje X de acuerdo con la ecuación:

$$x = 3\,t^2 - 2\,t + 3$$

donde x está en m y t en s.

Realizar:

a) El gráfico espacio-tiempo.
b) Encontrar la velocidad media entre t=2s y t=3s.

c) Encontrar la velocidad instantánea para t=2s.
d) Encontrar la velocidad instantánea para t=3s
e) El gráfico velocidad-tiempo.
f) Encontrar la aceleración media entre t=2s y t=3s.
g) Encontrar la aceleración instantánea para t=2s
h) El gráfico aceleración-tiempo.

Problema 5

Una partícula se mueve a lo largo del eje X de acuerdo a la ecuación:

$$x = 2t^2 - 4t + 3$$

donde x está en m y t en s.

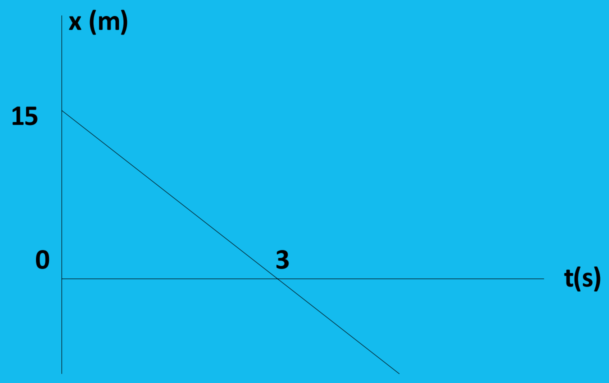
Determinar:

a) A qué distancia del origen O se encuentra la partícula en el instante de tiempo t = 0 s.
b) La velocidad media entre los instantes de tiempo t = 3 s y t = 4 s
c) El valor de la velocidad instantánea en el instante de tiempo t = 3 s.
d) El valor de la velocidad instantánea en el instante de tiempo t = 4 s.

Problema 6

La figura muestra el grafico espacio-tiempo de una partícula que se desplaza a lo largo del eje X. Encontrar:

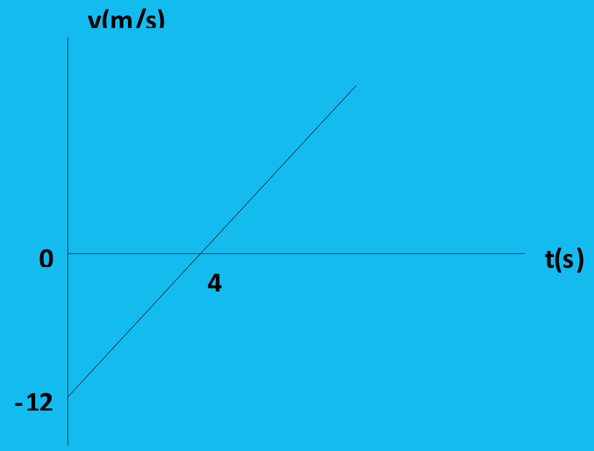
a) A partir del gráfico la ecuación de la función x vs. t, ó x = f (t).
b) La velocidad media entre t = 2.5 s y t = 4.5 s.
c) La velocidad instantánea para t = 3 s.
d) La aceleración media entre t = 2.5 s y t = 4.5 s.
e) La aceleración instantánea para t = 3 s.
f) Cuál es la posición de la partícula cuando t = 5 s.



Problema 7

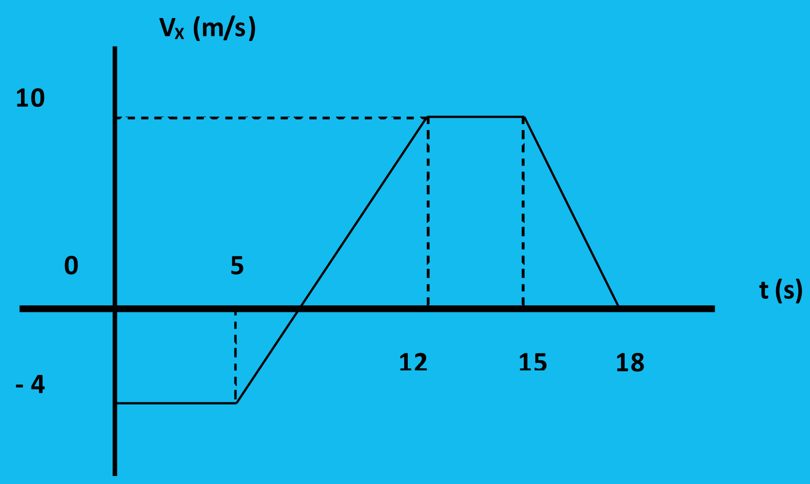
La figura muestra el grafico velocidad-tiempo de una partícula que se desplaza a lo largo del eje X. Encontrar:

a) A partir del gráfico la ecuación de la función v vs. t, ó v = f (t).
b) La aceleración media entre t = 2.5 s y t = 4.5 s.
c) La aceleración instantánea para t = 3 s.
d) Cuál es la velocidad instantanea de la partícula cuando t = 5 s.



Problema 8

El grafico velocidad versus tiempo mostrado en la figura, describe el movimiento a lo largo del eje X de un móvil. A partir del grafico, encontrar:



a) El instante de tiempo cuando la velocidad del móvil es cero.
b) La aceleración media entre $t = 0$ y $t = 5$ s.
c) La aceleración media entre $t = 5$ y $t = 15$ s.
d) La aceleración media entre $t = 0$ y $t = 18$ s.
e) Si en el instante de tiempo $t = 0$ se encuentra en $x = 0$ m, a que distancia del origen se encuentra para $t = 18$ s.

Problema 9

Una partícula se mueve a lo largo del eje X según la ecuación:

$$x(t) = 2\,t^2 - 3\,t - 5$$

donde x está en metros y t en segundos.

Hallar:

a) La velocidad en función del tiempo.
b) La aceleración en función del tiempo.
c) En qué posición se encuentra la partícula en el instante $t = 0$ s. (punto de partida)
d) Que velocidad y que aceleración tiene la partícula en el instante de tiempo $t = 0$s.
e) Si la partícula pasa por $x = 0$, en que instante de tiempo lo hace.
f) La velocidad y la aceleración cuando pasa por $x = 0$.
g) La velocidad y la aceleración cuando $x = 12$ s.
h) En que instante de tiempo pasa nuevamente por el punto de partida.
i) La aceleración media entre $t = 2$ y $t = 3$ s.
j) La aceleración media entre $t = 2.6$ y $t = 4.8$ s.

Problema 10

Una partícula se mueve a lo largo del eje X según la ecuación:

$$x(t) = 3\,t^2 - 2\,t + 5$$

donde x está en metros y t en segundos

Hallar:

a) La velocidad en función del tiempo.
b) La aceleración en función del tiempo.
c) La posición, velocidad y aceleración en el instante de tiempo $t = 0$s.
d) La posición, velocidad y aceleración en el instante de tiempo $t = 2$ s.
e) En que instante de tiempo la velocidad es cero.
f) En que instante de tiempo la aceleración es cero.

Problema 11

Una partícula se desplaza a lo largo del eje X y su posición en función del tiempo es dada por la ecuación:

$x = t^2 - 5.5\ t + 7$ donde t está dado en s y x en m.

Encontrar:

a) Cuando t = 0 s cual es la posición de la partícula.
b) Si la partícula pasa por el origen del sistema de coordenadas (x = 0 m), en que instantes de tiempo lo hace.
c) Cuál es la velocidad media de la partícula entre los instantes de tiempo t = 2.5 s y t = 4.5 s.
d) Cuál es la ecuación para la velocidad instantánea en función del tiempo.
e) Cuál es el valor de la velocidad instantánea para t = 3.5 s.
f) Cuál es el valor de la velocidad inicial (t = 0 s).
g) En que instante de tiempo la velocidad de la partícula es cero.
h) Cuál es la posición de la partícula cuando su velocidad es cero.
i) Cuál es la velocidad de la partícula cuando pasa por el origen del sistema de coordenadas.
j) Cuál es la aceleración media de la partícula entre los instantes de tiempo t = 2.5 s y t = 4.5 s.
k) Cuál es la ecuación para la aceleración instantánea en función del tiempo.
l) Cuál es el valor de la aceleración instantánea para t = 2.5 s y para t = 4.5 s.
m) Represente mediante un esquema el movimiento de la partícula con la información obtenida.

Problema 12

Un automóvil A parte desde x = 80 m con velocidad constante v_1= - 30i m/s dirigiéndose al origen del sistema de coordenadas. Simultáneamente otro automóvil B parte del origen con velocidad inicial v_2 = - 5i m/s y con una aceleración constante a_2 = 2 m/s^2. Hallar:

a) En que instante de tiempo el automóvil A encuentra al automóvil B por primera vez, y en que instante de tiempo se vuelven nuevamente a encontrar.
b) A qué distancia del origen se encuentran los automóviles la primera vez.
c) A qué distancia del origen se encuentran los automóviles por segunda vez.

Problema 13

Un automóvil se mueve sobre el eje X. Parte del reposo y se acelera a razón de 2m/s^2 durante 10s, continúa su viaje a velocidad constante durante 5s, posteriormente acelera a razón de 1m/s^2 durante 10s y finalmente desacelera a razón de 4m/s^2 hasta llegar al reposo.

a) Graficar x versus t.
b) ¿Cuál es la distancia total recorrida?
c) ¿Cuál es su posición a los 12s de su partida?
d) ¿Cuál es su velocidad media en todo su recorrido?

Problema 14

Dos móviles viajan uno al encuentro del otro sobre el eje X con velocidades constantes. Si parten simultáneamente de los puntos A y B distantes 240 km, el tiempo que demora el móvil que parte de A en llegar a B es de 6h y el otro móvil demora en llegar al punto A, 3h:

a) La velocidad de cada móvil.
b) ¿Qué tiempo transcurre hasta que se encuentran?
c) ¿A qué distancia de B se cruzan?

Problema 15

Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba y es atrapada por el lanzador después de 20 segundos. Halle: a) la velocidad inicial de la pelota, b) la altura máxima que alcanza.

Problema 16

Se lanza una piedra hacia arriba desde el borde de un acantilado de 18 m de altura. En su camino hacia abajo libra justo el acantilado y golpea el piso con una rapidez de 18.8 m/s. a) ¿Con que velocidad fue lanzada la piedra hacia arriba?, b) Cual es la altura máxima alcanzada por la piedra medida desde el fondo del acantilado.

Problema 17

Cae una piedra desde el reposo desde lo alto de un acantilado muy elevado. Una segunda piedra se lanza hacia abajo desde la misma altura 2.0 segundos más tarde con una rapidez inicial de 30 m/s. Si ambas piedras golpean el piso del fondo del acantilado simultáneamente, cual es la altura del acantilado.

Problema 18

Un auto y un tren se mueven al mismo tiempo a lo largo de trayectorias paralelas a 25 m/s. Debido a una luz roja el auto experimenta una aceleración uniforme de – 2.5 m/s^2 y se detiene. Permanece en reposo durante 45 s, después acelera hasta alcanzar una velocidad de 25 m/s a una tasa de 2.5 m/s^2. ¿A qué distancia del tren está el auto cuando alcanza la velocidad de 25 m/s, suponiendo que la velocidad del tren se ha mantenido en 25 m/s?

Problema 19

Un globo aerostático viaja verticalmente hacia arriba a una velocidad constante de 5 m/s. Cuando está a 21 m sobre el suelo se suelta un paquete desde él.

a) Cuánto tiempo permanece el paquete en el aire antes de chocar con el suelo.
b) Cuál es la velocidad del paquete exactamente antes de golpear el suelo.

Problema 20

Una pelota parte del reposo con una aceleración de 0.5 m/s^2 mientras se mueve hacia abajo por un plano inclinado de 9.0 m de longitud. Cuando alcanza la parte inferior, la pelota rueda por otro plano horizontal, donde después de moverse 15 m, se detiene:

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en la parte inferior del primer plano?
b) ¿Cuánto tarda en rodar por el primer plano?
c) ¿Cuál es la aceleración a lo largo del segundo plano?
d) ¿Cuál es la velocidad de la pelota a 8.0 m a lo largo del segundo plano

Problema 21

Una piedra cae a partir del reposo desde la cumbre de un acantilado. Una segunda piedra es lanzada hacia abajo desde la misma altura 2.0 s después, con una velocidad inicial de 30 m/s. Si ambas piedras golpean el suelo simultáneamente:

a) ¿Cuál es la altura del acantilado?
b) ¿Con que velocidad choca en el fondo del acantilado cada una de las piedras?

Problema 22

Desde la azotea de un edificio de 40 m de altura se arroja una piedra verticalmente hacia abajo, demorando 2 segundos para llegar al suelo. Encontrar:

a) Con que velocidad inicial fue arrojada la piedra.
b) Con que velocidad llega al suelo.

Problema 23

Un automóvil se desplaza con velocidad constante de 75 Km/h. A una distancia de 35 m de un semáforo en rojo el conductor aplica los frenos y se detiene frente al semáforo.

a) Cuál es la aceleración del automóvil.
b) Qué tiempo demora en recorrer los 35 m.

Problema 24

Un ómnibus sale a las 8:45 horas de la ciudad A y recorre 150 Km hasta llegar a la ciudad B en dos horas. En B se detiene por 20 minutos y continúa hasta la ciudad C a 300 Km en tres horas, donde se detiene por 42 minutos. Luego continúa hasta la ciudad D que se encuentra a 250 Km, llegando a las 17: 37 horas.

a) Cuál es la velocidad del ómnibus en cada tramo.
b) Que velocidad media tendría el ómnibus si no realiza ninguna parada y a qué hora llegaría a D.

Problema 25

Dos trenes parten con una diferencia de 5 minutos. Partiendo desde el reposo, cada uno es capaz de alcanzar una rapidez máxima de 160 Km/h después de acelerar uniformemente a lo largo de una distancia de 2 Km.

a) Cuál es la aceleración de cada tren.
b) Cuán lejos está el primer tren cuando el segundo inicia su carrera.
c) Cuán lejos están uno de otro cuando ambos viajan a la rapidez máxima.

Problema 26

Una bala indestructible, de 2 cm de longitud, se dispara directo sobre una tabla que tiene 10.0 cm de espesor. La bala golpea la tabla con una rapidez de 420 m/s y sale, después de atravesarla, con una rapidez de 280 m/s.

a) Cuál es la aceleración media de la bala al atravesar la tabla.
b) Cuál es el tiempo total que la bala está en contacto con la tabla.
c) Que espesor debe tener la tabla para detener completamente a la bala.

Problema 27

Una pelota se lanza directamente hacia abajo con una velocidad inicial de 8 m/s desde una altura de 30 m. ¿Qué tiempo demora en llegar al suelo y con qué rapidez?

Problema 28

Un estudiante lanza una pelota verticalmente hacia arriba a su compañera que se encuentra en una ventana 4 m arriba. La pelota es atrapada 1.5 s más tarde por la mano extendida de la compañera.

a) A qué velocidad fue lanzada la pelota.
b) Cual era la velocidad de la pelota justo antes de ser atrapada.

Problema 29

Desde la azotea de un edificio de 80 m de altura, se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con velocidad inicial de 36 Km/h. Hallar:

a) Qué tiempo demora la piedra en llegar al suelo desde que fue lanzada.
b) Cuál es la posición de la piedra y su velocidad a los 5 s.
c) Cuál es la posición de la piedra y su velocidad a los 9 s.
d) A qué altura desde el suelo y en que instante de tiempo la velocidad de la piedra es cero.
e) Con que velocidad llega la piedra al suelo.
f) El desplazamiento entre $t = 5$ s y $t = 9$ s.
g) La velocidad media entre $t = 5$ s y $t = 9$ s.

Problema 30

Desde la azotea de un edificio de 80 metros de altura se suelta una primera piedra. Un segundo más tarde se lanza hacia abajo una segunda piedra. Si ambas llegan en el mismo momento al suelo, con qué velocidad inicial debe haber sido lanzada la segunda piedra.

Problema 31

Se lanza una pelota hacia arriba en línea recta, desde el piso con una rapidez de 4.0 m/s.

a) Cuanto tiempo transcurre entre los dos momentos en que su rapidez es 2.5 m/s.
b) A qué distancia del piso se encuentra la pelota en esos instantes.

Problema 32

Un proyectil es disparado desde el borde de un acantilado de 150 m de altura, con una velocidad inicial de 100 m/s y un ángulo de 53^0 por encima de la horizontal. Encontrar:

a) Las componentes de la velocidad inicial en el momento del disparo.
b) El tiempo que demora el proyectil en llegar al fondo del acantilado.
c) La distancia horizontal alcanzada en el fondo del acantilado.

Problema 33

Se coloca un estudiante en el borde de un acantilado y lanza una piedra horizontalmente con una rapidez de 18 m/s. El acantilado está 50 m de altura respecto de una playa horizontal.

a) En cuanto tiempo, después de ser lanzada la piedra, golpeara la playa bajo el acantilado.
b) Con que rapidez y ángulo golpeara la playa.

Problema 34

En el borde de un precipicio de 80 m de altura, se encuentra un cañón que hace un ángulo de 37^0 con la horizontal y dispara balas con velocidad de 150 m/s. Encontrar:

a) Las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial.
b) El tiempo que demora la bala en alcanzar el fondo del precipicio.
c) ¿Con que velocidad llega la bala al fondo del precipicio?
d) La máxima altura que alcanza la bala con relación al fondo del precipicio.
e) El máximo desplazamiento horizontal en el fondo del precipicio.

Problema 35

Se lanza horizontalmente una pelota desde el borde de un escritorio. Si la pelota golpea el piso a 1.4 m de la base del escritorio y la altura del escritorio es de 86 cm.

a) Con que velocidad fue disparada la pelota.
b) Qué tiempo demora en llegar al piso.
c) Con que velocidad y con qué ángulo golpea el piso.

Problema 36

Durante la primera guerra mundial, los alemanes tenían un cañón llamado Big Bertha que se uso para bombardear Paris. La bala de cañón era disparada con una rapidez inicial de 1700 m/s (aproximadamente cinco veces la rapidez del sonido) a una inclinación inicial de 55° de la horizontal. Para dar en el blanco, se hicieron algunos ajustes para considerar la resistencia del aire y otros efectos. Si se ignoran estos efectos.

a) Cual lejos pego la bomba.
b) Cuanto tiempo estuvo en el aire.
c) Cuál es la altura máxima que alcanzaba.
d) Con que rapidez llegaba al blanco.

Problema 37

Desde el borde de un acantilado de 50 m de altura, un cañón que hace un ángulo de 38º con la horizontal dispara un proyectil con velocidad inicial (V_0) 20 m/s. La bala de cañón golpea la pared que está 50 m al frente en el punto P. Hallar:

a) Las coordenadas del punto P.
b) La máxima altura con respecto a la base del acantilado que alcanza el proyectil.
c) La velocidad con la que la bala golpea la pared de enfrente.

Problema 38

Un cañón dispara proyectiles con una velocidad inicial de 300 m/s y un ángulo de 53º por encima de la horizontal. Encontrar:

a) La distancia máxima a la que llegan las balas del cañón.
b) El tiempo que permanecen en el aire las balas del cañón antes de impactar en el suelo.
c) La rapidez con la que llegan las balas del cañón al suelo.
d) Cuál es la máxima altura que alcanzan las balas.
e) Cuáles son los valores de las coordenadas x e y de posición de la bala y su velocidad a los 30 segundos.

Problema 39

Un avión vuela horizontalmente a 490 m de altura con velocidad constante de 360 Km/h. ¿A qué distancia antes de llegar a pasar sobre el blanco deberá dejar caer el avión una bomba para que haga impacto sobre el blanco?

Problema 40

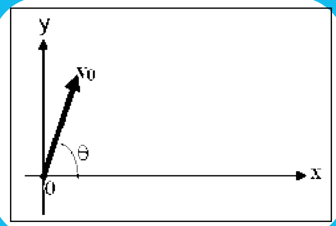
Un cañón dispara proyectiles con una velocidad de 20 m/s y un ángulo de 30º sobre la horizontal. El cañón se encuentra a una distancia de 30 m frente a una pared muy alta. Encontrar:

a) A qué altura sobre la pared hacen impacto los proyectiles.
b) Con que velocidad y con qué ángulo impactan sobre la pared los proyectiles.
c) Qué tiempo demoran los proyectiles en llegar a la pared.

Problema 41

Se dispara un proyectil desde el suelo con un ángulo de inclinación θ como se muestra en la figura. Si su velocidad en el punto más alto de su trayectoria es 3 m/s y el tiempo de vuelo para alcanzarlo es 1s. Determinar:

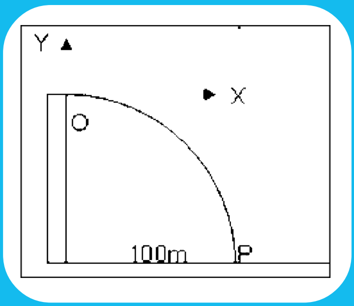
a) El vector velocidad inicial de lanzamiento v_0.
b) El ángulo θ.
c) Su posición cuando t = 0,5s



Problema 42

Desde la parte superior de un edificio se lanzan dos proyectiles A y B simultáneamente. Si el proyectil B se lanza horizontalmente con una velocidad de 50 m/s y el proyectil A verticalmente con una velocidad hacia arriba de 10 m/s, determinar:

a) El tiempo que demora el proyectil B en llegar al suelo (punto P)
b) La altura del edificio en metros.
c) La posición del proyectil A en el instante en que B choca con el suelo.



Problema 43

Desde lo alto de una torre se lanza una piedra con una rapidez (modulo de la velocidad) de 40 m/s en dirección horizontal. Si el tiempo transcurrido desde que se lanza la piedra hasta que choca con el piso es de 3.0 s, determinar:

a) La altura de la torre.
b) La distancia del pie de la torre al punto de impacto de la piedra.
c) La rapidez con que la piedra choca con el suelo.
d) La distancia de la piedra al suelo en el instante t = 1s.

Problema 44

Desde la azotea de un edificio de 50 m de altura se dispara una bala de cañón con una velocidad horizontal v_o, la bala golpea en el suelo a una distancia de 38m de la base del edificio. Encontrar:

a) La velocidad inicial v_o de la bala.
b) El tiempo que demora la bala en llegar al piso.
c) La velocidad con que la bala golpea en el piso.

Problema 45

Halle la aceleración de una partícula que se mueve con una rapidez constante de 8 m/s en una circunferencia de 2 m de radio.

Problema 46

Una partícula se mueve en una trayectoria circular de 0.4 m de radio con rapidez constante. Si la partícula hace 5 revoluciones en cada segundo de su movimiento, halle:

a) La rapidez de la partícula.
b) Su aceleración.

Problema 47

Un neumático que tiene 0.5 m de radio gira con una rapidez constante de 200 revoluciones por minuto. Determinar la rapidez y la aceleración de una pequeña piedra incrustada en la llanta.

Capítulo VI

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA

INTRODUCCIÓN

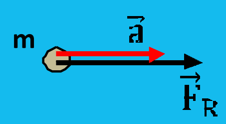
En el Capítulo IV estudiamos las condiciones para que una partícula se encontrara en equilibrio a partir de los principios establecidos por Newton. Es así que en el enunciado de su primera ley, establece que si una partícula se desplazaba a lo largo de una línea recta con velocidad constante o se mantenía en reposo, **era porque sobre la partícula actuaba una fuerza resultante nula; en está condición la partícula se encuentra en equilibrio.**

Pero que le sucede a una partícula si la fuerza resultante que actúa sobre ella es diferente de cero, en este caso la partícula no está en equilibrio y más bien se observa que en su movimiento **la velocidad va cambiando** y su trayectoria podría no ser necesariamente una línea recta. Estas observaciones fueron realizadas por Newton y otros observadores anteriores a él, pero fue Newton el que planteo que **el movimiento que realiza la partícula es acelerado.**

Las observaciones realizadas por Newton acerca del movimiento que realiza un cuerpo o una partícula por acción de una fuerza o un conjunto de fuerzas aplicada sobre el, lo llevaron a establecer que la **aceleración** con la que se desplaza es directamente proporcional a la **fuerza resultante** aplicada e inversamente proporcional a la **masa** del cuerpo o de la partícula. Estas conclusiones producto de sus observaciones son las que constituyen la **segunda Ley de Newton.**

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m} \qquad (1)$$

La ecuación (1) es una expresión vectorial donde podemos ver que el vector aceleración $\vec{a}$ es paralelo y en el mismo sentido que la fuerza resultante $\vec{F}_R$.



La ecuación (1) generalmente se escribe de la manera siguiente:

$$\vec{F}_R = m\,\vec{a} \qquad (2)$$

Ecuación a la que se denomina como la segunda Ley de Newton.

6.1 REPRESENTACIÓN DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON EN UN SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS.

La ecuación (2) es la forma vectorial como se expresa la segunda ley de Newton. Si nos encontramos en un SCC los vectores $\vec{F}_R$ y $\vec{a}$ deberán ser expresados en dicho SCC. Así la fuerza resultante es:

$$\overrightarrow{F_R} = \sum_1^N \vec{F_i} = \left(\sum F_{ix}\right)\vec{i} + \left(\sum F_{iy}\right)\vec{j} + \left(\sum F_{iz}\right)\vec{k}$$

Donde los términos entre paréntesis representan la suma de las componentes de los vectores en los ejes X, Y, Z. De la misma manera el vector aceleración es:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Reemplazando los vectores en la ecuación (2):

$$\begin{aligned} \Sigma F_{ix} &= m\ a_x \\ \Sigma F_{iy} &= m\ a_y \\ \Sigma F_{iz} &= m\ a_z \end{aligned} \qquad (3)$$

Las ecuaciones (3) es la segunda Ley de Newton expresada en un SCC. En dichas ecuaciones se representa la suma de las componentes de las fuerzas en cada uno de los ejes coordenados. La ecuación (2) es la forma vectorial y las ecuaciones (3) son expresiones escalares que representan las componentes de las fuerzas en un SCC.

Unidades de la Fuerza

La unidad para la fuerza en el sistema S.I. es el Newton (N):

$$\text{Newton} = \text{Kg. m/s}^2$$

En el sistema c.g.s es la dina:

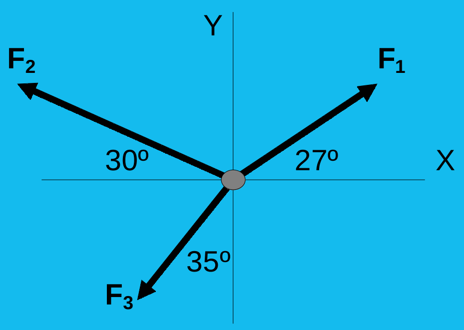
$$\text{dina} = \text{g.cm/s}^2$$

El factor de conversión entre dina y Newton:

$$1 \text{ Newton} = 10^5 \text{ dinas.}$$

Ejemplo 1

La figura muestra una partícula de 0.5 Kg. sobre la cual actúan las fuerzas indicadas. La fuerza F_1 de 10 N, la fuerza F_2 de 15 N y F_3 12 N. Encontrar el modulo de la fuerza resultante aplicada sobre la partícula y la aceleración que esta adquiere.



Solución:

La solución del problema lo podemos plantear de dos maneras. La primera hallando la fuerza resultante como un vector y luego la aceleración. La segunda haciendo uso de las componentes.

a) Primera solución. Describimos los vectores en función de los vectores unitarios.

$$\vec{F_1} = 8.91\,\vec{i} + 4.54\,\vec{j}$$

$$\vec{F_2} = -\,12.99\,\vec{i} + 7.50\,\vec{j}$$

$$\vec{F_3} = -\,6.88\,\vec{i} - 9.83\,\vec{j}$$

Conocidos los vectores podemos hallar la fuerza resultante $\vec{F}_R$.

$$\vec{F_R} = -\,10.96\,\vec{i} + 2.21\,\vec{j}$$

El modulo del vector es:

$$F_R = \sqrt{(-10.96)^2 + (2.21)^2} = 11.18 \text{ N}$$

Aplicando la ecuación (1), tendremos para el vector aceleración:

$$\vec{a} = \vec{F}_R \,/\, m$$

$$\vec{a} = -\,21.92\,\vec{i} + 4.42\,\vec{j} \quad \text{m/s}^2$$

El modulo de la aceleración es::

$$a = \sqrt{(-21.92)^2 + (4.42)^2} = 22.36 \text{ m/s}^2$$

El vector fuerza resultante y la aceleración hacen con el eje – X un ángulo de 11.4º.

b) Segunda solución. Hallemos las componentes de la fuerza resultante y de la aceleración a lo largo de los ejes X e Y usando las ecuaciones (3).

Componentes a lo largo del eje X:

$$\Sigma F_{ix} = m\ a_x$$
$$8.91 - 12.99 - 6.88 = 0.5 \times a_x$$
$$a_x = -21.92\ m/s^2$$

Componentes a lo largo del eje Y:

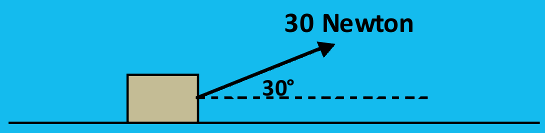
$$\Sigma F_{iy} = m\ a_y$$
$$4.54 + 7.50 - 9.83 = 0.5\ a_y$$
$$a_y = 4.42\ m/s^2$$

La magnitud de la aceleración es:

$$a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y} = \sqrt{(-21.92)^2 + (4.42)^2} = 22.36\ m/s^2$$

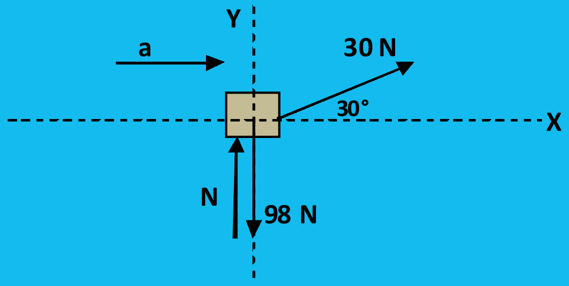
Ejemplo 2

Un bloque de 10 kg esta sobre una superficie lisa y sometido a la fuerza de 30 Newton como se muestra en la figura. Encontrar:



a) La aceleración que tiene el bloque.

Consideremos que la superficie coincide con el eje X. Hagamos primero un DCL del bloque.



EL DCL nos muestra que el peso de 98 Newton es mayor que la componente en el eje Y de la fuerza de 30 Newton. Por consiguiente la fuerza de 30 Newton no es suficiente para levantar al bloque y por consiguiente este se desplazara solo a lo largo de la superficie o del eje X con la aceleración a que no conocemos.

Aplicando la segunda Ley de Newton o las ecuaciones dinámicas se tendrá:

$$\sum F_{ix} = m\, a_x \qquad 30 \text{ Cos } 30° = m\ a \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0 \qquad 30 \text{ Sen } 30° + N - 98 = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo la ecuación (1) se tiene:

$$a = 2.6 \text{ m/s}^2$$

b) La reacción normal del piso sobre el bloque.

Despejando el valor de la normal N de la ecuación (2) se tiene:

N = 83 Newton.

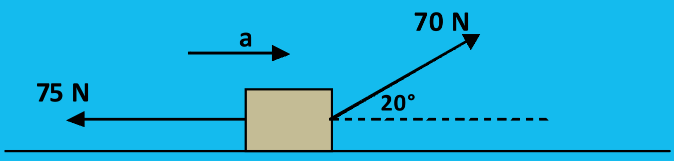
c) Si el bloque parte del reposo que velocidad tiene a los 15 s.

Como la aceleración es constante el movimiento es MRUV. Aplicando la ecuación:

$$V = V_0 + a\ t \qquad \bullet \qquad V = 39 \text{ m}$$

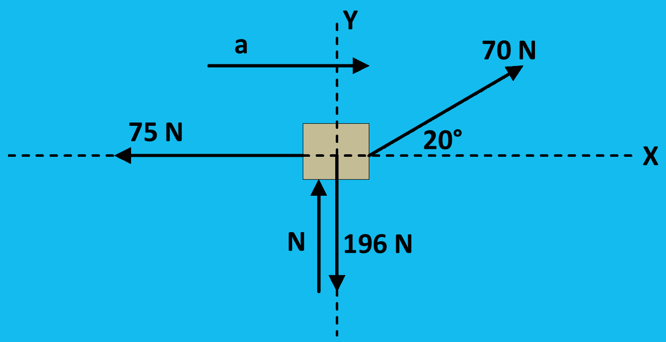
Ejemplo 3

Un bloque de 20 kg esta sobre una superficie lisa y sometido a las fuerza mostradas en la figura. Encontrar:



a) La aceleración con la que se mueve el bloque.

Hagamos el DCL del bloque.



Aplicando la Segunda Ley de Newton o las ecuaciones dinámicas:

Eje X:	70 Cos 20° - 75 = 20 a	(1)
Eje Y:	70 Sen 20° + N – 196 = 0	(2)

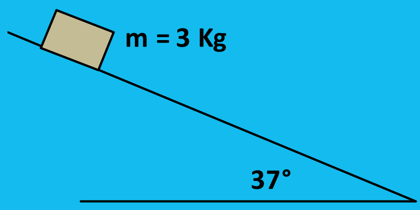
Resolviendo el sistema de dos ecuaciones se tiene:

$$a = -\ 0.46\ m/s^2$$

El resultado negativo nos indica que la aceleración es en el sentido contrario al escogido en el DCL y por consiguiente el movimiento es en esa dirección si parte del reposo.

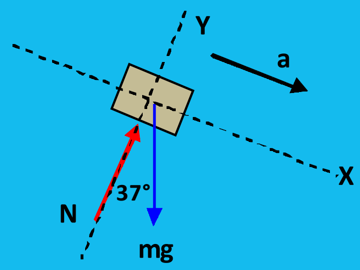
Ejemplo 4

La figura muestra un bloque de 3 Kg de masa sobre un plano inclinado 37 °. Entre el bloque y la superficie del plano inclinado no existe rozamiento, y el cuerpo inicia su movimiento a partir del reposo. Cuál es la aceleración con la que el cuerpo baja por el plano inclinado.



Solución:

Lo primero que debemos realizar es el DCL del cuerpo.



Sobre el bloque actúan dos fuerzas, su peso mg y la reacción normal N de la superficie. Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas XY, en la que el eje X coincide con la superficie del plano inclinado y el eje Y es perpendicular a este.

A lo largo del eje X el movimiento es acelerado cuando el cuerpo está bajando. A lo largo del eje Y no existe movimiento por lo que se mantiene el equilibrio a lo largo de dicho eje. Aplicando la segunda ley de Newton considerando las componentes a lo largo de cada eje tendremos:

Eje X: $mg \text{ Sen } 37° = m\ a$ (1)

Eje Y: $N - mg \text{ Cos } 37° = 0$ (2)

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones que se han planteado a partir del DCL, tendremos:

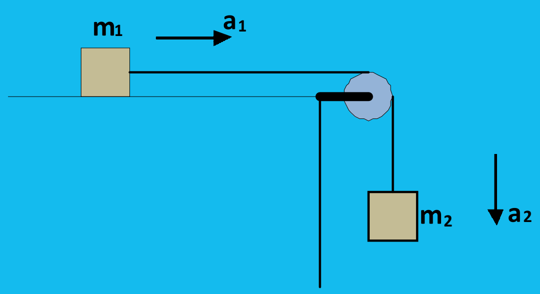
$a = g \text{ Sen } 37° = 5.90 \text{ m/s}^2$

$N = mg \text{ Cos } 37° = 23.48 \text{ Newton}$

Los resultados nos indican que el cuerpo baja aceleradamente por el plano inclinado con una aceleración de 5.90 m/s^2 independiente de la masa del cuerpo. Además la superficie ejerce una fuerza de reacción normal sobre el bloque de 23.48 Newton.

Ejemplo 5

La figura muestra dos bloques cuyas masas son m_1 = 3 Kg y m_2 = 2 Kg, unidos mediante una cuerda que pasa por una polea sin fricción. Entre la masa m_1 y la superficie de la mesa no hay rozamiento. Si las masas parten del reposo cual es su aceleración y cuál es el valor de la tensión en la cuerda que las une.

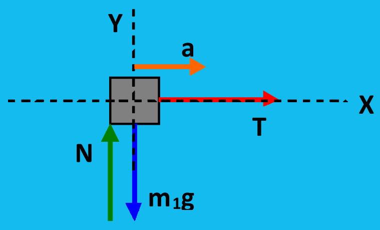


Solución:

El primer paso que se debe dar para resolver el problema es hacer el diagrama DCL para cada masa y plantear las ecuaciones dinámicas correspondientes. La aceleración de cada uno de los bloques es la misma en su modulo pero tienen direcciones diferentes, es decir:

$$a_1 = a_2 = a$$

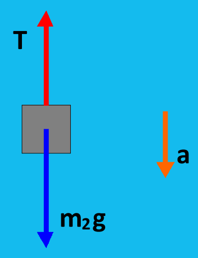
DCL de la masa m_1:



Ecuaciones dinámicas:

Eje X:	$T = m_1 a$	(1)
Eje Y:	$N - m_1 g = 0$	(2)

DCL de la masa m_2:



Ecuaciones dinámicas:

Eje Y: $m_2g - T = m_2\,a$ (3)

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones se tiene:

$$a = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

$$T = \left(\frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

$$N = m_1 g$$

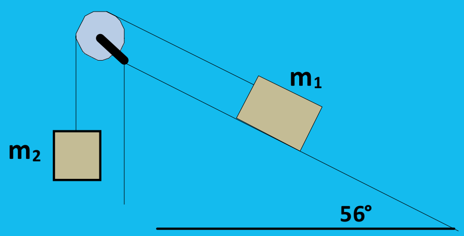
Reemplazando los valores dados y usando el valor de g = 9.8 m/s^2 tendremos:

a = 3.92 m/s^2 T = 11.76 Newton N = 29.4 Newton

La respuesta obtenida nos indica que el sentido de la aceleración escogido es el correcto y nos indica que el bloque m_1 se mueve a la derecha y el bloque m_2 baja, ambos con la aceleración de 3.92 m/s^2. Además podemos observar que independiente del valor de la masa m_2 siempre el bloque baja aceleradamente.

Ejemplo 6

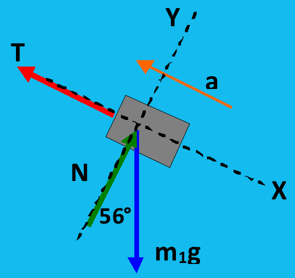
La figura muestra un plano inclinado que hace un ángulo con la horizontal de 56°. Sobre el plano se encuentra un bloque de masa m_1 = 10 Kg unido mediante una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento a otro bloque de masa m_2 = 5 Kg. Entre la masa m_1 y la superficie del plano inclinado no existe rozamiento. Con que aceleración sube o baja la masa m_1 y cuál es la tensión en la cuerda.



Solución:

Comencemos haciendo el DCL de cada una de las masas, asumiendo que m_2 baja y que m_1 sube. La aceleración con la que se mueven los dos bloques es la misma.

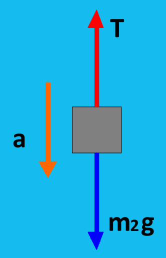
DCL de la masa m_1:



Eje X: $m_1\ g\ \text{Sen}\ 56° - T = -\ m_1\ a$ (1)

Eje Y: $N - m_1\ g\ \text{Cos}\ 56° = 0$ (2)

DCL de la masa m_2:



Eje Y: $T - m_2\ g = -\ m_2\ a$ (3)

Resolviendo el sistema de tres ecuaciones se tiene:

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1.Sen56^0}{m_1 + m_2}\right)g$$

$$T = (1 + Sen\ 56°)\ \frac{m_1.m_2.g}{(m_1 + m_2)}$$

$$N = m_1\ g\ Cos\ 56°$$

Reemplazando los valores dados:

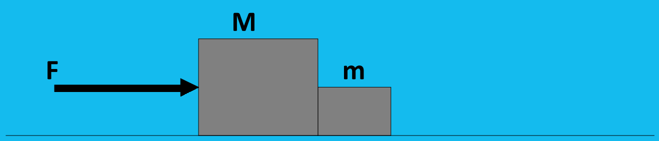
$a = -\ 2.15\ m/s^2$ $T = 59.75\ N$ $N = 54.80\ N$

El signo negativo en la aceleración indica que el sentido que fue escogido no es el correcto, más bien el sentido de la aceleración es al contrario. Por consiguiente la masa m_2 sube y m_1 baja con la misma aceleración, para los valores dados de las masas.

Puede ser verificado a partir de las ecuaciones que si la masa m_2 fuera de 9 kg y m_1 de 10 kg, la masa m_1 bajaría.

Ejemplo 7

La figura muestra dos bloques de masas m y M en contacto, deslizándose sobre una superficie horizontal sin rozamiento, debido a una fuerza horizontal **F.** Cuál es la aceleración de las masas y cuál es la fuerza f que ejerce el bloque pequeño sobre el grande.



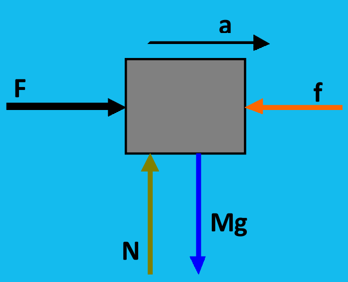
Solución:

Para encontrar la aceleración de las masas debemos considerarlas como un solo bloque de masa (M + m). Aplicando la segunda Ley de Newton al eje horizontal se tiene:

$$F = (M + m)\ a$$

$$a = \frac{F}{M + m}$$

Para encontrar la fuerza f que ejerce un bloque sobre el otro debemos hacer el DCL. Tomemos el bloque de masa M.



Tomando las componentes en el eje X:

$$F - f = M\ a$$

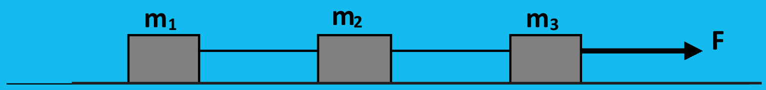
Despejando de la ecuación el valor de f y reemplazando la aceleración tendremos:

$$f = (\frac{m}{M+m}).F$$

La fuerza f es la que el bloque menor ejerce sobre el mayor cuando este lo empuja con una aceleración a. Por la tercera Ley de Newton si hacemos el DCL de la masa m, aparecerá la misma fuerza f pero de sentido contario.

Ejemplo 8

La figura muestra tres cuerpos de masas m_1, m_2 y m_3 unidos mediante dos cuerdas y jalados por una fuerza horizontal constante F. Si no existe fuerza de rozamiento entre cada cuerpo y la superficie, que aceleración adquieren y cuál es la tensión en cada una de las cuerdas.

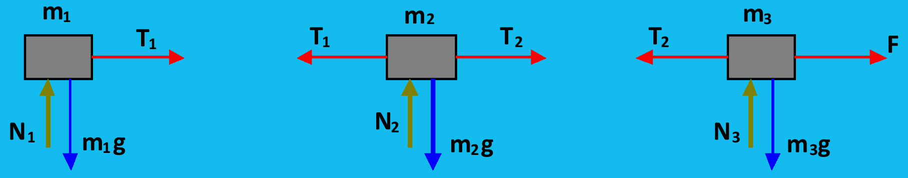


Solución:

Debido a que están unidos mediante cuerdas, los tres cuerpos se mueven con la misma aceleración a:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Para encontrar la tensión en cada cuerda debemos hacer el DCL a cada uno de los cuerpos:



Como interesa solo el desplazamiento horizontal, la suma de las componentes en el eje X nos dará:

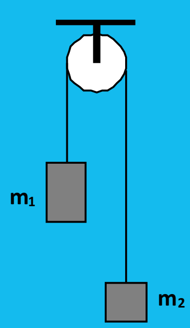
Para m_1 : $T_1 = m_1 a$ (1)
Para m_2: $T_2 - T_1 = m_2 a$ (2)
Para m_3: $F - T_2 = m_3 a$ (3)

Resolviendo las ecuaciones y usando el valor de la aceleración hallada tendremos:

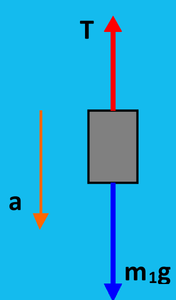
$$T_1 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right).F \qquad T_2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\right).F$$

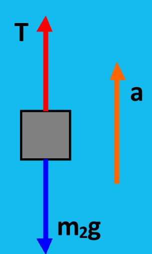
Ejemplo 9

La figura muestra dos masas m_1 y m_2 de 6 y 4 Kg respectivamente, unidas mediante una cuerda ligera que pasa por una polea sin rozamiento. Determinar la aceleración de las masas y la tensión en la cuerda.



Hagamos el DCL para cada una de las masas. Como se trata de una misma cuerda la tensión en ella es la misma e igual a T.





Como ambas masas están unidas mediante la misma cuerda ambas se desplazaran con la misma aceleración a, cuya dirección es la indicada en el DCL.

Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las masas considerando solo el movimiento vertical:

Masa m_1: $T - m_1 g = - m_1 a$

Masa m_2: $T - m_2 g = m_2 a$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones se encuentra la aceleración a y el valor de la tensión T:

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).g \qquad T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right).g$$

Reemplazando los valores dados tendremos:

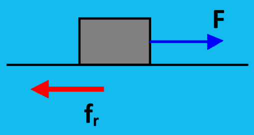
$a = 1.96\ m/s^2$ $\qquad$ $T = 47.04\ N$

6.2 FUERZA DE ROZAMIENTO.

Cuando un cuerpo se mueve sobre una superficie o cuando se mueve a través de un medio viscoso como el aire o el agua, entre el cuerpo y la superficie o entre el cuerpo y el medio a través del cual se mueve existe una fuerza que retarda su movimiento. Esta fuerza retardadora del movimiento se denomina rozamiento.

Analicemos el efecto que tiene la fuerza de rozamiento sobre el cuerpo cuando este quiere iniciar el movimiento o cuando ya está en movimiento. Primero consideremos que el bloque va a iniciar su movimiento sobre una mesa horizontal aplicándose una fuerza como se muestra en la figura 1a.

Si sobre el bloque se aplica una fuerza horizontal **F** tratando de mover el bloque es posible que este no se mueva si la fuerza aplicada es muy pequeña. En estas condiciones el bloque permanece en reposo y se debe a que entre el bloque y la superficie hay una fuerza en sentido contrario que impide el movimiento, esta fuerza se denomina fuerza de rozamiento $\mathbf{f}_r$.



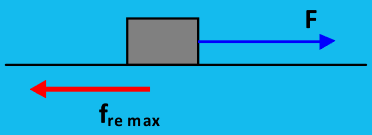


Fig. 1a Bloque en reposo

Fig. 1b Bloque inicia el movimiento

Mientras el bloque permanece en reposo esta en equilibrio y debe cumplirse la siguiente relación:

$$\mathbf{f_r = F}$$

Es decir la fuerza de rozamiento $\mathbf{f_r}$ es igual a la fuerza **F** aplicada. Como no hay movimiento se denomina **fuerza de rozamiento estática** f_{re}.

Si se incrementa el modulo o magnitud de la fuerza **F** y el bloque sigue sin moverse significa que la fuerza de rozamiento estática también se incrementa hasta llegar un momento en que el bloque inicia el movimiento. En ese momento en el que el bloque inicia su movimiento la fuerza de rozamiento alcanzó su valor máximo y la fuerza **F** es ligeramente mayor.

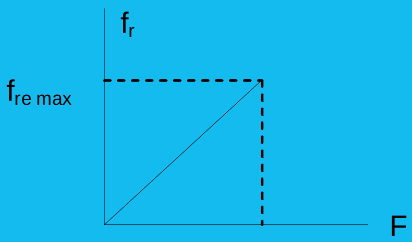


Fig. 2

El gráfico en la figura 2 muestra que conforme se aumenta la fuerza F se incrementa la f_r hasta que alcanza un valor máximo $f_{re\,max}$. A partir de ese momento la fuerza F aplicada puede disminuir y mantener el movimiento uniforme. Experimentalmente se encuentra en forma empírica que existe una relación entre la fuerza de rozamiento y la fuerza de reacción normal de la superficie sobre el bloque.

$$f_{re} = \mu_e N$$

Ecuación en la que μ_e es la constante o coeficiente de rozamiento estático y N la reacción normal de la superficie. Esta ecuación solo es válida en los casos en la que el bloque está a punto de iniciar el movimiento.

Cuando el bloque se mueve aceleradamente o con velocidad constante por acción de la fuerza aplicada **F** la fuerza de rozamiento entre el bloque y la superficie es menor que la $f_{re\ max}$ o f_{re} y se le denomina **fuerza de rozamiento cinética** f_{rc}.

En este caso también se encuentra experimentalmente que la fuerza de rozamiento cinética es directamente proporcional a la fuerza de reacción normal que ejerce la superficie sobre el bloque:

$$f_{rc} = \mu_c N$$

Donde μ_c es el coeficiente de rozamiento cinético.

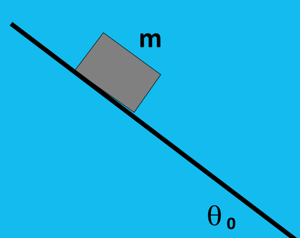
Los valores de μ_e **(coeficiente de rozamiento estático)** y μ_c **(coeficiente de rozamiento cinético** dependen de la naturaleza de las superficies en contacto pero por lo general μ_c es menor que μ_e.

Ejemplo 10

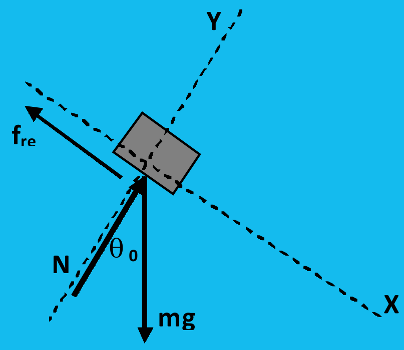
Se coloca un bloque de masa m sobre la superficie de un plano inclinado que forma inicialmente un ángulo θ < è$_0$ con la horizontal. El bloque se encuentra en reposo sobre la superficie mientras se va aumentando el valor del ángulo è. En un momento determinado cuando el ángulo θ alcanza el valor θ_0 el bloque inicia el movimiento. Con este dato encontrar el coeficiente de rozamiento estático μ_e.

Solución:

El bloque inicia el movimiento sobre la superficie cuando alcanza el ángulo θ_0. En ese momento la fuerza de rozamiento alcanzo su valor máximo y se rompe la situación de equilibrio. Si hacemos el DCL del bloque en ese momento podemos plantear que el sistema se halla en equilibrio:



DCL del bloque.



Como el sistema está en equilibrio:

Componentes en el eje X:	$mg\ Sen\ \theta_0 - f_{rs} = 0$	(1)
Componentes en el eje Y:	$N - mg\ Cos\ \theta_0 = 0$	(2)
	$f_{re} = \mu_e N$	(3)

Resolviendo este sistema de ecuaciones tendremos el valor de μ_e:

$$\mu_e = \tan\ \theta_0$$

Este ejemplo corresponde a un método de medición del coeficiente de rozamiento estático que generalmente se usa en los laboratorios de física general.

Ejemplo 11

Un bloque de 25 Kg esta inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal áspera. Se requiere una fuerza horizontal de 80N para que el bloque inicie el movimiento. Cuando está en movimiento se requiere de una fuerza horizontal de 60N para que se siga moviendo con rapidez constante. Hallar los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque y la superficie.

Solución:

Cuando el bloque inicia el movimiento se requiere una fuerza horizontal de 80N. En ese mismo momento la fuerza de rozamiento estática entre el bloque y la superficie alcanzo su valor máximo igual a 80N.

$$f_{re} = 80N$$

Sabemos que la fuerza de rozamiento estática f_{re} es proporcional a la reacción normal N de la superficie sobre el bloque:

$$f_{re} = \mu_e N$$

El valor de la reacción N es:

$$N = m\ g = 25 \times 9.8 = 245N$$

Por consiguiente el coeficiente de rozamiento estático es:

$$\mu_e = f_{re} / N = 80/245 = 0.33$$

Para encontrar el coeficiente de rozamiento cinético, tenemos como información que el bloque se mueve con velocidad constante aplicándole una fuerza horizontal de 60N. En estas condiciones el sistema se encuentra en equilibrio y por consiguiente la fuerza de rozamiento cinético es igual a 60N.

$$f_{rc} = 60N$$

Además sabemos que la fuerza de rozamiento cinético es proporcional a la reacción normal N de la superficie sobre el bloque:

$$f_{rc} = \mu_c N$$

Donde N tiene el valor de:

$$N = m\ g = 25 \times 9.8 = 245N$$

Por consiguiente el coeficiente de rozamiento cinético es:

$$\mu_c = f_{rc} / N = 60/245 = 0.24$$

Ejemplo 12

En un juego de tejo, se le imprime a un disco una rapidez inicial de 5m/s; el disco recorre una distancia de 8m antes de quedar en reposo. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre la superficie del piso y el disco?

Solución:

Encontremos la aceleración del disco necesaria para que recorra los 8m hasta detenerse:

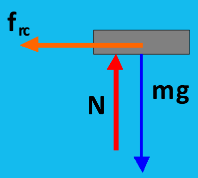
De la cinemática sabemos:

$$v^2 = v^2_0 + 2ad$$

Reemplazando los valores: $v_0 = 5m/s$, $v = 0$, $d = 8m$, tendremos que la aceleración es:

$$a = -1.56m/s^2$$

El signo menos indica que la aceleración es contraria al desplazamiento del disco y por tanto la única fuerza efectiva que actúa sobre el tejo es la fuerza de rozamiento cinético:



De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$f_{rc} = m\ a \qquad (1)$$

Además:

$$f_{rc} = \mu_k\ N \qquad (2)$$

El valor de la reacción normal N es:

$$N = mg \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

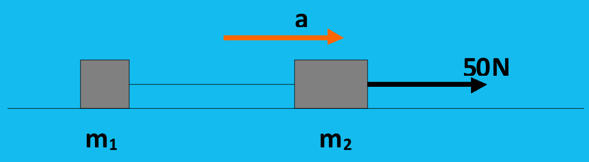
$$\mu_c = a / g$$

Donde obtenemos el valor del coeficiente de rozamiento cinético:

$$\mu_c = 0.16$$

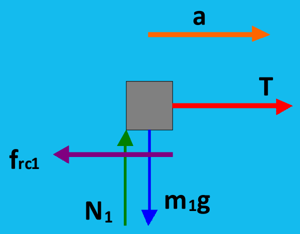
Ejemplo 13

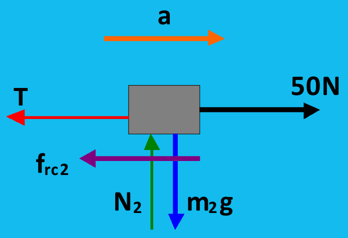
Dos bloques cuyas masas son m_1 = 10 kg y m_2 = 20 kg están unidos mediante una cuerda ligera. Los bloques son arrastrados por una fuerza horizontal constante de 50N y el coeficiente de rozamiento cinético entre cada bloque y la superficie es 0.15. Encontrar la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda.



Solución:

DCL de cada bloque:





Los bloques se mueven aceleradamente a lo largo del eje X. Aplicando la segunda Ley de Newton tendremos:

$$T - f_{rc1} = m_1 a \qquad (1)$$

$$50 - T - f_{rc2} = m_2 a \qquad (2)$$

$$f_{rc1} = \mu\ N_1 \quad \text{y} \quad f_{rc2} = \mu\ N_2 \qquad (3)$$
$$N_1 = m_1 g \quad \text{y} \quad N_2 = m_2\ g \qquad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tendremos:

$$a = \frac{50 - \mu\ (m_1 + m_2).g}{m_1 + m_2} \qquad T = \frac{50.m_1}{m_1 + m_2}$$

Reemplazando los valores dados en el problema:

$$a = 0.197 m/s^2 \qquad T = 16.67N$$

Ejemplo 14

Un bloque de 3Kg parte del reposo desde la parte superior de un plano inclinado 35° y baja la distancia de 2m en 1.5s. Encontrar:

a) La aceleración del bloque.

Considerando que se trata de un movimiento MRUV o con aceleración constante, tenemos:

$$x = v_0\ t + ½\ a\ t^2$$

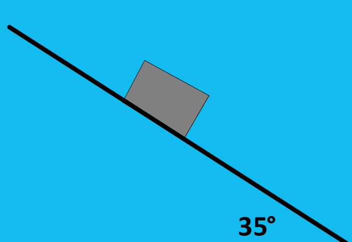
Reemplazando los valores dados:

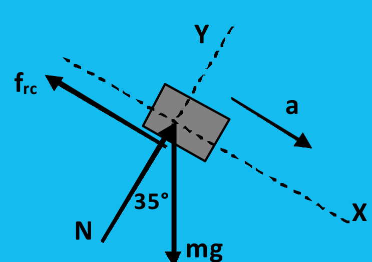
$$2 = 0 + ½\ a\ 1.5^2$$

la aceleración con la que baja el bloque es: $a = 1.78 m/s^2$

b) El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano.

Dibujemos **el DCL del bloque**.





A lo largo del eje Y el sistema está en equilibrio y a lo largo del eje X el movimiento es acelerado con aceleración a = 1.78 m/s^2.

$\Sigma F_{ix} = m\,a$	$mg\,Sen\,\theta - f_{rc} = m\,a$	(1)
$\Sigma F_{iy} = 0$	$N - mg\,Cos\,\theta = 0$	(2)
	$f_r = \mu_c\,N$	(3)

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos el coeficiente de rozamiento cinético:

$$\mu_c = \frac{g.Sen\theta - a}{g.Cos\theta}$$

Reemplazando los valores dados en el problema:

$$\mu_c = 0.48$$

c) El valor de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque.

A partir de las ecuaciones (2) y (3), encontremos la fuerza de rozamiento

$$f_{rc} = \mu_c\ mg\ Cos\theta$$

Reemplazando los valores dados.

$$f_{rc} = 11.56\ N$$

d) La rapidez del bloque después de haber recorrido la distancia de 2 m.

Como se trata de un movimiento con aceleración constante:

$v^2 = v^2_0 + 2ax$ reemplazando los datos $v = 2.67$ m/s

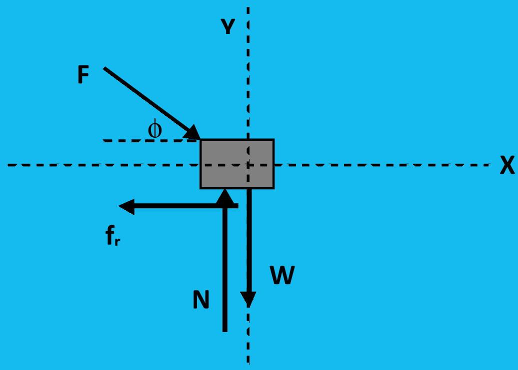
Ejemplo 15

Una canasta de peso W es empujado por una fuerza F sobre un piso horizontal áspero. Si el coeficiente de rozamiento estático es μ y F hace un ángulo ϕ por encima de la horizontal, demostrar que el valor mínimo de F para que la canasta inicie el movimiento está dado por la ecuación:

$$F = \frac{\mu\ .W.Sec\phi}{1-\mu_s.tg\phi}$$

Solución:

DCL de la canasta sobre el piso horizontal áspero:



El valor mínimo de la fuerza F necesario para que la canasta inicie el movimiento existe en el momento en que se rompe el equilibrio. Considerando que el sistema está en equilibrio se debe cumplir con las siguientes condiciones:

$\Sigma F_{ix} = 0$	$F \cos\phi - f_r = 0$	(1)
$\Sigma F_{iy} = 0$	$N - F \operatorname{Sen}\phi - W = 0$	(2)
	$f_r = \mu N$	(3)

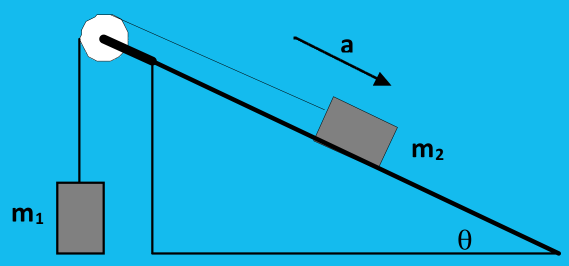
Resolviendo el sistema de tres ecuaciones y despejando el valor de la fuerza F se tiene:

$$F = \frac{\mu W}{Cos\phi - \mu\ .Sen\phi} = \frac{\mu\ .W}{Cos\phi.(1-\mu\ tg\phi)}$$

$$F = \frac{\mu\ .W.Sec\phi}{(1-\mu\ .tg\phi)}$$

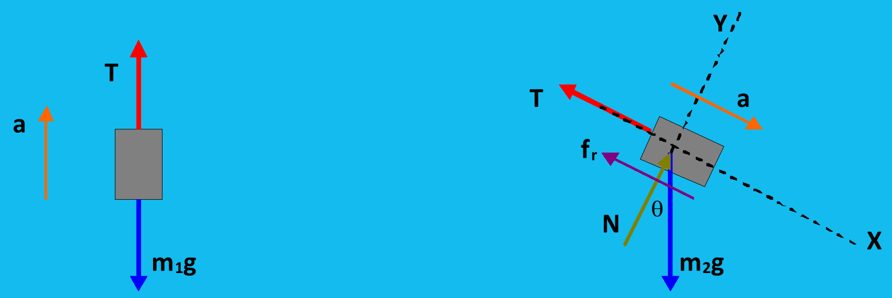
Ejemplo 16

Dos masas están conectadas por medio de una cuerda ligera que pasa sobre una polea lisa, como se ve en la figura. Cuando m_1 = 3Kg, m_2 = 10Kg, θ = 60º y la superficie es rugosa, la masa de 10 Kg baja por el plano con una aceleración de 3 m/s^2. Encontrar:



a) La tensión en la cuerda.

DCL de cada una de las masas:



Aplicando las leyes de Newton a cada una de las masas:

Masa m_1:

$$T - m_1 g = m_1 a \qquad (1)$$

Masa m_2:

$$m_2 g \,\text{Sen}\theta - T - f_r = m_2\, a \qquad (2)$$

$$N - m_2 g \,\text{Cos}\theta = 0 \qquad (3)$$

$$f_r = \mu \,N \qquad (4)$$

Despejando la tensión en la cuerda der la ecuación (1) se tiene:

$$T = m_1(a + g)$$

Reemplazando los datos dados:

$$T = 38.4 \text{ N}$$

b) ***El valor del coeficiente de rozamiento cinético entre la masa de 10 Kg y la superficie.***

$$\mu = \frac{m_2(g.Sen\theta - a) - m_1(a+g)}{m_2 g.Cos\theta}$$

Reemplazando los valores dados en el problema tendremos:

$$\mu = 0.33$$

c) ***Con que aceleración bajaría la masa m_2 si no hay rozamiento.***

En este caso la $f_r = 0$. Combinando las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$a = \left(\frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$

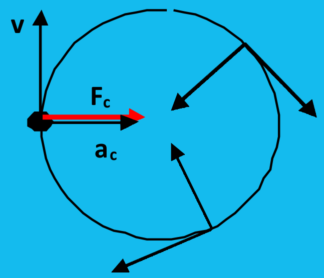
Reemplazando valores se tiene:

$$a = 4.3 \text{ m/s}^2$$

6.3 DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

En el capítulo 5 sección 5.8 se estudio el movimiento circular uniforme de una partícula. En dicha sección se estableció que si una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con rapidez constante, sobre la partícula se ejerce una aceleración perpendicular a la velocidad a la que se denomino aceleración centrípeta y cuya expresión está dada por:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$



La figura muestra que en todo momento la a_c siempre está dirigida hacia el centro de la trayectoria circular.

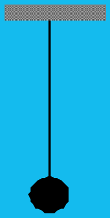
Si la partícula tiene masa m, de acuerdo a la segunda Ley de Newton sobre ella se debe ejercer una fuerza neta a la que se le denomina fuerza centrípeta cuya expresión es.

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

La cual es un vector paralelo a la aceleración como se muestra en la figura y que en todo momento es perpendicular a la velocidad y siempre está dirigida al centro de la trayectoria.. Debemos recordar que estamos analizando el movimiento de una partícula que realiza movimiento circular uniforme MCU.

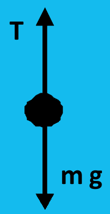
Ejemplo 17

La figura muestra un péndulo simple compuesto por una masa de 200 gr suspendido de una cuerda de 98 cm. Encontrar:



a) **Mientras está suspendido y sin oscilar, que tensión se ejerce en la cuerda.**

DCL de la masa considerando solo la suspensión.



Como el péndulo no está oscilando se encuentra en equilibrio y se cumple:

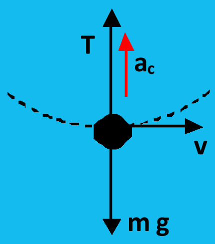
$$\sum F_{yi} = 0 \qquad\qquad T - m\ g = 0$$

De la cual se despeja la tensión y se tiene.

$$T = m\ g = 1.92\ \text{Newton}$$

b) **Si se hace oscilar el péndulo y su velocidad cuando pasa por el punto más bajo de su trayectoria circular es 4.25 m/s, que tensión se ejerce en la cuerda.**

DCL de la masa cuando esta oscilando y pasa por el punto más bajo de su trayectoria circular.



Aplicando la segunda Ley de Newton al DCL se tiene:

$$T - m\ g = m\ a_c$$

Sabiendo que:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

La tensión en la cuerda es:

$$T = m\ (a_c + g)$$

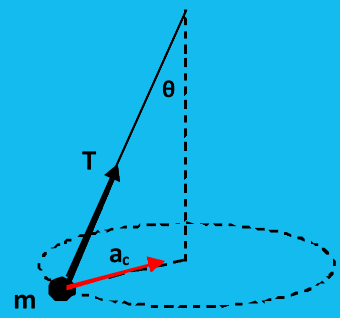
Reemplazando valores nos da

$$T = 5.65 \text{ Newton}$$

Comparando con el resultado anterior se obtiene una aceleración casi tres veces mayor. Esto es debido a la fuerza centrípeta que aparece por la velocidad de la partícula en su rotación circular.

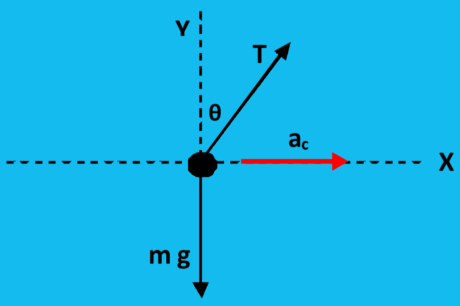
Ejemplo 18

La figura muestra un péndulo cónico compuesto por una masa m, longitud de la cuerda L y ángulo è. El péndulo rota en una trayectoria circular de radio R. Encontrar:



a) El DCL de la masa m.

Consideremos un plano en el cual ubiquemos las fuerzas que actúan sobre la masa m.



b) Escribir las ecuaciones dinámicas necesarias.

En el eje Y el sistema está en equilibrio. En el eje X aparece la aceleración centrípeta debido a la rotación circular.

Eje X: T Cos è – m g = 0 (1)

Eje Y: T Sen è = m a_c (2)

Por geometría el radio R es: R = L Sen è (3)

c) La aceleración centrípeta.

Combinando las ecuaciones (1) y (2).

a_c = g tan è

d) La velocidad de rotación del péndulo en su trayectoria circular.

Combinando las ecuaciones obtenidas se tiene.

$$v = \sqrt{\frac{L\, g\, \sin\theta \tan\theta}{m}}$$

Problema 1

El coeficiente de rozamiento estático entre un bloque de 5 Kg y una superficie horizontal es 0.4. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza horizontal que se puede aplicar al bloque antes de que empiece a resbalar?

Problema 2

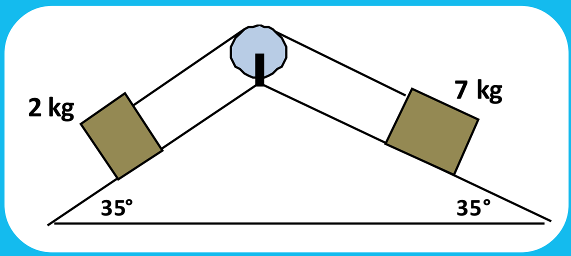
Un automóvil de carreras se acelera uniformemente desde 0 hasta 80 millas/h en 8 segundos. La fuerza externa que acelera al automóvil es la fuerza de rozamiento entre los neumáticos y el piso. Si los neumáticos no resbalan, determinar el coeficiente mínimo de rozamiento entre los neumáticos y el piso.

Problema 3

Un muchacho arrastra su trineo de 60 Newton de peso a una rapidez constante hacia arriba de una colina que tiene una pendiente de 15º, tirando de él con una fuerza de 25 N por medio de una cuerda que está atada al trineo. Si la cuerda tiene una inclinación de 35º respecto a la superficie de la colina, a) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y la nieve?, b) En la cima de la colina él brinca sobre el trineo y se desliza hacia abajo; ¿cuál es su aceleración a lo largo de la pendiente?

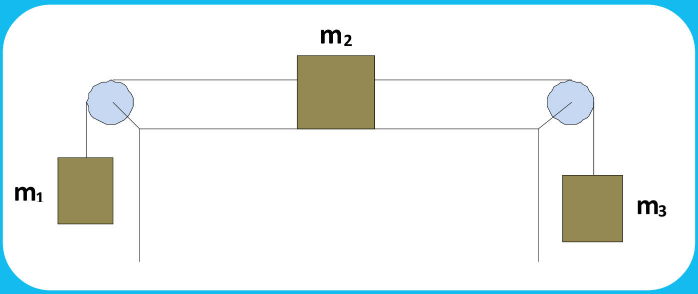
Problema 4

Dos bloques cuyas masas son 2 Kg y 7 Kg están conectados por una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción como se muestra en la figura. Los planos inclinados son lisos. Encontrar: a) la aceleración de cada bloque y b) la tensión en la cuerda.



Problema 5

En la figura se muestra un sistema constituido por tres bloques cuyas masas tiene los valores m_1 = 3 Kg, m_2 = 8 Kg y m_3 = 5 Kg. El bloque m_2 se encuentra sobre una mesa cuya superficie es lisa y está unida a los otros dos bloques mediante cuerdas ligeras que no tienen rozamiento con las poleas. Encontrar:

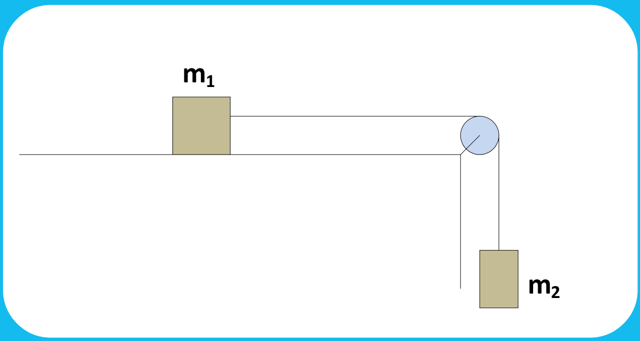


a) La aceleración de los bloques.
b) La tensión en cada una de las cuerdas.

Problema 6

La figura muestra un bloque m_1 de 8.5 kg sobre una superficie rugosa sujeto mediante una cuerda a otro bloque m_2 de 6.2 kg. Si el coeficiente de fricción cinético entre el bloque m_1 y la mesa es 0.2, encontrar:

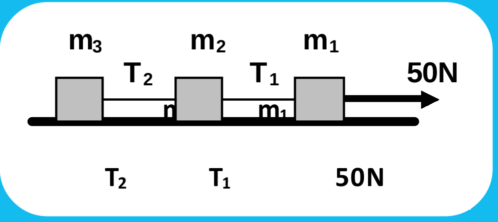
a) La aceleración de los bloques.
b) La tensión en la cuerda



Problema 7

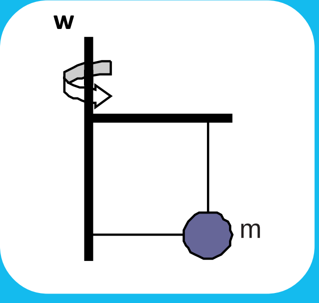
La figura muestra tres bloques de masas m_1 = 4kg, m_2 = 6kg y m_3 = 8Kg, unidos mediante cuerdas, sobre una superficie sin rozamiento. Si sobre el bloque de masa m_1 se aplica una fuerza horizontal de 50N, determinar.

a) La aceleración que adquiere cada bloque.
b) Las tensiones en las cuerdas T_1 y T_2.



Problema 8

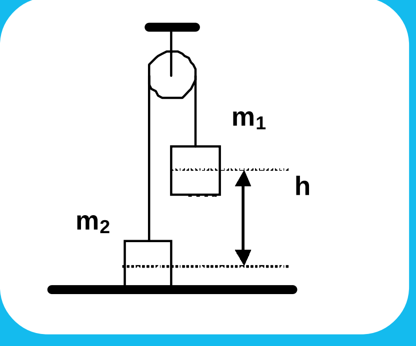
¿Con que rapidez angular w debe girar el eje vertical para que la tensión en la cuerda horizontal de 0,25 m de longitud, sea 2.5 veces la tensión en la cuerda vertical?



Problema 9

La figura muestra dos masas m_1 = 5 kg y m_2 = 2 kg unidas por una cuerda que pasa por una polea lisa y de masa despreciable. Si el sistema empieza a moverse desde el reposo, determine:

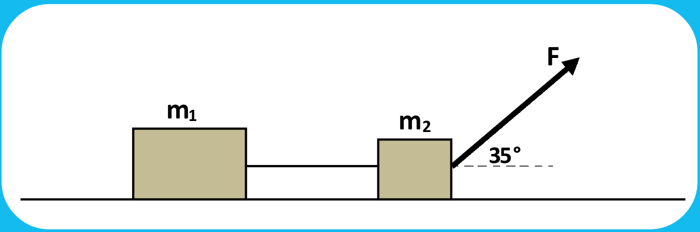
a) La aceleración de las masas m_1 y m_2.
b) La rapidez que tienen las masas cuando se encuentran, si h = 20m.



Problema 10

La figura muestra dos masas sobre una superficie rugosa, m_1 de 20 kg. y m_2 de 15 kg, unidas mediante una cuerda y jaladas con una fuerza F. Las masas se desplazan con una aceleración de 1.8 m/s^2. El coeficiente de rozamiento cinético entre cada una de las masas y la superficie horizontal es 0.23. Encontrar:

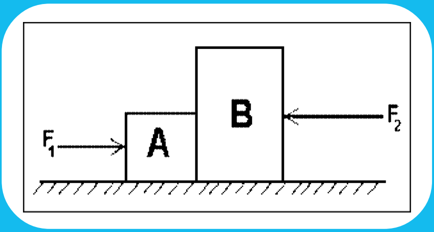
a) Los DCL de cada masa.
b) Las ecuaciones dinámicas para cada masa.
c) La tensión en la cuerda que une las masas.
d) El valor de la fuerza F aplicada.



Problema 11

En la figura se muestran los bloques A y B de masas m_A = 1 kg, m_B = 2 kg que descansan sobre un piso horizontal liso. Si sobre los bloques actúan las fuerzas F_1 = 30 N y F_2 = 5 N. Determinar:

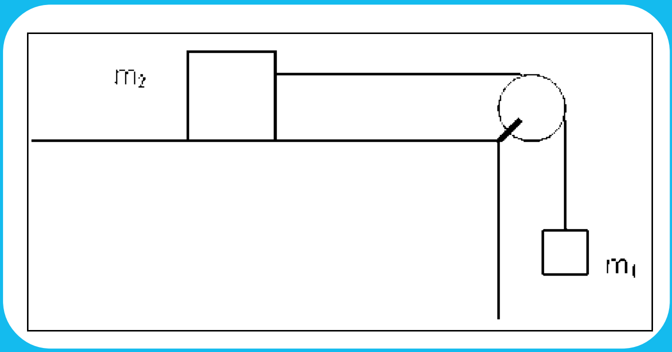
a) La fuerza de contacto entre los bloques A y B.
b) La aceleración de los bloques



Problema 12

El bloque de masa m_1 = 3 Kg desciende con velocidad constante, mientras que m_2 se desplaza sobre la superficie horizontal rugosa (μ_c = 0.75). Considere que la polea es sin fricción y masa despreciable. Hallar:

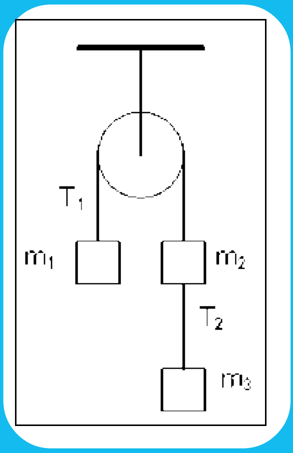
a) El valor de la masa m_2.
b) La tensión en la cuerda.



Problema 13

En el sistema mostrado en la figura la polea tiene masa despreciable. Los valores de las masas mostradas son: m_1 = 10 kg., m_2 = 3 kg. y m_3 = 5 kg. Encontrar:

a) La aceleración con la que se desplazan las masas.
b) El valor de las tensiones T_1 y T_2.



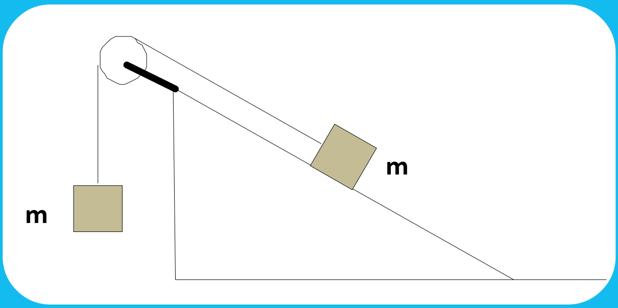
Problema 14

Se coloca un bloque de 4 Kg sobre un plano liso inclinado 38°.

a) Con que aceleración baja el bloque.
b) Si parte del reposo que tiempo le toma recorrer la distancia de 2.5 m
c) Que rapidez tiene el bloque al final de los 2.5 m

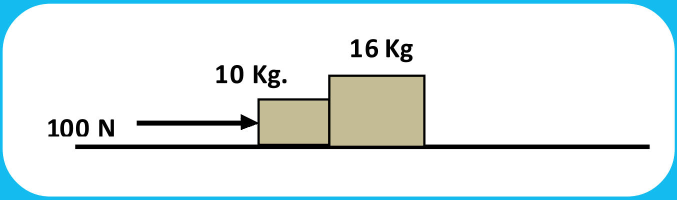
Problema 15

En el sistema mostrado en la figura las masas son iguales a 3 Kg. cada una. Si no existen fuerzas de fricción en la polea y entre el bloque y el plano inclinado, cual es la tensión en la cuerda y con qué aceleración se mueven las masas.



Problema 16

Dos bloques de 10 y 16 Kg. se ponen en contacto uno con otro sobre una superficie lisa como se muestra en la figura. Se aplica sobre el bloque de 10 Kg. una fuerza horizontal de 100 Newton. Cuál es la aceleración de los bloques y que fuerza ejerce el bloque de 16 Kg. sobre el de 10 Kg.



Problema 17

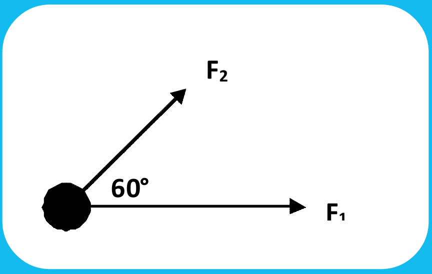
Resolver el problema 15 considerando que entre el bloque y la superficie inclinada el coeficiente de rozamiento cinético 0.25.

Problema 18

Resolver el problema 16 si entre los bloques y la superficie horizontal el coeficiente de rozamiento cinético es 0.25.

Problema 19

La figura muestra una partícula de 5 kg sobre la que se aplican dos fuerzas F_1 = 20 N y F_2 = 15 N. Hallar el vector aceleración y el vector fuerza resultante aplicado sobre la partícula.



Problema 20

A un bloque de 1 kg se le impulsa con una velocidad inicial de 5 m/s hacia arriba de un plano inclinado que forma ángulo de 20° con la horizontal.

a) Si la superficie es lisa, hasta qué altura respecto de la horizontal llega el bloque antes de detenerse.
b) Si la superficie es rugosa y el coeficientes 0.25, hasta que altura respecto de la horizontal llega el bloque antes de detenerse.

Capítulo VII

TRABAJO Y ENERGÍA

INTRODUCCIÓN

En nuestra vida diaria el término trabajo y energía tienen un significado diferente del que se da y define en física. Es común que nosotros denominemos como trabajo a la tarea que realizamos la cual puede ser física, caminar, levantar pesas, subir escaleras, realizar tareas manuales, tareas intelectuales etc. De igual manera hablamos de sentirnos con suficiente energía para trabajar o poca energía para realizar tareas.

El término energía tiene diversas acepciones y definiciones, relacionadas con la idea de una capacidad para obrar, transformar o poner en movimiento. En física energía se define como la capacidad para realizar un trabajo. La energía es una magnitud física escalar que se presenta bajo diversas formas, está involucrada en todos los procesos de cambio de estado físico, se transforma y se transmite, depende del sistema de referencia. Por lo tanto todo cuerpo es capaz de poseer energía, esto gracias a su movimiento, a su composición química, a su posición, a su temperatura a su masa y a algunas otras propiedades. En las diversas disciplinas de la física y la ciencia se dan varias definiciones de energía, todas ellas siempre relacionadas con el concepto de trabajo.

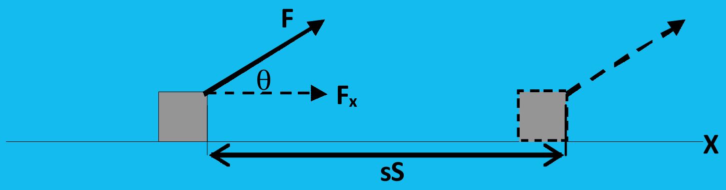
En nuestro curso de mecánica hablaremos solo de las energías que están involucradas con el movimiento, posición en un campo gravitatorio y la energía que almacena un resorte.

En física el trabajo es definido como el realizado por una fuerza o muchas fuerzas sobre un cuerpo al trasladarlo de un lugar a otro. Es una magnitud física escalar y sus unidades en el SI es el joule. Para comprender la definición que se da de trabajo consideremos primero el que realiza una fuerza constante sobre un cuerpo o partícula para trasladarlo a lo largo de una línea recta.

Posteriormente encontraremos la relación entre el trabajo y la energía.

7.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE.

Consideremos un objeto o una partícula que se desplaza a lo largo de una línea recta, que coincide con el eje X, debido a la acción de una fuerza constante **F** como se muestra en la figura:



La fuerza **F** aplicada sobre la partícula se puede descomponer en una componente horizontal F_x y en una componente vertical F_y. La componente responsable de que la partícula se mueva a lo largo del eje X es F_x dado que no hay movimiento vertical. El valor de la componente horizontal de la fuerza es:

$$F_x = F \cos\theta$$

Se define el trabajo realizado por la fuerza constante F como el producto de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento por el valor del desplazamiento s

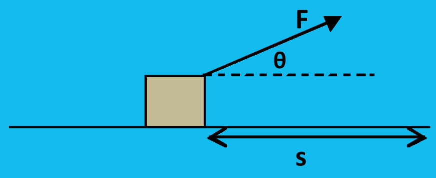
$$W = F_x\, s$$

$$W = (F \cos\theta)\, s \qquad (1)$$

En la ecuación (1) se observa que el trabajo es una magnitud física escalar que depende del modulo de la fuerza F, el coseno del ángulo que hay entre la fuerza y el desplazamiento y la distancia recorrida s. El trabajo es una cantidad positiva, negativa o nula.

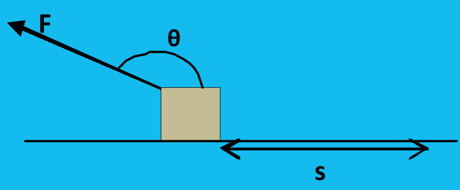
- **Trabajo positivo:**

Cuando el ángulo θ es menor de 90° el W es positivo.



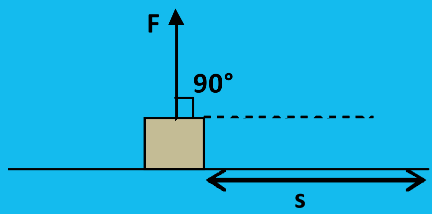
- **Trabajo negativo:**

Cuan el ángulo θ es mayor de 90° el W es negativo. En este caso la partícula se desplaza en sentido contrario a la fuerza aplicada como se muestra en la figura.



- **Trabajo cero o nulo:**

Cuando el ángulo θ es 90° el W es cero. La fuerza F no realiza trabajo a pesar que la partícula se está moviendo. Se observa que la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares.



La ecuación (1) permite hallar el trabajo realizado por una fuerza constante cuando la partícula se desplaza a lo largo de una línea recta. Pero podemos encontrar otra expresión para el trabajo teniendo en cuenta que tanto la fuerza F como el desplazamiento s son magnitudes vectoriales.

Si se toma en cuenta que la fuerza y el desplazamiento son magnitudes físicas vectoriales, el trabajo realizado por una fuerza constante puede expresarse como un producto escalar:

$$\mathbf{W} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{s}} \tag{2}$$

UNIDADES DEL TRABAJO

Sus unidades dependen del sistema de unidades en el cual están expresados la fuerza F y el desplazamiento s:

Sistema Internacional S.I.

Joule (J) = Newton x metro = N.m

Sistema CGS.

Ergio (erg) = dina x centímetro = dina.cm

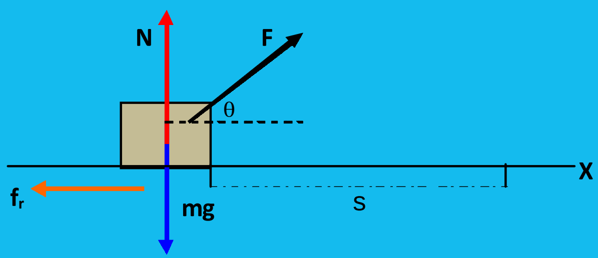
Sistema Ingles

Libra. pie = pie.x libra (ft.lb)

Ejemplo 1.

Consideremos un cuerpo de masa m desplazándose la distancia s sobre una superficie horizontal rugosa a lo largo del eje X.

a) Mostrar en el DCL todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa m.



b) Hallar el trabajo realizado por cada una de las fuerzas al desplazarse el cuerpo la distancia s.

El DCL muestra que sobre el cuerpo actúan varias fuerzas: La fuerza F, la reacción normal de la superficie sobre el cuerpo N, su peso mg y la fuerza de rozamiento f_r.

Durante el desplazamiento s cada una de las fuerzas es constante, por tanto el trabajo realizado por ellas es:

La fuerza F tiene dos componentes, una componente paralela al eje X ($F\cos\theta$) y otra perpendicular ($F\,\mathrm{Sen}\,\theta$). La componente paralela realiza el trabajo W_F igual a:

$$W_F = Fs \cos \theta$$

La componente perpendicular no realiza trabajo.

El trabajo realizado por la reacción normal N es W_N:

$W_N = 0$ por ser perpendicular al desplazamiento

El trabajo realizado por el peso es W_{mg}:

$W_{mg} = 0$ por ser perpendicular al desplazamiento

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento $\mathbf{f_r}$ es W_{fr}:

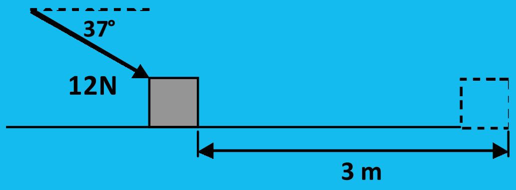
$W_{fr} = - f_r\, s$ la f_r tiene sentido contrario al desplazamiento

Conocido el trabajo realizado por cada una de las fuerzas cuando el cuerpo se ha desplazado la distancia s, el trabajo total o el trabajo neto realizado sobre el cuerpo debe ser la suma de todos los trabajos realizados:

$$W_n = W_F + W_N + W_{mg} + W_{fr}$$
$$W_n = Fs \cos \theta - f_r\, s$$

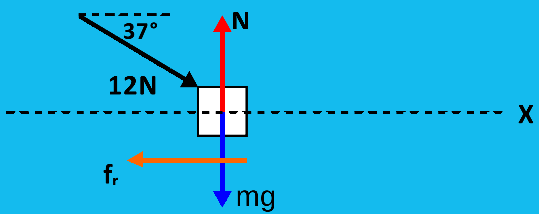
Ejemplo 2

Hallar el trabajo neto que se realiza sobre un cuerpo de 4 Kg de masa, que es empujado sobre una superficie rugosa la distancia de 3 m, por una fuerza constante de 12N y que hace ángulo de 37° con la horizontal. El coeficiente cinético de rozamiento entre el cuerpo y la superficie es 0.16



Solución:

DCL del cuerpo



El DCL muestra todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Para hallar el trabajo neto debemos encontrar el trabajo realizado por cada una de las fuerzas independientemente.

En el eje X el movimiento es acelerado. Se aplica la segunda Ley de Newton:

$$12 \text{ Cos } 37° - f_r = m\ a_x \qquad (1)$$

En el eje Y el desplazamiento es cero. El sistema está en equilibrio:

$$N - mg - 12 \text{ Sen } 37° = 0 \qquad (2)$$

$$f_r = \mu_c N \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema de tres ecuaciones tendremos:

$N = 46.4$ Newt, $f_r = 7.42$ Newt, $mg = 38.2$ Newt , $a_x = 0.55\ m/s^2$

El trabajo realizado sobre el cuerpo por cada una de las fuerzas es:

Trabajo realizado por la fuerza F para recorrer la distancia de 3 m es:

$$W_F = 12x3xCos\ 37° = 28.8\ J$$

Trabajo realizado por la fuerza de rozamiento:

$$W_{fr} = -\ 7.42x3 = -\ 22.3\ J$$

El trabajo es negativo porque la fuerza está en sentido contrario al desplazamiento.

El trabajo realizado por las demás fuerzas es nulo o cero, porque todas ellas son perpendiculares al desplazamiento:

$$W_N = 0\ J$$

$$W_{mg} = 0\ J$$

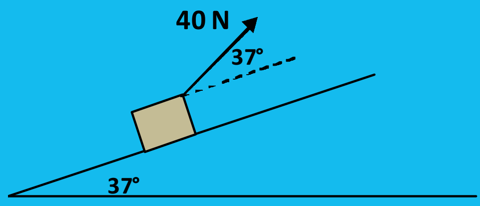
El trabajo total o trabajo neto realizado por todas las fuerzas sobre el cuerpo para desplazarlo 3 metros es:

$$W_n = W_F + W_{fr} + W_N + W_{mg}$$

$$W_n = 28.8 - 22.3 = 6.5\ J$$

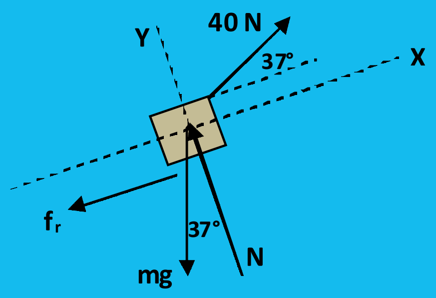
Ejemplo 3

La figura muestra un bloque de 4 kg jalado sobre la superficie de un plano inclinado por una fuerza de 40 Newton la distancia de 2 m. La superficie es rugosa y el coeficiente de rozamiento cinético es 0.2. Hallar el trabajo total realizado sobre el bloque por todas las fuerzas aplicadas.



Solución.

Primero hagamos el DCL del bloque para conocer todas las fuerzas que actúan sobre él.



Hallemos el valor de cada una de las fuerzas aplicando las leyes de Newton.

Eje Y: $N + 40 \text{ Sen } 37° - m\, g \text{ Cos } 37° = 0$

$N = 7.23$ Newton $\qquad f_r = \mu\, N = 1.45$ Newton

Trabajo realizado sobre el bloque por cada una de las fuerzas al desplazarse 2 metros:

$W_{40} = (40 \text{ Cos } 37°)\ 2 = 63.89$ J

$W_N = 0$ J

$W_{mg} = -\ (39.2 \text{ Sen } 37°)\ 2 = -\ 47.18$ J

$W_{fr} = -\ 1.45x2 = -\ 2.90$ J

El trabajo total o trabajo neto es la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas:

$$W_n = 13.81 \text{ J}$$

Ejemplo 4

a) En la figura, que trabajo realiza el hombre si jala la caja 10 metros.

El hombre ejerce una fuerza de 450 Newton para jalar la caja. El movimiento es horizontal, por consiguiente la componente de la fuerza en esa dirección es.

$$F_x = 480 \text{ Cos } 38° = 378.25 \text{ Newton}$$

El trabajo realizado para jalar la caja 10 metros es:

$$W = 3782.5 \text{ J}$$

b) Que trabajo hace la fuerza de rozamiento.

La fuerza de rozamiento es de 125 Newton y el trabajo debido a la fuerza de rozamiento es.

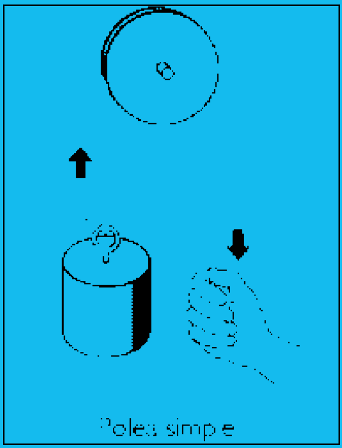
$$W = - 1250 \text{ J}$$

c) El trabajo total o neto sobre la caja.

$$W_{neto} = 2532.5 \text{ J}$$

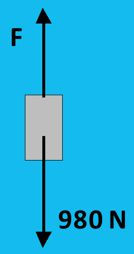
Ejemplo 5

La figura muestra un bloque de 100 kg unido a una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento. La mano de una persona sujeta la cuerda y ejerce una fuerza.



a) Que fuerza ejerce la mano de la persona para mantener el bloque en equilibrio.

Como esta en equilibrio el bloque, un DCL nos muestra las fuerzas



Para que el sistema este en equilibrio se debe cumplir:

$$F - 980 = 0$$

Por consiguiente la fuerza que ejerce la mano para mantener el equilibrio es 980 Newton.

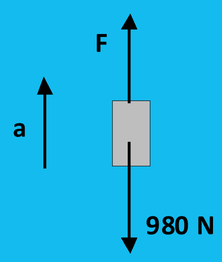
b) Si la mano jala la cuerda hacia abajo a velocidad constante 85 cm, que trabajo realizo la persona.

De acuerdo a la primera ley de Newton para que se mueva a velocidad constante la fuerza debe ser la misma que mantiene el equilibrio, es decir 980 Newton.

$$W = 980 \times 0.85 = 833 \text{ J}$$

c) Si con la mano se baja la cuerda con una aceleración de 0.25 m/s², que trabajo hace la persona al recorrer 85 cm.

Al bajar con la aceleración de 0.25 m/s^2, el bloque está subiendo con la misma aceleración. Un DCL me indica con que fuerza sube el bloque.



Aplicando la segunda Ley de Newton

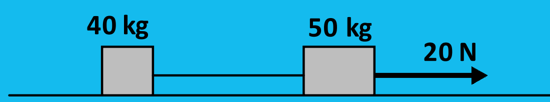
$$F - 980 = 100 \times 0.25$$
$$F = 1005 \text{ Newton}$$

El trabajo realizado por dicha fuerza es:

$$W = 1005 \times 0.85 = 854.25 \text{ J}$$

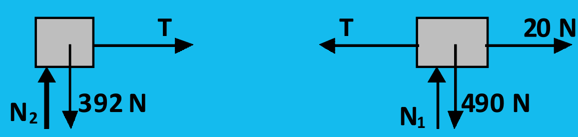
Ejemplo 6

La figura muestra dos cajas de 40 kg y 50 kg unidas mediante una cuerda sobre una superficie lisa. Sobre la caja de 50 kg se aplica una fuerza horizontal de 20 Newton que jala a las cajas la distancia de 10 m. Que trabajo total se realiza para jalar ambas cajas.



Solución:

La fuerza horizontal de 20 Newton jala simultáneamente a ambas cajas. Encontremos el trabajo realizado para mover 10 metros ambas cajas, para ello hacemos un DCL de cada caja para conocer las fuerzas involucradas en el movimiento.



Aplicando las Leyes de Newton tenemos:

Caja 1: $20 - T = 50\ a$

Caja 2: $T = 40\ a$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones se tiene el valor de la aceleración y la tensión en la cuerda:

$a = 2/9\ m/s^2$ $\qquad$ $T = 0.89$ Newton

Trabajo realizado sobre la caja 1:

$W_{20} = 200$ J $\qquad$ $W_T = -8.9$ J $\qquad$ $W_{N1} = 0$ J $\qquad$ $W_{490} = 0$ J

Trabajo realizado sobre la caja 2:

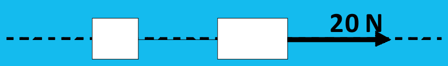
$W_T = 8.9$ J $\qquad$ $W_{392} = 0$ J $\qquad$ $W_{N2} = 0$ J

El trabajo total o trabajo neto es la suma de todos los trabajos:

$$W_n = 200 \text{ J}$$

Otra manera de enfocar la solución:

Hagamos el DCL considerando solo las fuerzas que contribuyen al desplazamiento horizontal y considerando a los dos bloques como un solo sistema.

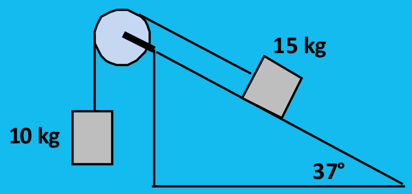


La única fuerza efectiva que resulta es la de 20 Newton. El trabajo para mover a los dos bloques la distancia de 10 m es:

$$W_n = 200 \text{ J}$$

Ejemplo 7

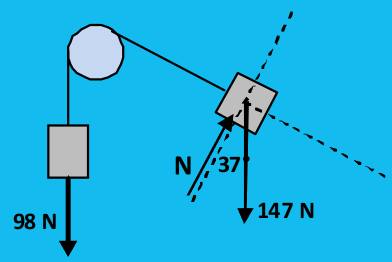
La figura muestra a dos bloques, uno de 10 kg y el otro 15 kg sobre una superficie inclinada lisa. Que trabajo se realiza sobre los bloques cuando se trasladan 2 m.



Solución:

La fuerza paralela a la superficie ejercida por el bloque de 15 kg es menor que la fuerza que ejerce el bloque de 10 kg. Por consiguiente el bloque de 10 kg baja arrastrando al de 15 kg.

El DCL que considera solo las componentes de las fuerzas paralelas al desplazamiento de ambos bloques es.



La fuerza efectiva o fuerza neta en la dirección del movimiento es.

$$F_n = 98 - 147 \text{ Sen } 37° = 9.53 \text{ Newton}$$

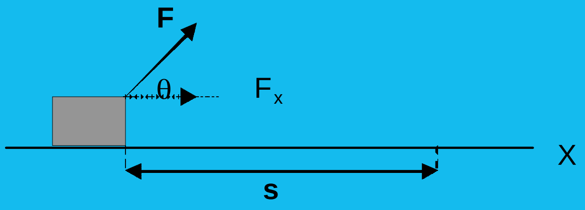
El trabajo neto para trasladar los dos bloques la distancia de 2 m es:

$$W_n = 9.53 \times 2 = 19.06 \text{ J.}$$

7.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUERZA VERSUS EL DESPLAZAMIENTO.

Como hemos visto en capítulos anteriores la representación grafica de las magnitudes físicas en un SCC sirven para poder realizar interpretaciones o encontrar relaciones entre las variables graficadas. En este caso realizaremos graficos en las que representaremos en el plano a las variables fuerza versus el desplazamiento, comenzando con una fuerza constante.

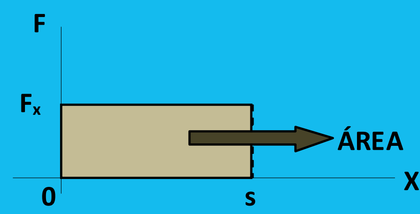
Cuando una fuerza constante **F** es aplicada sobre un objeto que se desplaza a lo largo del eje X, podemos realizar un gráfico de dicha fuerza en función del desplazamiento x entre las posiciones x = 0 y x = s:



Como se muestra en la figura la componente x de la fuerza constante **F** que sigue el sentido del desplazamiento es:

$$F_x = F \cos\theta$$

Representada esta fuerza en función de x tendremos el siguiente grafico:



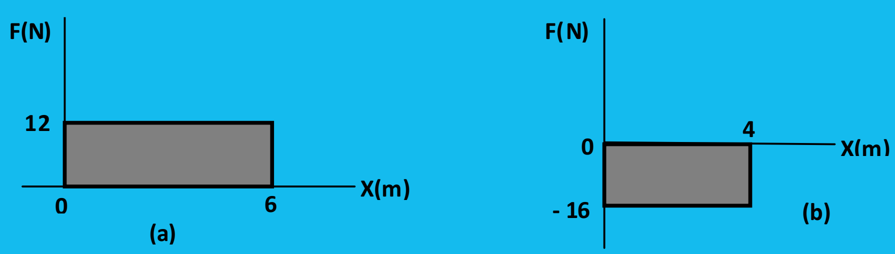
El grafico muestra que la fuerza F_x a lo largo del eje X es constante y que entre las posiciones x = 0 y x = s el área subtendida bajo la recta horizontal, representada en el gráfico por el área sombreada es igual al área del rectángulo:

$$\text{Area} = F_x\, s = (F \cos\theta)\, s$$

Valor que representa el trabajo realizado por la fuerza F al desplazar el cuerpo la distancia s, ecuación (1) de la sección 7.1.

El resultado obtenido nos permite expresar que el área bajo la curva en un **gráfico fuerza versus desplazamiento** representa el **trabajo realizado por dicha fuerza**.

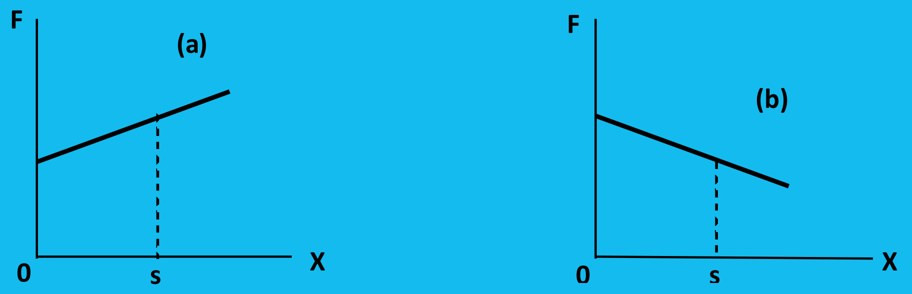
En los gráficos mostrados a continuación podemos encontrar directamente el trabajo:



En el gráfico (a) el trabajo realizado por la fuerza constante de 12 N es 72 J y en el gráfico (b) el trabajo realizado por la fuerza constante de – 16 N es de – 64 J.

En estas representaciones gráficas podemos observar que las áreas halladas en dichos graficos representan el trabajo realizado por la fuerza y solo podemos hallarlas cuando la fuerza aplicada es constante. ¿Cómo podríamos encontrar el trabajo realizado por una fuerza variable?

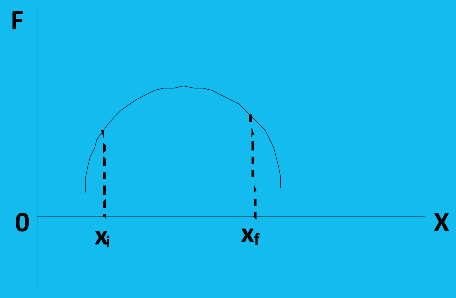
Para hallar el trabajo realizado por una fuerza variable debemos seguir el mismo procedimiento, es decir hallar el área en dichos graficos. A continuación se muestran dos gráficos en el que la fuerza aplicada sobre un objeto que se desplaza a lo largo del eje X es variable.



En el gráfico (a) la fuerza varia linealmente, aumentando uniformemente conforme aumenta el desplazamiento a lo largo del eje X. El trabajo realizado por dicha fuerza variable será el área comprendida bajo la recta entre 0 y s, puede ser hallada fácilmente por geometría.

En el gráfico (b) la fuerza también varia linealmente, disminuyendo uniformemente conforme aumenta X. De la misma manera que en (a) el trabajo realizado por dicha fuerza variable será el área comprendida bajo la recta entre 0 y s.

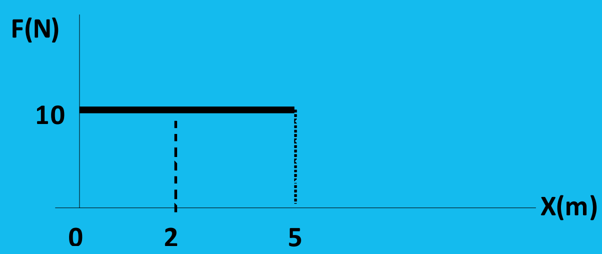
En el tercer grafico mostrado a continuación la fuerza también varia conforme el desplazamiento a lo largo del eje X aumenta, pero su variación ya no es lineal.



En este tercer grafico el trabajo realizado por dicha fuerza deberá corresponder al área debajo de la curva entre las posiciones x $_i$ y x $_f$. En estos casos para calcular dicha área hay que realizar un procedimiento de integración que escapa a los alcances de este curso.

Ejemplo 8

Hallar el trabajo realizado por la fuerza constante a partir del gráfico mostrado.



Solución:

a) El trabajo realizado por la fuerza constante de 10N al trasladar el cuerpo la distancia de 5m a partir de x = 0 hasta x = 5m es de 50 J.

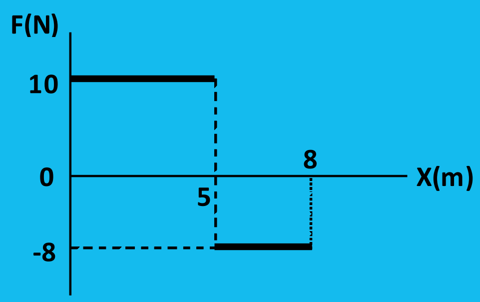
Área = 5x10 Nm W = 50 J

b) El trabajo realizado por la fuerza constante de 10N al trasladarse el cuerpo desde x = 2 hasta x = 5m es:

Área = 50 – 20 = 30 Nm W = 30 J

Ejemplo 9

Encontrar el trabajo realizado por las fuerzas constantes aplicadas sobre un cuerpo a partir del gráfico mostrado.



Solución:

a) Para el espacio recorrido entre x = 0 y x = 5m, el trabajo es:

$$W_1 = 50 \text{ J}$$

b) Para el espacio recorrido entre x = 5 y x = 8m, el trabajo es:

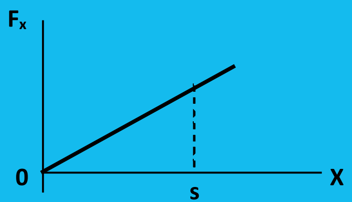
$$W_2 = -24 \text{ J}$$

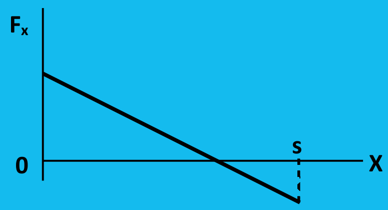
c) El trabajo total o neto entre x = 0 y x = 8m es:

$$W_n = W_1 + W_2 = 50 - 24 = 26 \text{ J}$$

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE.

Solo consideraremos las representaciones graficas en las que las fuerzas variables cambian linealmente con el desplazamiento. Los gráficos mostrados a continuación, como se ha mostrado anteriormente, representan la relación **fuerza versus desplazamiento** cuando la fuerza variable es aplicada en la dirección del eje X

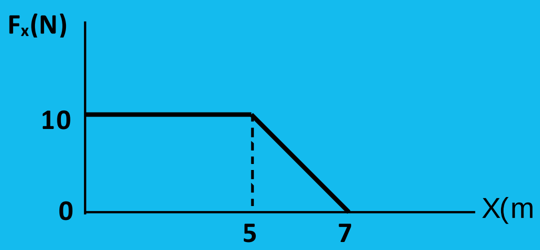




En ambos gráficos el trabajo realizado por la fuerza variable en determinado desplazamiento s se encuentra calculando el área que subtiende la recta.

Ejemplo 10

La figura muestra la forma como varia la fuerza que se aplica sobre un objeto que se desplaza a lo largo del eje X.



Solución:

a) Hallar el trabajo realizado por la fuerza constante entre x = 0 y x = 5m.

$$W_1 = 10x5 = 50 \text{ J}$$

b) Hallar el trabajo realizado por la fuerza variable entre x = 5 y x = 7m

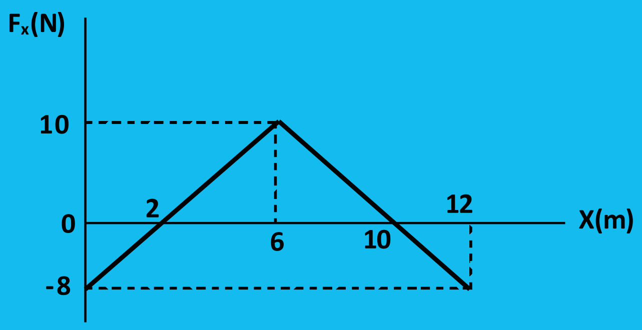
$$W_2 = ½ (10x2) = 10 \text{ J}$$

c) Hallar el trabajo total o neto realizado por la fuerza entre x = 0 y x = 7 m.

$$W_n = W_1 + W_2 = 50 + 10 = 60 \text{ J}$$

Ejemplo 11

La figura muestra la forma en que varia la fuerza que se aplica sobre un objeto que se desplaza sobre el eje X.



Encontrar:

a) El trabajo realizado por la fuerza entre x = 0 y x = 10m

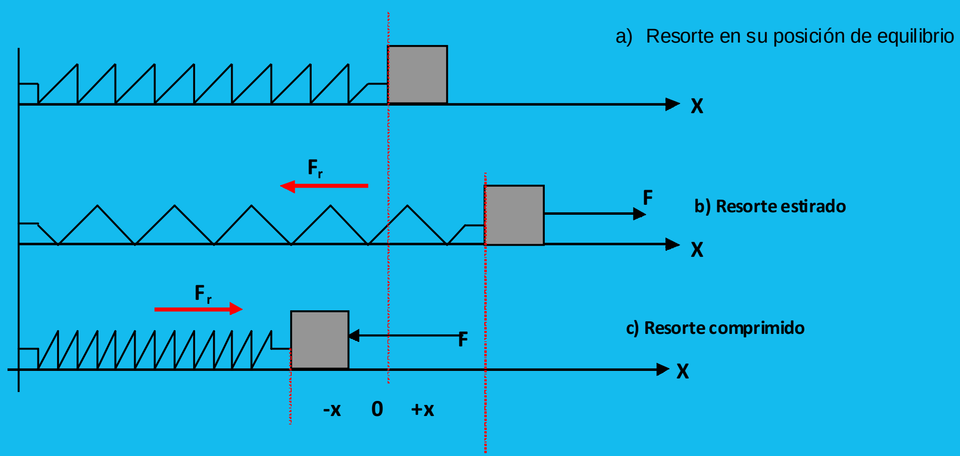
$$W = -\tfrac{1}{2}(8x2) + \tfrac{1}{2}(10x8) = 32\ J$$

b) El trabajo total o neto realizado por la fuerza entre x = 0 y x = 12 m.

$$W_n = 24\ J$$

7.3 LA FUERZA DE UN RESORTE

Un resorte es un sistema que se caracteriza por que ejerce una fuerza cuando se le comprime o se le estira a partir de su posición de equilibrio. La fuerza que ejerce el resorte no es constante sino que depende de la longitud que se ha estirado o comprimido.



En la figura hemos considerado un resorte sobre una superficie horizontal lisa. Un extremo del resorte está sujeto a una pared y el otro a un bloque sobre el cual vamos aplicar una fuerza externa **F**. El cero 0 corresponde al resorte en su posición de equilibrio, es decir no está estirado ni comprimido por que la fuerza externa **F** es nula.

Si al bloque le aplicamos una fuerza una fuerza **F** hacia la derecha, el resorte se estira una distancia x, en ese momento el resorte ejerce una fuerza F_r en sentido contrario. Conforme aumentamos la fuerza **F**, x crece y mayor es la fuerza F_r que ejerce el resorte. Como podernos observar el sentido de la fuerza F_r que ejerce el resorte es negativo para valores positivos de x.

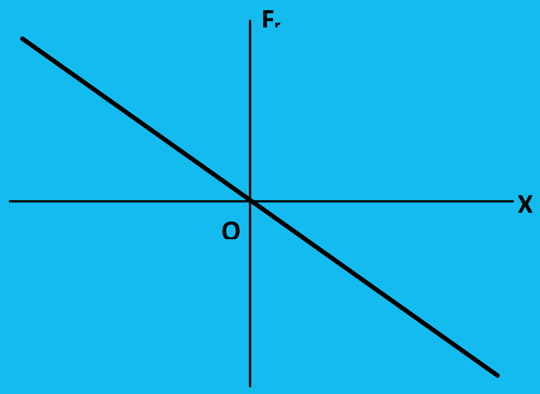
Si ahora ejercemos una fuerza **F** hacia la izquierda sobre el bloque, el resorte se comprime una distancia x (se toma negativa por que el cero corresponde a la posición de equilibrio), en ese momento el resorte ejerce una fuerza F_r en sentido contrario. Conforme se incrementa la fuerza **F**, x crece y mayor es la fuerza F_r que ejerce el resorte (La F_r es positiva para valores negativos de x).

Si en el laboratorio realizamos un experimento midiendo la fuerza que ejerce el resorte F_r en función de la distancia x que se estira o comprime, podemos obtener una tabla de datos cuyo contenido es aproximadamente la siguiente.

F_r	-	-	-	0	+	+	+
x	+	+	+	0	-	-	-

Los signos en el F_r indican el sentido de la fuerza del resorte y los signos en x si el resorte esta comprimido o estirado. Con esta información podemos realizar un grafico de la F_r versus x y los graficos pueden ser diversos, pero todos ellos pasan por x = 0 como indica la tabla de valores.

Si el grafico resulta una línea recta que pasa por el origen, como el que se muestra en la figura, se denomina al resorte ideal y obedece la ley de Hooke.



El análisis del grafico obtenido podemos concluir con las siguientes observaciones:

1. La representación grafica corresponde a una línea recta que pasa por el origen.
2. Si el resorte es ideal, la fuerza que ejerce el resorte es directamente proporcional a x.
3. La ecuación de la línea recta mostrada en el grafico tiene la forma:

   $$F_r = m\ x$$

   Donde m es la pendiente y es negativa.
4. La pendiente m se escribe en el caso del resorte ideal como m = - K, donde K se denomina la constante elástica del resorte y sus unidades en el SI son N/m.

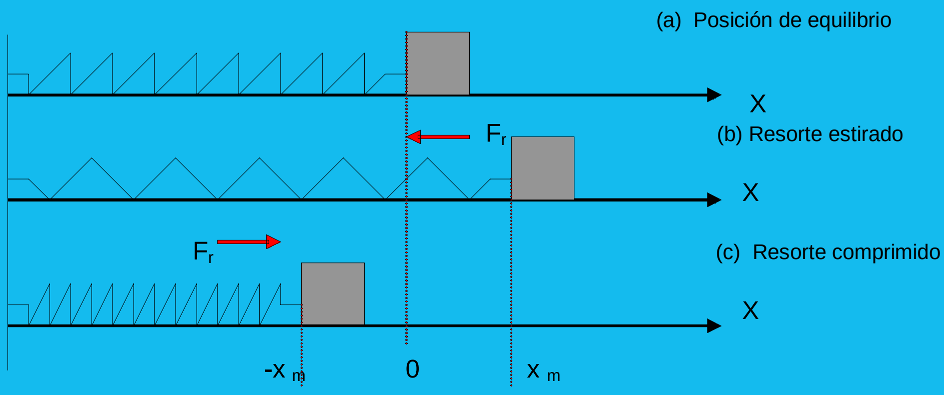
Dentro de ciertos límites la fuerza variable que ejerce el resorte es lineal y puede demostrarse experimentalmente que dicha fuerza puede expresarse mediante la ecuación, denominada Ley de Hooke:

$$F_r = - K x \qquad (1)$$

El signo negativo indica que la fuerza ejercida por el resorte siempre se opone a la fuerza externa que se le aplica.

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE UN RESORTE.

La figura muestra un resorte sujeto a una masa sobre una superficie horizontal libre de fricción:



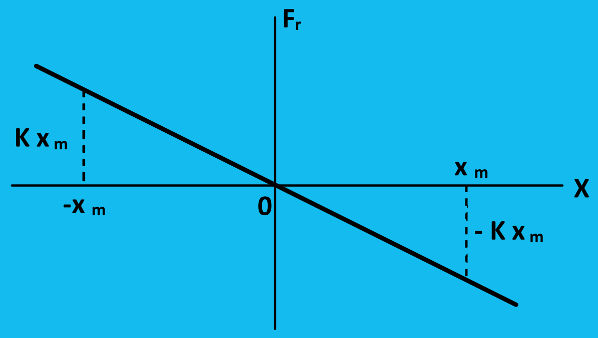
En la figura (a) el resorte está en su **posición de equilibrio**, por consiguiente no está estirado ni comprimido. En esta condición el resorte no ejerce ninguna fuerza.

Si el resorte se comprime junto con la masa, por acción de una fuerza externa no mostrada en la figura (c), hasta la posición $-x_m$, este ejerce una fuerza F_r hacia la derecha empujando a la masa en la dirección positiva del eje X, el valor de la fuerza que ejerce el resorte es dado por la ecuación (1).

Si se deja libre el bloque actúa la fuerza que ejerce el resorte F_r y empuja hacia la derecha al bloque. La fuerza que ejerce el resorte realiza un trabajo entre $-x_m$ y 0.

Cuando la masa y el resorte pasan a la derecha de la posición de equilibrio 0 la dirección de la fuerza que ejerce el resorte cambia de dirección, figura (b), pero el movimiento de la masa sigue en la dirección positiva del eje X, hasta que el bloque se detiene, en ese tramo la fuerza que ejerce el resorte realiza un trabajo entre 0 y x_m.

Podemos hallar el trabajo realizado por el resorte para trasladar la masa entre $-x_m$ y 0 así como el trabajo realizado para trasladarla entre 0 y x_m por el método gráfico desarrollado anteriormente. Grafiquemos la ecuación (1) considerando conocida la constante K del resorte.



En el gráfico podemos observar que cuando x es positivo la fuerza que ejerce el resorte es negativa y cuando x es negativa la fuerza es positiva. Considerando el desplazamiento de la masa por la fuerza del resorte en el gráfico (c), la fuerza del resorte y la dirección de desplazamiento de la masa son en un mismo sentido por consiguiente el trabajo que realiza el resorte es positivo y su valor puede ser encontrado en el gráfico calculando el área entre $-x_m$ y 0, el cual nos da:

$$W_1 = ½\ (Kx_m)\ x_m = ½\ K\ x^2_m$$

De la misma manera se puede encontrar a partir del gráfico el trabajo realizado por el resorte entre la posición 0 y x_m, cuando la fuerza del resorte es de sentido contrario al desplazamiento y por consiguiente el trabajo es negativo.

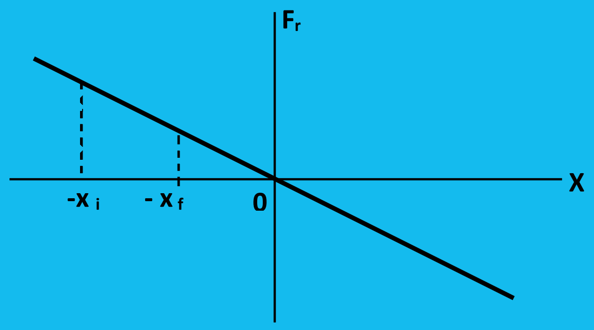
$$W_2 = ½\ (-\ Kx_m)\ x_m = -\ ½\ K\ x^2_m$$

Estos resultados que hemos obtenidos se dan cuando el resorte es ideal. Si la masa sujeta a él se desplaza sobre una superficie horizontal sin rozamiento el sistema masa-resorte debe oscilar horizontalmente entre

– x_m y x_m indefinidamente en el tiempo realizando el resorte un trabajo sobre la masa sujeta a él entre dichas posiciones igual a:

$$W_n = W_1 + W_2 = 0$$

Usando los mismos procedimientos podemos encontrar el trabajo total realizado por un resorte de constante K entre dos posiciones cualesquiera x_i y x_f, para lo cual debemos recurrir nuevamente al gráfico:



$$\boxed{W_r = ½\, K\, x^2_i - ½\, K\, x^2_f} \qquad (2)$$

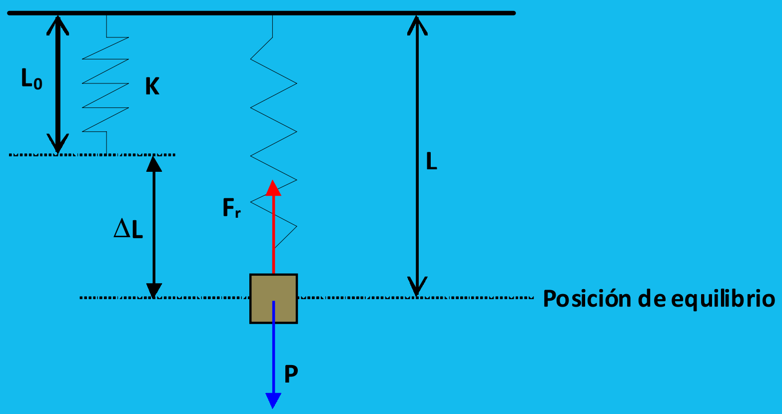
Donde el W_r representa el trabajo realizado por la fuerza del resorte entre las posiciones $-x_i$ y $-x_f$. El primer termino de la ecuación (2) representa el área del triángulo desde – x_i hasta 0 al cual se le resta el área del triángulo desde – x_f hasta 0 para hallar el área subrayada y subtendida entre – x_i y – x_f, área que representa el trabajo realizado por el resorte entre dichas posiciones.

Ejemplo 12

La figura muestra un resorte colgado verticalmente y cuya longitud es L_0. Si del extremo inferior se suspende un peso de masa m, el resorte se estira hasta alcanzar la longitud L manteniéndose en equilibrio. Encontrar a partir de estas condiciones la constante K del resorte.

En la figura se muestra suspendido del resorte el peso de masa m en equilibrio. Podemos ver que el resorte tiene longitud inicial L_0 y cuando se cuelga el peso se estira ÄL hasta alcanzar el equilibrio. Según el DCL las fuerzas que actúan sobre la masa son su peso P y la fuerza que ejerce el resorte $F_{r.}$

$$F_r - P = 0$$



Como la fuerza del resorte $F_r = K\ (\Delta L)$ y el peso $P = m\ g$, reemplazando estos valores en la ecuación de equilibrio:

$$K\ (\Delta L) = mg$$

$$K = mg\ /\ (\Delta L)$$

Teniendo en cuenta que $\Delta L = L - L_0$, el valor de K es:

$$K = mg\ /\ (L - L_0)$$

Consideremos el caso de que $m = 100$ gr, $L_0 = 20$ cm y $L = 26.5$ cm, el valor de la constante del resorte K en N/m será:

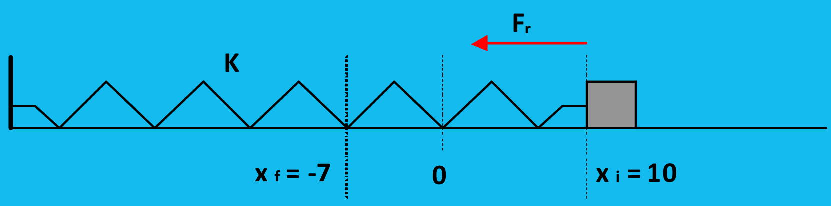
$$K = 100x10^{-3}\ x9.8\ /\ (26.5 - 20)x10^{-2}$$

$$K = 15.1\ N/m$$

Este procedimiento es el que experimentalmente se puede seguir para conocer la constante K de un resorte, siempre y cuando este obedezca la ley de Hooke.

Ejemplo 13

Consideremos el mismo resorte del ejemplo 7 pero ubicado horizontalmente y sujeto a un cuerpo de 100 gr de masa como se muestra en la figura. Entre el cuerpo y la superficie horizontal no existe rozamiento. Si a partir de la posición de equilibrio del resorte x = 0 (ni estirado ni comprimido) se estira junto con la masa hasta x_i = 10 cm y se le suelta, la masa junto con el resorte se desplazaran hacia la izquierda. Cuando la masa pasa por la posición x_f = - 7cm, el resorte ha realizado un trabajo entre x_i y x_f. Cuál es el valor del trabajo realizado por la fuerza del resorte entre las posiciones x_i y x_f.



El trabajo realizado por la fuerza que ejerce el resorte entre una posición x_i y una posición x_f es dado por la expresión:

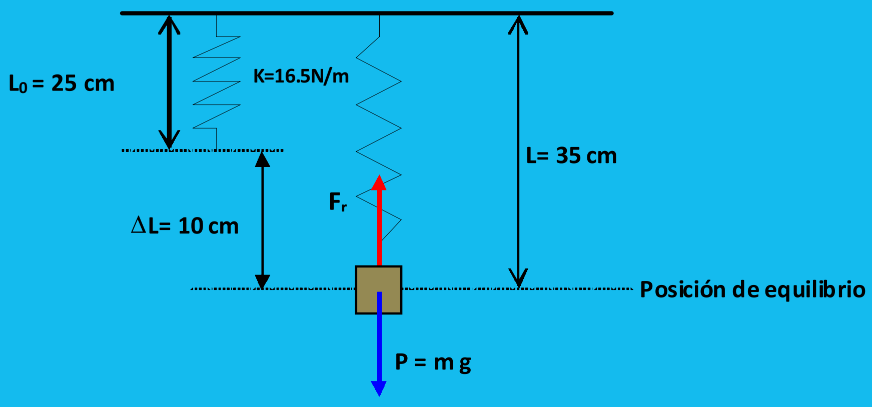
$$W_r = \tfrac{1}{2} K x^2_i - \tfrac{1}{2} K x^2_f$$

Reemplazando los valores dados tendremos:

$$W_r = \tfrac{1}{2} (15.1)x(10x10^{-2})^2 - \tfrac{1}{2} (15.1)x(-7x10^{-2})^2$$
$$W_r = 3.9x10^{-2} \text{ J}$$

Ejemplo 14

La figura muestra un resorte ideal de longitud inicial o natural de 25 cm y constante K = 16.5 N/m, colgado verticalmente. Del extremo inferior se cuelga un bloque y el resorte alcanza una longitud de 35 cm manteniéndose en equilibrio. Encontrar:



a) La masa del bloque.

Como el bloque esta en equilibrio la fuerza que ejerce el resorte debe ser igual al peso.

$$F_r = m\ g$$

K ÄL = m g ⟶ $K\ (L - L_0) = m\ g$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{K\ (L - L_0)}}{\mathbf{g}}$$

Reemplazando los datos dados: K = 16.5 N/m, L = 35 cm, L_0 = 25 cm y g = 9.8 m/s^2

$$m = 168\ gr$$

El bloque suspendido tiene una masa de aproximadamente 168 gr.

b) **Si el bloque se levanta con la mano 7 cm por encima de la posición de equilibrio, que longitud se encuentra estirado el resorte.**

Si levantamos el bloque 8 cm la longitud del resorte es L = 27 cm. El resorte esta estirado a partir de su posición de longitud inicial (27 – 25) cm, es decir ÄL = 2 cm.

c) **Si se retira la mano el bloque cae por acción de la gravedad jalando al resorte. Que longitud se estira el resorte cuando el bloque pasa 6 cm por debajo de la posición de equilibrio.**

Cuando el bloque pasa 6 cm por debajo de la Posición de equilibrio, la longitud que alcanza el resorte es L = 41 cm. El resorte esta estirado a partir de su posición de longitud inicial (41 – 25) cm, es decir ÄL = 16 cm.

d) **Qué cantidad de trabajo realiza la fuerza del resorte cuando cae junto con el bloque desde x_i = 2 cm hasta x_f = 16 cm.**

La ecuación para hallar el trabajo realizado por la fuerza de un resorte es:

$$W_r = ½\ K\ x^2_i - ½\ K\ x^2_f$$

Reemplazando los valores dados se tiene.

$$W_r = -\ 0.208\ J$$

El trabajo realizado es negativo porque el sentido de la fuerza del resorte es hacia arriba mientras que el desplazamiento en la caída es hacia abajo.

e) **Qué cantidad de trabajo realiza la fuerza de gravedad cuando el bloque baja desde x_i hasta x_f.**

Cuando el resorte se mueve entre las posiciones indicadas, el bloque también lo hace debido a la fuerza constante de la gravedad o su peso. La distancia que recorre el bloque es de 14 cm y el desplazamiento y el peso tienen el mismo sentido. El trabajo realizado por una fuerza constante es:

$$W_{mg} = m\ g\ h$$

Reemplazando los valores dados se tiene.

$$W_m = 0.230 \text{ J}$$

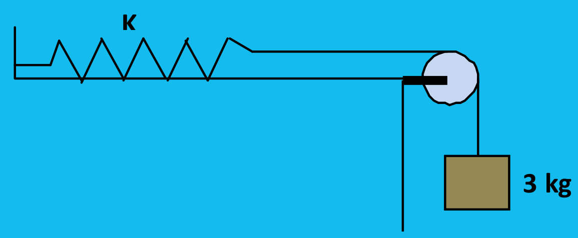
f) Cuál es el trabajo neto realizado sobre el bloque al trasladarse entre las posiciones indicadas.

Las únicas fuerzas que actúan sobre el bloque en su caída son la fuerza que ejerce el resorte y la fuerza de gravedad, por consiguiente siendo estas las únicas fuerzas el trabajo neto debe ser.

$$W_n = W_r + W_{mg} = 0.022 \text{ J}$$

Ejemplo 15

En la figura el bloque de 3 kg esta en equilibrio, suspendido de una cuerda ligera que pasa por una polea (masa despreciable) y sujeta a un resorte ideal de 30 cm de longitud natural y constante K = 187 N/m. Que longitud alcanza el resorte con la masa suspendida.



Solución:

Como el bloque esta en equilibrio sobre la cuerda se ejerce una tensión igual al peso.

$$T = 29.4 \text{ Newton}$$

Este es el valor de la fuerza que se ejerce sobre el resorte y de acuerdo a la Ley de Hooke se estira.

ÄL = F_r / K → ÄL = 0.16 m

Como: ÄL = L – L_0 → L = 46 cm

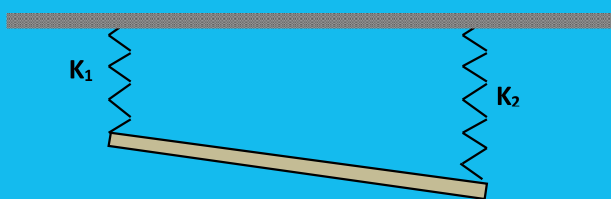
La longitud que tiene el resorte con la masa suspendida es de 46 cm.

Ejemplo 16

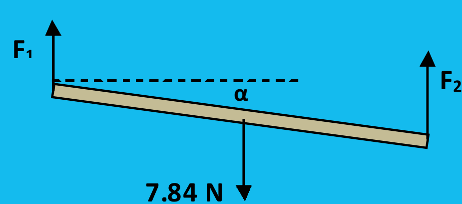
Una barra de aluminio de 3 m de longitud y 800 gr se suspende de sus extremos mediante dos resortes cuya longitud inicial es 30 cm pero sus constantes son K_1 = 20 N/m y K_2 = 12 N/m. Que ángulo hace la barra con la horizontal cuando está suspendida de los resortes.

Solución:

Dibujemos un esquema en el que se representa a la barra suspendida por los dos resortes.



Para determinar la fuerza que ejerce cada resorte sobre la barra hacemos el DCL correspondiente.



Como la barra se encuentra en equilibrio se cumple:

$$F_1 + F_2 - 7.84 = 0 \qquad (1)$$

$$-7.84 \times 1.5 \times \text{Cos } á + F_2 \times 3 \times \text{Cos } á = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones se tiene.

F_1 = 3.92 Newton $\qquad$ F_2 = 3.92 Newton

Que son las fuerzas que ejercen cada uno de los resortes.

La longitud que se estira cada resorte debido a las fuerzas halladas es:

ÄL$_1$ = 19.6 cm   ÄL$_2$ = 32.7 cm

El ángulo á que hace la barra con la horizontal es:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{32.7 - 19.6}{300}\right) = 2.5°$$

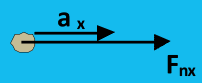
7.4 TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

De acuerdo a la segunda Ley de Newton si sobre una partícula actúan un conjunto de fuerzas, la fuerza neta o resultante es proporcional a la aceleración que adquiere la partícula, cumpliéndose la siguiente relación:

$$\vec{F}_n = m\,\vec{a}$$

Donde el vector aceleración tiene la misma dirección y sentido que la fuerza neta aplicada. La aceleración es constante si la fuerza neta resultante es constante.

Consideremos una partícula de masa m desplazándose a lo largo del eje X con aceleración constante a_x, debido a una fuerza neta constante F_{nx}.



De acuerdo a la segunda Ley de Newton:

$$F_{nx} = m\,a_x$$

El movimiento que realiza la partícula debido a la fuerza aplicada es MRUV (Movimiento rectilineo con aceleración constante). Si la partícula se desplaza la distancia s a lo largo del eje X, la fuerza F_{nx} realizará el trabajo neto W_n.

$$W_n = F_{nx}\,s = m\,a_x\,s \qquad (1)$$

Una de las ecuaciones del MRUV para el movimiento a lo largo del eje X es:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(x - x_0)$$

Si consideramos el movimiento que estamos estudiando $x_0 = 0$, $x = s$, v es la velocidad al final de la distancia s recorrida y v_0 la velocidad al comienzo, tendríamos:

$$\mathbf{v_f^2 = v_i^2 + 2\, a_x}\, \boldsymbol{s}$$

Ecuación de la cual podemos despejar el término:

$$a_x\, s = ½\, (v^2_f - v^2_i)$$

Si este término se reemplaza en la ecuación (1) se tiene:

$$W_n = ½\, m\, v^2_f - ½\, m\, v^2_i \qquad (2)$$

Ecuación que muestra hallar el trabajo neto realizado por una fuerza constante igual que la ecuación (1). La ecuación (2) permite encontrar el trabajo neto sobre una partícula de masa m que realiza movimiento lineal, solo conociendo la velocidad inicial y final que lleva la partícula. Cada uno de los términos de la ecuación (2) tiene la forma:

$$E_K = ½\, m\, v^2$$

Expresión a la que se denomina **energía cinética**. La energía cinética es una magnitud física escalar y sus unidades en el SI son las mismas que la del trabajo, es decir Joule. La ecuación muestra que la energía cinética está asociada al movimiento de una partícula, y existe solo cuando esta se encuentra en movimiento, siendo cero cuando esta se encuentra en reposo.

La ecuación (2) puede escribirse como la diferencia de dos energías cinéticas: la energía cinética final menos la energía cinética inicial.

$$W_n = E_{K\,f} - E_{K\,i} = \Delta\, E_K \qquad (3)$$

La ecuación (3) se conoce como el «Teorema del trabajo y la energía», y podemos darle la siguiente lectura: **«El trabajo neto realizado sobre una partícula por una fuerza resultante constante es igual al cambio en la energía cinética de la partícula ($\Delta\ E_K$)».**

Para poder llegar a la ecuación (3) hemos tenido que asumir algunas condiciones limitantes: que la fuerza neta aplicada sobre la partícula es constante y que el movimiento está restringido al movimiento rectilíneo uniformemente variado MRUV. Sin embargo este mismo resultado es obtenido cuando la fuerza neta no es constante y el movimiento no solo es lineal. Por tanto el resultado obtenido en la ecuación (3) es mas general y puede interpretarse que el trabajo neto realizado por la fuerza neta o resultante sobre cualquier partícula que sigue cualquier tipo de trayectoria solo depende de su masa y de las velocidades final e inicial que tiene la partícula en dichos puntos de su trayectoria o del cambio de su energía cinética (ΔE_K) entre dichos puntos.

El cambio de la energía cinética (ΔE_K) de una partícula puede ser positivo, negativo o nulo. Si el cambio es nulo o cero significa que el trabajo neto realizado sobre la partícula es nulo, por tanto las energías cinéticas final e inicial son iguales. Si el cambio de la energía cinética es positivo ($E_{K f} > E_{K i}$) el W_n es positivo aumentando la velocidad de la partícula. Si el cambio es negativo ($E_{K i} > E_{K f}$) el W_n es negativo y por tanto disminuyendo la velocidad de la partícula.

Ejemplo 17

Cuál es el valor de la energía cinética asociada a una partícula de 250 gr de masa que se mueve a la velocidad de 36 cm/s.

$$E_K = ½ (250)x36^2 = 162000 \text{ gr.cm/s} = 162000 \text{ erg.}$$

En unidades del SI (Joule).

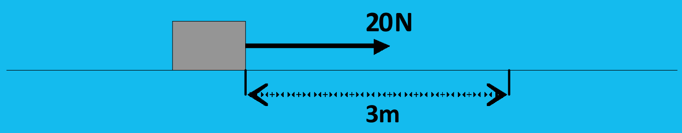
$$E_K = 1/2 (250x10^{-3})x(36x10^{-2})^2 = 162000x10^{-7} = 0.0162 \text{ J}$$

Sin tener que volver a repetir las operaciones podemos pasar de un sistema de unidades a otro solo usando el factor de conversión:

$$1\text{Joule} = 10^7 \text{ erg}$$

Ejemplo 18

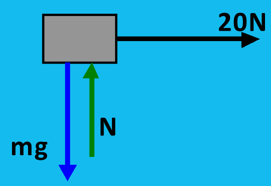
Un bloque de 10 Kg esta inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal áspera. Al bloque se le aplica una fuerza horizontal de 20N como se muestra en la figura. Entre el bloque y la superficie horizontal existe un coeficiente cinético de rozamiento de 0.16. Que velocidad alcanza el bloque después de recorrer la distancia de 3m.



Solución:

Para resolver el problema vamos a comparar la velocidad que alcanza el bloque al recorrer la distancia de 3 m. Primero vamos a resolver considerando que la superficie es lisa y segundo cuando la superficie es rugosa y existe rozamiento como está dado en el problema.

a) Considerando la superficie lisa, el DCL:



Encontremos el trabajo realizado por cada una de las fuerzas:

$$W_{20} = 20x3 = 60 \text{ J}$$
$$W_{mg} = 0 \text{ J}$$
$$W_{N} = 0 \text{ J}$$

El trabajo neto realizado por todas las fuerzas:

$$W_{n} = 60 + 0 + 0 = 60 \text{ J}$$

De acuerdo al teorema del trabajo y la energía:

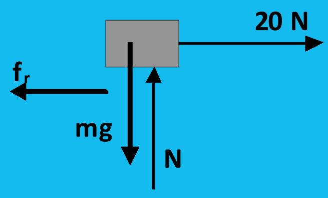
$$W_{n} = E_{K\,f} - E_{K\,i} = ½\ m\ v^2_f - ½\ m\ v^2_i$$

Como el bloque parte del reposo $v_i = 0$

$$v_f = 3.46 \text{ m/s}$$

El bloque tiene una velocidad de 3.46 m/s al final de los 3 m si no hay fuerza de rozamiento.

b) Considerando la superficie rugosa, el DCL.



En este caso debemos tener en cuenta la fuerza de rozamiento f_r y encontrar el trabajo que ella realiza cuando el bloque se desplaza 3m a la derecha.

$$f_r = \ N \qquad \text{y} \qquad N = mg$$

Por tanto $\qquad f_r = \mu \, mg = 0.16 \text{x} 10 \text{x} 9.8 = 15.68$ Newton

Como la fuerza de rozamiento está dirigida en sentido contrario al desplazamiento del bloque, el trabajo que realiza es negativo.

$$W_{15} = 20\text{x}3 = 60 \text{ J}$$
$$W_{fr} = - 15.68\text{x}3 = - 47.04 \text{ J}$$
$$W_{mg} = 0 \text{ J}$$
$$W_N = 0 \text{ J}$$

El trabajo neto realizado por todas las fuerzas:

$$W_n = 60 - 47.04 + 0 + 0 = 12.96 \text{ J}$$

De acuerdo al teorema del trabajo y la energía:

$$W_n = E_{K\,f} - E_{K\,i} = ½ \text{ m } v^2_f - ½ \text{ m } v^2_i$$

Como el bloque parte del reposo $v_i = 0$

$$v_f = 1.61 \text{ m/s}$$

En este segundo caso el bloque alcanza una velocidad de 1.61 m/s al final de los 3 m; menor que en el caso anterior debido a la fuerza de rozamiento.

Si se hubiera planteado la solución b), del mismo problema, pero desde el punto de vista dinámico aplicando la segunda ley de Newton, podemos preguntar cuál es la aceleración del bloque y cuál es su velocidad final al recorrer los 3m. Como el desplazamiento es lineal y hacia la derecha, de acuerdo a la segunda ley de Newton tendremos:

$$F - f_r = m\ a_x$$

$$20 - 15.68 = 10\ a_x$$

de donde obtenemos $a_x = 0.432\ m/s^2$

De acuerdo a la ecuación cinemática para el MRUV:

$$v^2_f = v^2_i + 2\ a_x\ s$$

Dado que la $v_i = 0$ y que $s = 3m$, tendremos

$$v_f = 1.61\ m/s$$

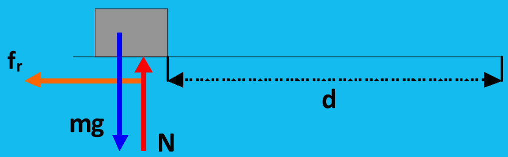
El mismo resultado obtenido usando el Teorema trabajo - energía cinética.

Ejemplo 19

Un vehículo de 750 Kg viaja con una rapidez de 60 Km/h. Si el conductor aplica súbitamente los frenos, cual es la distancia mínima en la que se detendrá si el coeficiente cinético de rozamiento entre el vehículo y la superficie de la pista es 0.15

Solución:

Para resolver el problema hagamos el DCL del vehículo desde el momento en que se aplican los frenos.



Durante el tiempo que va frenando el vehículo las únicas fuerzas que actúan sobre el son las mostradas. Por consiguiente el trabajo neto realizado por las fuerzas es:

$$W_n = - f_r\ d$$
$$W_n = - \mu\ mg\ d = ½\ mv^2_f – ½\ mv^2_i$$

Como la velocidad final es $v_f = 0$

$$- \mu\ mg\ d = - ½\ mv^2_i$$
$$d = v^2_i / 2\ \mu g$$

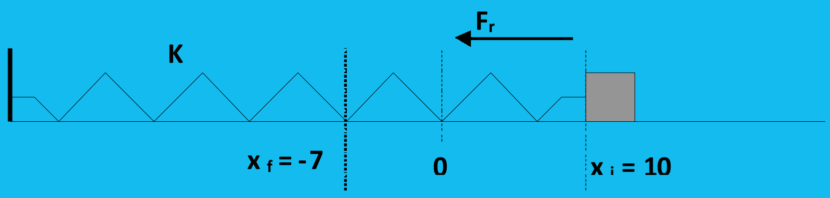
Reemplazando los valores dados.

$$d = 94.5\ m$$

Por consiguiente el vehículo se detendrá 94.5 m después de aplicar los frenos.

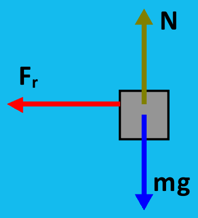
Ejemplo 20

Un resorte de constante K=15.1 N/m se encuentra unido a un objeto de 100 gr de masa y ubicado horizontalmente sobre una superficie sin rozamiento como se muestra en la figura. Si el resorte se estira a partir de su posición de equilibrio junto con la masa la distancia de 10 cm y se le suelta partiendo del reposo, encontrar:



a) La velocidad de la masa cuando pasa por la posición x = 0

DCL de la masa.



Trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el objeto:

$W_r = \frac{1}{2} K x^2_i - \frac{1}{2} K x^2_f = \frac{1}{2} \times 15.1x\ (10x10^{-2})^2 - 0 = 7.55x10^{-2}$ J
$W_N = 0$ J
$W_{mg} = 0$ J

El trabajo neto sobre el objeto:

$W_n = W_r + W_N + W_{mg} = 7.55x10^{-2}$ J

Aplicando el teorema del trabajo – energía cinética, siendo $v_i = 0$:

$W_n = \frac{1}{2} mv^2_f - \frac{1}{2} mv^2_i = 7.55x10^{-2}$ J

La velocidad del objeto cuando pasa por x = 0 es:

$v_f = 1.23$ m/s

b) La velocidad de la masa cuando pasa por la posición x = - 7cm

Usando el mismo procedimiento de la parte a) encontremos el trabajo realizado por cada una de las fuerzas:

$W_r = \frac{1}{2}\ x15.1x\ (10x10^{-2})^2 - \frac{1}{2}\ x15.1x\ (-7x10^{-2})^2 = 3.85x10^{-2}$ J
$W_N = 0$
$W_{mg} = 0$

Luego el trabajo neto es:

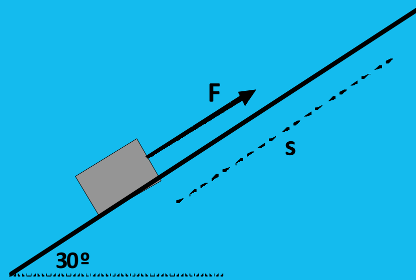
$W_n = 3.85x10^{-2}$ J

Aplicando el teorema del trabajo – energía cinética:

$V_f = 0.88$ m/s

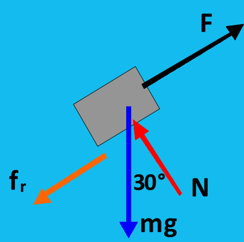
Ejemplo 21

La figura muestra un plano inclinado $\theta = 30^o$ sobre el que se encuentra un bloque de masa m desplazándose cuesta arriba por acción de una fuerza F. Entre el bloque y la superficie el coeficiente de rozamiento cinético es μ. Si el bloque se desplaza una distancia s sobre la superficie inclinada y la velocidad inicial es conocida y vale v_i, cual es el valor de la velocidad final v_f después de recorrer la distancia s.



Solución:

En primer lugar hagamos el DCL del bloque



Encontremos el trabajo realizado por cada una de las fuerzas.

$W_F = Fs$ $\qquad W_{mg} = -\ (mg\ Sen\ 30°)\ s$ $\qquad W_{fr} = -\ f_r\ s$ $\qquad W_N = 0$

Donde la f_r es:

$f_r = \ N$ $\qquad$ y que $\qquad$ $N = mg\ Cos\ 30°$

El trabajo neto realizado sobre el bloque al desplazarse sobre el plano inclinado es:

$$W_n = Fs - mg\ s\ (Sen\ 30° + \mu\ Cos\ 30°) = ½\ m\ v^2_f - ½\ m\ v^2_i$$

Ecuación de la cual se despeja el valor de la velocidad v_f.

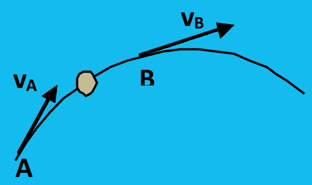
$$v_f = [\ v^2_i + 2Fs/m - 2gs(Sen\ 30° + \ Cos\ 30°)]^{1/2}$$

Si consideramos los siguientes valores numéricos: m = 800 gr, F =10 N, s = 2m, μ = 0.15, v_i = 2 m/s, la velocidad final que adquiere el bloque es:

$$v_f = 5.41\ m/s$$

Ejemplo 22

Una partícula de 400 gr se mueve a lo largo de una trayectoria curva como la mostrada en la figura. Si se conoce la velocidad que tiene la partícula en los puntos A y B de la trayectoria; que trabajo neto realizan las fuerzas aplicadas sobre la partícula para que esta pueda describir la trayectoria mostrada.



Solución:

Si bien el Teorema Trabajo – Energía fue deducido a partir del análisis de una partícula que realiza movimiento rectilineo, dicha expresión como se dijo es válida para cualquier tipo de trayectoria y siempre se cumplirá que el trabajo neto es igual al cambio en la energía cinética de la partícula.

$$W_n = \text{Ä}\ E_k = E_{kf} - E_{ki}$$

En el caso de nuestro problema el trabajo neto será:

$$W_n = \tfrac{1}{2}\ m\ v^2_B - \tfrac{1}{2}\ m\ v^2_A$$

Tomemos el caso cuando $v_A = 10$ m/s y $v_B = 16$ m/s, el trabajo neto realizado sobre la partícula de 400 gr es:

$$W_n = 31.2\ \text{J}$$

Ejemplo 23

Un proyectil de 600 gr es disparado desde lo alto de un acantilado con rapidez de 40 m/s y ángulo de 45° con la horizontal. Que trabajo neto realizan las fuerzas actuando sobre el proyectil entre los instantes de tiempo t = 1 s y t = 8 s.

Solución:

Después de ser disparado el proyectil, la trayectoria que sigue es el de una parábola y durante todo el tiempo que está viajando la única fuerza que está actuando sobre él es la fuerza de gravedad o su peso.

De la misma manera que la solución dada al ejemplo 22 para hallar el trabajo neto es necesario conocer las velocidades o rapidez del proyectil en los instantes de tiempo dados.

Velocidad del proyectil en el instante t = 1s. Primero debemos conocer las componentes de la velocidad inicial:

$V_{0x} = 40 \text{ Cos } 45° = 28.3 \text{ m/s}$ $\quad$ $V_{0y} = 40 \text{ Sen } 45° = 28.3 \text{ m/s}$

Componentes de la velocidad cuando t = 1 s.

$V_x = V_{0x} = 28.3 \text{ m/s}$ $\quad$ $V_y = V_{0y} – g\, t = 18.5 \text{ m/s}$

Velocidad del proyectil cuando t = 1 s.

$$V_i = 33.81 \text{ m/s}$$

Velocidad del proyectil cuando t = 8 s.

$V_x = 28.3 \text{ m/s}$ $\quad$ $V_y = - 50.1 \text{ m/s}$

$$V_f = 57.54 \text{ m/s}$$

El trabajo neto realizado sobre el proyectil entre t = 1 y t = 8 s esta dado por el teorema Trabajo – Energía:

$$W_n = 650.3 \text{ J}$$

Otra manera de resolver el problema es a partir de la definición del trabajo. Sabemos que la trayectoria es una parábola y que la única fuerza que actúa durante el movimiento del proyectil es su peso o la fuerza de gravedad. Encontremos la posición del proyectil en el plano en los instantes de tiempo t = 1 s y t = 8 s haciendo uso de la cinemática.

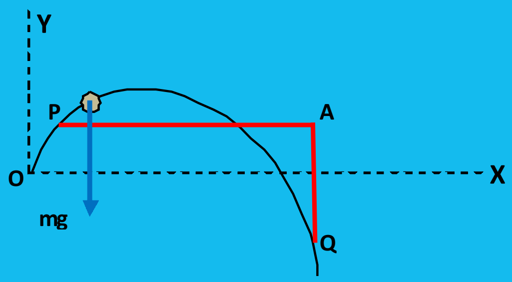
Coordenadas de posición del punto P cuando t = 1 s.

$x = V_{0x}\, t = 28.3 \text{ m}$ $\quad$ $y = V_{0y}\, t – \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 = 23.4 \text{ m}$

Coordenadas de posición del punto Q cuando t = 8 s.

$x = V_{0x}\, t = 226.4 \text{ m}$ $\quad$ $y = V_{0y}\, t – \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 = - 87.2 \text{ m}$

Con esta información ubiquemos en un grafico, para poder ayudarnos, las dos posiciones del proyectil y encontremos el trabajo realizado por la fuerza de gravedad cuando se traslada de una posición P a otra Q.



El trabajo realizado por el peso mg para trasladar al proyectil a lo largo de la trayectoria parabólica entre P y Q es el mismo si se sigue la trayectoria PAQ por ser la fuerza aplicada constante. Por consiguiente el trabajo neto será la suma de los trabajos realizados por el peso de Pa A y luego de A a Q.

$$W_n = W_{PA} + W_{AQ}$$

Calculando independiente los trabajos se tiene: $W_{PA} = 0$ por que la fuerza mg es perpendicular a la trayectoria PA.

El trabajo de A a Q será la fuerza mg por la distancia entre los puntos:

$$W_{AQ} = mg\ (AQ) = 0.6 \times 9.8 \times 110.6 = 650.3\ J$$

Con los resultados previos obtenidos el trabajo neto es.

$$W_n = 650.3\ J$$

El mismo valor obtenido por el método del Trabajo – Energía cinética.

7.5 ENERGÍA POTENCIAL

En la sección anterior aprendimos que el trabajo realizado sobre una partícula por una fuerza neta o resultante de un conjunto de fuerzas es igual al cambio en la energía cinética de la partícula:

$$W_n = \Delta\ E_K$$

Pudimos observar que la energía cinética está asociada al movimiento de la partícula; es decir si la E_K de la partícula cambia (o su velocidad cambia) necesariamente sobre la partícula se ha realizado un trabajo.

Ahora vamos a conocer otra forma de energía denominada energía potencial y que se encuentra asociada ya no a la velocidad sino a la configuración o a la posición o coordenadas de posición de la partícula. La energía potencial está relacionada con un solo tipo de fuerzas, llamadas fuerzas conservativas.

En el capítulo de equilibrio realizamos una clasificación de las fuerzas según su disposición geométrica y las denominamos concurrente y coplanares. Otra manera de clasificarlas es en cuanto a su naturaleza o propiedad para realizar trabajo. Esta nueva forma de clasificación divide a las fuerzas en dos grandes grupos:

1. Fuerzas conservativas.
2. Fuerzas no conservativas.

En la naturaleza existen muchas fuerzas denominadas conservativas, entre las más conocidas tenemos la fuerza de gravedad, la fuerza que ejerce un resorte que cumple con la Ley de Hooke, la fuerza eléctrica y otras y entre las no conservativas la fuerza de rozamiento.

La denominación de fuerza conservativa lo comprenderemos más tarde cuando trabajemos con ellas. En nuestro curso de mecánica solo nos referiremos a las fuerzas gravitatorias y a las fuerzas de los resortes.

Las fuerzas conservativas se caracterizan por que el trabajo que ellas realizan puede ser expresado como la diferencia de una cantidad a la que denominaremos energía potencial.

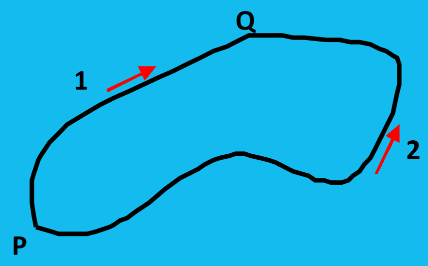
Cada fuerza conservativa está relacionada con un tipo particular de energía potencial, así tenemos:

Fuerza gravitatoria $\longrightarrow$ Energía Potencial gravitatoria
Fuerza de un resorte $\longrightarrow$ Energía Potencial elástica

CARACTERISTICAS DE UNA FUERZA CONSERVATIVA

Las fuerzas conservativas se caracterizan por lo siguiente:

1. Si una fuerza se aplica sobre una partícula que se mueve entre las posiciones P y Q a lo largo de la trayectoria 1, la fuerza realiza un trabajo al que denominaremos W_{PQ1}. Si la misma fuerza se aplica sobre la misma partícula que se mueve entre los mismos puntos P y Q, pero a lo largo de otra trayectoria 2, la fuerza realiza un trabajo al que se denominara W_{PQ2}.



$$W_{PQ1} = W_{PQ2}$$

La fuerza se denomina conservativa si los trabajos W_{PQ1} y W_{PQ2} son iguales. En este caso se observa que el trabajo realizado por la fuerza conservativa es independiente de la trayectoria seguida y depende solamente de las posiciones P y Q o de las coordenadas inicial y final de los puntos P y Q. Una fuerza que realiza trabajo independientemente de la trayectoria seguida y dependiente solo de las coordenadas inicial y final de los puntos entre los que se mueve se denomina **fuerza conservativa.**

2. Otra característica de las fuerzas conservativas es:

$$W_{PQ1} = - W_{QP2}$$
$$W_{PQ1} + W_{QP2} = 0$$

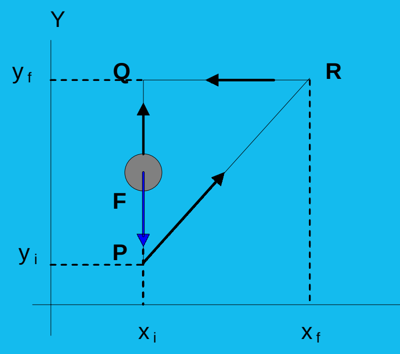
Por consiguiente el trabajo total realizado por una fuerza conservativa alrededor de cualquier trayectoria cerrada siempre es cero. Es decir cuando la partícula inicia su movimiento en un punto de la trayectoria y regresa al mismo punto. O cuando el punto inicial coincide con el punto final.

Ejemplo 24

Encontrar el trabajo realizado por la fuerza de gravedad.

Solución:

Primero demostraremos que la fuerza de gravedad es una fuerza conservativa. Referidos al dibujo consideremos una partícula de masa m sobre la que actúa solo la fuerza de gravedad, ejerciendo sobre la partícula una fuerza igual al peso m g. El eje X coincide con la superficie de la tierra.



Vamos a considerar trayectoria 1 la que va del punto P a Q directamente y trayectoria 2 la que va de P a R y de R a Q. Sabemos que en términos generales el trabajo realizado por una fuerza constante puede expresarse en forma del producto escalar del vector fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ por el desplazamiento $\vec{s}$:

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{s}$$

Cualquiera sea la trayectoria la fuerza que ejerce la gravedad es:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\,mg\,\vec{\mathbf{j}}$$

a) Encontremos el trabajo realizado por la fuerza de gravedad para ir de P a Q a lo largo de la trayectoria 1. El vector desplazamiento que va del punto P al punto Q se puede escribir como:

$$\vec{s} = (y_f - y_i)\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$W_{PQ1} = -\,mg\,(y_f - y_i) = m\,g\,y_i - m\,g\,y_f$$

$$W_{PQ1} = m\,g\,y_i - m\,g\,y_f \qquad (1)$$

b) Trabajo realizado por la fuerza de gravedad el peso para ir de P a Q a lo largo de la trayectoria 2, es decir de P a R y de R a Q. En este caso dicha trayectoria es dividida en dos partes:

$$W_{PQ2} = W_{PR2} + W_{RQ2}$$

Encontremos primero el trabajo W_{PR2}. El vector desplazamiento que va del punto P a R puede escribirse como:

$$\vec{s} = (x_f - x_i)\,\vec{i} + (y_f - y_i)\,\vec{j}$$

$$W_{PR2} = -mg\,(y_f - y_i) = m\,g\,y_i - m\,g\,y_f$$

Para hallar el trabajo W_{RQ2} encontremos el vector desplazamiento que va de R a Q:

$$\vec{s} = -(x_f - x_i)\,\vec{j}$$

$W_{RQ2} = 0$ por ser $\vec{F}$ y $\vec{s}$ perpendiculares

Por consiguiente el trabajo entre P y Q a lo largo de la trayectoria 2 es:

$$W_{PQ2} = m\,g\,y_i - m\,g\,y_f \qquad (2)$$

Los resultados (1) y (2) obtenidos muestran que el trabajo realizado por la fuerza de gravedad es independiente de la trayectoria que se siga para ir entre P y Q, solo depende de las coordenadas inicial y final. Por tanto la fuerza de gravedad es una fuerza conservativa. En general:

$$\boxed{W_{PQ} = m\,g\,y_i - m\,g\,y_f} \qquad (3)$$

A través de cualquier trayectoria.

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

El problema 24 anteriormente resuelto muestra:

Que el trabajo que realiza la fuerza de gravedad sobre una partícula es independiente de la trayectoria que se haya seguido.

1. Que el trabajo realizado por la fuerza de gravedad esta dado por la ecuación (3) y que depende solo de las posiciones inicial y final de la trayectoria.

2. El trabajo realizado por la fuerza de gravedad lo escribiremos como.

$$\boxed{W_{mg} = m\ g\ y_i - m\ g\ y_f} \qquad (4)$$

3. El trabajo resulta ser la diferencia de dos términos semejantes, m g y.

4. Se denomina Energía Potencial Gravitatoria a la expresión:

$$E_{pg} = m\ g\ y$$

   Ecuación que depende de la masa, la gravedad y de la altura a la que se encuentra la partícula. Cuando y es igual a cero la energía potencial gravitatoria vale cero. Por esta razón el lugar escogido donde la E_{pg} es nula se considera como nivel de referencia (NR).

5. El trabajo realizado por la fuerza de gravedad cuando una partícula es trasladada de una posición inicial a una posición final, resulta ser la diferencia o cambio en la energía potencial gravitatoria de la partícula.

$$W_{mg} = E_{pgi} - E_{pgf} = -\ (E_{pgf} - E_{pgi})$$

$$\boxed{W_{mg} = -\ \text{Ä}\ E_{pg}}$$

Ejemplo 25

Un cuerpo de 300 gr se suelta desde la azotea de un edificio de 50 m de altura. Que trabajo realiza la fuerza de gravedad cuando el cuerpo recorre la distancia entre los 40 m y 25 m medidos desde el suelo.

Solución.

a) Consideremos que el NR se toma en el suelo. En estas condiciones $y_i = 40$ m, $y_f = 25$ m.

   Aplicando la ecuación (4) se tendrá el trabajo realizado por la fuerza de gravedad.

$$W_{mg} = 0.3 \times 9.8 \times 40 - 0.3 \times 9.8 \times 25 = 44.1\ \text{J}$$

b) Si consideramos que el NR está en la azotea del edificio, y_i = - 10 m, y_f = - 25 m.

Aplicando nuevamente la ecuación (4) se tiene:

$$W_{mg} = 0.3 \times 9.8 \times (-10) - 0.3 \times 9.8 \times (-25) = 44.1 \text{ J}$$

El resultado es el mismo independiente donde se haya tomado el nivel de referencia. Sin embargo es importante en la solución de un problema el tener que escogerlo apropiadamente.

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA DE UN RESORTE

En la sección 7.3 de este capítulo encontramos el trabajo realizado por la fuerza de un resorte que obedece la Ley de Hooke y esta dado por la ecuación (2).

$$\boxed{W_r = \tfrac{1}{2} K x^2_i - \tfrac{1}{2} K x^2_f}$$

Trabajo que depende de la constante K del resorte y de las posiciones inicial y final que tiene el resorte. Además podemos observar que resulta ser la diferencia de dos términos de la forma $\tfrac{1}{2} K x^2$, a los que se le denomina energía potencial elástica del resorte y cuyas unidades en el SI esta dado en Joule.

$$E_{pe} = \tfrac{1}{2} K x^2$$

Si la trayectoria seguida por el resorte es cerrada, es decir $x_i = x_f$ el trabajo total es nulo. De este resultado podemos considerar que la fuerza F_r que ejerce el resorte es conservativa.

En general el trabajo realizado por la fuerza del resorte puede expresarse como la diferencia o cambio de la energía potencial elástica.

$$W_r = E_{pei} - E_{pef} = -(E_{pef} - E_{pei}) = -\text{Ä}\ E_{pe}$$

$$\boxed{W_r = -\text{Ä}\ E_{pe}}$$

En términos generales cuando sobre un sistema actúa una fuerza conservativa podemos expresar que el trabajo realizado por dicha fuerza siempre es la diferencia o cambio de la energía potencial correspondiente a dicha fuerza y puede escribirse para cada caso como:

$$W_C = E_{Pi} - E_{Pf} = -(E_{Pf} - E_{Pi})$$

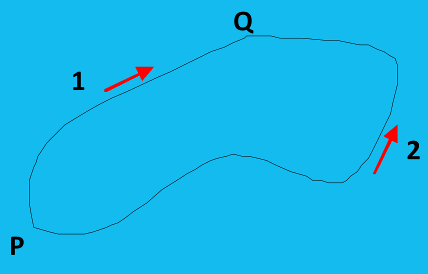
$$\boxed{W_C = -\Delta E_P}$$

Es decir el trabajo W_C realizado por una fuerza conservativa puede expresarse como menos la diferencia en el cambio de la energía potencial

FUERZAS NO CONSERVATIVAS

A diferencia de las fuerzas conservativas, el trabajo que realiza una fuerza no conservativa sobre una partícula u objeto depende de la trayectoria que este siga, por tanto para las fuerzas no conservativas:

$$W_{PQ1} \neq W_{PQ2}$$



7.6 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

En las secciones anteriores se han definido dos términos de energía; la energía cinética relacionada con la velocidad de la partícula y las energías potenciales, gravitatoria relacionada con la posición de la partícula respecto a un nivel de referencia escogido y elástica producida por una resorte relacionada con la distancia que se haya estirado o escogido el resorte.

Para definir la energía mecánica consideremos una partícula moviéndose por acción de solo fuerzas conservativas. Como conocemos solo dos fuerzas conservativas estas serian la fuerza de gravedad y la fuerza del resorte, por consiguiente la fuerza neta actuando sobre la partícula es:

$$F_n = F_{mg} + F_r$$

El trabajo neto realizado por estas fuerzas es:

$$W_n = W_{mg} + W_r$$

Como sabemos cada una de estas fuerzas se representan como cambio de otras energías, así tenemos:

$$W_n = \text{Ä}\ E_K \qquad W_{mg} = -\ \text{Ä}\ E_{pg} \qquad W_r = -\ \text{Ä}\ E_{pe}$$

Si se reemplazan en la ecuación anterior

$$\text{Ä}\ E_K = -\ \text{Ä}\ E_{pg} - \text{Ä}\ E_{pe} = -\ (\text{Ä}\ E_{pg} + \text{Ä}\ E_{pe})$$

El término entre paréntesis es la suma de los cambios de las energías potenciales, la que puede escribirse en general como cambios en la energía potencial.

$$\text{Ä}\ E_K = -\ \text{Ä}\ E_P$$

$$\Delta\ E_K = -\ \Delta\ E_P$$

$$\Delta\ E_K + \Delta\ E_P = 0$$

Esta ecuación se lee que la suma de los cambios en la energía cinética mas los cambios en la energía potencial son siempre nulos. Debemos tener en cuenta que este resultado se obtiene si sobre la partícula actúan solo fuerzas conservativas.

Si desarrollamos los términos de esta ecuación, teniendo en cuenta que los cambios en la energía se entienden como la diferencia entre la energía final menos la inicial se tendrá:

$$(E_{Kf} - E_{Ki}) + (E_{Pf} - E_{Pi}) = 0$$

$$E_{Kf} + E_{Pf} = E_{Ki} + E_{Pi} \qquad (5)$$

A ambos lados de la ecuación se tiene la suma de la energía cinética mas la energía potencial, suma a la que denominaremos energía mecánica

$$E_M = E_K + E_P$$

En la ecuación (5) el término de la izquierda representa la energía mecánica final y el de la derecha la energía mecánica inicial, y deben ser iguales.

$$E_{Mf} = E_{Mi}$$

$$E_{Mf} - E_{Mi} = 0$$

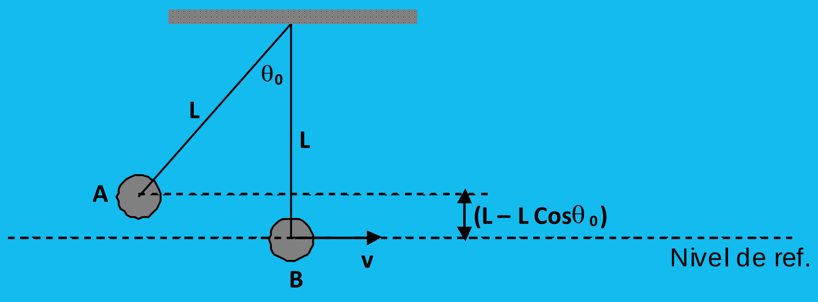
$$\boxed{\Delta E_M = 0} \qquad (6)$$

Ecuación que podemos interpretar como: Cuando sobre una partícula actúan solo fuerzas conservativas **la energía mecánica total se conserva, o que la energía mecánica total antes y después de actuar la fuerza conservativa es la misma.**

Ejemplo 26

Un péndulo simple consta de una pequeña esfera de masa m sujeta a una cuerda liviana de longitud L como se muestra en la figura. Si la esfera se suelta a partir del reposo en A cuando la cuerda hace un ángulo θ_0.

a) Que rapidez tiene la esfera cuando pasa por el punto más bajo B.



Antes de ver la solución a este problema analicemos si el sistema compuesto por la esfera y la cuerda es conservativo. Podemos ver que la esfera se mueve por acción de la fuerza de gravedad y ninguna otra fuerza aplicada sobre ella. Como la fuerza de gravedad es conservativa por el análisis anteriormente realizado, podemos concluir que el sistema es conservativo.

Si el sistema es conservativo, la energía mecánica se conserva y se debe cumplir que la energía mecánica en A debe ser la misma que la energía mecánica en B.

$$E_{MA} = E_{MB}$$
$$E_{KA} + E_{PA} = E_{KB} + E_{PB}$$

Como el péndulo parte del reposo en A tendremos:

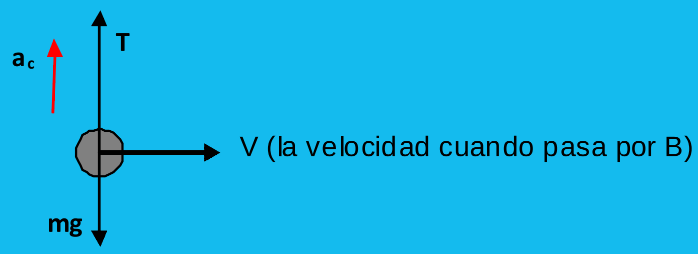
$$0 + mg\ (L - L\ \text{Cos}\theta_0) = \tfrac{1}{2}\ m\ v^2_B + 0$$

Despejando el valor de la velocidad cuando la esfera pasa por el punto B

$$v_B = [\ 2gL\ (1 - \text{Cos}\theta_0)]^{1/2}$$

b) Cuál es el valor de la tensión en la cuerda cuando la esfera pasa por B.

Para resolver esta parte del problema hagamos el DCL de la esfera cuando pasa por B



De acuerdo a la segunda ley de Newton las componentes en el eje Y deben cumplir:

$$T - mg = m\ a_c$$

Donde a_c es la aceleración centrípeta y es igual: $a_c = v^2/R$, reemplazando los valores donde $R = L$ y v es el valor encontrado previamente.

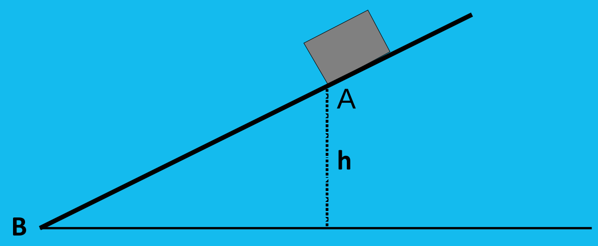
$$T = mg + 2mg\ (1 - \text{Cos}\theta_0)$$
$$T = 3mg - 2mg\ \text{Cos}\theta_0$$
$$T = mg\ (3 - 2\ \text{Cos}\theta_0)$$

La última ecuación nos da el valor de la tensión en la cuerda.

Ejemplo 27

La figura muestra un plano inclinado sobre el que se encuentra un bloque de 4 Kg de masa a una altura h de 2.5 m desde la base del plano. Si entre el bloque y la superficie no existe rozamiento y este recorre una distancia de 3 m hasta el extremo inferior del plano, encontrar:

a) Si el bloque parte del reposo en A con que velocidad llega al extremo B.



A partir de los datos del problema concluimos que la única fuerza que actúa sobre el bloque es la fuerza de gravedad. Por consiguiente en este sistema se conserva la energía mecánica total:

$E_{MA} = E_{MB}$

$0 + mgh = ½ mv^2_B + 0$ reemplazando los datos

$v_B = 7$ m/s

b) El trabajo neto realizado sobre el bloque para ir de A a B.

Para encontrar el trabajo neto recurrimos al teorema trabajo – energía, el cual nos permite escribir:

$$W_n = \Delta E_K = ½ m v^2_B - ½ m v^2_A$$

Remplazando los valores dados:

$$W_n = 98 \text{ J}$$

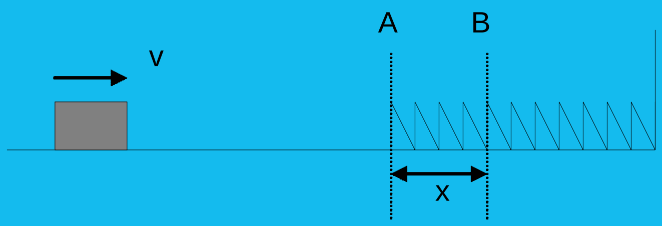
c) La fuerza paralela a la superficie necesaria para realizar dicho trabajo.

$$W_n = F s$$

$$F = 32.7 \text{ N}$$

Ejemplo 28

La figura muestra un bloque de 1.5 Kg desplazándose sobre una superficie no rugosa con una rapidez de 2 m/s. En el extremo derecho se encuentra un resorte en su posición de equilibrio y de constante K = 25 N/m. El bloque choca con el resorte y lo comprime una distancia x. Cuál es el valor de la máxima compresión x del resorte como resultado de dicho choque.



Analicemos que fuerzas actúan sobre el sistema formado por el bloque, el resorte y la superficie. Las únicas fuerzas que actúan son la fuerza de gravedad y la fuerza que ejerce el resorte durante su compresión y no hay rozamiento entre el bloque y la superficie.

Esta información nos permite asegurar que se trata de un sistema conservativo y que la energía mecánica siempre debe conservarse. Como no hay rozamiento entre el bloque y la superficie este se desplaza con velocidad constante de 2 m/s hasta que toca al resorte en A. A partir de ese momento comprime al resorte disminuyendo progresivamente su velocidad hasta que su velocidad es 0 en B. Todas las fuerzas que actúan sobre el bloque durante la compresión del resorte son conservativas por tanto la energía mecánica total del sistema se debe conservar.

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2_A + \tfrac{1}{2}\, K\, x^2_A = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2_B + \tfrac{1}{2}\, K\, x^2_B$$

Teniendo en consideración que: $x_A = 0$, $v_A = v$ y $x_B = x$, $v_B = 0$

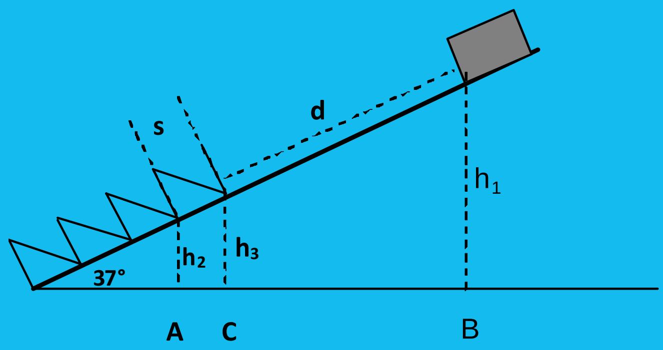
$$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}\, K\, x^2$$

Reemplazando valores se tiene:

$$x = 0.49 \text{ m} \quad \text{o} \quad 49 \text{ cm}$$

Ejemplo 29

La figura muestra un plano inclinado no rugoso que hace un ángulo de 37° con la horizontal. En el extremo inferior del plano se encuentra un resorte en su posición de equilibrio de constante K = 40 N/m. Un bloque de 500 gr de masa se encuentra en reposo a la distancia d =1 m del resorte.



a) Si el bloque parte del reposo y golpea al resorte, que distancia s máxima comprime al resorte.

Como no existe fuerza de rozamiento entre el bloque y la superficie y todas las demás fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas, por el principio de conservación de la energía mecánica tendremos:

$$E_{MB} = E_{MA}$$

$$mgh_1 = mgh_2 + ½\ K\ s^2$$

Ecuación en la que se remplazo las energías cinéticas en A y en B nulas; porque sus velocidades son cero.

$$mg\ (h_1 – h_2) = ½\ K\ s^2 \qquad (1)$$

De la figura podemos observar que geométricamente:

$$h_1 – h_2 = (s + d)\ \text{Sen } 37°$$

Reemplazando en la ecuación (1) se tiene.

$$mg\ (s + d)\ \text{Sen } 37° = ½\ K\ s^2$$

Reemplazando los valores dados en el problema tendremos:

$$s^2 – 0.147s – 0.147 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado nos da el valor de s.

$$s = 0.46m \quad o \quad 46cm$$

b) La velocidad del bloque un instante antes de chocar con el resorte.

Teniendo en consideración las propuestas iniciales por conservación de la energía mecánica:

$$E_{MB} = E_{MC}$$

$$mgh_1 = mgh_3 + ½ \, m \, v^2_C$$

$$mg \, (h_1 - h_3) = ½ \, m \, v^2_C$$

$$h_1 - h_3 = d \, \text{Sen } 37°$$

Reemplazando tendremos:

$$mg \, d \, \text{Sen } 37° = ½ \, m \, v^2_C$$

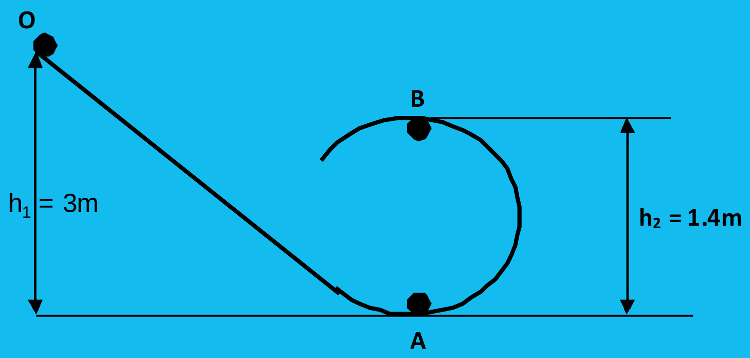
El valor de v_C será:

$$v_C = 3.43 \text{ m/s}$$

Ejemplo 30

La figura muestra un plano inclinado con un rizo de 70 cm de radio. En el extremo superior del plano inclinado se suelta partir del reposo una esfera de 200 gr de masa la que desliza sin rozamiento sobre el plano inclinado y sobre el rizo. Encontrar:

a) La velocidad que tiene la esfera cuando pasa por el punto A.



La superficie OAB es lisa y la única fuerza que actúa sobre la esfera durante su recorrido es la fuerza de gravedad que es una fuerza conservativa. Por esta razón el sistema es conservativo y la energía mecánica del sistema debe conservarse.

$$E_O = E_A = E_B$$

Si consideramos los puntos O y A y el nivel de referencia para la energía potencial gravitatoria el nivel inferior, tendremos:

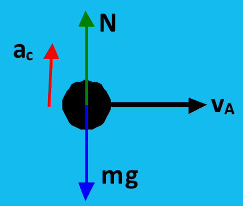
$$mgh_1 = \frac{1}{2} m v^2_A$$

Reemplazando valores:

$$v_A = 7.67 \text{ m/s}$$

b) El valor de la reacción normal de la superficie sobre la esfera cuando pasa por A.

DCL de la esfera cuando pasa por A:



Aplicando la segunda ley de Newton para las componentes verticales:

$$N - mg = m\, a_C = m\, v^2_A / R$$
$$N = mg + m\, v^2_A / R$$

Reemplazando valores:

$$N = 18.77 \text{ Newton}$$

c) La velocidad que tiene la esfera cuando pasa por el punto B

Por conservación de la energía mecánica en los puntos O y B:

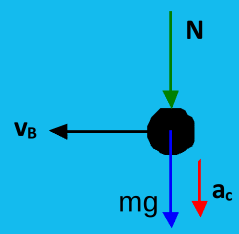
$$E_{MO} = E_{MB}$$
$$mgh_1 = \frac{1}{2} m v^2_B + mgh_2$$

Reemplazando valores:

$$v_B = 5.6 \text{ m/s}$$

d) El valor de la reacción normal de la superficie sobre la esfera cuando pasa por B.

DCL de la esfera cuando pasa por B:



Aplicando la segunda ley de Newton a las componentes verticales:

$$N + mg = m\, v^2_B / R$$

$$N = m\, v^2_B / R - mg$$

Reemplazando valores:

$$N = 7 \text{ Newton}$$

7.7 TRABAJO Y ENERGÍA EN SISTEMAS NO CONSERVATIVOS.

Normalmente en todo sistema físico están presentes las fuerzas no conservativas, como por ejemplo la fuerza de fricción, por consiguiente en estos casos la energía mecánica del sistema no se conserva.

Si consideramos un sistema en el que están presentes fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas todas ellas realizan trabajo sobre el sistema. Si W_c representa el trabajo realizado por todas las fuerzas conservativas sobre una partícula y W_{nc} el trabajo realizado por la fuerza no conservativa, el trabajo total o trabajo neto realizado sobre la partícula será:

$$W_n = W_c + W_{nc} \qquad (1)$$

Conocemos por el teorema del trabajo – energía, el trabajo neto es igual al cambio en la energía cinética de la partícula.

$$W_n = \Delta E_K$$

En la sección 7.5 encontramos que el trabajo realizado por las fuerzas conservativas puede escribirse como menos el cambio en la energía potencial:

$$W_c = - \Delta E_P$$

Reemplazado ambos términos en la ecuación (1) y despejando el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas W_{nc}, tendremos:

$$W_{nc} = \Delta E_K + \Delta E_P \qquad (2)$$

Es decir **el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual al cambio en la energía cinética más el cambio en la energía potencial.**

Desarrollando los términos de la ecuación (2) tendremos:

$$W_{nc} = (E_{K\,f} - E_{K\,i}) + (E_{P\,f} - E_{P\,i})$$

$$W_{nc} = (E_{K\,f} + E_{P\,f}) - (E_{K\,i} + E_{P\,i})$$

$$W_{nc} = E_{M\,f} - E_{M\,i}$$

$$\boxed{W_{nc} = \Delta E_M} \qquad (3)$$

Esta ecuación muestra que **el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual al cambio en la energía mecánica del sistema.**

RESUMEN

La energía mecánica está definida como la suma de la energía cinética más las energías potenciales que tienen una partícula o un sistema debido a las fuerzas que actúan sobre ella. En el caso de nuestro curso de mecánica solo hablamos de la energía potencial gravitatoria y de la energía potencial elástica si sobre la partícula actúa un resorte.

$$\boxed{E_M = E_K + E_P}$$

a) Si sobre el sistema o partícula actúan solo fuerzas conservativas, al **sistema se denomina conservativo** y en este caso el cambio en la energía mecánica es cero y se escribe.

$$\boxed{\Delta E_M = 0}$$

Ecuación que muestra que la energía mecánica se conserva en todo momento y se interpreta de la siguiente manera:

$$\boxed{E_{M\,f} = E_{M\,i}}$$

La energía mecánica final es igual a la energía mecánica inicial.

b) Si sobre el sistema o partícula actúan fuerzas conservativas y no conservativas como la fuerza de rozamiento, al **sistema se denomina no conservativo** y en este caso el cambio en la energía mecánica es diferente de cero y se escribe.

$$\boxed{\Delta E_M \neq 0}$$

Ecuación que muestra que la energía mecánica no se conserva y se interpreta de la siguiente manera:

$$\boxed{E_{M\,f} \neq E_{M\,i}}$$

La energía mecánica final no es igual a la energía mecánica inicial. Siempre es menor.

En los sistemas no conservativos se demuestra que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (en nuestro caso las fuerzas de rozamiento) es igual al cambio en la energía mecánica del sistema.

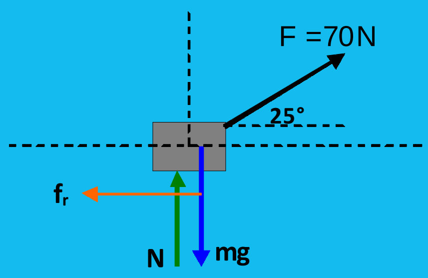
$$\boxed{\text{Ä}\ E_M = W_{fr}}$$

Ejemplo 31

Un bloque de 15 Kg es arrastrado sobre una superficie horizontal áspera por una fuerza constante de 70 N que actúa formando un ángulo de 25° con la horizontal. El bloque se desplaza horizontalmente 5 m y el coeficiente de rozamiento cinético es 0.3. Determinar:

a) El trabajo realizado por la fuerza de 70 N.

Hagamos el DCL del bloque:



$$W_F = (70 x \cos 25°) x 5 = 317.2 \text{ J}$$

b) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.

Del DCL podemos observar que a lo largo del eje Y, la suma de fuerzas es cero:

$$F \text{ Sen } 25° + N - mg = 0$$
$$N = mg - F \text{ Sen}25°$$

Reemplazando valores

$$N = 117.4 \text{ Newton}$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento

$$W_{fr} = - f_r x5 = - \mu N x5 = - 176.1 \text{ J}$$

c) El trabajo neto realizado sobre el bloque:

$$W_n = W_F + W_{mg} + W_N + W_{fr}$$

Observando el DCL del bloque podemos ver que el trabajo realizado por el peso mg y el realizado por la reacción normal N son nulos, entonces:

$$W_n = 317.2 - 176.1 = 141.1 \text{ J}$$

d) Si el bloque parte del reposo, cual es su velocidad después de recorrer los 5 m.

Por el teorema del trabajo y la energía:

$$W_n = \Delta E_K$$
$$W_n = \tfrac{1}{2} m v^2_f - \tfrac{1}{2} m v^2_i$$

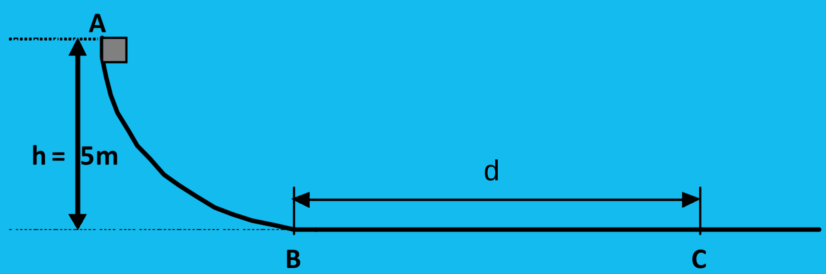
Como la velocidad inicial es $v_i = 0$, la velocidad final v_f será:

$$V_f = 4.34 \text{ m/s}$$

Ejemplo 32

Un bloque de 2 Kg situado en el punto A, a una altura de 5 m, se desliza partiendo del reposo por una rampa curva y lisa AB y luego resbala una distancia BC de 9 m sobre una superficie horizontal rugosa antes de llegar al reposo en C. Encontrar:

a) La velocidad del bloque en el punto B de la rampa.



Como la rampa AB es lisa se conserva la energía mecánica:

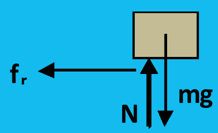
$$E_{MA} = E_{MB}$$
$$mgh = \tfrac{1}{2} mv^2_B$$

Reemplazando valores tendremos:

$$v_B = 9.9 \text{ m/s}$$

b) El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal BC.

Cuando el bloque se desplaza entre B y C sobre la superficie rugosa la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza no conservativa o de rozamiento. DCL del bloque en el tramo BC.



Cuando el sistema es no conservativo se cumple:

$$W_{nc} = W_n = W_{fr}$$

Considerando que el tramo BC es horizontal y considerándolo como nivel de referencia (NR)

$$W_{fr} = E_{MC} - E_{MB} = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2_C - \tfrac{1}{2}\, m\, v^2_B$$
$$W_{fr} = -\, f_r \times d = -\, \mu\, N\, d$$

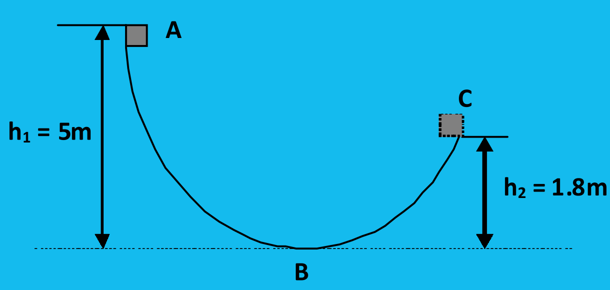
Como $v_C = 0$

$$-\tfrac{1}{2}\, m\, v^2_B = -\, \mu\, N\, d$$
$$\mu = m\, v^2_B / 2\, N\, d$$ reemplazando valores
$$\mu = 0.56$$

Ejemplo 33

Se suelta un bloque de masa m = 3 Kg desde el punto A. El tramo AB es liso y el tramo BC es rugoso. Encontrar:

a) La velocidad en el punto B.



Como el tramo AB es liso se conserva la energía mecánica total:

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$mgh_1 = ½\ m\ v^2_B$$

$$v_B = (2gh_1)^{1/2}$$ reemplazando valores

$$v_B = 9.9\ m/s$$

b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción en el tramo BC si la rapidez en C es 3.5 m/s

El tramo BC es rugoso y actúa la fuerza no conservativa o fuerza de rozamiento. En este tramo debe cumplirse:

$$W_{fr} = E_{MC} – E_{MB}$$

Encontrando los valores de las energías mecánicas en C y en B se tiene:

$$E_{MC} = ½\ m\ v^2_c + mgh_2 = 71.30\ J$$

$$E_{MB} = ½\ m\ v^2_B = 147.02\ J$$

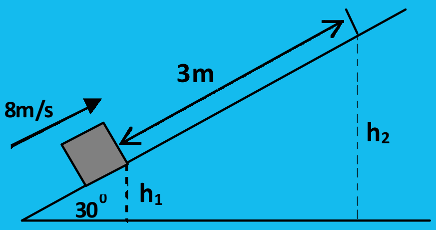
El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento será:

$$W_{fr} = 71.30 – 147.02 = - 75.72\ J$$

Ejemplo 34

Un bloque de 5 Kg se lanza con una velocidad de 8 m/s, sobre el plano inclinado, cuando esta a una altura h_1. El bloque alcanza el reposo después de recorrer 3 m a lo largo del plano y alcanzar la altura h_2. El plano está inclinado 30^0 respecto de la horizontal. Determinar:

a) El cambio en la energía cinética.



$$\Delta\ E_K = E_{Kf} – E_{Ki} = 0 – ½\ m\ v^2_i = - 160\ J$$

b) El cambio en la energía potencial gravitatoria.

$$\Delta\ E_P = E_{Pf} - E_{Pi} = mgh_2 - mgh_1 = mg\ (h_2 - h_1) = mg\ (3\ \text{Sen}\ 30^0)$$

$$\Delta\ E_P = 73.5\ \text{J}$$

c) La fuerza de rozamiento sobre el bloque (suponiendo que es constante).

$$W_{fr} = W_{nc} = \Delta\ E_K + \Delta\ E_P = -\ 160 + 73.5 = -\ 86.5\ \text{J}$$

$$W_{fr} = -\ f_r\ d$$

$$f_r = 28.8\ \text{N}$$

d) El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano inclinado.

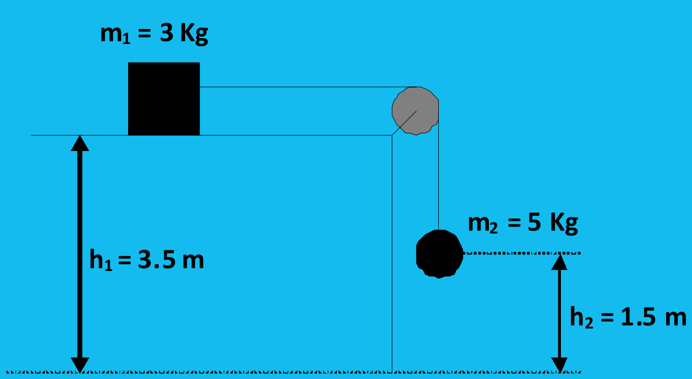
$$f_r = \mu\ N = \mu\ m\ g\ \text{Cos}\ 30^0$$

Reemplazando valores

$$\mu = 0.68$$

Ejemplo 35

El coeficiente de fricción entre el bloque de 3 Kg y la superficie que se ve en la figura es 0.4. Las masas están inicialmente en reposo. ¿Cuál es la rapidez de la masa de 5 Kg cuando ha caído una distancia vertical de 1.5 m?



Solución.

El problema puede ser resuelto de varias maneras usando los principios establecidos hasta ahora. La solución más recurrente es considerar la solución a partir de la segunda ley de newton para encontrar la aceleración con la que se desplazan los cuerpos y luego por consideraciones cinemáticas (MRUV) la velocidad.

La solución que emplearemos será utilizando los conceptos de energía y trabajo, para ello analicemos el movimiento de los cuerpos y las fuerzas involucradas. En la figura la posición inicial es la que se muestra y la posición final es cuando la masa de 5 Kg ha bajado la distancia de 1.5 m y la masa de 3 Kg ha recorrido una distancia horizontal de 1.5 m.

De la lectura del texto del problema podemos observar que en este sistema existe una fuerza no conservativa que es la fuerza de rozamiento entre m_1 y la superficie horizontal, por lo que debe cumplirse, que el cambio en la energía mecánica del sistema debe ser igual al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.

$$W_{fr} = E_{M\,f} - E_{M\,i} \qquad (1)$$

Desarrollando cada uno de los términos de la energía mecánica del sistema antes y después de bajar el bloque de 5 kg:

$$E_{M\,i} = m_1\,g\,h_1 + m_2\,g\,h_2$$

$$E_{M\,f} = m_1\,g\,h_1 + \tfrac{1}{2}\,m_1\,v^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2\,v^2$$

$$W_{fr} = -\,\mu\,mg\,h_2$$

Reemplazando en la ecuación (1) tendremos:

$$-\,\mu\,mg\,h_2 = \tfrac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v^2 - m_2\,g\,h_2$$

De donde obtenemos:

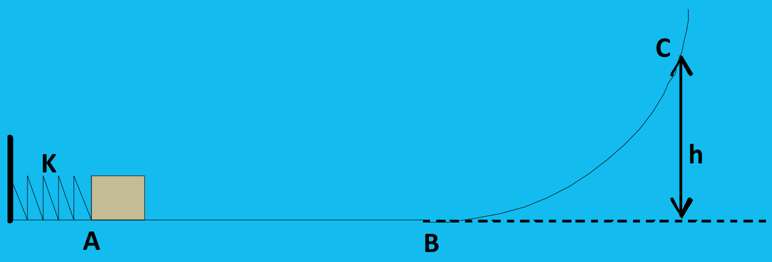
$$v = 3.74\ m/s$$

Desarrolle el mismo problema usando la segunda Ley de Newton para conocer la aceleración con la que se mueven las masas y usando cinemática la velocidad.

Ejemplo 36

Un bloque de 250 gr comprime 10 cm un resorte de constante K = 50 N/m en la posición A de una superficie horizontal lisa AB. Si se suelta el resorte el bloque se dispara y pasa por el punto B hasta alcanzar su máxima altura en C. Encontrar:

a) La energía mecánica en B.
b) Si la superficie BC es lisa cual es el valor de h.
c) Si la superficie BC es rugosa y se pierde el 30 % de la energía mecánica cual es el valor de h.



Solución:

a) La superficie AB es lisa por tanto se conserva la energía mecánica entre dichos puntos:

$$E_{MB} = E_{MA}$$

En A el bloque de 250 gr esta en reposo y comprime al resorte, si consideramos como NR la horizontal se tiene:

$$E_{MB} = ½ \ K \ x^2 = 0.25 \ J$$

b) Si la superficie BC es lisa se conserva la energía mecánica, se cumple:

$$E_{MC} = E_{MB}$$

Como el bloque alcanza el reposo en C se tiene.

$$mgh = 0.25 \quad \Longrightarrow \quad h = 0.10 \ m$$

c) La superficie BC es rugosa y el transito del bloque de BC se pierde el 30 % de la energía mecánica. Por tanto cuando llega al punto solo tiene el 70 % de la energía mecánica que tenía en B.

$$E_{MC} = 0.7 \ E_{MB}$$

$$mgh = 0.175 \quad \Longrightarrow \quad h = 0.07 \ m$$

Problema 1

Un bloque de 20 Kg esta en reposo sobre una superficie horizontal y sin rozamiento. Sobre el bloque se aplica una fuerza de 25 Newton, 25^0 por debajo de la horizontal. Si el bloque recorre la distancia de 45 m encontrar:

a) El trabajo realizado por la fuerza de 25 Newton.
b) El valor de la fuerza de reacción de la superficie sobre el bloque.
c) El cambio en la energía cinética del bloque.
d) La velocidad final del bloque.
e) La aceleración del bloque.
f) El tiempo que demora en recorrer la distancia de 45 m.

Problema 2

Una caja de 40 Kg inicialmente en reposo se empuja por un piso rugoso horizontal, mediante una fuerza horizontal de 130 Newton la distancia de 5 m. Si el coeficiente de rozamiento entre la caja y el piso es 0.3, encontrar:

a) El trabajo realizado por la fuerza de 130 Newton.
b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción.
c) El cambio en la energía cinética de la caja.
d) La velocidad final de la caja.

Problema 3

Un auto de 700 Kg viaja por una carretera a una velocidad de 60 Km/h. De repente el conductor aplica los frenos y el auto recorre una distancia de 65m antes de detenerse. Encontrar:

a) El cambio en la energía cinética del auto.
b) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento entre las llantas y el pavimento.
c) El coeficiente de rozamiento cinético.
d) La aceleración del auto.
e) El tiempo que demora en detenerse desde que se aplican los frenos.

Problema 4

Desde el borde de un acantilado de 35 m de altura se lanza una piedra de 250 gr verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 58 m/s, encontrar:

a) La energía cinética de la piedra al momento de lanzarla.
b) La altura máxima alcanzada por la piedra. Tome como NR el fondo del acantilado.
c) La energía cinética de la piedra cuando llega al fondo del acantilado.
d) La velocidad de la piedra cuando llega al fondo del acantilado.

Problema 5

Un bloque de 30 Kg se desplaza horizontalmente sobre una superficie sin rozamiento. Por el punto A pasa con una rapidez de 20 Km/h y por el punto B con una rapidez de 40 Km/h; la distancia entre A y B es de 300 m. Encontrar:

a) La energía cinética del bloque en el punto A y en el punto B.
b) El trabajo neto realizado sobre el bloque entre A y B.
c) El valor de la fuerza promedio aplicada sobre el bloque.
d) La aceleración del bloque.
e) El tiempo que demora en recorrer la distancia entre A y B.

Problema 6

Con una fuerza horizontal de 150 N se empuja una caja de 40 Kg, 6 m sobre una superficie horizontal rugosa. Si la caja se mueve a velocidad constante, encuentre:

a) El trabajo realizado por la fuerza de 150 N.
b) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.
c) El coeficiente de fricción cinética.

Problema 7

Una carretilla cargada con ladrillos tiene una masa total de 18 Kg y se jala con velocidad constante por medio de una cuerda. La cuerda está inclinada a 20^0 sobre la horizontal y la carretilla se mueve 20 m sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinético entre el suelo y la carretilla es 0.5. Encontrar:

a) La tensión en la cuerda.
b) Cuanto trabajo efectúa la tensión ejercida por la cuerda sobre la carretilla.
c) Cuál es la energía perdida debido a la fricción.

Problema 8

Una partícula de 0.6 Kg tiene una velocidad de 2 m/s en el punto A y una energía cinética de 7.5 J en B. Encontrar:

a) La energía cinética en A.
b) Su velocidad en B.
c) El trabajo total realizado sobre la partícula cuando se mueve de A a B.

Problema 9

Una caja de 40 Kg inicialmente en reposo se empuja 5 m por un piso rugoso horizontal con una fuerza horizontal de 130 Newton. Si el coeficiente de fricción entre la caja y el piso es de 0.3, encontrar:

a) El trabajo realizado por la fuerza aplicada.
b) La energía cinética perdida debido a la fricción.
c) El cambio en la energía cinética de la caja.
d) La velocidad final de la caja.

Problema 10

Una bala con una masa de 5 gr y una velocidad de 600 m/s penetra un árbol hasta una distancia de 4 cm.

a) Usando consideraciones de energía cual es la fuerza de fricción promedio que detiene la bala.
b) Suponiendo que la fuerza de fricción es constante, cual es la desaceleración de la bala.
c) Qué tiempo demora la bala en detenerse desde el momento en que ingresa al árbol.

Problema 11

En el tiempo t_i la energía cinética de una partícula de 40 gr es 30 J y su energía potencial es 10 J. Cierto tiempo después t_f, su energía cinética es 18 J.

a) Si actúan solo fuerzas conservativas sobre la partícula, cual es su energía potencial y su energía mecánica en el tiempo $t_{f.}$

b) Cuál es la rapidez de la partícula en el instante t_i y en t_f.

c) Si la energía potencial en el tiempo t_f es 5 J, ¿actúan fuerzas no conservativas sobre la partícula? Explique.

Problema 12

Se dispara una bala de cañón con una rapidez inicial de 150 m/s bajo un ángulo de 53^0 desde el borde de un acantilado de 60 m de altura. Encontrar:

a) La energía cinética de la bala al momento del disparo.

b) La máxima altura de la bala con relación al fondo del acantilado.

c) La energía cinética y la energía potencial de la bala en el punto de máxima altura.

d) La energía cinética y la velocidad de la bala cuando llega al fondo del acantilado.

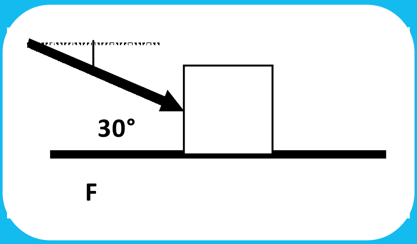
e) La energía cinética, la energía potencial y la velocidad de la bala a los 15 s después de haber sido disparada.

Problema 13

A consecuencia de la fuerza F el bloque que se muestra en la figura se desplaza con velocidad constante sobre una superficie horizontal rugosa. Si el coeficiente de rozamiento cinético es 0,2 y el trabajo realizado por F para mover el bloque una distancia de 20m es 200"3 J, determinar:

a) La fuerza F.

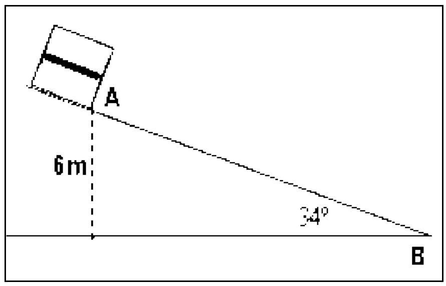
b) El trabajo de la fuerza de fricción.



Problema 14

Se suelta, partiendo del reposo, un bloque de 10 Kg. desde la parte superior de un plano inclinado rugoso, como se muestra en la figura. Si el coeficiente de rozamiento cinético es 0.4, determinar:

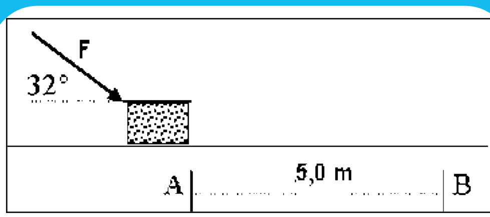
a) El trabajo realizado por la fuerza de fricción.
b) El trabajo debido al peso.
c) El trabajo neto realizado sobre el bloque y la velocidad con la que llega al punto B.



Problema 15

La figura muestra un bloque de 8 kg moviéndose sobre una superficie rugosa (μ_c = 0.16) por acción de una fuerza F = 30 Newton. En un intervalo AB = 5,0m de su movimiento, pasa por el punto A con una velocidad de 1.5 m/s, encontrar:

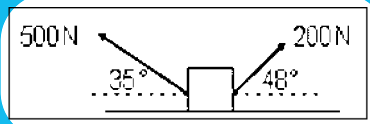
a) El trabajo neto realizado en el tramo AB.
b) La velocidad del bloque cuando pasa por el punto B, y el tiempo empleado en recorrer AB.



Problema 16

Sobre un bloque de 150 Kg. se aplican las fuerzas mostradas en la figura. El coeficiente cinético de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,25. Cuando el bloque se desplaza 2.50m, encontrar:

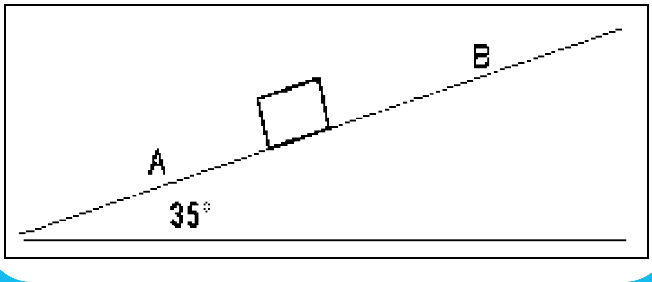
a) El trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque.
b) El valor del trabajo neto.
c) Si al inicio del intervalo de 2.50m tiene una velocidad de 2,5 m/s, encontrar la velocidad del bloque al final del intervalo.



Problema 17

Desde la parte inferior de un plano inclinado rugoso se lanza un bloque de 35kg. El bloque sube por el plano inclinado (coeficiente cinético de rozamiento ì = 0.25) y se detiene en el punto B (ver figura). Considerando un intervalo AB de su movimiento igual a 10 m, encontrar:

a) El DCL del bloque.
b) El trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque al recorrer AB.
c) El trabajo neto.
d) La velocidad del bloque cuando pasa por el punto A.



Problema 18

Sobre un bloque actúa una fuerza horizontal que varia con la posición de acuerdo a la ecuación $F_x = (-5 + 2x)$ Newton, en donde x se mide en metros.

a) Graficar F_x versus x, para valores de x comprendidos entre x = 0 y x = 5 m. Determinar el trabajo de la fuerza F_x cuando el cuerpo se desplaza desde:

b) x = 0m hasta x = 2,5m.

c) x = 2,5m hasta x = 4,0m.

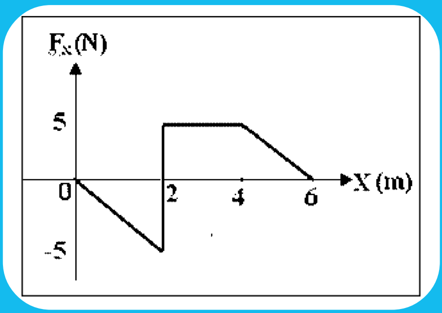
d) x = 0m hasta x = 4m

Problema 19

En el grafico se muestra la fuerza que experimenta un cuerpo de 0,25 Kg. que se desplaza en el eje X.

a) Halle el trabajo hecho por la fuerza cuando la partícula se mueve de x = 0m hasta x = 6 m.

b) ¿Cuál es la energía cinética del cuerpo en x = 6 m, si en x = 0 su rapidez es de 20 m/s?



Problema 20

Se dispara un proyectil de 1,5 Kg. de masa con una rapidez inicial de 150 m/s y ángulo de 53° encima de la horizontal, desde el borde de un acantilado de 60m de altura. Encontrar:

a) La energía cinética del proyectil al momento del disparo.

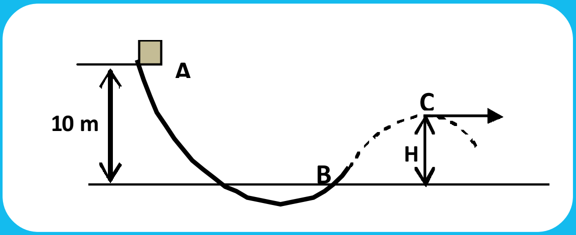
b) La máxima altura que alcanza el proyectil con relación al fondo del acantilado.

c) La energía cinética y la energía potencial del proyectil en el punto de máxima altura con relación al fondo del acantilado.

Problema 21

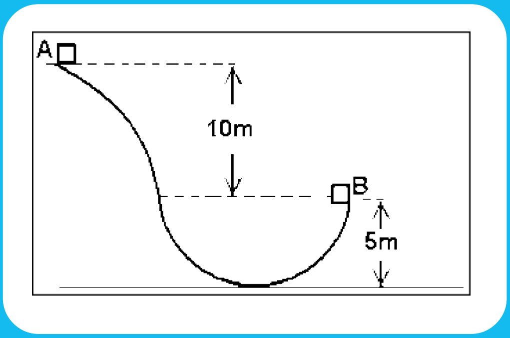
Un bloque de 1kg de masa que parte del reposo en A; resbala por una rampa y pierde entre A y B el 20% de su energía mecánica por efecto del rozamiento. Sale disparado en B y alcanza en el punto C su máxima altura y una rapidez es 6m/s, determinar:

a) El trabajo desarrollado por la fuerza de rozamiento.
b) La altura máxima H.



Problema 22

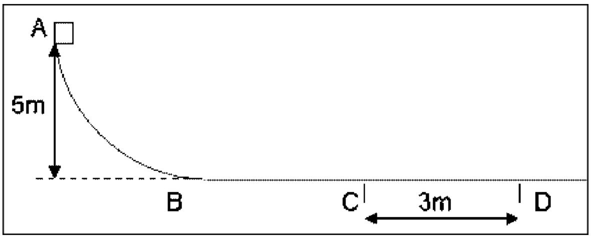
a) Determine el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento sobre el bloque de masa 10Kg cuando este se desplaza sobre la superficie curva rugosa, partiendo del punto A con una rapidez de 5m/s y llegando al punto B con un rapidez de cero m/s .
b) Si la superficie fuese lisa, con qué rapidez llegaría el bloque al punto B.



Problema 23

Un bloque de 4 kg desliza, partiendo del reposo en A, sobre una superficie ABCD como se muestra en la figura. El tramo ABC es liso y el tramo CD, de 3m de longitud es rugoso con coeficiente de rozamiento $ì_c = 0.3$. Determinar:

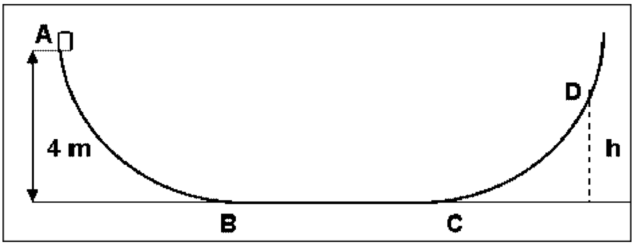
a) La velocidad del bloque en B y C.
b) La fuerza resultante en el tramo CD.
c) El trabajo total en el recorrido ABCD.
d) La velocidad del bloque cuando pasa por D.



Problema 24

Un bloque de 20 Kg parte del reposo en A y se traslada sobre una superficie rugosa ABCD. En el tramo AB, el bloque pierde un 15 % de su energía mecánica cuando llega a B. En el tramo BC pierde un 30 % de su energía mecánica cuando llega a C, y en el tramo CD pierde un 10 % de su energía mecánica cuando llega a D con velocidad cero. Encontrar:

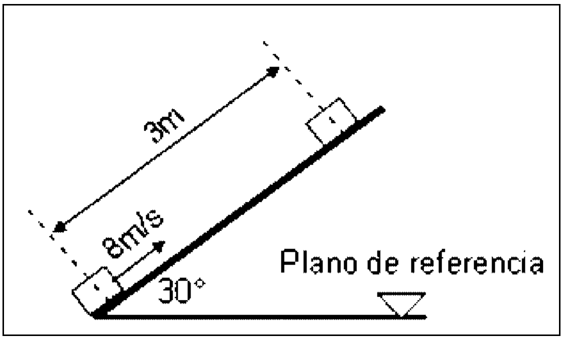
a) La energía cinética del bloque en B.
b) La energía cinética del bloque en C.
c) La altura h que alcanza en el punto D.



Problema 25

Un bloque de 5kg es lanzado hacia arriba desde la base de un plano inclinado 30° respecto de la horizontal, con una rapidez inicial de 8m/s. Si el bloque alcanza el reposo después de recorrer 3m a lo largo del plano inclinado rugoso. Determinar:

a) El cambio en la energía cinética.
b) El cambio en la energía potencial gravitacional, respecto del plano de referencia.
c) La fuerza de rozamiento sobre el bloque.
d) El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano inclinado.



Problema 26

Un resorte sin deformación de longitud 20cm es suspendido del techo. Si en su extremo libre se le suspende un bloque de 1kg de masa se estira 10 cm.

a) Determinar la constante k del resorte.
b) ¿Cuál es la energía potencial elástica del resorte cuando se estira 15cm?

Problema 27

Para almacenar una energía de 0,5J en un resorte hay que estirarlo 10cm.

a) Determinar la constante elástica «k» del resorte en N/m.
b) ¿Cuánta energía adicional se almacenara en el resorte si se le estira 30cm?

Problema 28

En la figura se muestra un cuerpo de masa m = 5kg que parte del reposo en el punto A, desplazándose por la superficie curva sin rozamiento hasta chocar con el resorte horizontal de constante k=1000 N/m, alcanzando el resorte una compresión máxima x = 40cm, determinar:

a) La altura h.
b) La rapidez en el punto B.