EJERCICIOS RESUELTOS
DE
MECÁNICA CLÁSICA

Versión Electrónica

EDMUNDO LAZO NÚÑEZ

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ

ARICA 2010

NOTA INTRODUCTORIA

Este libro de ejercicios resueltos de Mecánica Clásica (versión electrónica) es una recopilación de una pequeña parte de la variedad de ejercicios que he utilizado en la docencia del curso de Mecánica Clásica que se dicta todos los semestres en el Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería de la Universidad de Tarapacá.

Cada uno de los ejercicios de este libro está resuelto con todo detalle y además cuenta con todos los dibujos y esquemas que son necesarios para una mejor comprensión de la metodología de solución del problema. Adicionalmente, antes de empezar a desarrollar cada problema, se pone una nota introductoria, donde se hace un esquema de los elementos fundamentales necesarios para resolver el problema, es decir, cuáles son las leyes o ecuaciones necesarias y cuáles son las posibles metodologías para la solución.

El objetivo de este libro de ejercicios resueltos de Mecánica Clásica (versión electrónica) no es sólo encontrar el resultado final de un problema, ni sólo describir la metodología de resolución de problemas, que de por sí ya son buenos objetivos, sino que, además, y tal vez más importante para mi, el objetivo es utilizar el ejercicio resuelto como un método para discutir, aplicar y aprender las materias analizadas en clases o dadas de tarea. Por esta razón, la solución de cada ejercicio resulta de una extensión mayor a la normalmente utilizada en los textos de resolución de ejercicios que han sido publicados.

Estoy convencido que el uso de los ejercicios resueltos, en conjunto con el estudio paralelo de las materias teóricas contenidas en libros y apuntes de clases, será de mucha utilidad para ayudar al estudiante a la mejor comprensión de los fenómenos físicos de la Mecánica Clásica.

La versión electrónica del libro de ejercicios resueltos de Mecánica Clásica tiene la ventaja adicional que el alumno puede bajarla desde intranet y estudiar cada capítulo por separado las veces que quiera y donde quiera.

Dr. Edmundo Lazo Núñez
Profesor Titular
Marzo de 2010

ÍNDICE

CAPÍTULO 1
CINEMÁTICA

Ejercicio (1.1) En el momento en que se enciende la luz verde en un semáforo, un auto arranca con aceleración constante $a_a = 2.5\left(m/s^2\right)$. En el mismo momento, un camión que lleva una velocidad constante $v_c = 10\left(m/s\right)$ alcanza al auto y lo pasa.

a) Construya un gráfico velocidad versus tiempo para dos móviles,

b) ¿a qué distancia del punto de partida, el auto alcanzará al camión?,

c) ¿qué velocidad llevará el auto en ese momento?

Nota: *Las ecuaciones de movimiento para el caso en que la aceleración $\vec{a}$ es un vector constante son:*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{1}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \tag{2}$$

En el caso de una partícula moviéndose en una única dirección, el eje X por ejemplo, las ecuaciones de movimiento quedan de la siguiente manera:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{3}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{4}$$

Solución:

a) Construya un gráfico velocidad versus tiempo para los dos móviles

Las ecuaciones de movimiento, considerando $v_x = v$, $v_{0x} = v_0$, $a_x = a$, quedan

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2; \qquad v = v_0 + at \tag{5}$$

Consideremos como origen del sistema de referencia el punto donde ambos vehículos inician su movimiento, el semáforo en este caso. Por lo tanto, se cumple que $x_{0a} = x_{0c} = 0$. Donde los subíndices a y c, se refieren al auto y al camión, respectivamente.

Para el auto con aceleración constante a_a que parte del reposo ($v_{0a} = 0$), las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$x_a = \frac{1}{2} a_a t^2; \qquad v_a = a_a t \tag{6}$$

Por lo tanto, para el auto, el gráfico velocidad tiempo es una recta con pendiente positiva que parte del origen (ver la curva roja en la Fig. (1.1.1)). Para el camión que se mueve con velocidad v_c constante, sus ecuaciones de movimiento son:

$$x_c = v_{0c} t \qquad v_c = v_{0c} \tag{7}$$

Por lo tanto, el gráfico velocidad tiempo es una recta con pendiente cero, es decir, paralela al eje t (ver Fig. (1.1.1))

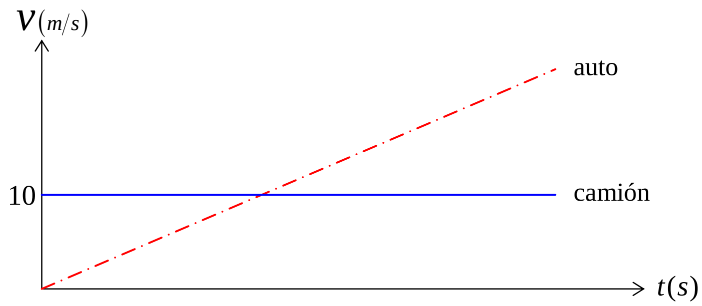

Figura (1.1.1)

b) ¿a qué distancia del punto de partida, el auto alcanzará al camión?

Reemplazando todos los datos conocidos: $v_{0a} = 0$, $a_a = 2.5\left(m/s^2\right)$ y $v_c = 10\left(m/s\right)$ en las ecuaciones (6) y (7), tenemos

$$x_a = \frac{1}{2} 2.5\left(m/s^2\right) t^2 \tag{8}$$

$$x_c = 10\left(m/s\right) t \tag{9}$$

$$v_a = 2.5\left(m/s^2\right) t \tag{10}$$

$$v_c = 10\left(m/s\right) \tag{11}$$

El auto y el camión se encontrarán cuando sus coordenadas x_a y x_c sean iguales, es decir, $x_a = x_c$. Igualando (8) y (9), se tiene:

$$\frac{1}{2} 2.5\left(m/s^2\right) t^2 = 10\left(m/s\right) t \tag{12}$$

Existen dos soluciones de esta ecuación de segundo grado: $t = 0\left(s\right)$, que corresponde al tiempo al inicio del movimiento, y el tiempo de encuentro t_e:

$$t_e = 8(s) \tag{13}$$

Reemplazando este tiempo $t = t_e = 8(s)$ en la relación (8) o (9), se puede calcular la distancia $x_c = x_a$ medida desde el punto de partida, hasta el punto en la cual el auto alcanza al camión,

$$x_c = 10\left(m/s\right) \times 8(s) = 80(m) \tag{14}$$

$$x_a = \frac{1}{2} 2.5\left(m/s^2\right) 8^2\left(s^2\right) = 80(m) \tag{15}$$

c) ¿qué velocidad llevará el auto en ese momento?

Reemplazando el dato $t_e = 8(s)$ en la relación (10), se obtiene la velocidad del auto en el momento del encuentro de los móviles:

$$v_a = 2.5\left(m/s^2\right) \times 8(s) = 20\left(m/s\right) \tag{16}$$

En la Fig. (1.1.2) se muestran todos los datos obtenidos para ambos móviles.

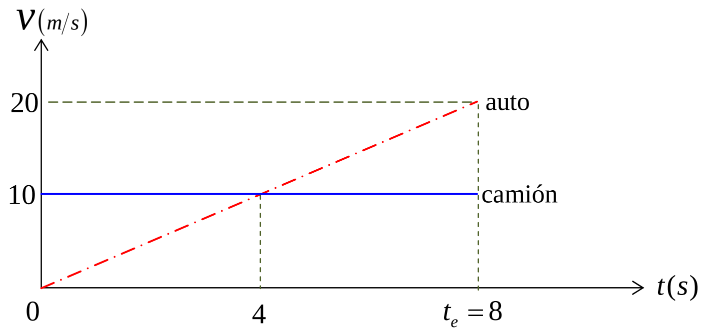

Figura (1.1.2)

Nótese que la distancia recorrida por ambos móviles hasta el punto de encuentro, $x_c = x_a$, al final de los $8(s)$, se puede calcular también como el área bajo la curva del gráfico velocidad-tiempo mostrado en la Fig. (1.1.2). El área bajo la curva asociada al camión viene dada por el área del rectángulo que se forma hasta $t = 8(s)$:

$$x_c = área_{rectángulo} = \Delta t \times \Delta v_c = 8(s) \times 10\left(m/s\right) = 80(m) \tag{17}$$

El área bajo la curva asociada al auto viene dada por el área del triángulo que se forma hasta $t = 8(s)$, considerando la línea segmentada inclinada:

$$x_a = área_{triángulo} == \frac{1}{2} \Delta t \times \Delta v_a = \frac{1}{2} 8(s) \times 20(m/s) = 80(m) \tag{18}$$

Ejercicio (1.2) El maquinista de un tren que lleva una velocidad v_1 ve con horror que se está acercando a un tren de carga que avanza por la misma vía. El tren de carga se mueve en el mismo sentido con una velocidad constante menor v_2. Cuando el tren de carga se encuentra a una distancia d delante del maquinista, éste pone los frenos y da a su tren una retardación a (ver Fig. (1.2.1)). Demostrar que para que se produzca el choque, la distancia de separación inicial d entre los trenes debe cumplir la siguiente condición:

$$d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$$

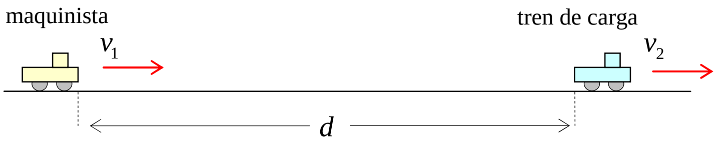

Figura (1.2.1)

Nota: *Las ecuaciones de movimiento en una dimensión, para el caso de aceleración* a *constante, son:*

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{1}$$

$$v(t) = v_0 + at \tag{2}$$

Adicionalmente, se dice que una partícula "acelera" si su rapidez "aumenta" constantemente; matemáticamente esto implica que el producto de la aceleración a *por la velocidad* v *es un número positivo:*

$$movimiento \text{ "}acelerado\text{"} \quad \rightarrow \quad av > 0 \tag{3}$$

A su vez, se dice que una partícula "retarda" si su rapidez "disminuye" constantemente; matemáticamente esto implica que el producto de la aceleración a *por la velocidad* v *es un número negativo:*

$$movimiento \text{ "}retardado\text{"} \quad \rightarrow \quad av < 0 \tag{4}$$

Si no existe aceleración ($a = 0$ *), entonces se cumple que*

$$movimiento \text{ "sin } aceleración \text{ "} \quad \rightarrow \quad av = 0 \tag{5}$$

En este caso la partícula se mueve con velocidad constante.

Solución:

Pongamos el origen de nuestro sistema de referencia en la posición del maquinista en el momento que ve al tren de carga y pone los frenos. (tren más a la izquierda en la Fig. (1.2.1)). Llamemos $x_1(t)$ a la posición del maquinista y $x_2(t)$ a la posición del tren de carga. El choque se producirá cuando las coordenadas de posición de cada tren, respecto del origen del sistema de referencia, sean las mismas, es decir, cuando

$$x_1(t) = x_2(t) \tag{6}$$

Entonces, las coordenadas de ambos trenes son las siguientes:

$$x_1 = x_{01} + v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 \tag{7}$$

$$x_2 = x_{02} + v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \tag{8}$$

Para el tren con velocidad v_1 sabemos que $x_{01} = 0$ y que $a_1 = -a$, porque este tren pone los frenos, es decir, "retarda". Para el tren carguero que viaja con velocidad constante v_2, su aceleración es nula $a_2 = 0$ y se tiene que $x_{02} = d$. Reemplazando estos valores en las relaciones (7) y (8), nos queda:

$$x_1 = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 \tag{9}$$

$$x_2 = d + v_2 t \tag{10}$$

Igualando las coordenadas $x_1(t) = x_2(t)$, se tiene:

$$v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 = d + v_2 t \tag{11}$$

Reordenando, escribimos

$$\frac{1}{2} a t^2 - (v_1 - v_2) t + d = 0 \tag{12}$$

La solución de esta ecuación de segundo grado se escribe:

$$t = \frac{(v_1 - v_2) \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 4\left(\frac{1}{2} a\right) d}}{a} \tag{13}$$

Para que se produzca el choque, el tiempo t debe ser una magnitud física real. En caso contrario, el tren con velocidad v_1 que va frenando alcanzará a detenerse antes del choque. Para que t sea real, la cantidad subradical debe ser mayor o igual que cero, es decir,

$$(v_1 - v_2)^2 - 4\left(\frac{1}{2}a\right)d \geq 0 \tag{14}$$

Reordenando, nos queda

$$d \leq \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \tag{15}$$

La solución al problema viene dada por la desigualdad estricta:

$$d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \tag{16}$$

Para el caso de la igualdad

$$d = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \tag{17}$$

La relación (13) entrega un único tiempo de encuentro t_0, dado por

$$t_0 = \frac{(v_1 - v_2)}{a} \tag{18}$$

Para este tiempo t_0, la velocidad del tren que va frenando viene dada por

$$v_1(t_0) = v_1 - at_0 \tag{19}$$

Reemplazando los datos, nos queda

$$v_1(t_0) = v_1 - a\frac{(v_1 - v_2)}{a} = v_1 - (v_1 - v_2) \tag{20}$$

$$v_1(t_0) = v_2 \tag{21}$$

Es decir, en el tiempo $t = t_0$, las velocidades de los dos trenes resultan ser iguales, y ambos están, instantáneamente, moviéndose juntos; pero en cualquier instante posterior, el tren que está detrás disminuye su velocidad porque va "retardando", por lo tanto, dejan de estar juntos y no se produce nunca un choque en este caso. Esto se puede ver más claramente si calculamos la velocidad $v_1(t)$ del tren que va frenando, en un tiempo mayor $t = t_0 + \Delta t$, donde Δt es un infinitésimo de tiempo. Usando la relación (19), escribimos:

$$v_1(t_0 + \Delta t) = v_1 - a(t_0 + \Delta t) = v_1 - at_0 - a\Delta t \tag{22}$$

Pero, como vimos en (19) y (21),

$$v_1 - at_0 = v_2 \tag{23}$$

Luego, la relación (22) queda

$$v_1(t_0 + \Delta t) = v_2 - a\Delta t \tag{24}$$

Esto significa que la velocidad del tren que va frenando es cada vez menor que la velocidad constante v_2 del tren carguero que va delante y por lo tanto va quedándose atrás cada vez más. En consecuencia, nunca habrá choque si $t = t_0$, por lo tanto, la distancia d debe cumplir la desigualdad estricta:

$$d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \tag{25}$$

Ejercicio (1.3) Estudio del gráfico velocidad versus tiempo para una partícula.

La Fig. (1.3.1) muestra un gráfico que representa la velocidad de un móvil (una partícula) en trayectoria recta a lo largo del eje x, en el que para $t = 0$, $x_0 = 0$.

a) Obtenga la aceleración en cada tramo

b) En cada tramo determine si el móvil (partícula) acelera o retarda y diga para dónde viaja.

c) Calcule el desplazamiento Δx en cada tramo y la distancia total recorrida D.

d) Haga un gráfico de la aceleración versus tiempo.

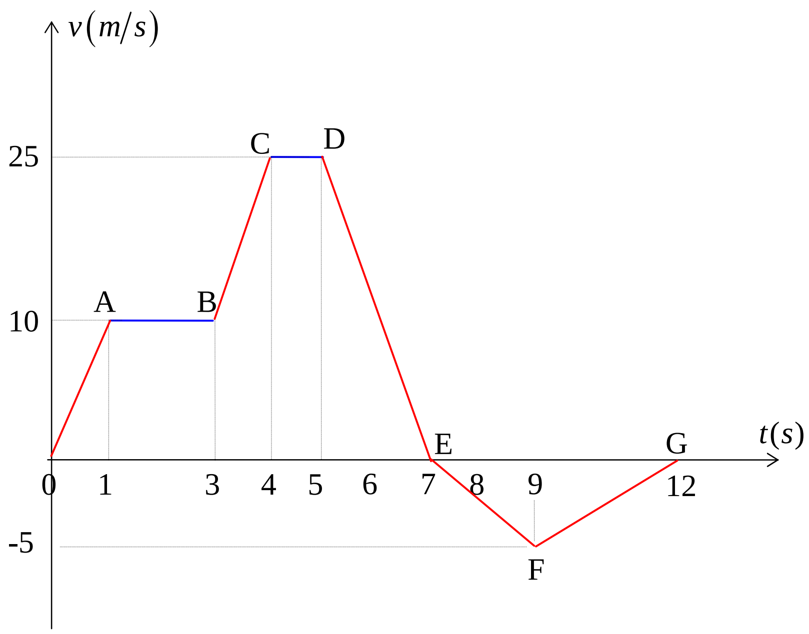

Figura (1.3.1)

Nota: *La aceleración* a *es la derivada de la velocidad* v *respecto al tiempo, es decir,* $a = \frac{dv}{dt}$.

Por otra parte, en términos gráficos, la derivada $\frac{dv}{dt}$ *es la pendiente geométrica a la curva en el gráfico velocidad versus tiempo. Por lo tanto, la pendiente de la curva velocidad nos dará la aceleración en cada tramo. Dado que las curvas del gráfico velocidad versus tiempo son rectas, entonces existe una única pendiente para cada recta, esto implica que en cada tramo la aceleración es una constante, esto es:*

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = cte. \tag{1}$$

En cada tramo, la partícula (el móvil) anda más rápido o "acelera", si los signos de la velocidad y la aceleración son iguales ($a\,v > 0$ *), y el móvil va deteniéndose o "retarda", si los signos de la velocidad y la aceleración son distintos (* $a\,v < 0$ *).*

Gráficamente, al área A *bajo la curva velocidad versus tiempo coincide con la integral* $\int_{t_1}^{t_2} vdt$*, la cual es justamente la definición de desplazamiento* Δx *en una dimensión:*

$$\text{área} = A = \Delta x \equiv x_f - x_i = \int_{t_i}^{t_f} vdt \tag{2}$$

En el gráfico velocidad versus tiempo, se puede considerar que las áreas son negativas cuando la velocidad es negativa. Podemos calcular el desplazamiento Δx *y la distancia recorrida* D *en base a las áreas considerando sus respectivos signos:*

El desplazamiento Δx *de la partícula corresponde a la suma de todas las áreas* A_j *con signos positivos y negativos:*

$$\Delta x = x_f - x_i \equiv \sum_{j=1}^{j=N} A_j \tag{3}$$

La distancia D *recorrida por la partícula corresponde a la suma de todas las áreas en valor absoluto*

$$D \equiv \sum_{j=1}^{j=N} \left| A_j \right| \tag{4}$$

Para el caso de movimiento con aceleración constante, recordemos que los diferentes tipos de áreas que nos encontramos en estos gráficos son:

$$A_{\text{rectángulo}} = b\,h; \quad A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} b\,h; \quad A_{\text{trapecio}} = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) h \tag{5}$$

donde b *se refiere a la base de la figura y* h *a la altura. Para el trapecio existen dos bases distintas* b_1 *y* b_2*. El trapecio siempre se puede descomponer como la suma de las áreas de un triángulo y de un rectángulo..*

Solución:

Tramo 0A: velocidad positiva ($v > 0$) y pendiente positiva ($a > 0$)

La aceleración vale

$$a_{0A} = \frac{10(m/s) - 0(m/s)}{1(s) - 0(s)} = 10\left(m/s^2\right) \tag{6}$$

En este tramo, el movimiento es acelerado porque la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo: $a\,v > 0$. El móvil viaja hacia la derecha ($v > 0$).

El desplazamiento Δx_{0A} en el tramo $0 - A$, viene dado por área del triángulo $0 - 1 - A$

$$\Delta x_{0A} = \frac{1}{2} 1(s) \times 10(m/s) = 5(m) \tag{7}$$

El desplazamiento total Δx_{0A} del origen hasta el punto A, viene dado por

$$\Delta x_{0A} = 5(m) \tag{8}$$

La distancia total recorrida D_{0A} vale $D_{0A} = |\Delta x_{0A}|$

$$D_{0A} = 5(m) \tag{9}$$

Ambos resultados coinciden porque no hay áreas negativas.

Tramo AB: velocidad positiva ($v > 0$) y pendiente cero ($a = 0$)

La aceleración vale

$$a_{AB} = \frac{10(m/s) - 10(m/s)}{3(s) - 1(s)} = 0\left(m/s^2\right) \tag{10}$$

En este tramo la velocidad es constante, luego el móvil no acelera. Sin embargo, el móvil continua viajando hacia la derecha ($v > 0$).

El desplazamiento Δx_{AB} en el tramo $A - B$ viene dado por área del rectángulo $A - 1 - 3 - B$

$$\Delta x_{AB} = 2(s) \times 10(m/s) = 20(m) \tag{11}$$

El desplazamiento total Δx_{0B} desde el origen hasta el punto B, viene dado por la suma de los desplazamientos: $\Delta x_{0B} = \Delta x_{0A} + \Delta x_{AB}$, donde Δx_{0A} viene dado por (7)

$$\Delta x_{0B} = 5(m) + 20(m) = 25(m) \tag{12}$$

La distancia total recorrida D_{0B} vale $D_{0B} = D_{0A} + |\Delta x_{AB}|$

$$D_{0B} = 5(m) + 20(m) = 25(m) \tag{13}$$

Tramo BC: velocidad positiva ($v > 0$) y pendiente positiva ($a > 0$)

La aceleración vale

$$a_{BC} = \frac{25(m/s) - 10(m/s)}{4(s) - 3(s)} = 15(m/s^2) \tag{14}$$

En este tramo el móvil acelera porque la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo: $a\,v > 0$.

El móvil continua moviéndose hacia la derecha ($v > 0$).

El desplazamiento Δx_{BC} en el tramo $B - C$, viene dado por el área del trapecio $B - 3 - 4 - C$

$$\Delta x_{BC} = \left(\frac{10(m/s) + 25(m/s)}{2} \right) \left(4(s) - 3(s) \right) = 17.5(m) \tag{15}$$

El desplazamiento total Δx_{0C} desde el origen hasta el punto C, viene dado por la suma de los desplazamientos: $\Delta x_{0C} = \Delta x_{0B} + \Delta x_{BC}$, donde Δx_{0B} viene dado por (12)

$$\Delta x_{0C} = 25(m) + 17.5(m) = 42.5(m) \tag{16}$$

La distancia total recorrida D_{0C} vale $D_{0C} = D_{0B} + |\Delta x_{BC}|$

$$D_{0C} = 25(m) + 17.5(m) = 42.5(m) \tag{17}$$

Tramo CD: velocidad positiva ($v > 0$) y pendiente cero ($a = 0$)

La aceleración vale

$$a_{CD} = \frac{25(m/s) - 25(m/s)}{5(s) - 4(s)} = 0(m/s^2) \tag{18}$$

En este tramo la velocidad es constante, luego el móvil no acelera. Sin embargo, continua moviéndose hacia la derecha ($v > 0$).

El desplazamiento Δx_{CD} en el tramo $C - D$, viene dado por el área del rectángulo $C - 4 - 5 - D$

$$\Delta x_{CD} = 1(s) \times 25(m/s) = 25(m) \tag{19}$$

El desplazamiento total Δx_{0D} desde el origen hasta el punto D, viene dado por la suma de los desplazamientos: $\Delta x_{0D} = \Delta x_{0C} + \Delta x_{CD}$, donde Δx_{0C} viene dado por (16)

$$\Delta x_{0D} = 42.5(m) + 25(m) = 67.5(m) \tag{20}$$

La distancia total recorrida D_{0D} vale $D_{0D} = D_{0C} + |\Delta x_{CD}|$

$$D_{0D} = 42.5(m) + 25(m) = 67.5(m) \tag{21}$$

Tramo DE: velocidad positiva ($v > 0$) y pendiente negativa ($a < 0$)
La aceleración vale

$$a_{DE} = \frac{0(m/s) - 25(m/s)}{7(s) - 5(s)} = -12.5(m/s^2) \tag{22}$$

En este tramo el móvil retarda porque la velocidad y la aceleración tienen distinto signo: $a\,v < 0$. El móvil continua moviéndose hacia la derecha ($v > 0$).
El desplazamiento Δx_{DE} en el tramo $D-E$, viene dado por el área del triángulo $D-5-7$

$$\Delta x_{DE} = \frac{1}{2} 2(s) \times 25(m/s) = 25(m) \tag{23}$$

El desplazamiento total Δx_{0E} desde el origen hasta el punto E, viene dado por la suma de los desplazamientos: $\Delta x_{0E} = \Delta x_{0D} + \Delta x_{DE}$, donde Δx_{0D} viene dado por (20)

$$\Delta x_{0E} = 67.5(m) + 25(m) = 92.5(m) \tag{24}$$

La distancia total recorrida $D_{0E} = D_{0D} + |\Delta x_{DE}|$ viene dada por:

$$D_{0E} = 67.5(m) + 25(m) = 92.5(m) \tag{25}$$

En todos los tramos que hemos estudiado, la distancia total recorrida D coincide con el desplazamiento Δx, porque todas las áreas han sido positivas. Nótese que el móvil se detiene en el punto E, a $8(s)$ de iniciado el movimiento.

Tramo EF: velocidad negativa ($v < 0$) y pendiente negativa ($a < 0$)
La aceleración vale

$$a_{EF} = \frac{-5(m/s) - 0(m/s)}{9(s) - 7(s)} = -2.5(m/s^2) \tag{26}$$

En este tramo el móvil acelera porque la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo: $a\,v > 0$.

Ahora el móvil viaja hacia la izquierda, acercándose al origen ($v < 0$).

El desplazamiento Δx_{EF} en el tramo $E - F$, viene dado por el área del triángulo $E - F - 9$

$$\Delta x_{EF} = \frac{1}{2} 2(s) \times (-5(m/s)) = -5(m) \tag{27}$$

El desplazamiento Δx_{EF} tiene signo negativo, ya que el triángulo se halla bajo la línea horizontal de los tiempos, debido a que la velocidad es negativa. Físicamente, esto significa que la partícula está viajando en dirección contraria a la que llevaba anteriormente, es decir, comenzó a devolverse hacia el origen.

El desplazamiento total Δx_{0F} desde el origen hasta el punto F, viene dado por la suma de los desplazamientos: $\Delta x_{0E} = \Delta x_{0E} + \Delta x_{EF}$, donde Δx_{0E} viene dado por (24)

$$\Delta x_{0F} = 92.5(m) - 5(m) = 87.5(m) \tag{28}$$

Por lo tanto, en este caso el desplazamiento $\Delta x_{0F} = 87.5(m)$ es menor que el desplazamiento anterior $\Delta x_{0E} = 92.5(m)$, es decir, $\Delta x_{0F} < \Delta x_{0E}$, porque la partícula se está acercando hacia el origen.

La distancia total recorrida D_{0F} desde el origen hasta el punto F, viene dada por: $D_{0F} = D_{0E} + |\Delta x_{EF}|$

$$D_{0F} = 92.5(m) + 5(m) = 97.5(m) \tag{29}$$

Tramo FG: velocidad negativa ($v < 0$) y pendiente positiva ($a > 0$)

La aceleración vale

$$a_{FG} = \frac{0(m/s) - (-5(m/s))}{12(s) - 9(s)} = 1.67(m/s^2) \tag{30}$$

En este tramo el móvil retarda porque la velocidad y la aceleración tienen distinto signo: $a\,v < 0$.

El móvil continua viajando hacia la izquierda, es decir, acercándose al origen ($v < 0$).

El desplazamiento Δx_{FG} en el tramo $F - G$, viene dado por el área del triángulo $9 - F - 12$

$$\Delta x_{FG} = \frac{1}{2} 3(s) \times (-5(m/s)) = -7.5(m) \tag{31}$$

El desplazamiento Δx_{FG} tiene signo es negativo, ya que el triángulo se halla bajo la línea horizontal de los tiempos, debido a que la velocidad es negativa.

El desplazamiento total Δx_{0G} desde el origen hasta el punto G, viene dado por la suma de los desplazamientos $\Delta x_{0G} = \Delta x_{0F} + \Delta x_{FG}$, donde Δx_{0F} viene dado por (28)

$$\Delta x_{0G} = 87.5(m) - 7.5(m) = 80(m) \tag{32}$$

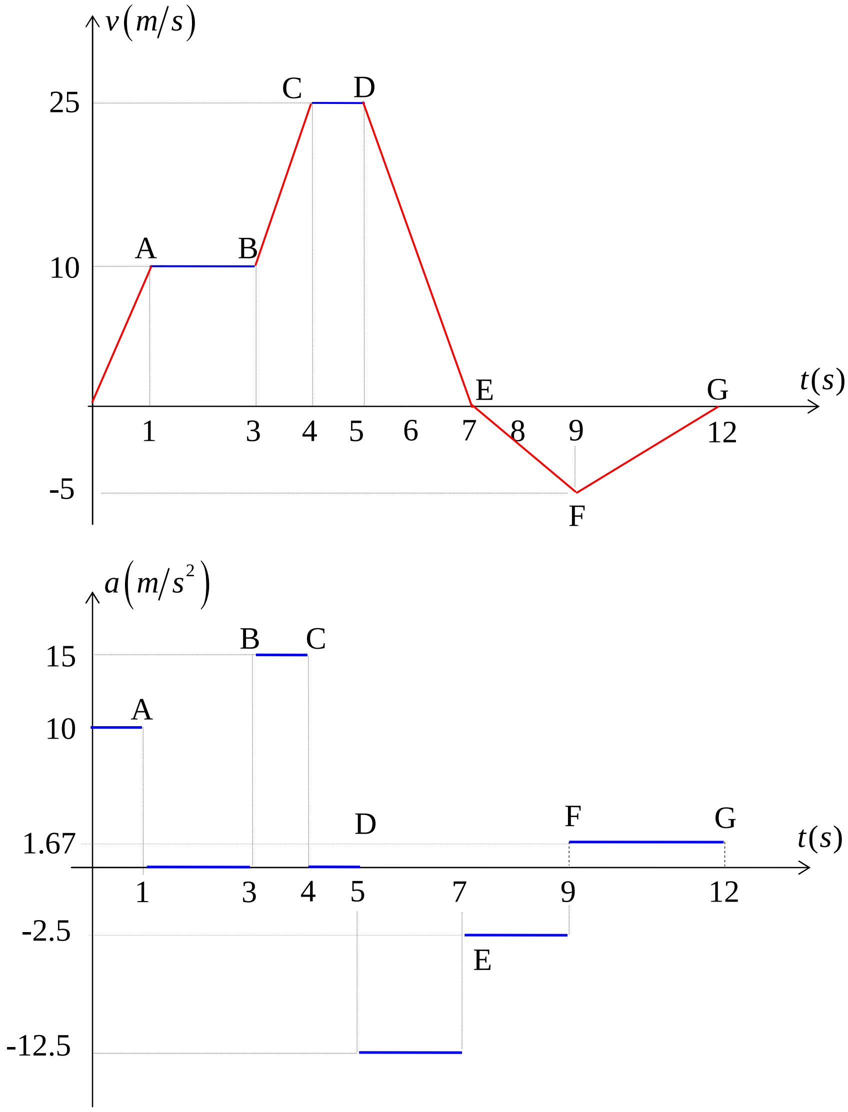

Figura (1.3.2)

Por lo tanto, en este caso el desplazamiento $\Delta x_{0G} = 80(m)$ es menor que el desplazamiento $\Delta x_{0F} = 87.5(m)$, es decir, $\Delta x_{0G} < \Delta x_{0F}$.

La distancia total recorrida D_{0G} desde el origen hasta el punto G, viene dada por:

$$D_{0G} = D_{0F} + |\Delta x_{FG}| \tag{33}$$

Numéricamente:

$$D_{0G} = 97.5(m) + 7.5(m) = 105(m) \tag{34}$$

La Fig. (1.3.2) muestra el gráfico de la aceleración $a(t)$ en función del tiempo t, y a modo de comparación se muestra también el gráfico original de la velocidad $v(t)$ en función del tiempo t.

Ejercicio (1.4) Un globo aerostático se va moviendo con una velocidad constante, cuya rapidez (módulo de la velocidad) es $|v_g| = 4(m/s)$. En un cierto momento se suelta un saco de arena que sirve de lastre al globo. Responda a las siguientes preguntas, considerando por separado el caso en que *i)* el globo va subiendo con velocidad $v_g = 4(m/s)$ y *ii)* el globo va bajando con velocidad $v_g = -4(m/s)$. Hallar:

a) el tiempo total que el saco de arena estuvo en el aire, si su velocidad al llegar al suelo es $v_f = -62(m/s)$,

b) la altura h que tenía el globo justo en el momento en que se soltó el saco de arena,

c) la velocidad que lleva el saco de arena cuando se encuentra a $100(m)$ del piso.

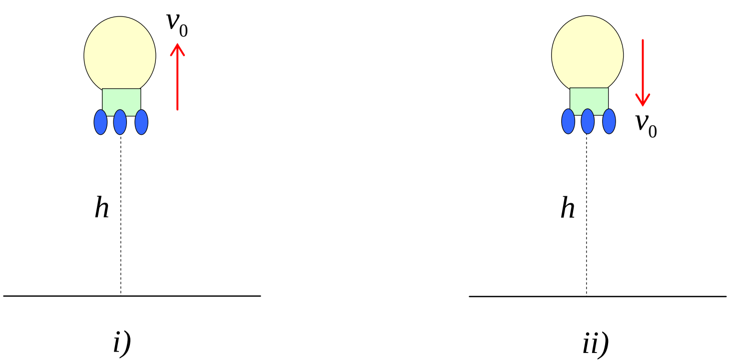

Figura (1.4.1)

Nota: *La velocidad inicial* v_0 *del saco de arena es igual a la velocidad* v_g *que lleva el globo en el momento en que se suelta el saco* $v_0 = v_g$. *Una vez libre del globo, el saco de arena se mueve en el campo gravitatorio donde la aceleración vale* $\vec{a} = -g\hat{j}$. *Si ponemos el origen del sistema de referencia justo donde se soltó el saco de arena, se tiene* $y_0 = 0$, *por lo tanto, las ecuaciones para el movimiento del saco de arena como un proyectil en el campo gravitatorio, son:*

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

$$v = v_0 - gt \tag{2}$$

Solución:

a) Hallar el tiempo total que el saco de arena estuvo en el aire

Usando la ecuación (2), con $v = v_f = -62\left(m/s\right)$, obtenemos el tiempo total de caída

$$t = \frac{v_0 - v_f}{g} \tag{3}$$

Para obtener el tiempo que estuvo el saco de arena en el aire, debemos considerar que cuando el globo va subiendo se tiene $v_0 = +4\left(m/s\right)$ y cuando el globo va bajando se tiene $v_0 = -4\left(m/s\right)$. Sean t_s y t_b los tiempos que dura el saco de arena en el aire, cuando va subiendo y cuando va bajando, respectivamente, entonces,

$$t_s = \frac{4\left(m/s\right) - \left(-62\left(m/s\right)\right)}{9.8\left(m/s^2\right)} = 6.735\left(s\right) \tag{4}$$

$$t_b = \frac{-4\left(m/s\right) - \left(-62\left(m/s\right)\right)}{9.8\left(m/s^2\right)} = 5.918\left(s\right) \tag{5}$$

Nótese $t_s > t_b$, porque cuando el globo va subiendo, el saco de arena primero debe subir y luego debe bajar hasta llegar al suelo; en cambio, cuando el globo va bajando, el saco de arena parte directamente hacia abajo.

b) Hallar la altura h *desde la cual fue soltado el saco de arena.*

Utilizando el tiempo que estuvo el saco de arena en el aire (t_s o t_b) en la ecuación (1), se tiene la coordenada y_s o y_b correspondiente,

$$y_s = v_s t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 \tag{6}$$

$$y_b = v_b t_b - \frac{1}{2} g t_b^2 \tag{7}$$

La altura h viene dada por $h_s = |y_s|$ o $h_b = |y_b|$. Numéricamente:

$$y_s = 4(m/s) \times 6.735(s) - 4.9(m/s^2) \times (6.735)^2 (s^2) = -195.3(m) \tag{8}$$

$$y_b = -4(m/s) \times 5.918(s) - 4.9(m/s^2) \times (5.918)^2 (s^2) = -195.3(m) \tag{9}$$

Dado que las coordenadas son las mismas en los dos casos $y_s = y_b$, la altura viene dada por

$$h_s = h_b = 195.3(m) \tag{10}$$

es decir, la altura desde la cual fue soltado el saco de arena es la misma en los dos casos. Esto es correcto, ya que la velocidad de llegada al suelo es la misma en los dos casos.

c) Hallar la velocidad que lleva el saco de arena cuando se encuentra a $100(m)$ *del piso.*

Cuando el saco de arena se encuentra a $100(m)$ del piso, la coordenada y respecto del origen es

$$y = -(h - 100) = -(195.3(m) - 100(m)) = -95.3(m) \tag{11}$$

es decir, el saco de arena ha caído $95.3(m)$ desde el punto desde donde se soltó del globo.

Usando las expresiones (6) y (7), con $y_s = y_b = -95.3(m)$, podemos escribir

$$-95.3(m) = v_s t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 \tag{12}$$

$$-95.3(m) = v_b t_b - \frac{1}{2} g t_b^2 \tag{13}$$

Reemplazando los datos de las velocidades iniciales de subida y bajada, se tiene

$$9.8(m/s^2) t_s^2 - 4(m/s) t_s - 95.3(m) = 0 \tag{14}$$

$$9.8(m/s^2) t_b^2 + 4(m/s) t_b - 95.3(m) = 0 \tag{15}$$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos los tiempos (positivos) que se demora el saco en llegar a tener la coordenada $y_s = y_b = -95.3(m)$ en cada uno de los casos *i)* y *ii)*:

$$t_s = 4.84(s) \tag{16}$$

$$t_b = 4.02(s) \tag{17}$$

El tiempo t_s, correspondiente al caso en que el globo va subiendo, es mayor que el tiempo t_b, correspondiente al caso en que el globo va bajando.

Con estos tiempos podemos calcular la velocidad v_s o v_b del saco de arena. Usando la relación (2), podemos escribir

$$v_s = v_s - gt_s \tag{18}$$

$$v_b = v_b - gt_b \tag{19}$$

Reemplazando las velocidades iniciales de subida y bajada y los tiempos dados por (16) y (17) empleados en llegar a la coordenada $y_s = y_b = -95.3(m)$, se tiene

$$v_s = 4\left(m/s\right) - 9.8\left(m/s^2\right) \times 4.84(s) = -43.4\left(m/s\right) \tag{20}$$

$$v_b = -4\left(m/s\right) - 9.8\left(m/s^2\right) \times 4.02(s) = -43.4\left(m/s\right) \tag{21}$$

Nótese que las velocidades son las mismas para la misma coordenada y:

$$v_s = v_b = -43.4\left(m/s\right) \tag{22}$$

Esta velocidad también se puede calcular usando la siguiente expresión de la cinemática lineal, que resulta de eliminar el tiempo entre las ecuaciones (1) y (2):

$$v^2 = v_0^2 - 2gy \tag{23}$$

Si usamos los valores de las velocidades iniciales del saco de arena ($v_s = 4\left(m/s\right)$ o $v_b = -4\left(m/s\right)$) y la altura caída $y_s = y_b = -95.3(m)$, se tiene la velocidad final (con signo menos porque el saco de arena va cayendo)

$$v = -\sqrt{(\pm 4)^2 (m^2/s^2) - 2 \times 9.8(m/s^2) \times \left(-95.3\right)(m)} = -43.4(m/s) \tag{24}$$

Hemos obtenido así la misma velocidad final que por el método anterior. Nótese que el signo de la velocidad inicial desaparece, ya que está elevada al cuadrado, por lo tanto la velocidad final es la misma en los dos casos, para una misma coordenada y.

Ejercicio (1.5) Se dispara un cohete verticalmente hacia arriba y sube con una aceleración vertical constante de $19.6\left(m/s^2\right)$ durante $1\left(\min\right)$. En ese momento agota su combustible y sigue subiendo como partícula libre.

a) ¿Cuál es el tiempo total transcurrido desde el instante en que despega el cohete hasta que regresa al suelo?

b) ¿Cuál es la velocidad del cohete al llegar al suelo?

Nota: *En este problema existen dos tramos. En el primer tramo, el cohete parte con velocidad inicial cero (* $v_0 = 0(m/s)$ *) y viaja durante un tiempo* $t_1 = 1(\text{min}) = 60(s)$ *con una aceleración hacia arriba* $a = 19.6(m/s^2)$. *Las ecuaciones de movimiento en este tramo son:*

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1}$$

$$v = v_0 + at \tag{2}$$

En el segundo tramo, el cohete se mueve como partícula libre en el campo gravitatorio. Las ecuaciones de movimiento son:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

$$v = v_0 - gt \tag{4}$$

Solución:

a) ¿Cuál es el tiempo total transcurrido desde el instante en que despega el cohete hasta que regresa al suelo?

Poniendo el origen del sistema de referencia en el punto de partida, se tiene $y_0 = 0$. Reemplazando los datos numéricos en las ecuaciones (1) y (2), se obtiene la coordenada y_1 alcanzada y la velocidad v_1 final de este primer tramo:

$$y_1 = 0 + 0(m/s)\times 60(s) + 9.8(m/s^2)\times 3600(s^2) = 35280(m) \tag{5}$$

$$v_1 = 0(m/s) + 19.6(m/s^2)\times 60(s) = 1176(m/s) \tag{6}$$

Después de los $60(s)$ el cohete agota su combustible y sigue como partícula libre en el campo gravitatorio ($a = -g$), ya que el motor dejo de funcionar. En este segundo tramo, la posición inicial es $y_1 = 35280(m)$ y la velocidad inicial es $v_1 = 1176(m/s)$. Reemplazando estos datos en las ecuaciones (3) y (4), tenemos

$$y = 35280(m) + 1176(m/s)\times t - 4.9(m/s^2)\times t^2 \tag{7}$$

$$v = 1176(m/s) - 9.8(m/s^2)\times t \tag{8}$$

Para calcular el tiempo t_2 que estuvo el cohete viajando como proyectil en el campo gravitatorio, hay que hacer $y = 0$ en la ecuación (7), con lo cual se obtiene la ecuación de segundo grado

$$t_2^2 - 240t_2 - 7200 = 0 \tag{9}$$

Elegimos sólo la solución positiva, ya que todo el movimiento ocurre después que pusimos el cero de nuestro reloj, es decir,

$$t_2 = 267(s) \tag{10}$$

El tiempo total de vuelo es

$$t_T = t_1 + t_2 = 267(s) + 60(s) = 327(s) \tag{11}$$

b) ¿Cuál es la velocidad del cohete al llegar al suelo?

Usando el tiempo $t_2 = 267(s)$ en la ecuación (8), podemos calcular la velocidad con que llega el cohete al suelo

$$v = 1176(m/s) - 9.8(m/s^2) \times t_2 \tag{12}$$

$$v = 1176(m/s) - 9.8(m/s^2) \times 267(s) = -1440.6(m/s) \tag{13}$$

Nótese que la velocidad es negativa ya que el cohete va cayendo hacia el suelo.

Ejercicio (1.6) Desde la boca de un pozo (ver Fig. (1.6.1)) de profundidad h, desconocida, se lanza una piedra con rapidez inicial $|v_0| = 3.7(m/s)$. Si el sonido de la piedra al chocar con el piso del pozo se escucha $2(s)$ después desde que se lanzó la piedra, hallar la profundidad h del pozo. La rapidez (módulo de la velocidad) del sonido en el aire es $v_s = 340(m/s)$.

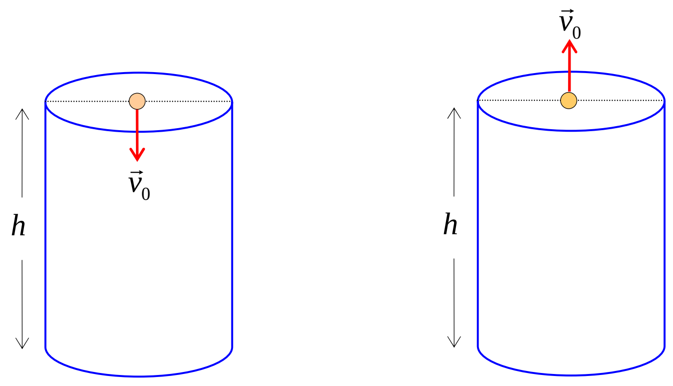

Figura (1.6.1)

Responda la pregunta para el caso en que

i) la piedra se lanza hacia arriba con $\vec{v}_0 = 3.7\hat{j}\left(m/s\right)$,

ii) la piedra se lanza hacia abajo con $\vec{v}_0 = -3.7\hat{j}\left(m/s\right)$

Nota: *En este problema existen dos tramos muy distintos. En un primer tramo se trata de una piedra moviéndose verticalmente en el campo gravitatorio (eje y). El segundo tramo corresponde al movimiento del sonido en el aire desde el fondo del pozo hasta la boca del pozo. Además existe un tiempo t_1 de bajada de la piedra hasta el fondo del pozo en el campo gravitatorio y existe un tiempo t_2 de subida del sonido en el aire desde el fondo del pozo. La suma de ambos tiempos es igual a $2\left(s\right)$, es decir,*

$$t_1 + t_2 = 2(s) \tag{1}$$

Las ecuaciones de movimiento para la piedra cayendo en el campo gravitatorio son:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

$$v = v_0 - gt \tag{3}$$

Las ecuaciones de movimiento del sonido en el tramo de subida son:

$$y = y_0 + v_s t \tag{4}$$

$$v = v_s \tag{5}$$

La velocidad del sonido es una constante, por lo tanto su aceleración es cero $a_s = 0$. Si ponemos el origen del sistema de referencia, justo en la entrada o boca del pozo, entonces $y_0 = 0$.

Solución:

En la primera etapa la piedra se mueve como proyectil en el campo gravitatorio. El fondo del pozo tiene coordenada $y = -h$ y el tiempo que demora en caer es $t = t_1$, luego la ecuación *(2)* queda:

$$-h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \tag{6}$$

Reordenando, se tiene

$$h = -v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 \tag{7}$$

En la segunda etapa, el sonido sube con velocidad constante desde el fondo del pozo de altura h. Visto desde el origen en la boca del pozo, la posición inicial del sonido es $y_{0s} = -h$, y al llegar a la boca del pozo, la coordenada y_s del sonido vale $y_s = 0$, empleando un tiempo t_2. Con estos datos, la relación (4) queda:

$$0 = -h + v_s t_2 \tag{8}$$

reordenando,

$$h = v_s t_2 \tag{9}$$

Igualando las ecuaciones (7) y (9) se tiene una ecuación que relaciona el tiempo de bajada de la piedra t_1, con el tiempo de subida del sonido t_2

$$-v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = v_s t_2 \tag{10}$$

Por otro lado, a partir de la relación (1) podemos expresar t_2 en función de t_1

$$t_2 = 2 - t_1 \tag{11}$$

Reemplazando (11) en (10), tenemos

$$-v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = v_s \left(2 - t_1\right) \tag{12}$$

Reordenando, queda

$$\frac{1}{2} g t_1^2 + \left(v_s - v_0\right) t_1 - 2 v_s = 0 \tag{13}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, tenemos:

$$t_1 = \frac{-\left(v_s - v_0\right) \pm \sqrt{\left(v_s - v_0\right)^2 + 4 g v_s}}{g} \tag{14}$$

Reemplazando datos numéricos para el caso en que la piedra se lanza hacia arriba con velocidad $v_0 = 3.7\left(m/s\right)$, se tiene

$$t_1(\text{hacia arriba}) = \frac{-336.3 \pm \sqrt{\left(336.3\right)^2 + 4 \times 9.8 \times 340}}{9.8} \tag{15}$$

$$t_1(\text{hacia arriba}) = 1.9657(s) \tag{16}$$

Reemplazando datos numéricos para el caso en que la piedra se lanza hacia abajo con velocidad $v_0 = -3.7\left(m/s\right)$, se tiene

$$t_1(\text{hacia abajo}) = \frac{-343.7 \pm \sqrt{\left(343.7\right)^2 + 4 \times 9.8 \times 340}}{9.8} \tag{17}$$

$$t_1(\text{hacia abajo}) = 1.9256(s) \tag{18}$$

Para calcular el tiempo de subida del sonido en cada uno de los casos, basta usar la relación (11):

$$t_2 = 2 - t_1 \tag{19}$$

$$t_2(\text{hacia arriba}) = 2(s) - 1.9657(s) = 0.0343(s) \tag{20}$$

$$t_2(\text{hacia abajo}) = 2(s) - 1.9256(s) = 0.0744(s) \tag{21}$$

La altura h la calculamos usando la relación (9)

$$h(\text{hacia arriba}) = 340\left(m/s\right)0.0343(s) = 11.66(m) \tag{22}$$

$$h(\text{hacia abajo}) = 340\left(m/s\right)0.0744(s) = 25.3(m) \tag{23}$$

Vemos así que imponiendo la condición $t_1 + t_2 = 2(s)$, la altura h que ha de tener el pozo resulta ser distinta si la piedra es lanzada hacia arriba o lanzada hacia abajo.

Equation Section (Next)

Ejercicio (1.7) Un ascensor va subiendo con aceleración constante $a_A = 1\left(m/s^2\right)$. En el momento en que la velocidad del ascensor es $v_{0A} = 3\left(m/s\right)$, un perno se suelta del techo del ascensor. La altura del ascensor es $h = 2.5\left(m\right)$ (ver Fig. (1.7.1)).

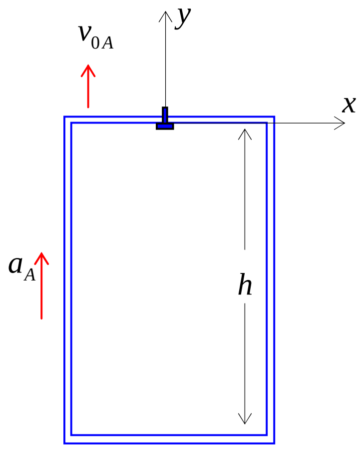

Figura (1.7.1)

Hallar:

a) el tiempo que el perno demora en llegar a su altura máxima desde que se soltó.

b) la altura máxima que alcanza el perno desde que se soltó.

c) el tiempo que demora el perno en llegar a chocar con el piso del ascensor

d) las coordenadas del perno y_p, y del piso del ascensor y_A, cuando se produce el choque entre el perno y el piso.

e) la velocidad del ascensor v_A y la velocidad del perno v_p en el momento del choque. Diga si el perno sube o baja en ese momento.

Nota: *Ubicaremos el origen del sistema de referencia en el punto donde se suelta el perno, es decir, a la altura del techo del ascensor, pero su ubicación no cambia en el tiempo. El perno y el piso del ascensor se mueven con respecto a este origen de referencia y ambos se van acercando. Nótese que el piso del ascensor se está acercando hacia el origen del sistema de referencia con aceleración constante* $\vec{a}_A$*, y que el perno al soltarse se mueve en el campo gravitatorio con aceleración* $\vec{a}_p = -g\hat{j}$.

En primer lugar anotemos todos los datos iniciales. El ascensor se mueve con aceleración constante $\vec{a}_A = 1\hat{j}\left(m/s^2\right)$ *dirigida hacia arriba y el perno se suelta cuando la velocidad de ambos, ascensor y perno, es:* $\vec{v}_{0p} = \vec{v}_{0A} = 3\hat{j}\left(m/s\right)$ *dirigida hacia arriba. Respecto al sistema de referencia ubicado frente al techo del ascensor en el momento inicial, justo cuando el perno se suelta, la posición inicial del piso del ascensor es* $\vec{y}_{0A} = -h\hat{j}$*. Las ecuaciones de movimiento del piso del ascensor que se mueve hacia arriba con aceleración constante* $\vec{a}_A = 1\hat{j}\left(m/s^2\right)$**,** *vienen dadas por*

$$y_A = -h + v_{0A}t + \frac{1}{2}a_A t^2 \tag{1}$$

$$v_A = v_{0A} + a_A t \tag{2}$$

En cambio, el perno se mueve con aceleración constante en el campo gravitatorio con aceleración $\vec{a}_p = -g\hat{j} = -9.8\hat{j}\left(m/s^2\right)$*. Inicia su movimiento hacia arriba con una velocidad inicial que es la misma velocidad que lleva el ascensor en el momento de soltarse* $\vec{v}_{0p} = 3\hat{j}\left(m/s\right)$**.** *Respecto al sistema de referencia ubicado en el techo del ascensor, justo cuando el perno se suelta, la posición inicial del perno es* $\vec{y}_{0p} = \vec{0}$*. Las ecuaciones de movimiento del perno con aceleración constante en el campo gravitatorio vienen dadas por*

$$y_p = v_{0p}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

$$v_p = v_{0p} - gt \tag{4}$$

Aunque los datos numéricos son conocidos, es preferible usar expresiones algebraicas para estudiar todos los casos posibles

Solución:

a) Hallar el tiempo t_m que el perno demora en llegar a su altura máxima desde que se soltó.

Cuando el perno llega a su altura máxima, su velocidad v_p se hace cero, $v_p = 0$. Usando la ecuación (4) podemos conocer el tiempo t_m en que se hace cero la velocidad final:

$$v_p = 0 = v_{0p} - gt_m \tag{5}$$

obtenemos:

$$t_m = \frac{v_{0p}}{g} \tag{6}$$

Numéricamente

$$t_m = \frac{3\left(m/s\right)}{9.8\left(m/s^2\right)} = 0.306(s) \tag{7}$$

b) Hallar la altura máxima y_m que alcanza el perno desde que se soltó.

Usando el tiempo de altura máxima $t_m = \frac{v_{0p}}{g}$ en la ecuación (3), tenemos

$$y_m = v_{0p}\left(\frac{v_{0p}}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0p}}{g}\right)^2 \tag{8}$$

Simplificando, nos queda

$$y_m = \left(\frac{v_{0p}^2}{2g}\right) \tag{9}$$

Numéricamente, tenemos

$$y_m = \left(\frac{9\left(m^2/s^2\right)}{2\times 9.8\left(m/s^2\right)}\right) = 0.459(m) \tag{10}$$

c) Hallar el tiempo t_e que el perno demora en llegar a chocar con el piso del ascensor

El choque o encuentro se producirá cuando la coordenada $y_p(t)$ del perno sea igual a la coordenada $y_A(t)$ del piso del ascensor. Esta condición de igualdad se cumplirá para un tiempo de encuentro t_e. Usando las ecuaciones de movimiento (1) y (3), las coordenadas del piso del ascensor y del perno, vienen dadas por:

$$y_A = -h + v_{0A}t + \frac{1}{2}a_A t^2 \tag{11}$$

$$y_p = v_{0p}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{12}$$

Exigiendo la condición de encuentro: $y_a(t_e) = y_p(t_e)$, escribimos:

$$-h + v_{0A}t_e + \frac{1}{2}a_A t_e^2 = v_{0p}t_e - \frac{1}{2}gt_e^2 \tag{13}$$

Reordenando, escribimos:

$$\frac{1}{2}(a_A + g)t_e^2 + \left(v_{0A} - v_{0p}\right)t_e - h = 0 \tag{14}$$

Dado que las velocidades iniciales del ascensor y del perno son iguales $v_{0p} = v_{0A}$, se anula el término lineal en t_e. Despejando, obtenemos la siguiente expresión para el tiempo de encuentro t_e:

$$t_e = \sqrt{\frac{2h}{g + a_A}} \tag{15}$$

Nótese que el tiempo de encuentro t_e no depende de la velocidad inicial, porque es la misma para el perno y para el piso del ascensor.

Numéricamente

$$t_e = \sqrt{\frac{2 \times 2.5(m)}{9.8\left(m/s^2\right) + 1\left(m/s^2\right)}} = \sqrt{\frac{5}{10.8}}(s) = 0.680(s) \tag{16}$$

d) Hallar la coordenada y_p del perno y la coordenada y_A del piso del ascensor, cuando se produce el choque entre el perno y el piso del ascensor.

Usando el tiempo de encuentro entre el perno y el piso del ascensor, $t_e = 0.680(s)$, podemos reemplazar este valor en las ecuaciones (11) y (12), para obtener:

$$y_p = 3\left(m/s\right) \times 0.680(s) - 0.5 \times 9.8\left(m/s^2\right) \times \left(0.680\right)^2 (s^2) \tag{17}$$

$$y_p = -0.226(m) \tag{18}$$

$$y_A = -2.5(m) + 3\left(m/s\right)\times 0.680(s) + 0.5\times 1\left(m/s^2\right)\times\left(0.680\right)^2(s^2) \tag{19}$$

$$y_A = -0.226(m) \tag{20}$$

El hecho que la coordenada del piso del ascensor y del perno sean negativas, significa que el encuentro se produce antes que el piso del ascensor llegue a pasar hacia arriba por el origen del sistema de referencia, es decir, antes que el piso del ascensor llegue a la posición que tenía el techo del ascensor originalmente. Por lo tanto, el perno alcanzó a subir hasta su altura máxima, luego bajó y pasó de vuelta por la posición inicial, y todavía tuvo tiempo de seguir bajando un poco más, porque su coordenada es negativa (esto lo confirmaremos en la pregunta e), al calcular el signo de la velocidad del perno al chocar con el piso del ascensor). El valor de la coordenada del punto de encuentro, depende directamente de la velocidad inicial, en cambio, el tiempo de encuentro t_e no depende de la velocidad inicial, como puede verse en la relación (15).

e) *Hallar la velocidad del ascensor v_A y la velocidad del perno v_p en el momento del choque. Diga si el perno sube o baja en ese momento.*

Usando las ecuaciones (2) y (4) que expresan la velocidad en función del tiempo, podemos calcular la velocidad en el momento del encuentro usando el tiempo de encuentro $t_e = 0.680(s)$:

$$v_p = 3\left(m/s\right) - 9.8\left(m/s^2\right)\times 0.680(s) = -3.664\left(m/s\right) \tag{21}$$

Dado que la velocidad es negativa, el perno va bajando en el momento del encuentro con el piso del ascensor que sube. Además, dado que su módulo es mayor que la velocidad inicial, ello indica que se encuentra bajo el punto inicial de lanzamiento, tal como vimos en la pregunta d). Para el piso del ascensor se tiene:

$$v_A = 3\left(m/s\right) + 1\left(m/s^2\right)\times 0.680(s) = 3.680\left(m/s\right) \tag{22}$$

El signo positivo indica que el ascensor va hacia arriba, como debe ser.

Ejercicio (1.8) Un ladrillo cae desde el techo de una casa, cuya inclinación es $\theta = 30^\circ$, con una rapidez inicial de $5\left(m/s\right)$ (ver Fig. (1.8.1)). La altura del techo de la casa es $h = 7.4\left(m\right)$.

a) Calcule el tiempo que demora el ladrillo en llegar al suelo,

b) Calcule la distancia horizontal que recorre el ladrillo,

c) Con los mismos datos iniciales, ¿cuál debería ser el ángulo de inclinación del techo para que la distancia horizontal que alcanza el ladrillo al llegar al piso sea de $x = 3.6(m)$?

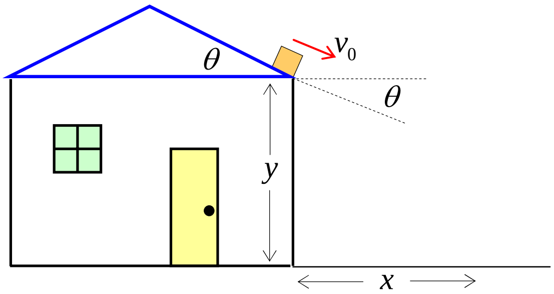

Figura (1.8.1)

Nota: *Se trata del movimiento de una partícula en el campo gravitatorio, donde la velocidad inicial* $\vec{v}_0$ *de la partícula tiene dos componentes:* v_{0x} *en el eje* X *y* v_{0y} *en el eje* Y. *La aceleración viene dada por el vector* $\vec{a} = -g\,\hat{j}$. *Este tipo de movimiento se denomina: movimiento de proyectiles. Las ecuaciones vectoriales del movimiento de proyectiles son las siguientes:*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2\,\hat{j} \tag{1}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - g t\,\hat{j} \tag{2}$$

En componentes, estas ecuaciones quedan

$$x = x_0 + v_{0x} t \tag{3}$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{4}$$

$$v_x = v_{0x} \tag{5}$$

$$v_y = v_{0y} - g t \tag{6}$$

Nótese que si no existe componente de la velocidad inicial en la dirección X, *es decir, si* $v_{0x} = 0$, *las ecuaciones a lo largo del eje* X *quedan:*

$$x = x_0; \quad v_x = 0 \tag{7}$$

y se reobtienen las ecuaciones de movimiento en una dimensión, estudiadas en los problemas anteriores, a saber:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2; \quad v_y = v_{0y} - gt \tag{8}$$

En resumen, el movimiento de proyectiles se realiza en el plano (X,Y) *y es una combinación de dos movimientos independientes, un movimiento a lo largo del eje* X *con aceleración cero (* $a_x = 0$ *) y velocidad constante, y otro movimiento a lo largo del eje* Y *con aceleración constante, la aceleración de gravedad (* $a_y = -g$ *).*

Para nuestro problema, elegimos el origen del sistema de referencia en el punto donde el ladrillo sale del techo. Por lo tanto, $y_0 = 0$ *y el suelo tiene coordenada* $y = -h = -7.4(m)$ *y el ángulo inicial* θ_0 *es negativo porque el vector velocidad inicial* $\vec{v}_0$ *está bajo el eje* X *.*

Solución:

a) Calcule el tiempo que demora el ladrillo en llegar al suelo

El vector velocidad inicial viene dado por

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos(-30^0)\hat{i} + v_0 \sin(-30^0)\hat{j} \tag{9}$$

En componentes, se tiene:

$$v_{0x} = v_0 \cos(-30^0) = v_o \cos(30^0) \tag{10}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin(-30^0) = -v_0 \sin(30^0) \tag{11}$$

Al llegar al piso, la coordenada y vale: $y = -7.4(m)$, reemplazando en la relación (4), se tiene

$$-7.4(m) = -5(m/s) \times \sin 30^\circ \times t - 4.9(m/s^2) \times t^2 \tag{12}$$

Ecuación de segundo grado para el tiempo de caída. Existen dos soluciones: una positiva y una negativa. La solución negativa no tiene sentido, ya que todo el movimiento se inicia en $t = 0(s)$, por lo tanto, la única solución aceptable es la solución positiva,

$$t = 1.0(s) \tag{13}$$

b) Calcule la distancia horizontal que recorre el ladrillo

Usando la relación (3), se tiene:

$$x = 5(m/s) \times \cos 30^\circ \times 1.0(s) = 4.3(m) \tag{14}$$

$$x = 4.3(m) \tag{15}$$

c) ¿cuál debería ser el ángulo de inclinación del techo para que la distancia horizontal que alcanza el ladrillo sea de $3.6(m)$ *?*

En este caso los datos son: $x = 3.6(m)$, $y = -7.4(m)$, $v_0 = 5(m/s)$, pero ahora desconocemos el valor del ángulo inicial. Dado que sabemos que el ángulo inicial está bajo la horizontal, escribimos explícitamente el ángulo inicial en la forma: $-\theta_0$. Usando estos datos en las ecuaciones (3) y (4), tenemos

$$3.6(m) = 5(m/s)\times\cos(-\theta_0)\times t \tag{16}$$

$$-7.4(m) = 5(m/s)\times\sin(-\theta_0)\times t - 4.9(m/s^2)\times t^2 \tag{17}$$

Despejando el tiempo de la ecuación (16) , se tiene

$$t = \frac{3.6}{5\cos\theta_0} \tag{18}$$

Reemplazando este tiempo en la ecuación (17)

$$-7.4 = -5\times\sin\theta_0\times\left(\frac{3.6}{5\times\cos\theta_0}\right) - 4.9\times\left(\frac{3.6}{5\times\cos\theta_0}\right)^2 \tag{19}$$

Reordenando, obtenemos

$$7.4 = 3.6\tan\theta_0 + \frac{2.54}{\cos^2\theta_0} \tag{20}$$

Usando la identidad trigonométrica: $\frac{1}{\cos^2\theta} = (1+\tan^2\theta)$ y reemplazando en la expresión anterior, se tiene una ecuación de segundo grado en la incógnita $\tan\theta_0$:

$$7.4 = 3.6\tan\theta_0 + 2.54(1+\tan^2\theta_0) \tag{21}$$

La solución positiva da:

$$\tan\theta_0 = 0.84555 \tag{22}$$

Buscando el arco tangente, se tiene el ángulo inicial θ_0 buscado:

$$\theta_0 = 40.22^\circ \tag{23}$$

Recordemos que, respecto de nuestro sistema de referencia, hemos escrito el ángulo inicial desconocido en la forma: $-\theta_0$, por lo tanto, el ángulo buscado es: -40.22°.

Ejercicio (1.9) Un bateador de béisbol golpea la bola a $0.85(m)$ de altura de modo que adquiere una velocidad de $15(m/s)$ con un ángulo de $\theta_0 = 27^0$ sobre la horizontal. Un segundo jugador ("el atrapador"), parado a la derecha de él a una distancia horizontal de $30(m)$ y en el mismo plano de la trayectoria de la bola, comienza a correr hacia el bateador en el mismo instante en que éste golpea la bola (ver Fig. (1.9.1)). Si el segundo jugador (el atrapador), corriendo con velocidad constante, alcanza la bola a $1.9(m)$ del suelo.

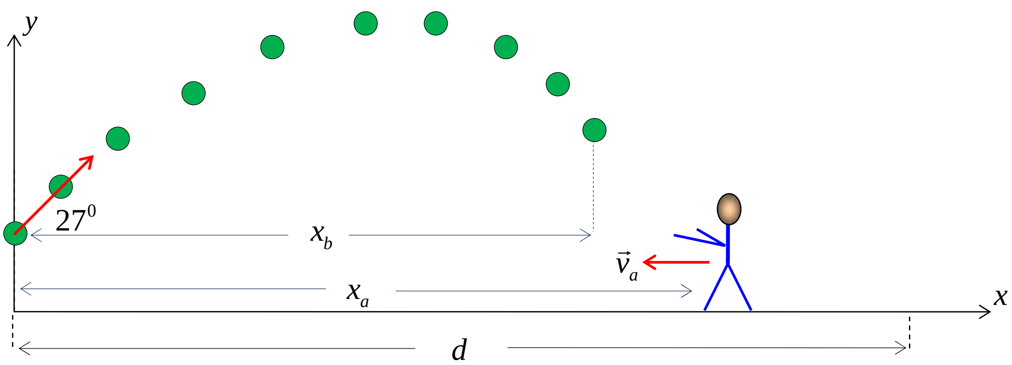

Figura (1.9.1)

Hallar:

a) la velocidad mínima del segundo jugador (el atrapador)

b) la distancia recorrida por el segundo jugador (el atrapador)

Nota: *Ubiquemos el origen del sistema de referencia en el piso, justo desde donde se lanza la bola inicialmente. El jugador de la derecha (el atrapador) corre con velocidad constante* v_a *hacia la izquierda y su coordenada* x_a*, medida respecto del origen del sistema de referencia mostrado en la Fig. (1.9.1), viene dada por:*

$$x_a = x_{0a} + v_a t \tag{1}$$

Como $x_{0a} = d$ *, y la velocidad* v_a *apunta en sentido contrario a la velocidad horizontal de la bola, es decir,* $\vec{v}_a = -v_a \hat{i}$ *, escribimos*

$$x_a = d - v_a t \tag{2}$$

Por su parte, la bola se mueve con un movimiento de proyectil, y sus ecuaciones de movimiento son:

$$x_b = v_0 \cos\theta_0 \, t \tag{3}$$

$$y_b = y_0 + v_0 \sin\theta_0\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{4}$$

Solución:

El jugador se encontrará con la bola, cuando se cumpla la condición

$$x_a = x_b \tag{5}$$

Es decir,

$$d - v_a t = v_0 \cos\theta_0\, t \tag{6}$$

El tiempo t en que se produce este encuentro viene dado por la relación (4), cuando $y_b = 1.9(m)$, con $y_0 = 0.85(m)$. Reemplazando los datos del problema, podemos escribir:

$$1.9(m) = 0.85(m) + 15\left(m/s\right)\sin 27^0\, t - 4.9(m/s^2)t^2 \tag{7}$$

reordenando

$$4.9t^2 - 6.8t + 1.05 = 0 \tag{8}$$

Ecuación de segundo grado que entrega dos tiempos positivos: el tiempo t_1 cuando la bola pasa de subida por $y_b = 1.9(m)$, y el tiempo t_2 ($t_2 > t_1$), cuando la bola pasa de bajada por $y_b = 1.9(m)$:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.18(s) \\ t_2 &= 1.21(s) \end{aligned} \tag{9}$$

Si consideramos el tiempo cuando la bola viene bajando, es decir, el tiempo mayor t_2, entonces la velocidad v_a del jugador será mínima porque tendrá que recorrer una distancia menor en el mismo tiempo. Aplicando este tiempo $t_2 = 1.21(s)$ a la relación $x_a = x_b$ dada por (6), se tiene:

$$v_0 \cos\theta_0\, t_2 = d - v_a t_2 \tag{10}$$

entonces, la velocidad v_a del jugador viene dada por:

$$v_a = \frac{d}{t_2} - v_0 \cos\theta_0 \tag{11}$$

Numéricamente

$$v_a = \frac{30(m)}{1.21(s)} - 15\left(m/s\right)\cos 27^0 = 11.43\left(m/s\right) \tag{12}$$

$$v_a = 11.43\left(m/s\right) \tag{13}$$

La distancia d_a recorrida por el jugador de la derecha (el atrapador) viene dada por

$$d_a = v_a t_2 \tag{14}$$

Numéricamente

$$d_a = 11.43(m/s) \times 1.21(s) = 13.83(m) \tag{15}$$

$$d_a = 13.83(m) \tag{16}$$

Ejercicio (1.10) Un estudiante patea una piedra horizontalmente desde el borde de una plataforma de $40(m)$ de altura en dirección a una poza de agua (ver Fig. (1.10.1)).

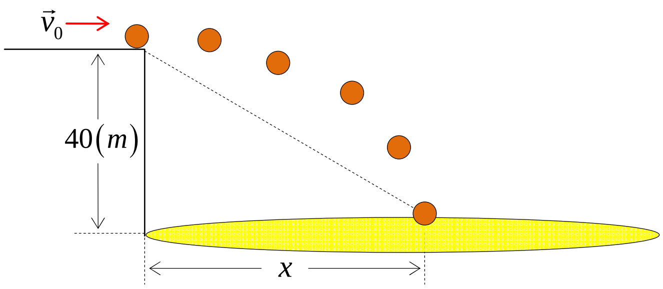

Figura (1.10.1)

Si el estudiante escucha el sonido del contacto con el agua $3(s)$ después de patear la piedra, ¿cuál fue la velocidad inicial v_0 de la piedra? Suponga que la rapidez del sonido en el aire es $v_s = 340(m/s)$.

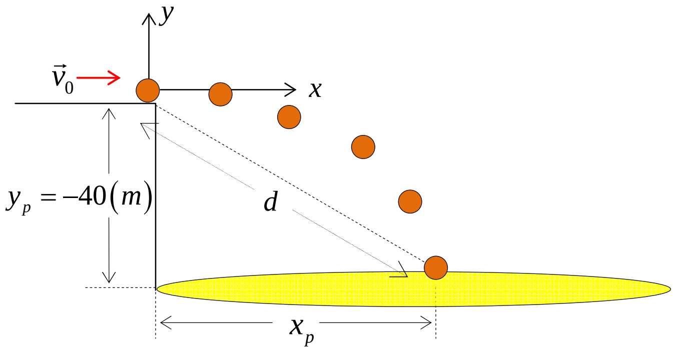

Figura (1.10.2)

Nota: *Este problema tiene dos tramos claramente diferenciados: un primer tramo de caída de la piedra como un proyectil en el campo gravitatorio, y un segundo tramo de regreso del sonido, en línea recta desde el punto de impacto de la piedra, hasta el punto de partida de la piedra (ver Fig. (1.10.1) y Fig. (1.10.2)).*

Para el movimiento de proyectil, las ecuaciones de movimiento viene dadas por

$$x_p = x_{0p} + v_{0x}t \tag{1}$$

$$y_p = y_{0p} + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

$$v_{xp} = v_{0x} \tag{3}$$

$$v_{yp} = v_{0y} - gt \tag{4}$$

Dado que el sonido viaja con velocidad constante (aceleración cero), su ecuación de movimiento viene dada por

$$x_s = v_s t \tag{5}$$

Además sabemos que la suma del tiempo de caída t_c*, más el tiempo de viaje del sonido* t_s *suman* $3(s)$*, es decir,*

$$t_c + t_s = 3(s) \tag{6}$$

Nótese que este problema es una generalización a dos dimensiones del problema (1.6).

Solución:

La piedra sale como un proyectil horizontal con velocidad inicial v_0, con un ángulo $\theta_0 = 0^0$. Si elegimos un sistema de referencia justo desde donde sale la piedra (ver Fig. (1.10.2)), entonces

$$x_{0p} = 0; \quad y_{0p} = 0 \tag{7}$$

Las componentes de la velocidad inicial quedan:

$$v_{0x} = v_0 \cos 0^0 = v_0; \quad v_{0y} = v_0 \sin 0^0 = 0 \tag{8}$$

Las ecuaciones de movimiento de la (1) a la (4) quedan

$$x_p = v_{0x}t \tag{9}$$

$$y_p = -\frac{gt^2}{2} \tag{10}$$

$$v_{xp} = v_0 \tag{11}$$

$$v_{yp} = -gt \tag{12}$$

De la ecuación (10) podemos despejar el tiempo de caída t_c

$$t_c = \sqrt{-\frac{2y_p}{g}} \tag{13}$$

La coordenada y_p de la poza de agua viene dada por: $y_p = -40(m)$, luego t_c vale,

$$t_c = \sqrt{-\frac{2y}{g}} == \sqrt{-\frac{2(-40(m))}{9.8(m/s^2)}} = 2.857(s) \tag{14}$$

De la relación (6) obtenemos el tiempo de subida del sonido al recorrer la distancia d (ver Fig. (1.10.2)):

$$t_s = 3(s) - 2.857(s) = 0.143(s) \tag{15}$$

Por la relación (5) vemos que la distancia d se relaciona con la velocidad del sonido v_s y el tiempo de subida del sonido t_s, en la forma:

$$d = v_s t_s \tag{16}$$

Numéricamente

$$d = 340(m/s) \times 0.143(s) \tag{17}$$

$$d = 48.6(m) \tag{18}$$

Ahora podemos relacionar la distancia d con las coordenadas (x_p, y_p) del proyectil, usando el teorema particular de Pitágoras en la Fig. (1.10.2):

$$d^2 = x_p^2 + y_p^2 \tag{19}$$

Donde $y_p = -40(m)$ y x_p viene dado por la relación (9)

$$x_p = v_0 t_c \tag{20}$$

Reemplazando estos datos en la relación (19), se tiene

$$(48.6)^2 (m^2) = (v_o t_c)^2 + (-40)^2 (m^2) \tag{21}$$

Usando $t_c = 2.857(s)$ y despejando, se obtiene la velocidad inicial v_0

$$v_0 = 9.7(m/s) \tag{22}$$

Ejercicio (1.11) Una bolita sale rodando horizontalmente con velocidad $v_0 = 3(m/s)$ por el descanso de una escalera (ver Fig. (1.11.1)). Los peldaños tienen alto $a = 18(cm)$ y ancho $b = 32(cm)$. Encuentre el escalón en el cual la bolita cae por primera vez.

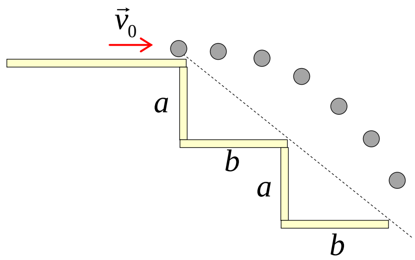

Figura (1.11.1)

Nota: *La bolita sigue un movimiento de proyectil en el campo gravitatorio. Sus ecuaciones de movimiento son:*

$$x = x_{0b} + v_0 \cos\theta_0 t \tag{1}$$

$$y = y_{0b} + v_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

Si ubicamos el origen del sistema de referencia en el punto donde la bolita inicia su movimiento de proyectil, se tiene que $x_{0b} = 0$ *y* $y_{0b} = 0$. *Si eliminamos el tiempo de las ecuaciones de itinerario* (1) *y* (2), *se obtiene la trayectoria de la bolita en el campo gravitatorio, la cual tiene la forma de una parábola invertida:*

$$y = x \tan\theta_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} \tag{3}$$

Por otra parte, la línea punteada en la Fig. (1.11.1) conecta los bordes de los peldaños de la escalera, La intersección de la parábola invertida con la línea recta da la solución al problema.

Solución:

Consideremos el origen del sistema de referencia justo donde sale rodando la bolita, como se muestra en la Fig. (1.11.2)

Dado que la bolita sale horizontalmente, $\theta_0 = 0^\circ \rightarrow \tan 0^\circ = 0; \quad \cos 0^\circ = 1$, la ecuación de trayectoria dada por (3), queda:

$$y=-\frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{4}$$

La trayectoria de la bolita corta a la línea recta que corresponde a los bordes de los peldaños (línea punteada en la Fig. (1.11.1) y Fig. (1.11.2)).

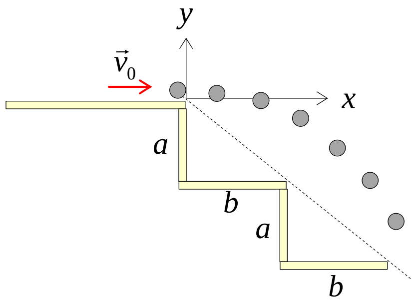

Figura (1.11.2)

La ecuación de la línea recta, con pendiente negativa, viene dada por

$$y=-\frac{a}{b}x \tag{5}$$

Igualando las coordenadas verticales dadas por (4) y (5), se obtiene la coordenada x donde se produce la intersección de las dos curvas trayectorias:

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2}=-\frac{a}{b}x \tag{6}$$

Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones Una solución es $x=0$, que corresponde al origen del sistema de referencia, y la otra solución es:

$$x=\frac{2v_0^2a}{gb} \tag{7}$$

Reemplazando datos numéricos, se tiene:

$$x=\frac{2\times 9\left(m^2/s^2\right)\times 0.18(m)}{9.8\left(m/s^2\right)\times 0.32(m)}=1.033(m) \tag{8}$$

$$x=1.033(m) \tag{9}$$

El valor de la coordenada $y=-\frac{a}{b}x$ correspondiente es:

$$y = -\frac{0.18}{0.32}1.033 = 0.581 \tag{10}$$

Si dividimos la coordenada y obtenida en (10) por el alto $a = 0.18(m)$ de cada escalón, se tiene el número de escalones que ya ha recorrido

$$\frac{y}{a} = \frac{0.581(m)}{0.18(m)} = 3.23 \tag{11}$$

Si por otra parte, dividimos la coordenada x obtenida en (9) por el ancho $b = 0.32(m)$ de cada escalón, se tiene el número de escalones que ya ha recorrido

$$\frac{x}{b} = \frac{1.033(m)}{0.32(m)} = 3.23 \tag{12}$$

Nótese que por ambos métodos se llega al mismo resultado.

Dado que $y > 3a$, esto implica que la bolita ha recorrido algo más de 3 escalones, es decir, la bolita cae en el cuarto escalón.

Ejercicio (1.12) Un cohete inicia su movimiento con un velocidad inicial de $\vec{v}_0 = 100\,\hat{e}(m/s)$, haciendo un ángulo de $\theta_0 = 53^0$. El vector unitario $\hat{e}$ hace un ángulo θ_0 con el eje X. El cohete viaja a lo largo de su línea de movimiento inicial con una aceleración total resultante (incluida la aceleración de gravedad) de $\vec{a} = 30\,\hat{e}(m/s^2)$ durante $3(s)$. En ese momento se apagan los motores y el cohete empieza a moverse como un cuerpo libre en el campo gravitatorio. (Ver Fig. 1.12.1).

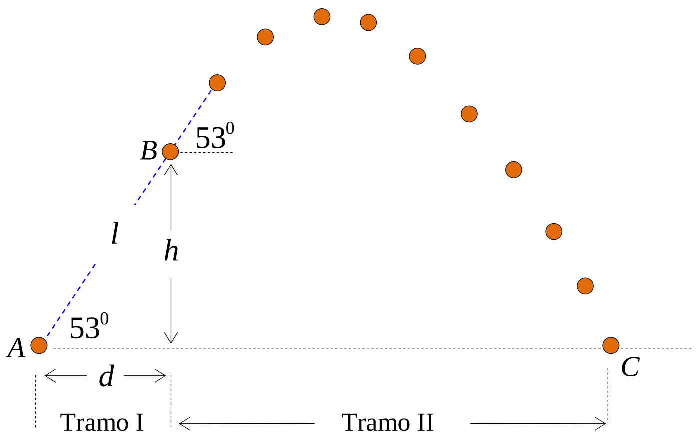

Figura (1.12.1)

Encuentre

a) la altura máxima alcanzada por el cohete, medida desde el punto inicial de su movimiento,

b) el tiempo total que el cohete estuvo en el aire hasta que llega al suelo,

c) la distancia horizontal total medida desde que el cohete inició su movimiento, hasta que vuelve al suelo nuevamente.

Nota: *Este problema tiene dos tramos claramente definidos como se muestra esquemáticamente en la Fig. (1.12.1). El tramo inicial (tramo I) consiste en un movimiento unidimensional con aceleración constante* $a = 30\left(m/s^2\right)$ *a lo largo del eje inclinado* 53^0. *El segundo tramo (tramo II) consiste en un movimiento de proyectil en el campo gravitacional cuya velocidad inicial es la velocidad final del tramo I.*

Solución:

El tramo I corresponde al movimiento unidimensional en la dirección del vector unitario $\hat{e}$. Si ponemos el origen del sistema de referencia justo donde parte el cohete (punto A) y además elegimos ejes coordenados derechos, entonces, el vector unitario $\hat{e}$ que está a lo largo de la recta $A-B$ en la Fig. (1.12.2) viene dado por $\hat{e} = \cos 53^0 \hat{\imath} + \sin 53^0 \hat{\jmath}$.

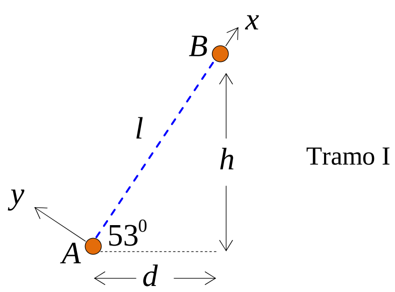

Figura (1.12.2)

En este movimiento unidimensional a lo largo del vector unitario $\hat{e}$, los datos son: $v_0 = 100\left(m/s\right)$, $a = 30\left(m/s^2\right)$. El cohete emplea un tiempo $t = 3\left(s\right)$ en recorrer la distancia l. Las ecuaciones para este movimiento unidimensional vienen dadas por

$$l = v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{1}$$

$$v = v_0 + at \tag{2}$$

Usando (2) obtenemos la velocidad v al final del tramo I con la aceleración resultante $a = 30\left(m/s^2\right)$,

$$v = 100\left(m/s\right) + 30\left(m/s^2\right)3\left(s\right) = 190\left(m/s\right) \tag{3}$$

$$v = 190\left(m/s\right) \tag{4}$$

Usando (1) obtenemos la distancia l recorrida al final del tramo:

$$l = 100\left(m/s\right)\times 3(s) + \frac{30\left(m/s^2\right)\times\left(3(s)\right)^2}{2} = 435(m) \tag{5}$$

$$l = 435(m) \tag{6}$$

Con el dato $l = 435(m)$ obtenemos los valores de d y h de la Fig. (1.12.2)

$$d = l\cos 53^0 = 435(m)\times 0.602 = 261.8(m) \tag{7}$$

$$d = 261.8(m) \tag{8}$$

$$h = l\sin 53^0 = 435(m)\times 0.7986 = 347.4(m) \tag{9}$$

$$h = 347.4(m) \tag{10}$$

En el tramo II, el cohete inicia su movimiento bidimensional como partícula en el campo gravitatorio, con velocidad inicial $\vec{v}_0 = 190\,\hat{e}\left(m/s\right)$ (que es la velocidad final del tramo I), con un ángulo inicial de salida igual al ángulo en que viajó el proyectil en línea recta en el primer tramo: $\theta_0 = 53^0$. Recordemos que el vector unitario $\hat{e}$ viene dado por $\hat{e} = \cos 53^0\,\hat{i} + \sin 53^0\,\hat{j}$.

Las ecuaciones de movimiento en este tramo, considerando los ejes coordenados derechos iniciales, son:

$$x = x_0 + v_{0x}t; \quad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \tag{11}$$

$$v_x = v_{0x}; \quad v_y = v_{0y} - gt \tag{12}$$

En este tramo II mantenemos el punto A como origen del sistema de referencia (ver Fig. (1.12.3)). Entonces, los datos de posición iniciales del cohete como partícula libre en el campo gravitatorio son los siguientes:

$$x_0 = d = 261.8(m) \tag{13}$$

$$y_0 = h = 347.4(m) \tag{14}$$

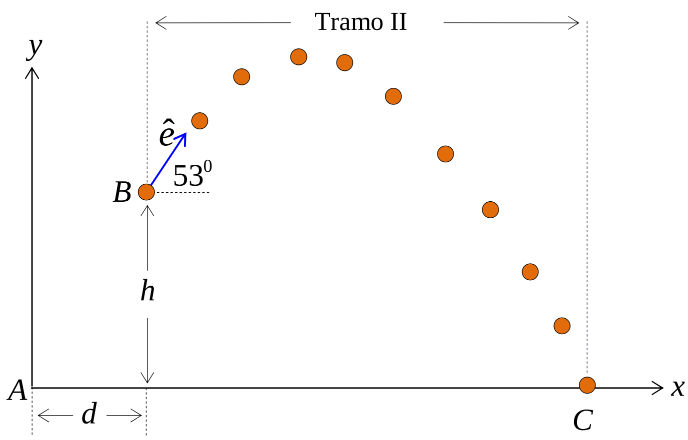

Figura (1.12.3)

La velocidad inicial es $\vec{v}_0 = 190\,\hat{e}\left(m/s\right) = 190\left(\cos 53^0\,\hat{\imath} + \sin 53^0\,\hat{\jmath}\right)\left(m/s\right)$. Reemplazando todos estos datos en las ecuaciones (11) y (12), tenemos:

$$x = 261.8(m) + \left(190\left(m/s\right)\times\cos 53^0\right)t$$
$$y = 347.4(m) + \left(190\left(m/s\right)\times\sin 53^0\right)t - \frac{gt^2}{2} \qquad (15)$$

$$v_x = 190\left(m/s\right)\times\cos 53^0$$
$$v_y = 190\left(m/s\right)\times\sin 53^0 - gt \qquad (16)$$

Numéricamente, estas ecuaciones quedan:

$$x = 261.8 + 114.3t \qquad (17)$$

$$y = 347.4 + 151.7t - 4.9t^2 \qquad (18)$$

$$v_x = 114.3\left(m/s\right) \qquad (19)$$

$$v_y = \left(151.7\left(m/s\right) - 9.8\left(m/s^2\right)t(s)\right) \qquad (20)$$

a) Hallar la altura máxima alcanzada por el cohete, medida desde el punto inicial de su movimiento

El punto más alto del proyectil se encuentra cuando su velocidad vertical v_y se hace cero, es decir, si hacemos $v_y = 0$ en la ecuación (20), obtenemos el tiempo t_m en llegar a esa altura máxima:

$$v_y = \left(151.7\left(m/s\right) - 9.8\left(m/s^2\right)t(s)\right) = 0 \qquad (21)$$

Despejando se obtiene:

$$t_m = \frac{151.7}{9.8}(s) = 15.48(s) \tag{22}$$

Reemplazando este tiempo en la ecuación (18), calculamos la altura máxima y_m alcanzada desde el suelo,

$$y_m = 347.4 + 151.7 \times 15.48(s) - 4.9 \times (15.48(s))^2 \tag{23}$$

$$y_m = 1521.5(m) \tag{24}$$

b) Calcular el tiempo total que el cohete estuvo en el aire hasta que llega al suelo.

Si hacemos $y = 0$ en la ecuación (18), se obtiene el tiempo de caída t_c del proyectil:

$$y = 347.4 + 151.7t_c - 4.9t_c^2 = 0 \tag{25}$$

La solución positiva de la ecuación de segundo grado, nos da

$$t_c = 33.1(s) \tag{26}$$

En consecuencia, el tiempo total t_T que el cohete estuvo en el aire es la suma del tiempo $t_1 = 3(s)$ empleado en recorrer linealmente la distancia l, más el tiempo de caída del proyectil $t_c = 33.1(s)$:

$$t_T = 3(s) + 33.1(s) \tag{27}$$

$$t_T = 36.1(s) \tag{28}$$

c) Hallar la distancia horizontal total medida desde que el cohete inició su movimiento, hasta que vuelve al suelo nuevamente.

Usando el tiempo de caída $t_c = 33.1(s)$, podemos calcular la coordenada x vista desde A, a través de la ecuación (17), lo cual corresponde justo a la distancia total recorrida horizontalmente x_T:

$$x_T = 261.8 + 114.3 \times 33.1(s) = 4045.1(m) \tag{29}$$

$$x_T = 4045.1(m) \tag{30}$$

Ejercicio (1.13) Se lanza una pelota desde el punto A con una rapidez inicial de $25(m/s)$, con un ángulo de $\theta_0 = 45^\circ$ con respecto a la horizontal, tal como se muestra en la Fig. (1.13.1). Encuentre la distancia horizontal x recorrida por la pelota hasta llegar a chocar con el plano inclinado en B.

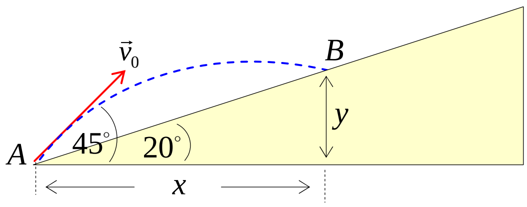

Figura (1.13.1)

Nota: *La ecuación de la trayectoria del proyectil viene dada por*

$$y_p = x\tan\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0} \tag{1}$$

En el punto B se produce la intersección de la parábola invertida, correspondiente a la trayectoria del proyectil, con la recta del plano inclinado AB, cuya ecuación genérica es

$$y = x\tan\phi \tag{2}$$

Este problema es prácticamente idéntico al problema (1.11).

Solución:

Usando los datos: $v_0 = 25\left(m/s\right)$, $\theta_0 = 45^\circ$, en la ecuación (1), tenemos

$$y_p = x\tan 45^0 - \frac{9.8(m/s^2)x^2}{2\times 25^2\left(m^2/s^2\right)\times\cos^2 45^0} \tag{3}$$

$$y_p = x - 0.01568x^2 \tag{4}$$

Para el plano inclinado AB, la relación entre x e y viene dada por ecuación:

$$y = x\tan 20^\circ = 0.364x \tag{5}$$

En el punto B se cumple que $y_p = y$, luego

$$x - 0.01568x^2 = 0364x \tag{6}$$

Despejando la solución distinta de cero, se tiene:

$$x = \frac{1-0.364}{0.01568} = 40.6(m) \tag{7}$$

$$x = 40.6(m) \tag{8}$$

CAPÍTULO 2
ESTÁTICA

Ejercicio (2.1) Hallar los valores de las tensiones en las cuerdas en cada caso, si los sistemas se encuentran en equilibrio estático.

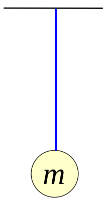

Figura (2.1.1)

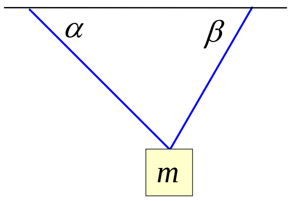

Figura (2.1.2)

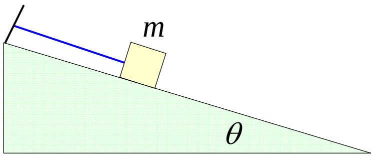

Figura (2.1.3)

Nota: *La segunda ley de Newton establece que la fuerza resultante* $\vec{F}_R$ *sobre una partícula viene dada por la siguiente relación:*

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1}$$

En esta expresión, $\vec{F}_R$ *es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, es decir,*

$$\vec{F}_R = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{2}$$

$\vec{F}_j$ *indica cada una de las fuerzas individuales que actúan sobre la partícula, y* $\vec{p}$ *representa el momentum lineal de la partícula, definido por:*

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} \tag{3}$$

Si la fuerza resultante $\vec{F}_R$ *vale cero, se dice que la partícula se encuentra en equilibrio:*

$$\vec{F}_R = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = \vec{0} \tag{4}$$

En ese caso, la segunda ley de Newton, ecuación (1)*, queda:*

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \tag{5}$$

Esta condición de equilibrio implica que el momentum lineal $\vec{p}$ *es una constante de movimiento, es decir, el momentum lineal* $\vec{p}$ *no varía en el tiempo, por eso su derivada temporal vale cero,*

$$\vec{p}(t) = cte \tag{6}$$

Usando la definición (3)*, esta condición implica que el vector velocidad* $\vec{v}$ *es constante, ya que por hipótesis, la masa* m *no cambia en las partículas, esto es,*

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = cte \tag{7}$$

En resumen, en el estado de equilibrio la suma vectorial de todas las fuerzas es cero y ello implica que la velocidad vectorial $\vec{v}$ *es una constante. Existen dos casos posibles:*

a) *Si la partícula está en movimiento con una cierta velocidad vectorial* $\vec{v}$*, sigue para siempre con esa misma velocidad constante* $\vec{v} = cte$*. En ese caso, la partícula se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.), y el estado de equilibrio se denomina: equilibrio dinámico.*

b) *Si la partícula está inicialmente en reposo* $\vec{v}_0 = \vec{0}$ *, entonces la partícula permanece siempre en reposo, cumpliéndose la condición de equilibrio, pues* $\vec{v}_0 = \vec{0}$ *también corresponde a una condición de velocidad constante. Esta condición de equilibrio de denomina equilibrio estático.*

Para sacar a la partícula del estado de equilibrio es necesaria la aplicación de una acción externa (fuerza), la cual le cambiará su momentum lineal y su velocidad.

Para estudiar la condición de equilibrio, se hace necesario dibujar primero "todas" las fuerzas que actúan sobre la partícula en estudio. Esto se denomina "diagrama de cuerpo libre". Una vez construido el diagrama de cuerpo libre, se escribe la forma específica de la condición de equilibrio general dada por (4) *y luego, por simplicidad se aplica la condición de equilibrio a lo largo de cada uno de los ejes coordenados.*

Solución:

Caso de la Fig. (2.1.1).

En la Fig. (2.1.4) se muestran todas las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa m: el peso $m\vec{g}$ y la tensión en la cuerda $\vec{T}$. Esto se denomina: *diagrama de cuerpo libre.*

La condición de equilibrio (4) establece que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan *sobre* la partícula debe ser cero, es decir,

$$\vec{T} + m\vec{g} = \vec{0} \tag{8}$$

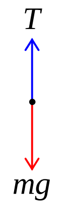

Figura (2.1.4)

Dado que las fuerzas existen sólo a lo largo del eje vertical (eje Y), esta condición se escribe simplemente:

$$T - mg = 0 \tag{9}$$

a partir de la cual obtenemos el valor de la tensión en la cuerda:

$$T = mg \tag{10}$$

Es importante destacar que la cuerda debe ser capaz de entregar una tensión de magnitud T, a lo menos igual al peso de la partícula suspendida. Si colgáramos una partícula de masa M mayor que m ($M > m$), pudiera ocurrir que la cuerda no fuera capaz de resistir el nuevo peso Mg, y entonces la cuerda se podría cortar y la partícula caería impulsada por una única fuerza: la fuerza gravitacional (el peso).

Caso de la Fig. (2.1.2).

Diagrama de cuerpo libre. La Fig. (2.1.5) muestra todas las fuerzas que actúan *sobre* la partícula de masa m: el peso $m\vec{g}$ y las tensiones en las cuerdas $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$.

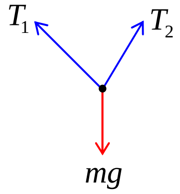

Figura (2.1.5)

En la Fig. (2.1.6) se muestra el diagrama de cuerpo libre con un sistema de coordenadas:

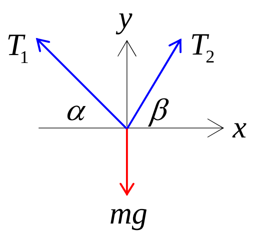

Figura (2.1.6)

La condición de equilibrio (4) aplicada a la Fig. (2.1.6) implica que la fuerza resultante debe ser cero, es decir,

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0} \tag{11}$$

En componentes, de acuerdo a los ejes coordenados de la Fig. (2.1.6), esta relación queda

Eje X :

$$T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha = 0 \tag{12}$$

Eje Y :

$$T_2 \sin\beta + T_1 \sin\alpha - mg = 0 \tag{13}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene el valor de las tensiones T_1 y T_2 que deben ejercer las cuerdas para mantener el estado de equilibrio:

$$T_1 = \frac{mg\cos\beta}{\left(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\right)} \tag{14}$$

$$T_2 = \frac{mg\cos\alpha}{\left(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\right)} \tag{15}$$

Caso de la Fig. (2.1.3).

Diagrama de cuerpo libre. La Fig. (2.1.7) muestra todas las fuerzas que actúan "*sobre*" la partícula de masa m : el peso $m\vec{g}$, la tensión en la cuerda $\vec{T}$ y la reacción normal $\vec{N}$ ejercida por el plano inclinado sobre la masa m . En este ejercicio consideramos que el roce es despreciable.

En este caso es conveniente colocar un sistema de ejes coordenados inclinados, de modo que el eje X coincida con el plano inclinado y que el eje Y sea perpendicular a dicho plano.

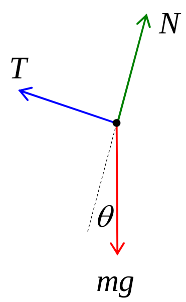

Figura (2.1.7)

La condición de equilibrio (4) implica que la fuerza resultante debe ser cero, es decir,

$$\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0} \tag{16}$$

La Fig. (2.1.8) muestra las fuerzas en el sistema de coordenadas elegido. De este modo existe una única fuerza que no coincide con alguno de los ejes: el peso mg, pero sus componentes (dibujados en línea punteada) yacen sobre los ejes coordenados:

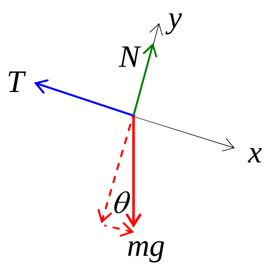

Figura (2.1.8)

Las componentes del peso vienen dadas por:

$$\left(m\vec{g}\right)_x = mg\sin\theta; \quad \left(m\vec{g}\right)_y = -mg\cos\theta \tag{17}$$

En componentes, la relación (16) queda:

Eje X:

$$mg\sin\theta - T = 0 \tag{18}$$

Eje Y:

$$N - mg\cos\theta = 0 \tag{19}$$

De la relación (18) se obtiene el valor de la tensión en la cuerda:

$$T = mg\sin\theta \tag{20}$$

y de la relación (19) se obtiene el valor de la normal

$$N = mg\cos\theta \tag{21}$$

De nuevo es importante enfatizar que el plano inclinado debe estar construido de modo tal, que sea capaz de proporcionar el valor de la normal N, y la cuerda debe ser lo suficientemente fuerte, como para proporcionar la tensión T que se necesita para lograr el equilibrio estático.

Ejercicio (2.2) Calcular la fuerza F horizontal mínima con que hay que apretar un bloque de masa $m = 1.3(kg)$ contra una pared para que éste no se caiga (ver Fig. (2.2.1)).

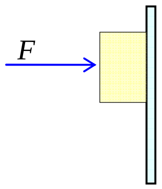

Figura (2.2.1)

El coeficiente de roce estático entre el bloque y la pared vale $\mu_s = 0.5$.

Nota: *El sistema se encuentra en equilibrio estático, por lo tanto, la fuerza resultante* $\vec{F}_R$ *debe ser cero:*

$$\vec{F}_R = \vec{0} \tag{1}$$

La fuerza de roce estática f_s, *experimentalmente viene dada por*

$$f_s = \mu_s N \tag{2}$$

donde μ_s *es el coeficiente de roce estático, el cual tiene un valor constante que es característico de las superficies en contacto. La fuerza de roce estática se opone a la intención de movimiento, es decir, apunta hacia arriba en este caso, ya que de otro modo, el bloque se movería hacia abajo.*

Solución:

En la Fig. (2.2.2) se muestra el *diagrama de cuerpo libre*, donde se han dibujado todas las fuerzas que actúan *sobre* el bloque: la fuerza $\vec{F}$ que lo empuja contra la pared, la fuerza de roce estático $\vec{f}_s$ que evita que deslice hacia abajo, el peso $m\vec{g}$ con que la tierra atrae al bloque y la fuerza normal $\vec{N}$ ejercida por la pared sobre el bloque. Dado que el bloque debe permanecer en reposo, está en equilibrio estático. Esto significa que la fuerza resultante debe ser cero, esto es:

$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{f}_s = \vec{0} \tag{3}$$

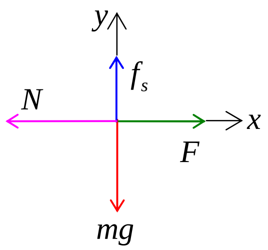

Figura (2.2.2)

En componentes, considerando los ejes coordenados de la Fig. (2.2.2), se tiene:

Eje X

$$F - N = 0 \tag{4}$$

Eje Y

$$f_s - mg = 0 \tag{5}$$

De la relación (4) se obtiene el valor de la normal N en función de F:

$$N = F \tag{6}$$

y de la relación (5) se obtiene

$$f_s = mg \tag{7}$$

Pero la fuerza de roce estática viene dada por la relación (2):

$$f_s = \mu_s N \tag{8}$$

donde μ_s es el coeficiente de roce estático. Reemplazando esta expresión en la relación (7), se tiene

$$\mu_s N = mg \tag{9}$$

Reemplazando el resultado (6) en (9) y despejando, se obtiene la fuerza F necesaria para que el bloque no deslice:

$$F = \frac{mg}{\mu_s} \tag{10}$$

Numéricamente,

$$F = \frac{1.3(kg) \times 9.8(m/s^2)}{0.5} = 25.5(N) \tag{11}$$

$$F = 25.5(N) \tag{12}$$

Ejercicio (2.3) Un cilindro de masa m descansa sobre dos planos inclinados lisos, es decir, con roce despreciable. Los planos forman los ángulos α y β con la horizontal (ver Fig. (2.3.1)). Hallar las fuerzas normales en los puntos de contacto entre los planos y el cilindro.

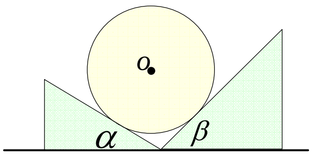

Figura (2.3.1)

Nota: *El cilindro está en reposo. En este caso, reposo implica estado de equilibrio, es decir, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro es cero:*

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = \vec{0} \tag{1}$$

Para el caso de un cuerpo rígido ideal, todas las fuerzas actúan sobre el centro de masas del cuerpo, en este caso, todas las fuerzas actúan sobre el centro de masas del cilindro. Haciendo un corte transversal al eje del cilindro, el centro de masas se encuentra en el centro de una circunferencia ubicada a la mitad de la altura del cilindro. Recordemos que en una circunferencia, el radio es perpendicular a la tangente, por esa razón, las normales al cilindro pasan justo por el centro del cilindro.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre. En la Fig. (2.3.2) hemos dibujado todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro: $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$.

Recordemos que las fuerzas normales, N_1 y N_2 , son llamadas así porque son perpendiculares a las superficies de contacto. En este caso, son perpendiculares a cada uno de los planos inclinados, los cuales a su vez son tangentes a la circunferencia. Esto implica que las normales pasan justo por el centro de la circunferencia, tal como se muestra en la Fig. (2.3.2). La fuerza peso también pasa justo por el centro de la circunferencia.

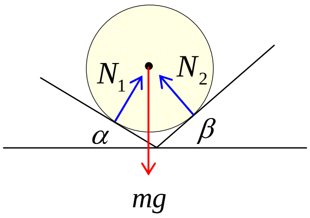

Figura (2.3.2)

Pongamos el origen del sistema de referencia justo en el centro de la circunferencia, que es el lugar por donde pasan todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro, tal como se muestra en la Fig. (2.3.3), donde junto con el diagrama de cuerpo libre se ha dibujado un sistema de coordenadas derecho:

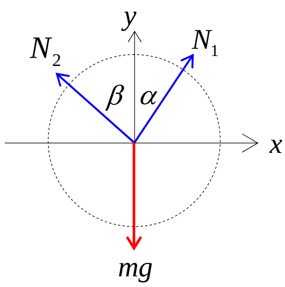

Figura (2.3.3)

La condición de equilibrio estático dado en la relación (1), viene dada por:

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0} \tag{2}$$

Esta ecuación corresponde a dos ecuaciones escalares, una para cada eje coordenado.
La Fig. (2.3.4) muestra un detalle del contacto y las fuerzas. Allí se puede ver fácilmente la relación existente entre el ángulo α y N_1, y la relación existente entre el ángulo β y N_2, en el sistema de coordenadas que se muestra en la Fig. (2.3.3):

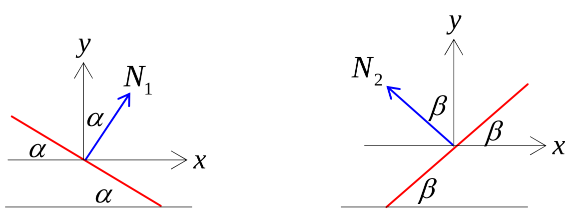

Figura (2.3.4)

A partir de la Fig. (2.3.3), podemos escribir:
eje X :

$$N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\beta = 0 \tag{3}$$

eje Y :

$$N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\beta - mg = 0 \tag{4}$$

Despejando N_1 de la relación (3), se tiene

$$N_1 = N_2 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \tag{5}$$

Reemplazando en (4),

$$\left(N_2 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha + N_2\cos\beta = mg \tag{6}$$

Despejando N_2 de esta relación, se obtiene:

$$N_2 = \frac{mg\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} \tag{7}$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, nos queda

$$N_2 = \frac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{8}$$

Reemplazando este resultado en la relación (5), obtenemos

$$N_1 = \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{9}$$

Ejercicio (2.4) Dos cilindros homogéneos de distinto radio y de masas m_1 y m_2, respectivamente, se encuentran en equilibrio, apoyados entre sí y apoyados sobre dos planos inclinados que hacen los ángulos α y β respecto a la horizontal, tal como se muestra en la Fig. (2.4.1). Se supone que el roce es despreciable en todos los puntos de contacto. Hallar el ángulo θ que hace la línea de los centros AB con la horizontal.

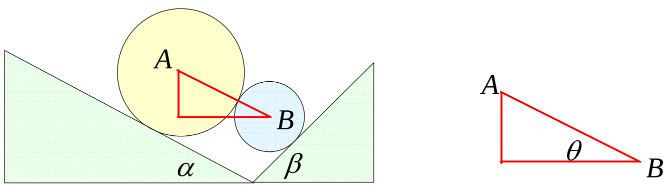

Figura (2.4.1)

Nota: *En el equilibrio, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre cada cilindro debe ser cero. Además las fuerzas normales son perpendiculares a la superficie de contacto, y por lo* *tanto son radiales a las circunferencias mostradas en la Fig. (2.4.1), y pasan justo por el centro de cada cilindro.*

Solución:

Diagrama de cuerpo libre para cada cilindro. En la Fig. (2.4.2) se muestran todas las fuerzas que actúan sobre el centro de masas de cada cilindro. Para mayor claridad se han dibujado también las circunferencias que pasan por el centro de masas de cada cilindro. Además, consideraremos que ambas circunferencias yacen en un mismo plano.

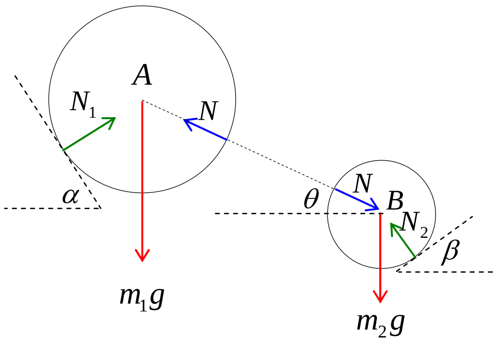

Figura (2.4.2)

Para el cilindro A, se cumple la siguiente condición de equilibrio:

$$\vec{N}_1 + \vec{N} + m_1\vec{g} = \vec{0} \qquad (1):$$

Para el cilindro B, se cumple la siguiente condición de equilibrio:

$$\vec{N}_2 + \vec{N} + m_2\vec{g} = \vec{0} \qquad (2)$$

donde $\vec{N}_1$ es la normal que actúa sobre el cilindro A debido al plano inclinado un ángulo α y $\vec{N}$ es la normal asociada al contacto entre los cilindros. $\vec{N}_2$ es la fuerza normal que actúa sobre el cilindro B debido al plano inclinado un ángulo β.

Nótese que la normal $\vec{N}$, asociada al contacto entre ambos cilindros, tiene la misma magnitud $\left|\vec{N}\right| = N$ para cada cilindro, pero actúa sobre cuerpos distintos y sus direcciones son opuestas. Lo anterior se produce porque ambas fuerzas son de acción y reacción (tercera ley de Newton), es decir, el cilindro A ejerce una fuerza normal $\vec{N}_{AB}$ sobre el cilindro B, y el cilindro B realiza otra fuerza normal $\vec{N}_{BA}$ sobre el cilindro A que es igual en magnitud $\left|\vec{N}_{AB}\right| = \left|\vec{N}_{BA}\right| = N$, pero de dirección exactamente contraria, esto es, $\vec{N}_{AB} = -\vec{N}_{BA}$.

En la Fig. (2.4.3) se han dibujado todas las fuerzas que actúan sobre cada cilindro en dos sistemas de coordenadas cuyo origen se encuentra en el centro de cada cilindro.

Ahora podemos aplicar la condición de equilibrio a cada cilindro. En primer lugar, apliquemos la condición de equilibrio (1), $\vec{N}_1 + \vec{N} + m_1\vec{g} = \vec{0}$, sobre el cilindro A, considerando las fuerzas tal como aparecen en el lado izquierdo de la Fig. (2.4.3).

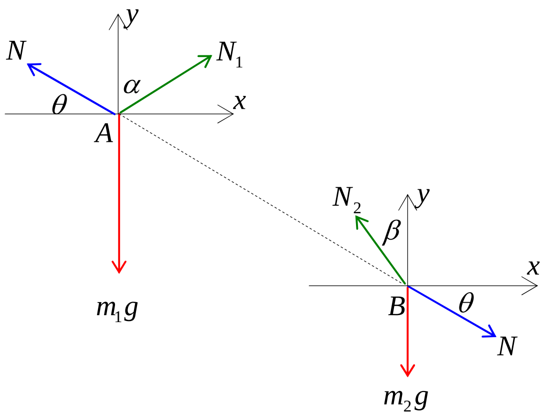

Figura (2.4.3)

En componentes se tiene:

eje X :

$$N_1 \sin\alpha - N\cos\theta = 0 \tag{3}$$

eje Y :

$$N_1 \cos\alpha + N\sin\theta - m_1 g = 0 \tag{4}$$

Ahora apliquemos la condición de equilibrio (2), $\vec{N}_2 + \vec{N} + m_2\vec{g} = \vec{0}$, sobre el cilindro B, considerando las fuerzas tal como aparecen en el lado derecho de la Fig. (2.4.3)

eje X :

$$N_2 \sin\beta - N\cos\theta = 0 \tag{5}$$

eje Y :

$$N_2 \cos\beta - N\sin\theta - m_2 g = 0 \tag{6}$$

Eliminando N_1 de las ecuaciones (3) y (4), escribimos:

$$\tan\alpha = \frac{N\cos\theta}{(m_1 g - N\sin\theta)} \tag{7}$$

De esta relación podemos obtener la normal N en función de los ángulos α y θ:

$$N = \frac{m_1 g \tan\alpha}{\left(\cos\theta + \sin\theta \tan\alpha\right)} \tag{8}$$

Eliminando N_2 de las ecuaciones (5) y (6), escribimos:

$$\tan\beta = \frac{N\cos\theta}{\left(m_2 g + N\sin\theta\right)} \tag{9}$$

De esta relación podemos obtener nuevamente la normal N, pero ahora en función de los ángulos β y θ:

$$N = \frac{m_2 g \tan\beta}{\left(\cos\theta - \sin\theta \tan\beta\right)} \tag{10}$$

Igualando las dos expresiones (8) y (10), escribimos:

$$\frac{m_1 g \tan\alpha}{\left(\cos\theta + \sin\theta \tan\alpha\right)} = \frac{m_2 g \tan\beta}{\left(\cos\theta - \sin\theta \tan\beta\right)} \tag{11}$$

$$m_1 \tan\alpha\left(\cos\theta - \sin\theta\tan\beta\right) = m_2 \tan\beta\left(\cos\theta + \sin\theta\tan\alpha\right) \tag{12}$$

Dividiendo todo por $\cos\theta$, escribimos

$$m_1 \tan\alpha\left(1 - \tan\theta\tan\beta\right) = m_2 \tan\beta\left(1 + \tan\theta\tan\alpha\right) \tag{13}$$

Despejando $\tan\theta$, se tiene finalmente:

$$\tan\theta = \frac{\left(m_1\tan\alpha - m_2\tan\beta\right)}{\left(m_1 + m_2\right)\tan\alpha\tan\beta} \tag{14}$$

Ejercicio (2.5) Hallar el valor de la masa m_1, necesaria para que el sistema mostrado en la Fig. (2.5.1) se encuentre en equilibrio y hallar las tensiones T_1 y T_2 en las cuerdas.

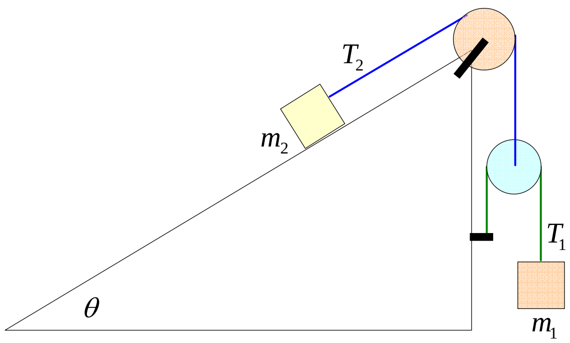

Figura (2.5.1)

El ángulo θ y la masa m_2 son datos conocidos. Considere que el roce es despreciable en este caso y que las poleas son ideales.

Nota: *Si un sistema de varias partículas (cuerpos m_1, m_2 y la polea móvil en este caso) se encuentra en equilibrio, entonces se debe cumplir que cada cuerpo por separado deber estar también en equilibrio.*

Esto es, para la partícula de masa m_2 se debe cumplir que:

$$\vec{T}_2 + \vec{N} + m_2\vec{g} = \vec{0} \tag{1}$$

donde $\vec{T}_2$ representa la tensión en la cuerda, $\vec{N}$ la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre m_2, y $m_2\vec{g}$ es el peso de la partícula de masa m_2.

Para la partícula de masa m_1 se debe cumplir que:

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} = \vec{0} \tag{2}$$

Además debemos recordar que las poleas ideales se consideran de masa despreciable ($m_{poleas} = 0$) y ejercen un roce despreciable sobre las cuerdas, de modo que las poleas ideales sólo cambian la dirección de la tensión en la cuerda, pero no su magnitud.

Para la polea móvil se debe cumplir que

$$\vec{T}_2 + 2\vec{T}_1 = \vec{0} \tag{3}$$

Solución:

En primer lugar dibujemos el diagrama de cuerpo libre para cada partícula y para la polea móvil. En la Fig. (2.5.2) se ha dibujado también el sistema de coordenadas usado en cada caso.

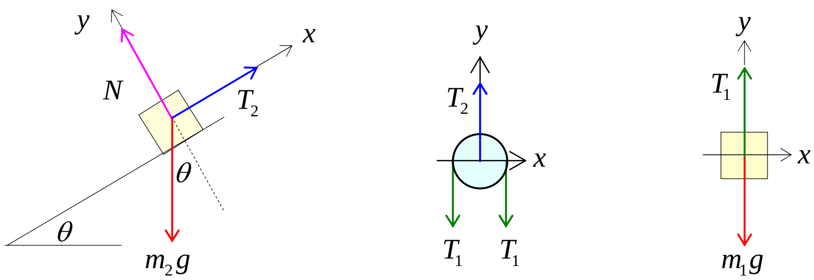

Figura (2.5.2)

Ahora aplicaremos las condiciones de equilibrio para cada cuerpo.

Cuerpo de masa m_2:

Se debe cumplir la condición (1). Según el sistema de ejes inclinados mostrado en la Fig. (2.5.2), esta condición queda:

eje X :

$$T_2 - m_2 g \sin\theta = 0 \tag{4}$$

eje Y :

$$N - m_2 g \cos\theta = 0 \tag{5}$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene la normal N y la tensión T_2, dado que m_2 y θ son datos del problema:

$$T_2 = m_2 g \sin\theta \tag{6}$$

$$N = m_2 g \cos\theta \tag{7}$$

Cuerpo de masa m_1 :

Se debe cumplir la condición (2). Según el sistema de ejes mostrado en la Fig. (2.5.2), esta condición queda:

eje Y :

$$T_1 - m_1 g = 0 \tag{8}$$

$$T_1 = m_1 g \tag{9}$$

Polea móvil sin masa:

Se debe cumplir la condición (3). Según el sistema de ejes inclinados mostrado en la Fig. (2.5.2), esta condición queda:

eje Y :

$$T_2 - 2T_1 = 0 \tag{10}$$

Hay que recordar que la polea ideal tiene masa cero.

Despejando T_1 de esta relación, se tiene

$$T_1 = \frac{T_2}{2} \tag{11}$$

Reemplazando T_2 dado por (6) y T_1 dado por (9) en la relación (11), se obtiene:

$$m_1 g = \frac{m_2 g \sin\theta}{2} \tag{12}$$

Simplificando, se obtiene la masa m_1 pedida,

$$m_1 = \frac{m_2 \sin\theta}{2} \tag{13}$$

Insertando el resultado (13) en la relación (9), se obtiene la tensión T_1:

$$T_1 = \frac{m_2 g \sin\theta}{2} \tag{14}$$

Ejercicio (2.6) Hallar la masa m_2 necesaria para mantener el sistema mostrado en la Fig. (2.6.1) desplazándose hacia la derecha con velocidad constante. Hallar también la tensión en la cuerda. Los coeficientes de roce dinámico μ_1 y μ_2, y los ángulos θ_1 y θ_2 son datos del problema. La polea se considera ideal.

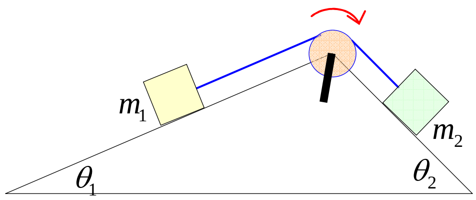

Figura (2.6.1)

Nota: *Si el sistema de mueve con velocidad constante, entonces su aceleración $\vec{a}$ es cero, y por lo tanto, por la segunda ley de Newton, la fuerza resultante $\vec{F}_R$ sobre el sistema vale cero, esto es:*

$$\vec{F}_R = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = m\vec{a} = \vec{0} \tag{1}$$

Esta es justamente la condición de equilibrio dinámico, por lo tanto el sistema se encuentra en equilibrio y cada una de sus componentes también se encuentra en equilibrio.

Por otra parte, la fuerza de roce dinámica f_k, experimentalmente, viene dada por la siguiente expresión:

$$f_k = \mu_k N \tag{2}$$

donde μ_k es una constante positiva, característica de los sistemas en contacto y N representa la normal a las superficies en contacto. Además se sabe que la fuerza de roce dinámica apunta siempre en dirección contraria a la dirección de movimiento. Si la polea se considera ideal, *entonces, por convención, no tiene masa y sólo sirve para cambiar la dirección de la tensión en las cuerdas.*

Solución:

En primer lugar dibujemos el *diagrama de cuerpo libre* de cada masa. En la Fig. (2.6.2) se muestra para cada cuerpo un sistema de coordenadas inclinado, de modo tal que el eje X coincide con el plano inclinado, es decir, coincide con la dirección de movimiento. Además, las fuerzas de roce dinámico $f_{k,1}$ y $f_{k,2}$ se han dibujado en dirección contraria al movimiento, que en este ejercicio es hacia la derecha.

Analicemos ahora la condición de equilibrio dinámico aplicada a cada cuerpo, recordando que ambos cuerpos viajan hacia la derecha con velocidad constante, es decir, con aceleración cero.

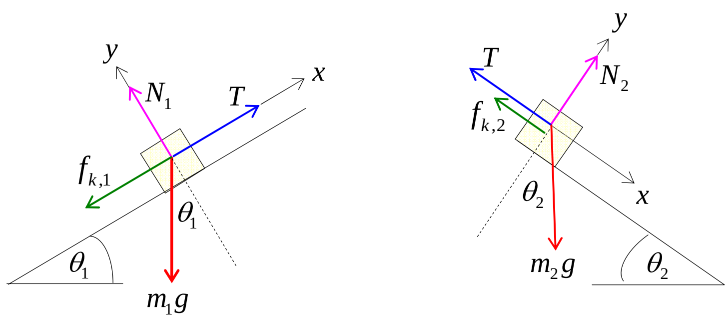

Figura (2.6.2)

Cuerpo de masa m_1 *:*

La condición de equilibrio aplicada a este cuerpo nos da (ver parte izquierda de la Fig. (2.6.2))

$$\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{f}_{k,1} + m_1\vec{g} = \vec{0} \quad (3)$$

En componentes, esta condición de equilibrio, queda:

Eje X :

$$T - f_{k,1} - m_1 g \sin\theta_1 = 0 \quad (4)$$

Eje Y :

$$N_1 - m_1 g \cos\theta_1 = 0 \quad (5)$$

Según la relación (2), la fuerza de roce dinámica $f_{k,1}$ viene dada por

$$f_{k,1} = \mu_1 N_1 \quad (6)$$

pero de la relación (5) vemos que la normal N_1 vale,

$$N_1 = m_1 g \cos\theta_1 \tag{7}$$

por lo tanto la fuerza de roce dinámica $f_{k,1}$, vale

$$f_{k,1} = \mu_1 m_1 g \cos\theta_1 \tag{8}$$

Reemplazando este resultado en la relación (4), se tiene

$$T - \mu_1 m_1 g \cos\theta_1 - m_1 g \sin\theta_1 = 0 \tag{9}$$

A partir de esta relación obtenemos la tensión en la cuerda, porque todos son datos

$$T = m_1 g \left(\sin\theta_1 + \mu_1 \cos\theta_1\right) \tag{10}$$

Cuerpo de masa m_2 :

La condición de equilibrio aplicada a este cuerpo nos da (ver parte derecha de la Fig. (2.6.2))

$$\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{f}_{k,2} + m_2\vec{g} = \vec{0} \tag{11}$$

En componentes, esta condición de equilibrio, queda:

Eje X :

$$m_2 g \sin\theta_2 - T - f_{k,2} = 0 \tag{12}$$

Eje Y :

$$N_2 - m_2 g \cos\theta_2 = 0 \tag{13}$$

La fuerza de roce dinámica $f_{k,2}$ viene dada por

$$f_{k,2} = \mu_2 N_2 \tag{14}$$

pero de la relación (13) vemos que la normal N_2 vale,

$$N_2 = m_2 g \cos\theta_2 \tag{15}$$

por lo tanto la fuerza de roce dinámica $f_{k,2}$, vale

$$f_{k,2} = \mu_2 m_2 g \cos\theta_2 \tag{16}$$

Reemplazando este resultado en la relación (12), se tiene

$$m_2 g \sin\theta_2 - T - \mu_2 m_2 g \cos\theta_2 = 0 \tag{17}$$

Si sumamos las relaciones (9) y (17), se ve claramente que se eliminan entre sí las fuerzas internas (la tensión T en este caso), porque son fuerzas de acción y reacción,

$$\left(T - \mu_1 m_1 g \cos\theta_1 - m_1 g \sin\theta_1\right) + (m_2 g \sin\theta_2 - T - \mu_2 m_2 g \cos\theta_2) = 0 \tag{18}$$

Reordenando se obtiene la masa m_2 pedida en función de los datos del problema:

$$m_2 = m_1 \frac{\left(\sin\theta_1 + \mu_1 \cos\theta_1\right)}{\left(\sin\theta_2 - \mu_2 \cos\theta_2\right)} \tag{19}$$

Ejercicio (2.7) Hallar la fuerza F necesaria para levantar a la masa M con velocidad constante mediante el sistema de poleas mostrado en la Fig. (2.7.1). Las poleas A y B son móviles y la polea C es fija, pero todas las poleas son ideales.

Nota: *El sistema se mueve con velocidad constante, por lo tanto su aceleración es cero, lo cual implica que la fuerza resultante es cero, y el sistema se encuentra en equilibrio dinámico. Como el sistema está en equilibrio, cada cuerpo debe estar en equilibrio por separado. Por otra parte, si las poleas son ideales, entonces las consideramos sin masa y sin roce, por lo tanto, las poleas ideales solo cambian la dirección de la tensión en la cuerda.*

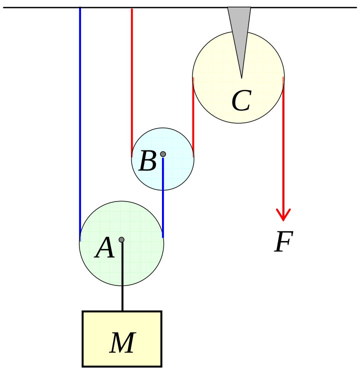

Figura (2.7.1)

Existe una única cuerda que conecta las poleas B y C, por lo tanto, existe una única tensión a ambos lados de cada una de estas dos poleas, esta tensión es justamente la fuerza F. Por la polea A pasa una segunda cuerda, distinta de la anterior, por lo tanto la tensión en dicha cuerda será distinta de F. La polea A y la masa M están conectadas por una tercera cuerda, diferente de las anteriores, por lo tanto, se debe considerar una nueva y diferente tensión.

Solución:

En primer lugar hagamos el *diagrama de cuerpo libre* para cada polea y para la masa M. Sabemos que la fuerza F se transmite a través de las poleas C y B. Llamemos T_1 a la tensión que aparece en la cuerda que pasa por la polea A y llamemos T a la tensión que aparece en la cuerda que conecta a la polea A con la masa M. Sea T_2 la fuerza que sostiene a la polea C sujeta al techo. En la Fig. (2.6.2) no se ha dibujado el sistema de coordenadas porque cada objeto presenta fuerzas solo en la dirección vertical, por lo tanto existe un único eje de coordenadas, el eje Y.

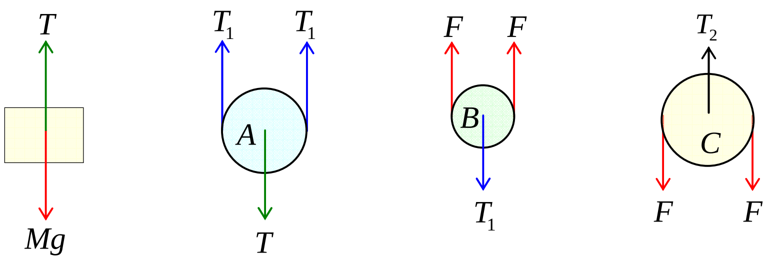

Figura (2.6.2)

Ahora aplicamos la condición de equilibrio dinámico a las poleas A y B, y a la masa M, considerando las fuerzas tal como están mostradas en la Fig. (2.6.2).

Masa M *:*

$$Mg - T = 0 \tag{1}$$

Polea A*:*

$$2T_1 - T = 0 \tag{2}$$

Polea B*:*

$$2F - T_1 = 0 \tag{3}$$

Polea C *:*

$$T_2 - 2F = 0 \tag{4}$$

Reemplazando (1) en (2) se obtiene

$$T_1 = \frac{Mg}{2} \tag{5}$$

Reemplazando este resultado en (3), se encuentra la fuerza F pedida,

$$F = \frac{Mg}{4} \tag{6}$$

Este resultado es muy útil porque nos permite una aplicación práctica. Si tenemos que levantar con velocidad constante (o sostener en reposo) un cuerpo de peso Mg, nos basta hacer una fuerza F cuatro veces más pequeña. Claramente se ve que si ponemos más poleas móviles, se va a necesitar una fuerza F cada vez más pequeña para levantar el mismo peso Mg.

Con el resultado obtenido en (6), podemos conocer el valor de T_2, usando la relación (4)

$$T_2 = \frac{Mg}{2} \tag{7}$$

Nótese que sobre el techo, y hacia abajo, actúan las siguientes fuerzas: T_1, F y T_2. Por lo tanto, para que el sistema de poleas funcione, el techo debe ser capaz de sostener la siguiente fuerza total:

$$F_{tot} = T_1 + F + T_2 = \frac{Mg}{2} + \frac{Mg}{4} + \frac{Mg}{2} \tag{8}$$

$$F_{tot} = \frac{5Mg}{4} \tag{9}$$

CAPÍTULO 3
DINÁMICA

Ejercicio (3.1) Un bloque de masa m desliza por un plano inclinado un ángulo θ (ver Fig. (3.1.1)). La fricción entre el plano inclinado y el bloque es despreciable. Hallar la aceleración a, con la cual desciende el bloque, y la normal N, ejercida por el plano inclinado sobre el bloque.

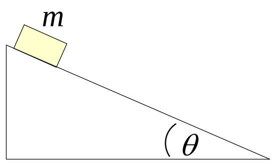

Figura (3.1.1)

Nota: *De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza resultante* $\vec{F}_R$ *está relacionada con la aceleración* $\vec{a}$ *de la partícula, cuya masa* m *no cambia en el tiempo, de la siguiente forma:*

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \tag{1}$$

$\vec{F}_R$ *es la suma vectorial de todas las fuerzas individuales* $\vec{F}_j$ *que actúan sobre la partícula en estudio:*

$$\vec{F}_R = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{2}$$

En este ejercicio, las fuerzas que actúan sobre el bloque (partícula) son: el peso $m\vec{g}$ *y la normal* $\vec{N}$ *ejercida por el plano inclinado sobre el bloque, por lo tanto, la segunda ley de Newton* (1) *queda:*

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \tag{3}$$

Convención útil: la elección de los ejes coordenados se hace de modo tal que uno de los ejes coincida con la dirección de movimiento de la partícula. Al descomponer los vectores en componentes a lo largo de cada eje coordenado, se considera como positivas a todas las fuerzas componentes que apuntan en la dirección del movimiento, y como negativas aquellas que lo hacen en sentido contrario.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre. La Fig. (3.1.2) muestra todas las fuerzas que actúan sobre el bloque (partícula) y además se muestra un sistema de coordenadas con el eje X coincidiendo con el plano inclinado, es decir, coincidiendo con la dirección de movimiento. En dicha figura se muestra además, la descomposición del vector peso $m\vec{g}$ en los ejes coordenados inclinados.

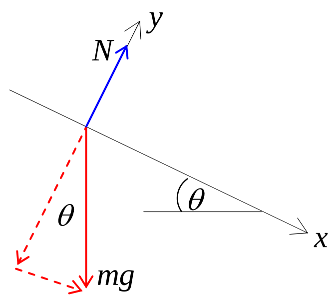

Figura (3.1.2)

La segunda ley de Newton nos dice que:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a} \tag{4}$$

En componentes, según los ejes coordenados inclinados, esta ecuación se escribe:

Eje X :

$$mg \sin\theta = ma_x \tag{5}$$

Eje Y :

$$N - mg\cos\theta = ma_y \tag{6}$$

Al moverse hacia abajo por el eje X, el bloque nunca se despega del plano inclinado, por lo tanto, no existe movimiento a lo largo del eje Y. Esto implica de inmediato que la componente vertical de la aceleración vale cero, $a_y = 0$, y que existe una única aceleración, $a_x = a$, a lo largo del eje X. Reemplazando estos valores en las ecuaciones (5) y (6), se obtiene la aceleración con la cual desciende el bloque

$$a = g \sin\theta \tag{7}$$

y el valor de la normal ejercida por el plano inclinado

$$N = mg\cos\theta \tag{8}$$

Ejercicio (3.2) El sistema mostrado en la Fig. (3.2.1) está formado por una polea ideal y dos bloques de masas m_1 y m_2 unidas entre sí por una cuerda ideal. Hallar la aceleración del sistema que rota hacia la derecha. El roce es despreciable entre la cuerda ideal y la polea ideal. Este dispositivo se denomina: máquina de Atwood.

Nota: *La polea ideal es un modelo que consiste en suponer que la polea no tiene masa ni produce roce; es decir, que sólo sirve para cambiar la dirección de la tensión en la cuerda. La cuerda ideal es otro modelo que consiste en suponer que la cuerda no tiene masa y no es elástica. En consecuencia, las dos masas unidas por esta cuerda ideal y que pasa a través de una polea ideal, tienen la misma aceleración.*

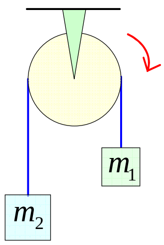

Figura (3.2.1)

La segunda ley de Newton para el caso en que no varía la masa de las partículas, viene dada por:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \tag{1}$$

Esta ley se debe aplicar a cada una de las masas.

La máquina de Atwood mostrada en la Fig. (3.2.1) permite estudiar experimentalmente, y de manera muy sencilla, un movimiento con aceleración constante.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre. La Fig. (3.2.2) muestra todas las fuerzas que actúan sobre cada bloque (partícula) y el sistema de ejes coordenados empleado.

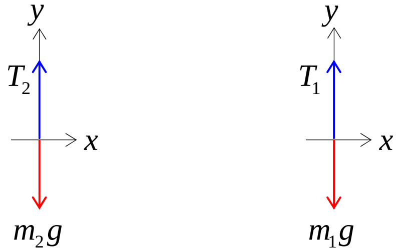

Figura (3.2.2)

Nótese que sólo existe movimiento a lo largo del eje Y, por lo tanto, existe una única aceleración $a_y = a$. Por otro lado, las cuerdas ideales y las poleas ideales hacen que exista una única tensión, es decir,

$$T_1 = T_2 = T \tag{2}$$

Apliquemos la segunda ley de Newton (1) a cada masa, considerando que la masa m_1 es la que desciende. Para escribir las ecuaciones en componentes, consideramos como positivas las fuerzas que van en la dirección del movimiento y negativas las que apuntan en sentido contrario.

Masa m_1 *:*

$$m_1 g - T = m_1 a \tag{3}$$

Masa m_2 *:*

$$T - m_2 g = m_2 a \tag{4}$$

Si sumamos las ecuaciones (3) y (4), se elimina la fuerza interna llamada tensión T y se obtiene de inmediato la aceleración a del sistema. Las fuerzas internas aparecen de a pares por ser fuerzas de acción y reacción. Por lo tanto, al sumar todas las fuerzas que actúan sobre el sistema, siempre se eliminan entre sí las fuerzas de acción y reacción debido a que se cumple la tercera ley de Newton. La aceleración del sistema viene dada por:

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g \tag{5}$$

Nótese que la aceleración a resulta ser una fracción de la aceleración de gravedad g, es decir, $a < g$. La igualdad se produciría sólo en el caso en que cortara la cuerda y ambas masas cayeran libremente en el campo gravitatorio. A partir de la expresión (5) podemos lograr una aceleración tan pequeña como queramos; basta hacer las masas muy parecidas entre sí, esto es, si $m_1 \to m_2$, entonces $(m_1 - m_2) \to 0$ y $a \to 0$. Este resultado permite comparar fácilmente, los resultados experimentales con las predicciones teóricas.

Reemplazando (5) en la relación (3) o (4), se obtiene la tensión en la cuerda:

$$T = \left(\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g \tag{6}$$

Ejercicio (3.3) El sistema mostrado en la Fig. (3.3.1) formado por dos bloques (partículas) de masas m_1 y m_2, unidas por una cuerda, se mueve hacia la derecha. Si el coeficiente de roce dinámico entre la masa m_2 y la superficie de la mesa vale μ_k, y la polea y la cuerda son ideales, hallar:

a) la aceleración a del sistema,

b) la tensión T en la cuerda.

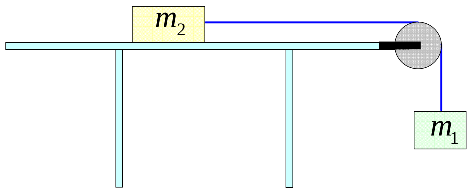

Figura (3.3.1)

Nota: *De acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza resultante sobre cada partícula está relacionada con la aceleración que adquiere la partícula en la siguiente forma:*

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \tag{1}$$

donde la fuerza resultante $\vec{F}_R$ *viene dada por la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre cada partícula (cuya masa no varía en el tiempo)*

$$\vec{F}_R = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{2}$$

Las fuerzas que intervienen en este ejercicio son: los pesos $m_1\vec{g}$ *y* $m_2\vec{g}$, *la normal* $\vec{N}$ *producida por la mesa sobre la partícula de masa* m_2, *las tensiones* $\vec{T}_1$ *y* $\vec{T}_2$ *que aparecen en la cuerda, y la fuerza de fricción dinámica* $\vec{f}_k$ *ejercida por la mesa sobre el bloque de masa* m_2. *La fuerza de fricción dinámica siempre tiene dirección opuesta a la velocidad y experimentalmente viene dada por:*

$$\vec{f}_k = -\mu_k N\,\hat{v} \tag{3}$$

donde μ_k *es una constante característica de las superficies en contacto llamada: coeficiente de roce dinámico, y donde* $\hat{v}$ *es un vector unitario en la dirección de la velocidad* $\vec{v}$.

Por otra parte, el modelo de polea ideal supone que la masa de la polea es despreciable y que el roce sobre las cuerdas también es despreciable; a su vez, el modelo de cuerda ideal supone que las *cuerdas tienen masa despreciable y que su elasticidad es despreciable, es decir, no se estiran ni se acortan. En consecuencia, las poleas ideales sólo logran cambiar la dirección de la tensión en las cuerdas ideales, pero no su magnitud, por lo tanto,* $T_1 = T_2 = T$.

Solución:

Hagamos el *diagrama de cuerpo libre* para cada bloque. La Fig. (3.3.2) muestra todas las fuerzas que actúan *sobre* cada bloque, y además muestra los ejes coordenados que se han elegido para cada uno de ellos.

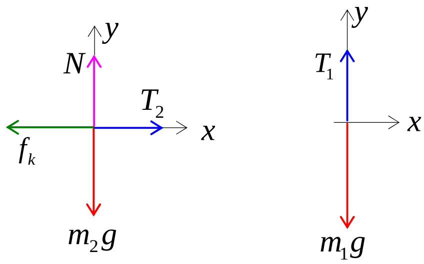

Figura (3.3.2)

Apliquemos la segunda ley de Newton dada por (1), a cada bloque.

Bloque de masa m_2 *:*

$$\vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{f}_k + m_2\vec{g} = m_2\vec{a} \tag{4}$$

En componentes:

Eje X :

$$T_2 - f_k = m_2 a_{2x} \tag{5}$$

donde T_2 es la fuerza llamada tensión que ejerce la cuerda sobr**e** el bloque de masa m_2 y a_{2x} es su aceleración a lo largo de la mesa. Pero de (3) sabemos que la fuerza de roce dinámica en módulo, viene dada por $f_k = \mu_k N$, luego la relación (5), queda:

$$T_2 - \mu_k N = m_2 a_{2x} \tag{6}$$

Eje Y :

$$N - m_2 g = m_2 a_{2y} \tag{7}$$

Pero el bloque de masa m_2 no se mueve a lo largo del eje Y , por lo tanto, la aceleración a lo largo de este eje no existe, es decir, $a_{2y} = 0$. Aplicando esta condición, se obtiene la normal ejercida por la mesa sobre el bloque de masa m_2 :

$$N = m_2 g \tag{8}$$

Reemplazando este resultado en la relación (6), se tiene

$$T_2 - \mu_k m_2 g = m_2 a_{2x} \tag{9}$$

Bloque de masa m_1 (sólo el eje Y es relevante):

Eje Y:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_{1y} \tag{10}$$

donde T_1 es la tensión que ejerce la cuerda sobre el bloque colgante de masa m_1 y a_{1y} es su aceleración vertical. Como la polea es ideal y la cuerda es ideal, las tensiones a ambos lados de la polea son las mismas, es decir,

$$T_1 = T_2 = T \tag{11}$$

Es muy importante destacar que debido a que estamos trabajando con cuerdas y poleas ideales, dichos objetos ideales, no cambian la aceleración de cada una de las masas, es decir, la aceleración hacia la derecha a_{2x} del carro de masa m_2, es igual a la aceleración hacia abajo a_{1y} del bloque de masa m_1, esto es:

$$a_{1y} = a_{2x} = a \tag{12}$$

donde a es la aceleración común de todo el sistema.

Escribamos las ecuaciones (9) y (10) usando la aceleración común a y la tensión común T,

$$T - \mu_k m_2 g = m_2 a \tag{13}$$

$$m_1 g - T = m_1 a \tag{14}$$

Nótese que la fuerza interna al sistema de dos bloques: la tensión T en la cuerda, aparece en ambas ecuaciones con distinto signo. Esto es consecuencia de que dicha fuerza es una fuerza interna de acción y reacción (tercera ley de Newton). Sumando las ecuaciones (13) y (14), se elimina la fuerza interna T y se obtiene la aceleración a del sistema

$$a = \frac{\left(m_1 - \mu_k m_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)} g \tag{15}$$

Reemplazando este resultado en la relación (14), se obtiene la tensión en la cuerda:

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{\left(m_1 + m_2\right)}\left(1 + \mu_k\right) \tag{16}$$

Caso límite. Si la fuerza de roce entre la mesa y el bloque de masa m_1 se hace despreciable, $f_k \to 0$, entonces el coeficiente de roce dinámico μ_k debe tender a cero $\mu_k \to 0$, porque la normal N no se anula. En este caso, las relaciones (15) y (16) quedan:

$$a = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} g \tag{17}$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g \tag{18}$$

Ejercicio (3.4) Consideremos una partícula que sube por la superficie de un plano inclinado un ángulo $\theta = 30^0$, donde el roce es prácticamente despreciable. La partícula inicia su movimiento en la base del plano inclinado con una velocidad inicial $\vec{v}_0$, paralela al plano inclinado, como se muestra en la Fig. (3.4.1)

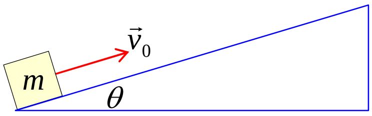

Figura (3.4.1)

a) Calcular la aceleración a de la partícula.

b) Calcular el tiempo t_d que la partícula demora en subir hasta el punto más alto posible.

c) Calcular la distancia d recorrida sobre el plano inclinado hasta llegar a ese punto más alto

d) ¿En qué tiempos la partícula pasa por los puntos ubicados a una distancia $x = d/3$ de la base del plano inclinado?

e) ¿Cuál es el tiempo total t_T que demora la partícula en volver a la base del plano?

f) ¿Con qué velocidad final v_f llega a la base del plano?

Nota: *Este ejercicio trata de un movimiento unidimensional a lo largo del plano inclinado con aceleración constante. Por sencillez, vamos a usar ejes coordenados inclinados, de modo que el eje* X *coincide con el plano inclinado, y por lo tanto, coincide con la dirección de movimiento. El eje* Y *es perpendicular al plano inclinado, tal como se muestra en la Fig. (3.4.2). Es necesario hacer un diagrama de cuerpo libre, es decir, hay que dibujar todas las fuerzas que actúan sobre la* *partícula mientras se va moviendo. Luego debemos aplicar la segunda ley de Newton, considerando que la masa de la partícula no varía*, es decir,

$$F_R = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j = m\vec{a} \tag{1}$$

donde F_R *es la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula y donde* $\vec{a}$ *es la aceleración que adquiere la partícula debido a la acción de la fuerza resultante.*

Solución:

a) Calcular la aceleración a *de la partícula*.

Diagrama de cuerpo libre. La Fig. (3.4.2) muestra todas las fuerzas que actúan sobre la partícula y además muestra el sistema de ejes coordenados usados en este caso. Los ejes coordenados fueron elegidos de modo que uno de los ejes coincida con la dirección de movimiento, el eje X en este caso.

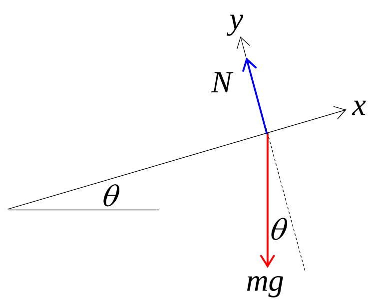

Figura (3.4.2)

La aplicación de la segunda ley de Newton a este problema nos da:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \tag{2}$$

En componentes, esta ecuación se escribe:

Eje X :

$$-mg\sin\theta = ma_x \tag{3}$$

Eje Y :

$$N - mg\cos\theta = ma_y \tag{4}$$

Por el enunciado del problema y por la elección de los ejes coordenados, vemos que la partícula nunca se despega del eje X , es decir, del plano inclinado, esto significa que no existe movimiento a lo largo del eje Y, por lo tanto, la aceleración a_y vale cero, $a_y = 0$, y la aceleración ocurre sólo a lo largo del eje X, $a_x = a$. De la relación (4) obtenemos:

$$N = mg\cos\theta \tag{5}$$

El valor de la normal N no cambia durante el movimiento, pues depende del peso mg y de la inclinación θ del plano inclinado que son constantes.
La aceleración a, a lo largo del plano inclinado se obtiene de la relación (3)

$$a = -g\sin\theta \tag{6}$$

En consecuencia, la partícula se mueve sólo a lo largo del eje X con aceleración constante.
Las ecuaciones de movimiento para partículas que se mueven con aceleración constante $\vec{a} = cte.$ vienen dadas por:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \tag{7}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{8}$$

Cada ecuación vectorial representa 3 ecuaciones escalares, una para cada uno de los ejes coordenados. En nuestro problema trabajaremos con un solo eje, el eje X porque no hay movimiento a lo largo de los otros ejes. Por simplicidad pongamos el origen del sistema de referencia en el inicio del plano inclinado, por lo tanto $x_0 = 0$. En consecuencia, las ecuaciones vectoriales (7) y (8) se reducen a:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{9}$$

$$x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{10}$$

Por sencillez de notación, eliminaremos los subíndices de estas ecuaciones porque ya sabemos que todo el movimiento se realiza a lo largo de un solo eje, el eje X que coincide con el plano inclinado:

$$v = v_0 + at \tag{11}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{12}$$

Ahora que tenemos las ecuaciones necesarias para resolver el problema, podemos empezar a responder las preguntas.

b) Calcular el tiempo t_d que demora la partícula en subir hasta el punto más alto posible.

Si la partícula llega al punto más alto posible sobre el plano inclinado en un tiempo t_d, significa que no puede seguir subiendo porque su velocidad final se hace cero, es decir, $v=0$. Aplicando esta condición en la ecuación (11), se tiene:

$$0 = v_0 + a t_d \tag{13}$$

de la cual obtenemos el tiempo total de subida t_d

$$t_d = -\frac{v_0}{a} \tag{14}$$

reemplazando el valor de la aceleración $a = -g\sin\theta$, dado en relación (6), nos queda;

$$t_d = \frac{v_0}{g\sin\theta} \tag{15}$$

c) Calcular la distancia d recorrida sobre el plano inclinado hasta ese punto más alto.

Como ya tenemos el tiempo t_d en llegar el punto más alto, basta reemplazar este resultado en la relación (12) para obtener la coordenada $x=d$ del punto más alto,

$$d = v_0 t_d + \frac{1}{2} a t_d^2 \tag{16}$$

$$d = v_0\left(\frac{v_0}{g\sin\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(-g\sin\theta\right)\left(\frac{v_0}{g\sin\theta}\right)^2 \tag{17}$$

reordenando, se tiene finalmente:

$$d = \frac{v_0^2}{2g\sin\theta} \tag{18}$$

d) ¿En qué tiempos la partícula pasa por los puntos cuya coordenada vale $x = d/3$, medida desde la base del plano inclinado?

Para responder esta pregunta usaremos nuevamente la ecuación (12), pero ahora tenemos como dato que $x = d/3$ y el tiempo t como incógnita:

$$x = \frac{d}{3} = v_0 t - \frac{1}{2} g\sin\theta\, t^2 \tag{19}$$

Reemplazando $d = v_0^2/\left(2g\sin\theta\right)$ dado por (18), tenemos

$$\frac{v_0^2}{6g\sin\theta} = v_0 t - \frac{1}{2} g\sin\theta\, t^2 \tag{20}$$

Reordenando, escribimos

$$\left(\frac{g\sin\theta}{2}\right)t^2 - v_0\, t + \left(\frac{v_0^2}{6g\sin\theta}\right) = 0 \tag{21}$$

La solución de la ecuación de segundo grado $At^2 + Bt + C = 0$, viene dada por

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{22}$$

Reemplazando los valores de A, B y C de nuestro problema, obtenemos los siguientes tiempos:

$$t = \left(\frac{v_0}{g\sin\theta}\right)\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \tag{23}$$

Pero de la relación (15), sabemos que $t_d = v_0/(g\sin\theta)$, luego la relación (23) queda

$$t = t_d\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \tag{24}$$

Por lo tanto, la partícula pasa de subida por $x = \frac{d}{3}$ en un tiempo t_1:

$$t_1 = t_d\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0.1835 t_d \tag{25}$$

y de bajada pasa por $x = \frac{d}{3}$ en un tiempo t_2:

$$t_2 = t_d\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 1.8165 t_d \tag{26}$$

e) ¿Cuál es el tiempo total t_T que demora en volver a la base del plano?

Para responder esta pregunta usaremos nuevamente la ecuación (12), pero ahora usaremos como dato $x = 0$, que es la condición para que la partícula pase de nuevo por base del plano inclinado. Reemplazando los valores conocidos, se tiene

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2} g\sin\theta\, t^2 \tag{27}$$

Ecuación de segundo grado que tiene dos soluciones, una de las cuales es $t = 0$, que corresponde al inicio del movimiento, y la otra corresponde al tiempo total t_T que la partícula demora en su trayectoria de ida y vuelta:

$$t_T = \frac{2v_0}{g\sin\theta} \tag{28}$$

El tiempo total t_T se puede expresar en función del tiempo de subida $t_d = v_0 / (g\sin\theta)$, en la forma:

$$t_T = 2t_d \tag{29}$$

lo cual implica que la partícula demora el mismo tiempo en subir que en bajar.

f) *¿Con qué velocidad final* v_f *llega la partícula a la base del plano?*

Para responder esta pregunta usaremos la ecuación (11), considerando el tiempo total: $t = t_T$.

$$v_f = v_0 - g\sin\theta\, t_T \tag{30}$$

Reemplazando los datos obtenemos

$$v_f = v_0 - g\sin\theta\left(\frac{2v_0}{g\sin\theta}\right) \tag{31}$$

Finalmente,

$$v_f = -v_0 \tag{32}$$

En conclusión, la partícula retorna al punto de partida con el mismo valor del módulo de la velocidad inicial, pero en dirección opuesta, vectorialmente, podemos escribir:

$$\vec{v}_f = -\vec{v}_0 \tag{33}$$

Ejercicio (3.5)

Un bloque (partícula) de masa m inicia su movimiento hacia arriba de un plano inclinado con $\theta = 30^\circ$, cuya base mide $b = 4(m)$, con una rapidez inicial $v_0 = 10(m/s)$, tal como se muestra en la Fig. (3.5.1). El coeficiente de roce dinámico entre el bloque y el plano inclinado vale: $\mu_k = 0.5$.

a) Hallar la aceleración del bloque en el plano inclinado.
b) Hallar la velocidad del bloque al final del plano inclinado. En este tramo, el bloque ¿acelera o retarda?
c) Al salir del plano, el bloque se mueve como proyectil. Hallar la aceleración del movimiento.
d) Calcule el tiempo t_m que demora el bloque en llegar a la altura máxima y_m desde que salió del plano inclinado.
e) Calcule la altura máxima y_m que alcanza el bloque desde que salió del plano inclinado.

f) Calcule a qué distancia d, más allá del borde del plano, llega el bloque a tierra.

g) Calcule el tiempo que demora el bloque en llegar a tierra desde que salió del plano inclinado.

h) Calcule la velocidad del bloque al llegar a tierra.

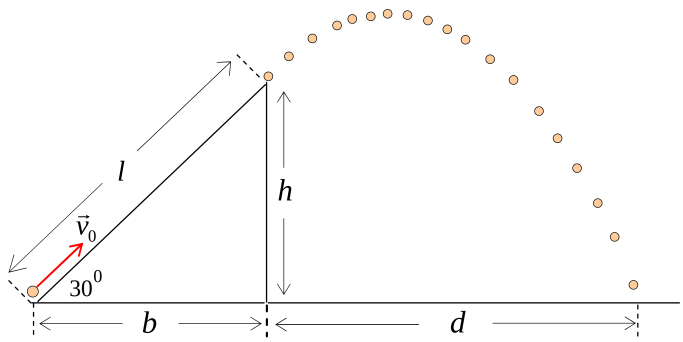

Figura (3.5.1)

Nota: *Este problema está formado por dos tramos muy diferentes: a) un movimiento en un plano inclinado con aceleración constante (primer tramo), y b) un movimiento como proyectil en el campo gravitatorio en el plano (XY) más allá del plano inclinado (segundo tramo). En cada tramo debemos hacer un análisis de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula y luego aplicar la segunda ley de Newton para obtener la aceleración correspondiente.*

La fuerza de roce dinámico viene dada experimentalmente por:

$$f_k = \mu_k N \tag{1}$$

donde μ_k es una constante llamada: coeficiente de roce dinámico. El valor de esta constante depende de las superficies en interacción del bloque y el plano inclinado. N es la normal de contacto ejercida por el plano inclinado sobre el bloque.

Solución

Primer Tramo. Movimiento sobre el plano inclinado con roce.

a) Hallar la aceleración del bloque en el plano inclinado.

Diagrama de cuerpo libre. La Fig. (3.5.2), muestra todas las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa m mientras va subiendo por el plano inclinado con roce. Se eligen los ejes coordenados inclinados, de modo que el eje X coincide con el plano inclinado, y por lo tanto, coincide con la dirección de movimiento.

La segunda ley de Newton se escribe:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{f}_k = m\vec{a} \tag{2}$$

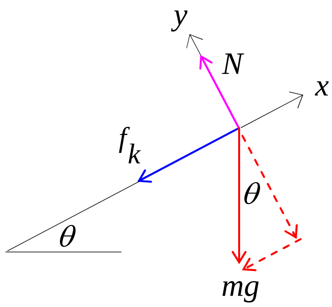

Figura (3.5.2)

En componentes, a lo largo de los ejes mostrados en la Fig. (3.5.2), se tiene:

Eje X :

$$-mg\sin\theta - f_k = m\,a_x \tag{3}$$

Reemplazando la fuerza de roce dinámico $f_k = \mu_k N$ en esta relación, se tiene:

$$-mg\sin\theta - \mu_k N = ma \tag{4}$$

Eje Y :

$$N - mg\cos\theta = m\,a_y \tag{5}$$

Dado que la partícula se mueve solamente a lo largo del eje X , entonces $a_y = 0$, y el bloque se mueve con una única aceleración $a_x = a$. De la ecuación (5) se obtiene la normal

$$N = mg\cos\theta \tag{6}$$

Reemplazando este valor en la relación (4), se tiene

$$-mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma \tag{7}$$

simplificando por la masa m , obtenemos la aceleración a lo largo del eje X :

$$a = -g\left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right) \tag{8}$$

En este punto podemos usar los datos numéricos dados en el problema:

$$a = -9.8\left(m/s^2\right)\left(\sin 30^\circ + 0.5\cos 30^\circ\right) \tag{9}$$

$$a = -9.144\left(m/s^2\right) \tag{10}$$

b) *Hallar la velocidad del bloque al final del plano inclinado. En este tramo, el bloque ¿acelera o retarda?*

Conocido el valor de la aceleración, podemos conocer el valor de la velocidad después de recorrer todo el plano inclinado de largo l. El largo del plano se obtiene por trigonometría mirando la Fig. (3.5.1)

$$l = \frac{b}{\cos 30^0} = \frac{4(m)}{0.866} = 4.62(m) \tag{11}$$

Consideremos las ecuaciones de movimiento con aceleración constante en una dimensión:

$$v = v_0 + a\,t \tag{12}$$

$$x = v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 \tag{13}$$

Si eliminamos el tiempo de estas dos ecuaciones, se obtiene la siguiente relación,

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \tag{14}$$

Con la ecuación (14) podemos conocer fácilmente la velocidad al final del tramo de largo l. Reemplazando todos los datos en esta ecuación, usando $x = l = 4.62(m)$ y $a = -9.144\left(m/s^2\right)$, se tiene,

$$v^2 = 100\left(m^2/s^2\right) - 2\times 9.144\left(m/s^2\right)\times 4.62(m) = 15.51\left(m^2/s^2\right) \tag{15}$$

La velocidad al final del tramo vale

$$v = 3.94(m/s) \tag{16}$$

Para saber si una partícula acelera o retarda, es necesario conocer los signos de la velocidad instantánea v y de la aceleración instantánea a, simultáneamente. La condición es la siguiente:

Si $a\,v > 0$, la partícula acelera, es decir, la partícula aumenta su rapidez constantemente.

Si $a\,v < 0$, la partícula retarda, es decir, la partícula disminuye su rapidez constantemente y tiende a detenerse.

En nuestro ejemplo la partícula retarda cuando sube por el plano inclinado, pues su velocidad es positiva ($v > 0$) y su aceleración es negativa ($a < 0$), por lo tanto, la condición sobre el producto av nos da negativo, es decir, $av < 0$. Además se ve claramente que la velocidad va disminuyendo desde $v_0 = 10(m/s)$ hasta $v = 3.94(m/s)$.

Segundo Tramo. Movimiento como proyectil en el campo gravitatorio.

c) Hallar la aceleración de la partícula una vez que ha salido del plano.

Cuando la partícula está en el aire, la única fuerza que actúa sobre ella es la fuerza peso $\vec{w} = -mg\hat{j}$, tal como se muestra en la Fig. (3.5.3), ya que consideramos que el roce con el aire es despreciable.

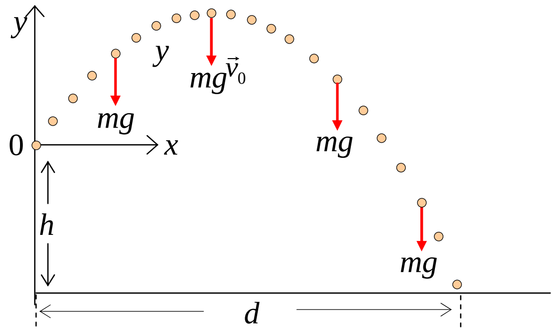

Figura (3.5.3)

Aplicando la segunda ley de Newton, $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N = m\vec{a}$, se tiene:

$$m\vec{g} = m\vec{a} \tag{17}$$

Pero $\vec{g} = -g\hat{j}$, luego,

$$m\left(-g\hat{j}\right) = m\vec{a} \tag{18}$$

por lo tanto, en el campo gravitatorio, la aceleración de la partícula es constante:

$$\vec{a} = -g\hat{j} \tag{19}$$

Esta situación corresponde al movimiento de proyectiles.

Las ecuaciones vectoriales de movimiento con aceleración $\vec{a} = -g\hat{j}$, vienen dadas por

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left(-g\hat{j}\right)t \tag{20}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\left(-g\hat{j}\right)t^2 \tag{21}$$

En esta segunda etapa es conveniente poner el origen del sistema de referencia justo al final del plano inclinado y usar ejes coordenados rectangulares vertical y horizontal. En este tramo, la partícula tiene posición inicial igual a cero, es decir, $\vec{r}_0 = \vec{0}$, y además inicia su movimiento de proyectil con rapidez (módulo de la velocidad) igual a la rapidez final del primer tramo sobre el plano inclinado, es decir,

$$v_0 = v = 3.94\left(m/s\right) \tag{22}$$

El vector velocidad inicial de este segundo tramo, $\vec{v}_0$, hace un ángulo $\theta_0 = 30^\circ$ con el eje X, es decir, sale paralelamente al plano inclinado, tal como se muestra en la Fig. (3.5.4).

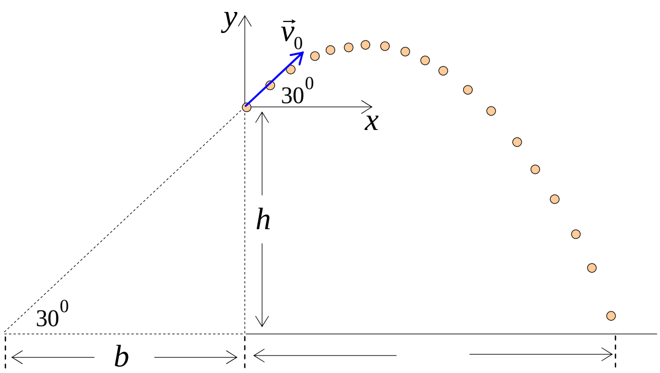

Figura (3.5.4)

Por lo tanto, las componentes del vector velocidad inicial vienen dadas por:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \tag{23}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \tag{24}$$

Numéricamente, usando el resultado dado por (22) y usando $\theta_0 = 30^\circ$, se tiene:

$$v_{0x} = 3.94\cos 30^\circ \left(m/s\right) = 3.41\left(m/s\right) \tag{25}$$

$$v_{0y} = 3.94\sin 30^\circ \left(m/s\right) = 1.97\left(m/s\right) \tag{26}$$

Escribamos ahora las ecuaciones de movimiento (20) y (21) en sus componentes a los largo de los ejes coordenados mostrados en la Fig. (3.5.4).

Eje X:

$$v_x = v_{0x} \tag{27}$$

$$x = v_{0x}t \tag{28}$$

Estas dos ecuaciones corresponden a un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) con aceleración cero, $a_x = 0$, y velocidad constante, $v_x(t) = v_{0x} = 3.41\left(m/s\right)$, lo largo del eje X.

Eje Y:

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{29}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{30}$$

Estas dos ecuaciones corresponden a un movimiento uniformemente acelerado (MUA) con aceleración constante a lo largo del eje Y, de módulo $a_y = g = 9.8\left(m/s^2\right)$.

Nótese que el movimiento de proyectil está constituido por la combinación de dos movimientos independientes: un movimiento sin aceleración a lo largo del eje X y un movimiento con aceleración constante a lo largo del eje Y. Si eliminamos el tiempo t de las ecuaciones de itinerario dadas por (28) y (30), se obtiene una relación entre las coordenadas espaciales del proyectil, es decir, se obtiene la ecuación de la trayectoria, la cual viene dada por:

$$y = x\tan\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0} \tag{31}$$

donde se ha considerado que $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Esta ecuación de trayectoria corresponde a una parábola invertida, tal como se puede ver en la Fig. (3.5.4).

Ahora que ya tenemos todos los datos del problema y además tenemos las ecuaciones necesarias, podemos responder las preguntas sobre el proyectil.

d) Calcule el tiempo t_m en llegar a la altura máxima y_m desde que salió del plano inclinado.

La altura máxima y_m se alcanza cuando la partícula ya no tiene velocidad vertical v_y para seguir subiendo, es decir, cuando

$$v_y = 0 \tag{32}$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (29), se obtiene el tiempo t_m que se demora en llegar a la altura máxima y_m desde que salió del plano inclinado,

$$0 = v_{0y} - gt_m \tag{33}$$

despejando, obtenemos

$$t_m = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{1.97\left(m/s\right)}{9.8\left(m/s^2\right)} = 0.201(s) \tag{34}$$

e) Calcule la altura máxima y_m que alcanza la partícula desde que salió del plano inclinado.

Si usamos el tiempo t_m en la ecuación (30), obtenemos la altura máxima y_m

$$y_m = v_{0y} t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 \tag{35}$$

reemplazando el resultado dado por (34) en esta relación, escribimos

$$y_m = v_{0y}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 \tag{36}$$

simplificando, se tiene:

$$y_m = \left(\frac{v_{0y}^2}{2g}\right) \tag{37}$$

De la relación (26) obtenemos el valor numérico $v_{0y} = 1.97\left(m/s\right)$, entonces y_m queda:

$$y_m = \frac{(1.97)^2 \left(m^2/s^2\right)}{2\times 9.8\left(m/s^2\right)} = 0.198\left(m\right) \tag{38}$$

Este resultado es medido desde que la partícula salió del plano inclinado.

f) Calcule a qué distancia d, más allá del borde del plano inclinado, llega la partícula a tierra

Las coordenadas del punto donde la partícula llega a tierra son:

$$x = d; \quad y = -h \tag{39}$$

De la Fig. (3.5.4), vemos que h viene dado por la relación

$$h = b \tan 30^0 = 4(m) \times \tan 30^0 \tag{40}$$

$$h = 2.31(m) \tag{41}$$

Usando estas coordenadas en la ecuación de la trayectoria, dada por la relación (31), podemos escribir

$$-h = d \tan 30^0 - \frac{g d^2}{2 v_0^2 \cos^2 30^0} \tag{42}$$

Reemplazando los datos numéricos obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado en la variable d:

$$0.4214 d^2 - 0.577 d - 2.31 = 0 \tag{43}$$

Esta ecuación entrega dos coordenadas horizontales: una coordenada positiva y una coordenada negativa. La coordenada negativa no responde a nuestra pregunta. La coordenada positiva vale

$$d = 3.12(m) \tag{44}$$

g) Calcule el tiempo t_T que demora la partícula en llegar a tierra desde que salió del plano inclinado.

Cuando la partícula llega a tierra, su coordenada vertical vale: $y = -h = -2.31(m)$. Recordando que la componente vertical de su velocidad inicial vale $v_{0y} = 1.97\left(m/s\right)$, la relación (30) que describe el comportamiento de la coordenada y en función del tiempo t, queda

$$-2.31 = 1.97t - 4.9t^2 \tag{45}$$

Reordenando, se tiene

$$4.9t^2 - 1.97t - 2.31 = 0 \tag{46}$$

Ecuación de segundo grado que entrega dos valores del tiempo: un tiempo positivo y un tiempo negativo. El tiempo negativo no tiene significado para nuestra pregunta.

El tiempo positivo corresponde al tiempo t_T empleado en llegar al suelo, medido desde que salió del plano inclinado, y vale

$$t_T = 0.916(s) \tag{47}$$

Adicionalmente, este resultado nos permite calcular de otra manera la distancia horizontal d recorrida cuando la partícula toca tierra. Reemplazando este tiempo t_T en la relación (28), que expresa la coordenada x en función del tiempo t, con $x = d$, se obtiene la coordenada horizontal,

$$d = 3.41\left(m/s\right) \times 0.916(s) = 3.12(m) \tag{48}$$

$$d = 3.12(m) \tag{49}$$

resultado idéntico al obtenido en (44), usando la ecuación de trayectoria.

h) Calcule la velocidad de la partícula cuando llega a tierra.

Dado que ya tenemos el tiempo total t_T empleado por la partícula en llegar a tierra, podemos obtener de inmediato la velocidad al llegar a tierra, a través de las relaciones (27) y (29).

La Fig. (3.5.5) muestra las componentes $v_x(t)$ y $v_y(t)$ de la velocidad instantánea $\vec{v}(t)$, en diferentes puntos de la trayectoria.

De la relación (27) obtenemos la componente horizontal de la velocidad final:

$$v_x = v_{0x} = 3.41\left(m/s\right) \tag{50}$$

En cualquier movimiento de proyectil en el campo gravitatorio, la componente horizontal $v_x(t)$ de la velocidad no cambia jamás, debido a que no hay fuerzas actuando en la dirección del eje X.

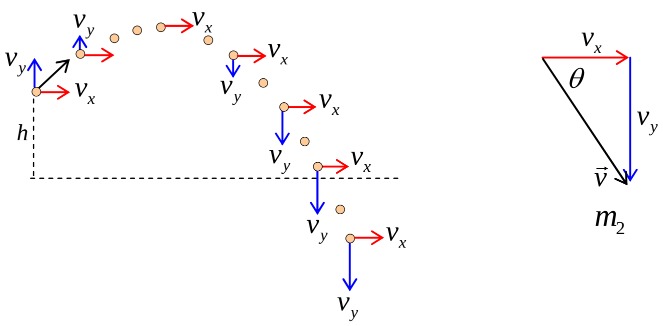

Figura (3.5.5)

De la relación (29) obtenemos la componente vertical de la velocidad final:

$$v_y(t_T) = 1.97(m/s) - 9.8(m/s^2) \times t_T \tag{51}$$

Usando el tiempo de caída, $t_T = 0.916(s)$ obtenido en relación (47), se tiene

$$v_y = 1.97(m/s) - 9.8(m/s^2) \times 0.916(s) \tag{52}$$

$$v_y = -7.0(m/s) \tag{53}$$

Con estas componentes, podemos calcular el módulo del vector velocidad y el ángulo que hace la velocidad final con el eje X .

En el lado derecho de la Fig. (3.5.5) se muestra un esquema de las componentes de la velocidad instantánea y su relación con el vector velocidad $\vec{v}$ y con el ángulo θ. De la figura se tiene:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \tag{54}$$

Numéricamente,

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{7.0}{3.41} = 2.0527859 \tag{55}$$

Por lo tanto, el ángulo que hace el vector velocidad instantánea con el eje X , cuando la partícula llega a tierra, viene dado por:

$$\theta = 74.03^0 \tag{56}$$

Recordemos que la velocidad $\vec{v}$ tiene dos componentes en el movimiento plano de proyectil:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \tag{57}$$

Por lo tanto, el módulo del vector velocidad cuando la partícula llega al suelo, viene dado por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{58}$$

Numéricamente,

$$v = \sqrt{(3.41)^2 \left(m^2/s^2\right) + (-7.0)^2 \left(m^2/s^2\right)} \tag{59}$$

$$v = 7.8\left(m/s^2\right) \tag{60}$$

Ejercicio (3.6) El bloque de masa $m_1 = 0.7(kg)$ se mueve sobre una mesa horizontal sin fricción, y está conectado a la masa $m_2 = 1.8(kg)$ por medio de la polea ideal móvil P_1, sin masa ($M_1 = 0$), y una polea ideal fija P_2, sin masa ($M_2 = 0$), tal como se muestra en la Fig. (3.6.1). La masa m_2 se mueve sobre un plano inclinado con coeficiente de roce dinámico $\mu_k = 0.19$ Si a_1 y a_2 son las aceleraciones de las masas m_1 y m_2, respectivamente, hallar

a) la relación entre estas aceleraciones a_1 y a_2,

b) los valores de las aceleraciones,

c) las tensiones en las cuerdas.

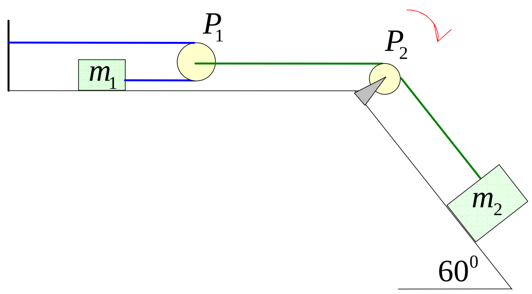

Figura (3.6.1)

Nota: *Este ejercicio tiene como característica especial, la existencia de dos aceleraciones distintas, una para cada una de las masas. En principio esto parece natural, ya que cada masa está conectada a una cuerda absolutamente distinta y además sus movimientos están relacionados a través de dos poleas ideales de masa cero. Se debe aplicar la segunda ley de Newton a las masas* m_1 *y* m_2*, y a la polea móvil*

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \tag{1}$$

Solución:

a) Hallar la relación entre estas aceleraciones a_1 *y* a_2

Consideremos la coordenada x_1 de la masa m_1 y la coordenada x_2 de la polea móvil que se mueve en conjunto con la masa m_2, ambas coordenadas medidas desde el borde izquierdo, como se muestra en la Fig. (3.6.2).

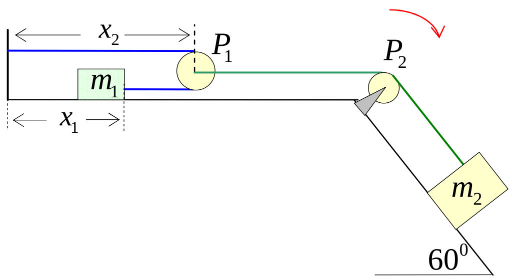

Figura (3.6.2)

Dado que el largo l_0 de la cuerda que pasa por la polea móvil es una constante, se cumple que:

$$x_2 + (x_2 - x_1) = l_0 \tag{2}$$

es decir,

$$2x_2 - x_1 = l_0 \tag{3}$$

Derivando esta ecuación dos veces con respecto al tiempo, se encuentra la relación entre las aceleraciones $a_1 = \dfrac{d^2x_1}{dt^2}$ de la masa m_1 y $a_2 = \dfrac{d^2x_2}{dt^2}$ de la masa m_2:

$$2a_2 = a_1 \tag{4}$$

b) Calcular las aceleraciones a_1 *y* a_2

En primer lugar debemos hacer un diagrama de cuerpo libre para cada una de las masas y para la polea móvil de masa $M_1 = 0$.

Bloque de masa m_1.

Usaremos ejes coordenados derechos, como se muestra en la Fig. (3.6.3)

La segunda ley de Newton para este bloque queda:

$$\vec{N}_1 + m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \tag{5}$$

En componentes, respecto a los ejes elegidos, se tiene:

Eje X:

$$T_1 = m_1 a_1 \tag{6}$$

Eje Y:

$$N_1 = m_1 g \tag{7}$$

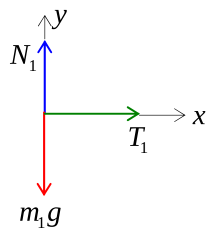

Figura (3.6.3)

Polea móvil P_1.

Usaremos ejes coordenados derechos, como se muestra en la Fig. (3.6.4).

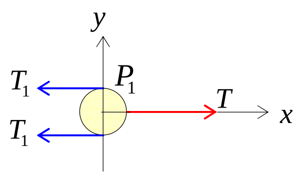

Figura (3.6.4)

La segunda ley de Newton para la polea P_1, queda

$$2\vec{T}_1 + \vec{T} = M_1 \vec{a}_2 \tag{8}$$

La polea se mueve con la misma aceleración que el bloque de masa m_2, pero su masa vale, $M_1 = 0$, luego, la relación (8), queda

$$2\vec{T}_1 + \vec{T} = \vec{0} \tag{9}$$

Dado que para esta polea sólo existen fuerzas a lo largo del eje X, en componentes, esta ecuación queda

Eje X:

$$T - 2T_1 = 0 \tag{10}$$

Es decir,

$$T = 2T_1 \tag{11}$$

Bloque de masa m_2.

Usaremos ejes coordenados inclinados según el plano, de modo que el eje X coincide con la dirección del movimiento, tal como se muestra en la Fig. (3.6.5).

La segunda ley de Newton para este bloque se escribe:

$$m_2\vec{g} + \vec{f}_k + \vec{T} + \vec{N}_2 = m_2\vec{a}_2 \tag{12}$$

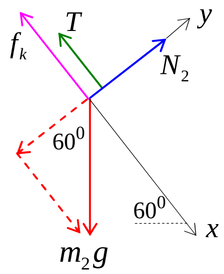

Figura (3.6.5)

En componentes, según los ejes inclinados elegidos, tenemos:

Eje X:

$$m_2 g\sin 60^0 - f_k - T = m_2 a_2 \tag{13}$$

Eje Y:

$$N_2 = m_2 g\cos 60^0 \tag{14}$$

Dado que $f_k = \mu_k N_2$, la ecuación (13) queda

$$m_2 g\sin 60^0 - \mu_k m_2 g\cos 60^0 - T = m_2 a_2 \tag{15}$$

En resumen, las ecuaciones (4), (6), (11) y (15), resuelven el problema:

$$2a_2 = a_1 \tag{16}$$

$$T_1 = m_1 a_1 \tag{17}$$

$$T = 2T_1 \tag{18}$$

$$m_2 g\sin 60^0 - \mu_k m_2 g\cos 60^0 - T = m_2 a_2 \tag{19}$$

Haciendo un poco de álgebra con estas cuatro ecuaciones, se tiene

$$T = 4m_1 a_2 \tag{20}$$

$$m_2 g\sin 60^0 - \mu_k m_2 g\cos 60^0 - T = m_2 a_2 \tag{21}$$

Sumando miembro a miembro estas ecuaciones, se obtiene la aceleración a_2

$$a_2 = \frac{m_2 g\left(\sin 60^0 - \mu_k \cos 60^0\right)}{\left(4m_1 + m_2\right)} \tag{22}$$

Nótese que la tensión T se elimina al sumar las ecuaciones, porque es una fuerza interna y aparece en estas ecuaciones en forma de acción y reacción (tercera ley de Newton).

Usando el resultado (22) y la relación (16), obtenemos la aceleración a_1,

$$a_1 = 2a_2 = \frac{2m_2 g\left(\sin 60^0 - \mu_k \cos 60^0\right)}{\left(4m_1 + m_2\right)} \tag{23}$$

Numéricamente,

$$a_2 = \frac{1.8(kg)\times 9.8\left(m/s^2\right)\times\left(0.866 - 0.19\times 0.5\right)}{\left(4\times 0.7(kg) + 1.8(kg)\right)} = \frac{13.6}{4.6}\left(m/s^2\right) \tag{24}$$

$$a_2 = 2.96\left(m/s^2\right) \tag{25}$$

$$a_1 = 5.9\left(m/s^2\right) \tag{26}$$

c) Hallar las tensiones en las cuerdas

Usando los resultados encontrados y la relación (17), se tiene

$$T_1 = m_1 a_1 = 0.7(kg)\times 5.9\left(m/s^2\right) = 4.13(N) \tag{27}$$

$$T_1 = 4.13(N) \tag{28}$$

De (18) se tiene

$$T = 2T_1 = 2\times 4.13(N) = 8.26(N) \tag{29}$$

$$T = 8.26(N) \tag{30}$$

Ejercicio (3.7) Los bloques de la Fig. (3.7.1) deslizan hacia arriba en un plano inclinado $\theta = 30^\circ$, tirados por el cuerpo de masa $m_1 = 5(kg)$.

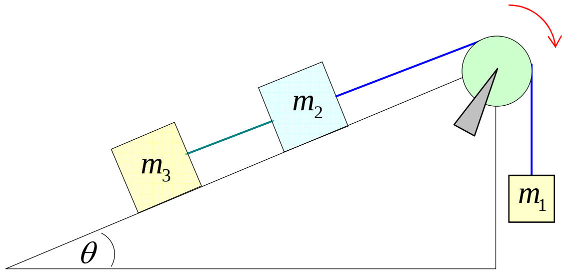

Figura (3.7.1)

El coeficiente de roce dinámico entre el bloque de masa $m_3 = 1.7(kg)$ y el plano es $\mu_3 = 0.39$ y el coeficiente de roce dinámico entre el bloque de masa $m_2 = 2.9(kg)$ y el plano es $\mu_2 = 0.43$. La polea y las cuerdas son ideales. Calcular

a) la aceleración del sistema,

b) las tensiones en las dos cuerdas.

Nota: *En primer lugar se debe hacer un diagrama de cuerpo libre para cada bloque y luego se debe aplicar la segunda ley de Newton a cada bloque.*

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \tag{1}$$

donde $\vec{F}_R$ *es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre cada bloque. La fuerza de roce dinámica viene dada por la siguiente relación experimental:*

$$f_k = \mu_k N \tag{2}$$

Donde N *es la normal ejercida por el plano inclinado sobre el cuerpo, y* μ_k *es el coeficiente de roce dinámico, cuyo valor, depende de las propiedades de las superficies en contacto.*

En este ejercicio existen dos cuerdas diferentes, por lo tanto, cada cuerda transmite su propia tensión. Sin embargo, la cuerda que pasa por la polea no sufre cambio de tensiones de un lado a otro de la polea, porque la polea y las cuerdas son ideales.

Solución:

a) calcular la aceleración del sistema.

Diagrama de cuerpo libre para cada masa. La Fig. (3.7.2) muestra todas las fuerzas que actúan sobre cada bloque y además muestra los ejes coordenados usados en cada caso.

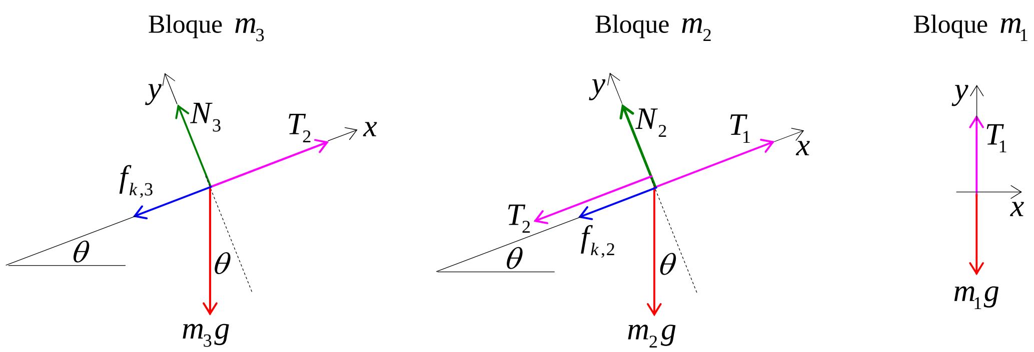

Figura (3.7.2)

Por conveniencia, sobre el plano inclinado se usan los ejes inclinados, de modo que el movimiento ocurra siempre a lo largo de un único eje, el eje X en este caso. Apliquemos ahora la segunda ley de Newton a cada bloque.

En componentes, para cada bloque y según cada eje coordenado, se tiene:

Bloque de masa m_3.

Eje X:

$$T_2 - m_3 g \sin\theta - f_{k,3} = m_3 a \tag{3}$$

Eje Y:

$$N_3 - m_3 g \cos\theta = 0 \tag{4}$$

$$N_3 = m_3 g \cos\theta \tag{5}$$

La fuerza de roce $f_{k,3}$ viene dada por:

$$f_{k,3} = \mu_3 N_3 = \mu_3 m_3 g \cos\theta \tag{6}$$

Reemplazando en la relación (3), se tiene

$$T_2 - m_3 g \sin\theta - \mu_3 m_3 g \cos\theta = m_3 a \tag{7}$$

Bloque de masa m_2.

Eje X:

$$T_1 - T_2 - m_2 g \sin\theta - f_{k,2} = m_2 a \tag{8}$$

Eje Y:

$$N_2 - m_2 g \cos\theta = 0 \tag{9}$$

$$N_2 = m_2 g \cos\theta \tag{10}$$

La fuerza de roce $f_{k,2}$ viene dada por:

$$f_{k,2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \cos\theta \tag{11}$$

Reemplazando en la relación (8), se tiene

$$T_1 - T_2 - m_2 g \sin\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta = m_2 a \tag{12}$$

Bloque colgante de masa m_1.

Eje Y (no existen fuerzas en el eje X):

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \tag{13}$$

Ahora que tenemos todas las ecuaciones, podemos obtener fácilmente la aceleración del sistema, simplemente sumando las tres ecuaciones (7), (12) y (13):

$$a = \frac{m_1 - \left(m_2 + m_3\right)\sin\theta - \left(\mu_2 m_2 + \mu_3 m_3\right)\cos\theta}{\left(m_1 + m_2 + m_3\right)} g \tag{14}$$

Nótese que al sumar estas ecuaciones, se eliminan las tensiones T_1 y T_2, porque son fuerzas internas de acción y reacción (tercera ley de Newton). Reemplazando los datos numéricos en la relación (14),

$$a = \frac{5(kg) - 4.6(kg)\times 0.5 - \left(1.247 + 0.663\right)(kg)\times 0.866}{9.6(kg)} \times 9.8\left(\frac{m}{s^2}\right) \tag{15}$$

la aceleración del sistema vale

$$a = 1.1\left(m/s^2\right) \tag{16}$$

b) Hallar las tensiones en las dos cuerdas.

De la relación (7) obtenemos T_2

$$T_2 = m_3 g\left(\sin\theta + \mu_3\cos\theta + \frac{a}{g}\right) \tag{17}$$

$$T_2 = 1.7(kg)\times 9.8\left(m/s^2\right)\times\left(0.5 + 0.39\times 0.866 + \frac{1.1\left(m/s^2\right)}{9.8\left(m/s^2\right)}\right) \tag{18}$$

$$T_2 = 15.83(N) \tag{19}$$

De (13) obtenemos la tensión T_1

$$T_1 = m_1\left(g - a\right) = 5\left(kg\right)\times\left(9.8 - 1.1\right)\left(m/s^2\right) \tag{20}$$

$$T_1 = 43.5(N) \tag{21}$$

Ejercicio (3.8) El sistema mostrado en la Fig. (3.8.1) se mueve hacia la derecha. El coeficiente de de roce dinámico entre el bloque de masa m_2 y la superficie vale μ_k. Las cuerdas y las poleas son ideales. Hallar:

a) la aceleración a_1 y a_2 de cada una de las masas.

b) las tensiones T_1 y T_2 en cada una de las cuerdas.

c) las aceleraciones y las tensiones si el roce tiende a cero $\mu_k \to 0$.

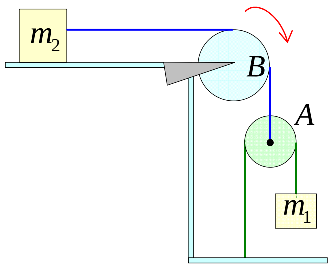

Figura (3.8.1)

Nota: *En este ejercicio existen dos cuerdas distintas, separadas por una polea sin masa (la polea A), por lo tanto, las tensiones en cada cuerda son distintas: T_1 y T_2. Además, dado el mecanismo de conexión entre los dos bloques, las aceleraciones de cada bloque también son distintas: a_1 y a_2. La única función de la polea ideal B es cambiar la dirección de la tensión de la cuerda que pasa por ella. Se debe aplicar la segunda ley de Newton a cada bloque por separado y también a la polea móvil sin masa.*

Solución:

a) hallar la aceleración a_1 y a_2 de cada una de las masas.

Hagamos el diagrama de cuerpo libre para cada bloque, incluida la polea móvil sin masa. La Fig. (3.8.2) muestra todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de los dos bloques y sobre la polea móvil A.

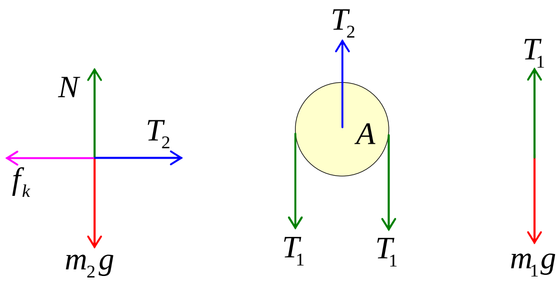

Figura (3.8.2)

Recordemos que la polea B sólo cambia la dirección de la tensión T_2. Usaremos un sistema de coordenadas derecho. Ahora aplicamos la segunda ley de Newton a cada masa y a la polea móvil A. En componentes se tiene:

Bloque de masa m_2.

Eje X (el sistema se mueve hacia la derecha):

$$T_2 - f_k = m_2 a_2 \tag{1}$$

donde T_2 es la tensión que ejerce la cuerda sobre la masa m_2, y a_2 es su aceleración correspondiente. La fuerza de roce dinámica f_k viene dada por $f_k = \mu_k N$, reemplazando en (1), queda

$$T_2 - \mu_k N = m_2 a_2 \tag{2}$$

Eje Y (no hay movimiento a lo largo de este eje):

$$N - m_2 g = 0 \tag{3}$$

$$N = m_2 g \tag{4}$$

Reemplazando este resultado en la relación (2), se obtiene

$$T_2 - \mu_k m_2 g = m_2 a_2 \tag{5}$$

Polea móvil A.

La polea fija B no cambia el valor de la tensión T_2, sino que sólo cambia su dirección, porque es una polea ideal. Entonces, sobre la polea móvil A, actúan las dos tensiones T_1 y T_2. La polea A, se mueve hacia abajo con la misma aceleración a_2 que el bloque de masa m_2, porque está conectada a ella por una cuerda ideal y pasa por una polea ideal B que es fija.

Eje Y (no existen fuerzas en el eje X *)*

$$2T_1 - T_2 = m_A a_2 \tag{6}$$

T_1 es la tensión que ejerce la cuerda inferior sobre la polea móvil A. Dado que la polea A es ideal, su masa m_A es cero ($m_A = 0$), luego la relación (6), queda,

$$2T_1 - T_2 = 0 \tag{7}$$

es decir

$$T_2 = 2T_1 \tag{8}$$

Bloque de masa m_1.

La masa m_1 se mueve hacia abajo con aceleración $a_1 \neq a_2$

Eje Y (no existen fuerzas en el eje X)

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \tag{9}$$

Una vez aplicada la segunda ley de Newton a todas las masas del sistema, resolveremos el sistema de ecuaciones resultantes (6), (8) y (9):

$$T_2 - \mu_k m_2 g = m_2 a_2 \tag{10}$$

$$T_2 = 2T_1 \tag{11}$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \tag{12}$$

Reemplazando la ecuación (11) en la ecuación (10), tenemos,

$$2T_1 - \mu_k m_2 g = m_2 a_2 \tag{13}$$

Resumiendo, las dos ecuaciones con que nos quedamos finalmente son las relaciones (12) y (13):

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \tag{14}$$

$$2T_1 - \mu_k m_2 g = m_2 a_2 \tag{15}$$

Este conjunto de dos ecuaciones contiene tres incógnitas: T_1, a_1 y a_2. Esto significa que necesitamos encontrar una nueva ecuación que relacione las incógnitas entre sí. Analizando el movimiento de las masas y poleas, es posible encontrar una relación entre las aceleraciones a_1 y a_2. La Fig. (3.8.3) muestra las coordenadas y_1 e y_2, medidas desde el piso. La coordenada y_2 indica la posición de la polea móvil, la cual se mueve junto con el bloque de masa m_2. La coordenada y_1 mide la posición del bloque de masa m_1.

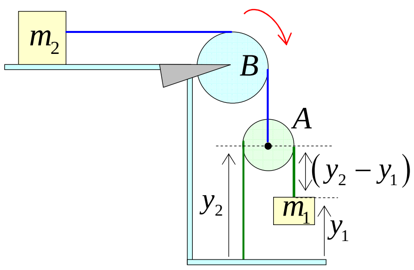

Figura (3.8.3)

La relación entre ambas coordenadas viene dada por el largo l_0 de la cuerda que pasa por la polea A:

$$y_2 + (y_2 - y_1) = l_0 \tag{16}$$

$$2y_2 - y_1 = l_0 \tag{17}$$

Derivando dos veces esta relación con respecto al tiempo, se obtiene la relación entre las aceleraciones de cada bloque:

$$2\frac{d^2y_2}{dt^2}=\frac{d^2y_1}{dt^2} \tag{18}$$

Pero, la segunda derivada del espacio con respecto al tiempo define a la aceleración: $a=\frac{d^2y}{dt^2}$, luego, la relación (18), queda

$$2a_2=a_1 \tag{19}$$

es decir, la partícula de masa m_1 acelera el doble que la partícula de masa m_2.

Ahora podemos insertar este resultado en la ecuación (14)

$$m_1g-T_1=2m_1a_2 \tag{20}$$

agregando la ecuación (15), nos queda

$$2T_1-\mu_k m_2 g=m_2a_2 \tag{21}$$

Ahora podemos resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (20) y (21) para obtener la aceleración a_2. Multiplicando la relación (20) por 2 y luego sumando miembro a miembro con la relación (21), se eliminan las tensiones y se obtiene la siguiente relación

$$2m_1g-\mu_k m_2 g=\left(4m_1+m_2\right)a_2 \tag{22}$$

Despejando, obtenemos la aceleración a_2:

$$a_2=\left(\frac{2m_1-\mu_k m_2}{4m_1+m_2}\right)g \tag{23}$$

y de la relación: $a_1=2a_2$, obtenemos la aceleración a_1:

$$a_1=\left(\frac{4m_1-2\mu_k m_2}{4m_1+m_2}\right)g \tag{24}$$

b) Hallar las tensiones T_1 y T_2 en cada una de las cuerdas.

Usando la relación (20) y el resultado de la aceleración (23), tenemos

$$T_1=m_1\left(g-2a_2\right) \tag{25}$$

$$T_1=m_1m_2g\left(\frac{1+2\mu_k}{4m_1+m_2}\right) \tag{26}$$

y usando que $T_2=2T_1$, se tiene:

$$T_2 = 2m_1m_2g\left(\frac{1+2\mu_k}{4m_1+m_2}\right) \tag{27}$$

c) Hallar las aceleraciones y las tensiones si el roce tiende a cero, $\mu_k \to 0$.

Aplicando la condición $\mu_k = 0$ en las ecuaciones (23), (24), (26) y, (27) se tiene

$$a_2 = \left(\frac{2m_1}{4m_1+m_2}\right)g \tag{28}$$

$$a_1 = 2\left(\frac{2m_1}{4m_1+m_2}\right)g \tag{29}$$

$$T_1 = \left(\frac{m_1m_2g}{4m_1+m_2}\right) \tag{30}$$

$$T_2 = 2\left(\frac{m_1m_2g}{4m_1+m_2}\right) \tag{31}$$

Ejercicio (3.9) Los bloques de la Fig. (3.9.1) deslizan hacia abajo en un plano inclinado. El coeficiente de roce entre el bloque de masa m_1 y el plano es μ_1, y el coeficiente de roce entre el bloque de masa m_2 y el plano es μ_2, donde $\mu_1 > \mu_2$. El bloque de masa m_2 está apoyado (no pegado) sobre el bloque de masa m_1.

a) Hallar la aceleración del sistema.

b) Calcular la normal de contacto N_c entre los bloques.

c) Analizar qué ocurre en los casos *i)* $\mu_1 = \mu_2$, y *ii)* $\mu_1 < \mu_2$

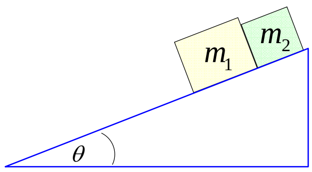

Figura (3.9.1)

Nota: *Sobre cada bloque actúan dos normales distintas: las normales* N_1 *y* N_2*, ejercidas por el plano inclinado sobre cada bloque, y en el caso en que ambos bloques bajan en contacto, aparece la normal de contacto* N_c *debida a la interacción de un bloque sobre el otro, específicamente,* *Bloque de masa* m_2 .

Eje X :

$$m_2 g \sin\theta - N_c - f_{k,2} = m_2 a \tag{5}$$

La fuerza de roce viene dada por: $f_{k,2} = \mu_2 N_2$. Reemplazando en la relación (5), se tiene:

$$m_2 g \sin\theta - N_c - \mu_2 N_2 = m_2 a \tag{6}$$

Eje Y :

$$N_2 = m_2 g \cos\theta \tag{7}$$

Reemplazando este resultado en la relación (6), tenemos

$$m_2 g \sin\theta - N_c - \mu_2 m_2 g \cos\theta = m_2 a \tag{8}$$

Sumando las relaciones (4) y (8), obtenemos la aceleración del sistema:

$$a = g\left(\sin\theta - \left(\frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \right) \cos\theta \right) \tag{9}$$

Nótese que en la suma de las relaciones (4) y (8), desaparece la fuerza interna N_c , porque es una fuerza de acción y reacción (tercera ley de Newton).

b) *Calcular la normal de contacto entre los bloques*

Consideremos nuevamente las relaciones (4) y (8)

$$N_c + m_1 g \sin\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta = m_1 a \tag{10}$$

$$m_2 g \sin\theta - N_c - \mu_2 m_2 g \cos\theta = m_2 a \tag{11}$$

Dividiendo la relación (10) por m_1 y la relación (11) por m_2 y luego restando las relaciones que resultan, se obtiene:

$$N_c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + \left(\mu_2 - \mu_1 \right) g \cos\theta = 0 \tag{12}$$

Despejando, obtenemos la normal de contacto

$$N_c = \left(\mu_1 - \mu_2 \right) \frac{m_1 m_2 g \cos\theta}{\left(m_1 + m_2 \right)} \tag{13}$$

Nótese que la normal de contacto es positiva, $N_c > 0$, ya que por hipótesis $\mu_1 > \mu_2$.

c) *Estudie qué ocurre en los casos i)* $\mu_1 = \mu_2$ *, y ii)* $\mu_1 < \mu_2$

Consideremos el caso general de dos bloques independientes que no están en contacto, que bajan sobre el mismo plano inclinado, cada uno con su propia aceleración a_1 y a_2. Como no hay contacto, no existe la normal de contacto, es decir, $N_c = 0$. Con estos antecedentes podemos escribir las ecuaciones de cada bloque independiente usando las ecuaciones (4) y (8) obtenidas anteriormente, pero con $N_c = 0$ y con $a \neq a_1 \neq a_1$,

$$m_1 g \sin\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta = m_1 a_1 \tag{14}$$

$$m_2 g \sin\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta = m_2 a_2 \tag{15}$$

Simplificando por la masa respectiva y restando estas dos ecuaciones, obtenemos la siguiente relación entre las aceleraciones y los coeficientes de roce:

$$a_1 - a_2 = \left(\mu_2 - \mu_1\right) g \cos\theta \tag{16}$$

A partir de esta relación podemos examinar los diferentes casos posibles en función de la resta entre los coeficientes de roce $\left(\mu_2 - \mu_1\right)$.

Si $\mu_1 > \mu_2$, se tiene que $a_1 - a_2 < 0$, es decir, $a_1 < a_2$. Esto implica que el bloque de masa m_2 tiene mayor aceleración que el bloque de masa m_1, y en consecuencia en algún momento alcanzará al bloque de masa m_1 y bajaran juntos o en contacto, y por lo tanto tendrán la misma aceleración. Además aparecerá una normal de contacto N_c. Este fue exactamente el caso estudiado en *a).*

i) caso en que $\mu_1 = \mu_2 = \mu$

Según la relación (16), si $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, se tiene que $a_1 - a_2 = 0$, es decir, las aceleraciones son iguales, $a_1 = a_2 = a$, lo cual implica que el bloque de masa m_2 nunca alcanzará al bloque de masa m_1. En consecuencia, los dos bloques bajan por el plano inclinado con la misma aceleración y nunca entran en contacto, es decir, $N_c = 0$. La aceleración de cada bloque vale

$$a = g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right) \tag{17}$$

ii) caso en que $\mu_1 < \mu_2$

Según la relación (16), si $\mu_1 < \mu_2$ se tiene que $a_1 - a_2 > 0$, es decir, $a_1 > a_2$. Esto implica que el bloque de masa m_1 tiene mayor aceleración que el bloque de masa m_2, y en consecuencia nunca será alcanzado por el bloque de masa m_2. Por lo tanto, ambos bloques bajaran separados, cada uno con su propia aceleración y nunca aparecerá una normal de contacto N_c.

debido a que el bloque de masa m_2 *empuja hacia abajo al bloque de masa* m_1. *Dado que por hipótesis los dos bloques bajan juntos o en contacto, su aceleración debe ser la misma. Se debe aplicar la segunda ley de Newton a cada bloque.*

Solución:

a) Hallar la aceleración del sistema.

Diagrama de cuerpo libre. La Fig. (3.9.2) muestra todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de los bloques. N_c es la normal de contacto entre los bloques. Usaremos un sistema de coordenadas con el eje X coincidente con el plano inclinado y el eje Y en la dirección de las normales N_1 y N_2.

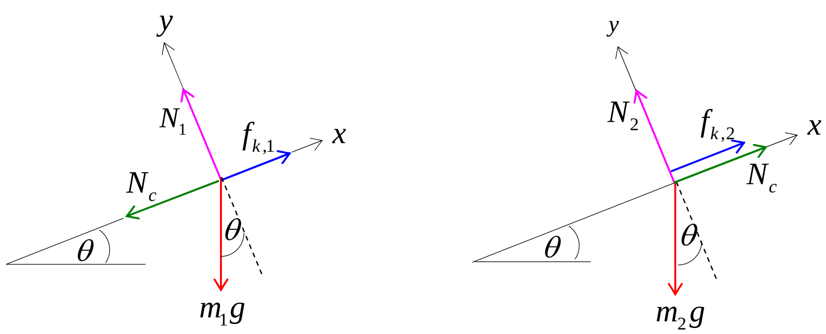

Figura (3.9.2)

Apliquemos la segunda ley de Newton a cada cuerpo. Dado que el sistema formado por los dos bloques en contacto se mueve hacia abajo con una única aceleración, consideraremos positivas las fuerzas que apuntan hacia abajo. Escribamos las ecuaciones en componentes.

Bloque de masa m_1.

Eje X:

$$N_c + m_1 g \sin\theta - f_{k,1} = m_1 a \qquad (1)$$

La fuerza de roce dinámica viene dada por: $f_{k,1} = \mu_1 N_1$. Reemplazando en la relación (1), se tiene:

$$N_c + m_1 g \sin\theta - \mu_1 N_1 = m_1 a \qquad (2)$$

Eje Y:

$$N_1 = m_1 g \cos\theta \qquad (3)$$

Reemplazando este resultado en la relación (2), nos queda,

$$N_c + m_1 g \sin\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta = m_1 a \qquad (4)$$

Usando las relaciones (14) y (15), simplificando por la masa correspondiente, se obtienen las dos aceleraciones distintas de cada bloque:

$$a_1 = g\left(\sin\theta - \mu_1 \cos\theta\right) \tag{18}$$

$$a_2 = g\left(\sin\theta - \mu_2 \cos\theta\right) \tag{19}$$

Ejercicio (3.10) El bloque de masa m_2 se mueve hacia abajo sobre un plano inclinado con roce y sobre él hay otro bloque de masa m_1. Ambos bloques están conectados por una cuerda ideal que pasa por una polea ideal, como se muestra en la Fig. (3.10.1). El coeficiente de roce dinámico μ_k tiene el mismo valor para la fricción entre las dos masas m_1 y m_2, y para la fricción entre la masa m_2 y el plano inclinado. Hallar:

a) la aceleración del sistema,

b) la tensión en la cuerda.

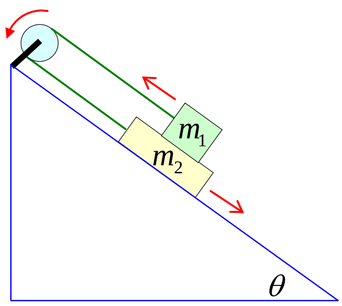

Figura (3.10.1)

Nota: *Hay que tomar en consideración las fuerzas de roce que se ejercen los bloques entre sí y además la fuerza de roce que ejerce el plano inclinado sobre la masa* m_2. *Hay que aplicar la segunda ley de Newton a cada masa.*

Solución:

a) Hallar la aceleración del sistema.

Diagrama de cuerpo libre. La Fig. (3.10.2) muestra todas las fuerzas que actúan sobre cada bloque. Se considera un sistema de coordenadas con el eje X coincidiendo con el plano inclinado y el eje Y en la dirección de la normal ejercida por el plano sobre el bloque de masa m_2. Aplicamos la segunda ley de Newton a cada cuerpo, considerando como positivas las fuerzas que apuntan en la dirección del movimiento de cada cuerpo. Se escriben las ecuaciones en componentes a lo largo de los ejes coordenados elegidos.

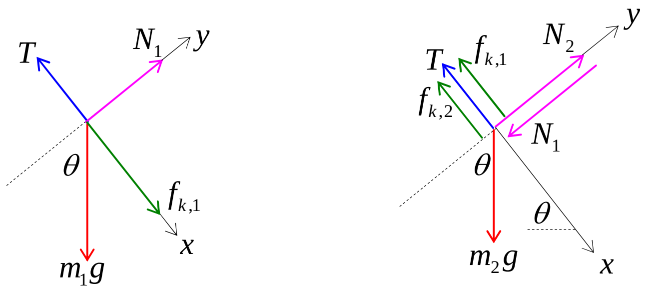

Figura (3.10.2)

Bloque de masa m_1.

Eje X :

$$T - m_1 g \sin\theta - f_{k,1} = m_1 a \tag{1}$$

La fuerza de roce dinámica entre m_1 y m_2, vale $f_{k,1} = \mu_k N_1$, luego,

$$T - m_1 g \sin\theta - \mu_k N_1 = m_1 a \tag{2}$$

Eje Y :

$$N_1 - m_1 g \cos\theta = 0 \tag{3}$$

Despejando la normal N_1

$$N_1 = m_1 g \cos\theta \tag{4}$$

Insertando este resultado en la relación (2), se tiene:

$$T - m_1 g \left(\sin\theta + \mu_k \cos\theta\right) = m_1 a \tag{5}$$

Bloque de masa m_2.

Eje X :

$$m_2 g \sin\theta - T - f_{k,1} - f_{k,2} = m_2 a \tag{6}$$

Usando los valores de la fuerza de roce dinámica $f_{k,1} = \mu_k N_1$ y $f_{k,2} = \mu_k N_2$, se tiene

$$m_2 g \sin\theta - T - \mu_k N_1 - \mu_k N_2 = m_2 a \tag{7}$$

Eje Y :

$$N_2 - N_1 - m_2 g \cos\theta = 0 \tag{8}$$

Usando la relación (4) obtenemos la normal N_2:

$$N_2 = \left(m_1 + m_2\right) g \cos\theta \tag{9}$$

Entonces, la relación (7) se escribe

$$m_2 g \sin\theta - T - \mu_k m_1 g \cos\theta - \mu_k \left(m_1 + m_2\right) g \cos\theta = m_2 a \tag{10}$$

Reordenando,

$$m_2 g \sin\theta - T - \mu_k g \left(2m_1 + m_2\right) \cos\theta = m_2 a \tag{11}$$

Sumando las relaciones (5) y (11), se elimina la fuerza interna T

$$g \sin\theta \left(m_2 - m_1\right) - \mu_k \left(3m_1 + m_2\right) g \cos\theta = \left(m_1 + m_2\right) a \tag{12}$$

Finalmente se obtiene la aceleración del sistema,

$$a = g \frac{\left(m_2 - m_1\right) \sin\theta - \mu_k \cos\theta \left(3m_1 + m_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)} \tag{13}$$

b) Hallar la tensión en la cuerda.

Usando la relación (5) y el valor de la aceleración encontrado en (13), se obtiene la tensión

$$T = 2m_1 g \left(\frac{m_2 \sin\theta - m_1 \mu_k \cos\theta}{\left(m_1 + m_2\right)} \right) \tag{14}$$

Ejercicio (3.11). Dos bloques de masas $m_1 = 2.3(kg)$ y $m_2 = 1.5(kg)$ unidas entre sí por una cuerda y a su vez unidas a un punto fijo O, describen un movimiento circunferencial con velocidad angular constante $\omega = 4\pi\left(rad/s\right)$ en un plano horizontal con roce despreciable, tal como se muestra en la Fig. (3.11.1).

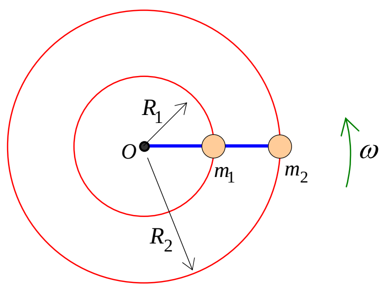

Figura (3.11.1)

Calcular las tensiones en las cuerdas, considerando las cuerdas ideales. Los radios valen:: $R_1 = 0.78(m)$ y $R_2 = 1.35(m)$.

Nota: *En el movimiento circunferencial debemos proceder de la misma manera que en el movimiento lineal, es decir, debemos hacer análisis de fuerzas sobre cada cuerpo y luego aplicar la segunda ley de Newton, considerando las aceleraciones normal o centrípeta* $\vec{a}_c$ *y la aceleración tangencial* $\vec{a}_T$*:*

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = m\vec{a} \tag{1}$$

Pero la aceleración se puede expresar en la siguiente forma:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_T \tag{2}$$

Luego, la segunda ley queda:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_c + m\vec{a}_T \tag{3}$$

La aceleración centrípeta $\vec{a}_c$ *viene dada por:*

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_N \tag{4}$$

v *es la rapidez lineal,* ρ *es el llamado radio de curvatura, que corresponde al radio* R *en el caso de una circunferencia, y* $\hat{e}_N$ *es el vector unitario que apunta hacia el centro instantáneo de curvatura y que es perpendicular a la velocidad en cada punto.*

La rapidez lineal v *de una partícula está relacionada con la rapidez angular* ω *de rotación, en la forma:*

$$v = \omega R \tag{5}$$

donde R *es la distancia al centro de giro instantáneo. Con esta relación, la aceleración centrípeta dada por* (4)*, queda:*

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} \tag{6}$$

$$a_c = \omega^2 R \tag{7}$$

La aceleración tangencial $\vec{a}_T$ *viene dada por*

$$\vec{a}_T = \left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{e}_T \tag{8}$$

Esta aceleración existe, sólo si cambia la rapidez de la partícula. $\hat{e}_T$ *es un vector unitario tangente a la curva trayectoria en cada punto, y por lo tanto, siempre apunta en la misma dirección que la velocidad instantánea. Usando la relación* (5), *la aceleración tangencial, para un movimiento circunferencial con* R *constante, queda:*

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = R\alpha \tag{9}$$

Donde $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ *es la aceleración angular. En este ejercicio se dice que las dos masas rotan con la misma velocidad angular constante* $\omega = cte$, *por lo tanto, la aceleración angular vale cero,* $\alpha = 0$. *En consecuencia, en este ejercicio no existe aceleración tangencial y la segunda ley de Newton, en la forma dada por* (3), *queda:*

$$F_R = mR\omega^2 \tag{10}$$

donde se consideran sólo las componentes de las fuerzas en la dirección radial. Específicamente, consideramos positivas las componentes de las fuerzas que apuntan hacia el centro, y negativas las que apuntan hacia fuera.

Solución:

Diagrama de fuerzas en el plano horizontal. La Fig. (3.11.2) muestra todas las fuerzas que actúan sobre las dos partículas.

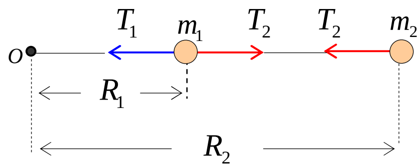

Figura (3.11.2)

Apliquemos segunda ley de Newton, en la forma dada por (10)

Bloque de masa m_1.

$$T_1 - T_2 = m_1 R_1 \omega^2 \tag{11}$$

Bloque de masa m_2

$$T_2 = m_2 R_2 \omega^2 \tag{12}$$

Usando los datos numéricos, se tiene

$$T_2 = 1.5(kg) \times 1.35(m) \times (4\pi)^2 \left(\frac{rad^2}{s^2} \right) \tag{13}$$

$$T_2 = 319.77(N) \tag{14}$$

Usando (14) en (11), se obtiene T_1:

$$T_1 = 319.77(N) + 2.3(kg) \times 0.78(m) \times (4\pi)^2 \left(\frac{rad^2}{s^2} \right) \tag{15}$$

$$T_1 = 603.07(N) \tag{16}$$

Ejercicio (3.12) La masa m_1 se mueve con velocidad instantánea $\vec{v}$ en una trayectoria circunferencial de radio R sobre una mesa horizontal con roce despreciable, tal como se muestra en la Fig. (3.12.1). La masa m_1 está sujeta a una cuerda que pasa a través de un orificio ubicado en el centro de la mesa de la cual cuelga un objeto de masa m_2. Si la masa m_2 está en equilibrio, calcular:

a) la tensión T en la cuerda,

b) la rapidez de la masa m_1.

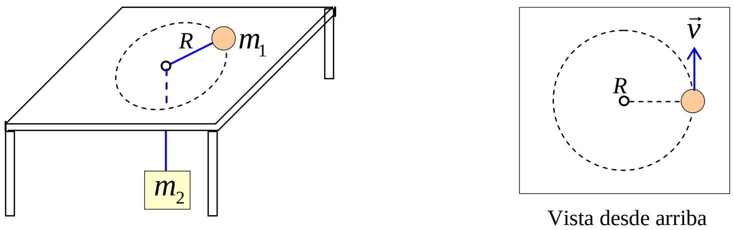

Figura (3.12.1)

Nota: *El cuerpo de masa m_2 está en equilibrio, pero el cuerpo de masa m_1 tiene aceleración centrípeta porque se encuentra realizando una trayectoria circunferencial. En el equilibrio, la fuerza resultante $\vec{F}_R$, vale cero, luego, la segunda ley de Newton queda:*

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = \vec{0} \tag{1}$$

Para el cuerpo que está rotando, la segunda ley de Newton se escribe en función de la aceleración centrípeta solamente, ya que la aceleración tangencial se hace cero, porque no hay ninguna fuerza capaz de producir un cambio en la rapidez de la masa m_1 *, luego,*

$$F_R = ma_c = \frac{mv^2}{R} \tag{2}$$

Se consideran positivas las fuerzas componentes que apuntan en la dirección hacia el centro de la circunferencia, y negativas las que apuntan en sentido contrario.

Solución

Diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo. La Fig. (3.12.2) muestra las fuerzas sobre cada masa.

Figura (3.12.2)

Sobre la masa m_1 actúan tres fuerzas: la normal N, el peso m_1g y la tensión T ejercida por la cuerda que conecta ambas masas. Sobre la masa m_2 actúan: el peso m_2g y la tensión T ejercida por la cuerda que conecta ambas masas.

Se aplica la segunda ley de Newton para cada cuerpo

Cuerpo de masa m_1 *en movimiento circunferencial.*

Eje X :

$$T = m_1 a_C \tag{3}$$

Usando la relación (2), escribimos:

$$T = m_1 \frac{v^2}{R} \tag{4}$$

Eje Y :

$$N - m_1 g = 0 \tag{5}$$

Cuerpo de masa m_2 *en equilibrio.*

$$T - m_2 g = 0 \tag{6}$$

De esta última ecuación se obtiene de inmediato el valor de la tensión T en la cuerda, ya que m_2 es un dato del problema:

$$T = m_2 g \tag{7}$$

Reemplazando este resultado en la relación (4), se tiene:

$$m_2 g = m_1 \frac{v^2}{R} \tag{8}$$

Despejando, se obtiene la rapidez de la masa m_1:

$$v = \sqrt{\frac{m_2 g R}{m_1}} \tag{9}$$

Ejercicio (3.13) Una bola de masa $m = 1.34(kg)$ está unida a una varilla giratoria vertical por medio de dos cuerdas ideales sin masa de largo $L = 1.7(m)$. En el momento en que la tensión en la cuerda superior es $T_s = 35(N)$.

a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la bola.
b) Hallar la tensión en la cuerda inferior.
c) Hallar la fuerza resultante sobre la bola.
d) hallar la rapidez de la bola.

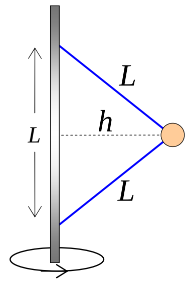

Figura (3.13.1)

Nota: *La Fig. (3.13.1) muestra a la bola girando en una circunferencia de radio* $R = h$*, con una velocidad angular* ω *que está relacionada con la rapidez lineal* v*, a través de la siguiente relación:*

$$v = \omega R \tag{1}$$

Para este ejercicio, la segunda ley de Newton establece que la suma de todas las fuerzas componentes que están en la dirección radial (en la dirección de h en la Fig. (3.13.1)), es igual a la masa por la aceleración centrípeta:

$$F_{R,c} = ma_c \tag{2}$$

Donde la aceleración centrípeta viene dada por:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{3}$$

No existe aceleración tangencial en este caso.

Solución

a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la bola.

La Fig. (3.13.2) muestra que las fuerzas que actúan sobre la bola son su peso mg y las tensiones inferior T_i y superior T_s a lo largo de cada cuerda. Allí también se muestra el sistema de coordenadas derecho que conviene usar.

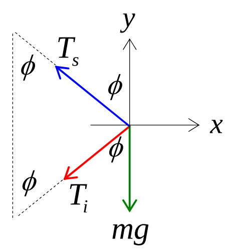

Figura (3.13.2)

La Fig. (3.13.3) muestra el triángulo equilátero formado por las cuerdas y el eje de giro.

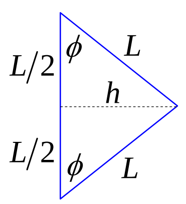

Figura (3.13.3)

La altura h del triángulo equilátero se puede calcular usando el teorema particular de Pitágoras:

$$h = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} L \tag{4}$$

Con este dato podemos calcular el coseno y el seno del ángulo ϕ:

$$\sin\phi = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\phi = \frac{(L/2)}{L} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

b) Hallar la tensión T_i en la cuerda inferior.

Ahora aplicamos la segunda ley de Newton. Usaremos los ejes horizontal y vertical dibujados en el diagrama de cuerpo libre. Se consideran positivas las fuerzas componentes que apuntan en la dirección del centro de la circunferencia.

Eje X :

$$T_s \sin\phi + T_i \sin\phi = ma_c \tag{6}$$

Usando la relación (3), escribimos:

$$(T_s + T_i)\sin\phi = m\frac{v^2}{R} \tag{7}$$

Eje Y (la bola no tiene movimiento en la dirección vertical):

$$T_s \cos\phi - T_i \cos\phi - mg = 0 \tag{8}$$

Usando la última ecuación, podemos despejar la tensión T_i en la cuerda inferior:

$$T_i = T_s - \frac{mg}{\cos\phi} \tag{9}$$

Pero de relación (5), $\cos\phi = \frac{1}{2}$, luego

$$T_i = T_s - 2mg \tag{10}$$

Numéricamente:

$$T_i = 35(N) - 2\times 1.34(kg)\times 9.8(m/s^2) = 8.74(N) \tag{11}$$

$$T_i = 8.74(N) \tag{12}$$

c) Hallar la fuerza resultante sobre la bola

La resultante de las fuerzas verticales es cero, tal como se planteó en la relación (8); en cambio, la resultante de las fuerzas horizontales es distinta de cero, apunta hacia el centro de la trayectoria curva y proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener el movimiento circunferencial de la bola. Vectorialmente, la fuerza resultante $\vec{F}_R$ es la suma de la fuerza centrípeta $\vec{F}_c$ más la fuerza tangencial $\vec{F}_T$, a saber,

$$\vec{F}_R = \vec{F}_c + \vec{F}_T \tag{13}$$

Pero como la fuerza tangencial $\vec{F}_T$ es cero, $\vec{F}_T = \vec{0}$, se tiene:

$$F_R = \vec{F}_c = T_s \sin\phi + T_i \sin\phi \tag{14}$$

Usando el valor de la tensión en la cuerda inferior T_i, encontrado en (12), se tiene,

$$F_R = \left(35(N) + 8.74(N)\right)\sin\phi = 43.74\frac{\sqrt{3}}{2}(N) \tag{15}$$

$$F_R = 37.9(N) \tag{16}$$

d) Hallar la rapidez v de la bola.

A partir de la relación (7), podemos escribir, usando $R = h$,

$$\left(T_s + T_i\right)\sin\phi = m\frac{v^2}{h}$$

despejando, se tiene,

$$v = \sqrt{\frac{\left(T_s + T_i\right)h\sin\phi}{m}} \tag{17}$$

Dado que el radio $R = h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$, numéricamente, se tiene:

$$v = \sqrt{\frac{\left(35(N) + 8.74(N)\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1.7(m)\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1.34(kg)}} \tag{18}$$

$$v = 6.45(m/s) \tag{19}$$

Ejercicio (3.14) Un cuerpo de masa m cuelga del punto E' y descansa en una superficie cónica ABC. El cuerpo gira alrededor del eje EE' con una velocidad angular ω constante, tal como se muestra en la Fig. (3.14.1).

Calcule:

a) la velocidad lineal v del cuerpo

b) la reacción normal N de la superficie cónica sobre el cuerpo

c) la tensión T en la cuerda

d) la velocidad angular ω_f necesaria para reducir a cero la reacción N del cono.

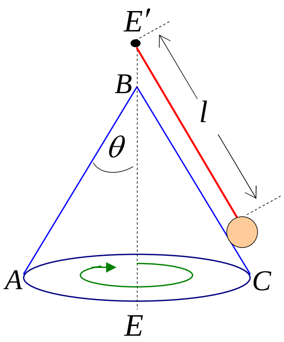

Figura (3.14.1)

Nota: *El cuerpo de masa* m *gira con velocidad angular constante* ω*, describiendo una circunferencia de radio* r.

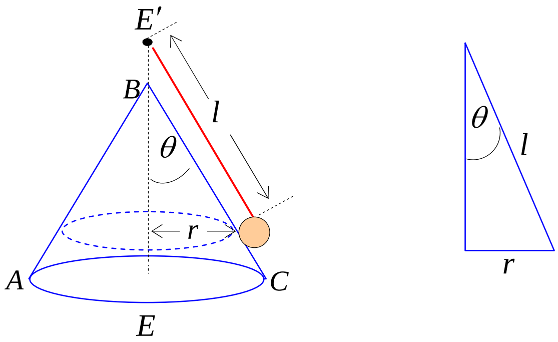

Figura (3.14.2)

En el triángulo de la Fig. (3.14.2), se cumple la siguiente relación:

$$\sin\theta = \frac{r}{l} \tag{1}$$

por lo tanto, a partir de los datos dados en el problema, podemos calcular el radio r *de la trayectoria circunferencial del cuerpo:*

$$r = l\sin\theta \tag{2}$$

Dado que la masa m *describe un movimiento circunferencial uniforme con* $\omega = cte$*, la aceleración angular* α *vale cero,* $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$*. Por la misma razón, la aceleración tangencial* a_T *es cero,* $a_T = 0$*, ya que* $a_T = \alpha r$*, esto es,* $a_T = \alpha r = 0$.

Solución:

a) Calcular la velocidad lineal del cuerpo

Sabemos que la velocidad lineal en la trayectoria circunferencial de radio $r = l\sin\theta$, está relacionada con la velocidad angular de rotación ω, en torno al eje EE', en la forma:

$$v = \omega r \tag{3}$$

$$v = \omega l \sin\theta \tag{4}$$

b) Calcular la reacción N de la superficie cónica sobre el cuerpo.

Para calcular la normal y la tensión en la cuerda, es necesario hacer un *diagrama de cuerpo libre* de la partícula. En la Fig. (3.14.3) se muestra un sistema de ejes coordenados derechos, de modo que la aceleración centrípeta está contenida en el eje X .

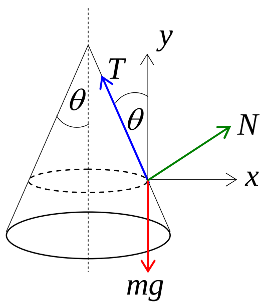

Figura (3.14.3)

Aplicando la segunda ley de Newton, $\vec{F}_R = m\vec{a}$, pero expresando la aceleración en función de la aceleración tangencial y centrípeta $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$, podemos escribir:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_C) \tag{5}$$

Pero ya vimos que la aceleración tangencial vale cero, $a_T = 0$, luego la relación (5) queda:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_C = m\frac{v^2}{r}\hat{e}_N \tag{6}$$

donde $\hat{e}_N$ es un vector unitario que apunta hacia el centro de la circunferencia de radio r . Esto implica que sólo existe aceleración centrípeta en este movimiento. Mirando la Fig. (3.14.3), vemos que la relación (6) se puede escribir en componentes.

Eje X (la aceleración centrípeta apunta justo hacia el centro de la circunferencia de radio r):

$$T\sin\theta - N\cos\theta = m\frac{v^2}{r} \tag{7}$$

Hemos puesto positiva la componente de la tensión hacia el centro, porque para allá apunta la aceleración centrípeta. De la relación (3) sabemos que $v = \omega r$, reemplazando en (7), tenemos

$$T\sin\theta - N\cos\theta = mr\omega^2 \tag{8}$$

Eje Y (no hay aceleración centrípeta a lo largo de este eje):

$$T\cos\theta + N\sin\theta - mg = 0 \tag{9}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (8) y (9), se obtiene:

$$N = mg\sin\theta - mr\omega^2\cos\theta \tag{10}$$

De la relación (2) sabemos que $r = l\sin\theta$. Reemplazando en (10), obtenemos finalmente:

$$N = m\sin\theta\left(g - l\omega^2\cos\theta\right) \tag{11}$$

c) Calcular la tensión en la cuerda.

De la solución del sistema de ecuaciones (8) y (9), se obtiene la tensión en la cuerda:

$$T = ml\omega^2 + m\cos\theta\left(g - l\omega^2\cos\theta\right) \tag{12}$$

d) Calcular la velocidad angular necesaria para reducir a cero la reacción normal N.

Para obtener la velocidad angular ω_f necesaria para que el cuerpo deje de tocar a la superficie cónica, debemos hacer tender la normal de contacto a cero, $N \to 0$, en las ecuaciones generales (8) y (9), es decir,

$$T\sin\theta = mr\omega_f^2 \tag{13}$$

$$T\cos\theta = mg \tag{14}$$

Dividiendo estas ecuaciones entre sí, se obtiene:

$$g\tan\theta = r\omega_f^2 \tag{15}$$

Usando $r = l\sin\theta$ dado por la relación (2), se tiene finalmente la nueva velocidad angular ω_f:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}} \tag{16}$$

CAPÍTULO 4

TRABAJO Y ENERGÍA

Ejercicio (4.1) Un bloque de masa $m = 1(kg)$ desliza a lo largo de un rizo de fricción despreciable, de radio $R = 0.19(m)$ y altura $h = 4.5R$. Si el bloque lleva una velocidad inicial $v_A = 0.8(m/s)$ cuando va pasando por el punto A, hallar:

a) la velocidad v_B y la normal N_B cuando el bloque va pasando por el punto B,

b) la velocidad v_C y la normal N_C cuando el bloque va pasando por el punto C.

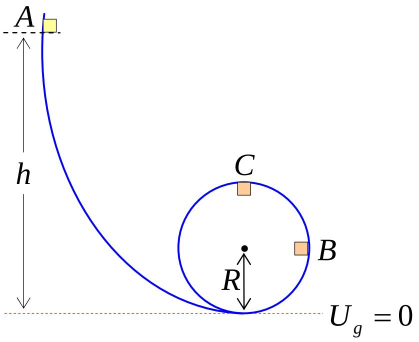

Figura (4.1.1)

Nota: *en este problema no existe roce, por lo tanto se cumple el teorema de conservación de la energía mecánica total:*

$$(K+U)_{inicial} = (K+U)_{final} \tag{1}$$

donde K define a la energía cinética

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

y donde la energía potencial gravitatoria U, viene dada por

$$U = mgy \tag{3}$$

En esta expresión, la coordenada y se mide desde el nivel cero de energía potencial. En este caso, se elige el nivel cero de energía potencial gravitacional $U_g = 0$ en el punto más bajo del rizo, indicado por la línea punteada.

Solución:

a) hallar la velocidad v_B y la normal N_B cuando el bloque va pasando por el punto B

Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica a los puntos inicial A y final B, esto es:

$$(K+U)_A = (K+U)_B \tag{4}$$

Punto inicial A:

Energía cinética:

$$K_A = \frac{mv_A^2}{2} \tag{5}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_g = mgy_A = mgh \tag{6}$$

Luego:

$$(K+U)_A = \frac{mv_A^2}{2} + mgh \tag{7}$$

Punto final B:

Energía cinética:

$$K_B = \frac{mv_B^2}{2} \tag{8}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_g = mgy_B = mgR \tag{9}$$

Luego:

$$(K+U)_B = \frac{mv_B^2}{2} + mgR \tag{10}$$

Reemplazando en el teorema de conservación, se tiene:

$$\frac{mv_A^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2} + mgR \tag{11}$$

pero, $h = 4.5R$, luego

$$\frac{mv_A^2}{2} + 4.5mgR = \frac{mv_B^2}{2} + mgR \tag{12}$$

Despejando, obtenemos la velocidad en el punto B:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 7gR} \tag{13}$$

Numéricamente, se tiene:

$$v_B = \sqrt{(0.8)^2 \left(m^2/s^2\right) + 7 \times 9.8\left(m/s^2\right) \times 0.19(m)} \tag{14}$$

$$v_B = 3.7(m/s) \tag{15}$$

Para hallar la normal en B, hagamos un diagrama de cuerpo libre, tal como se muestra en la Fig. (4.1.2).

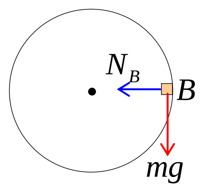

Figura (4.1.2)

El peso mg está relacionado con la aceleración tangencial. En cambio, la normal N entregada por el rizo es la responsable de la aceleración centrípeta, esto es:

$$N_B = ma_{centrípeta} = m\frac{v_B^2}{R} \tag{16}$$

Reemplazando el valor $v_B = 3.7(m/s)$, se tiene

$$N_B = 1(kg)\frac{(3.7)^2\left(m^2/s^2\right)}{0.19(m)} \tag{17}$$

$$N_B = 72.05(N) \tag{18}$$

b) hallar la velocidad v_C y la normal N_C cuando el bloque va pasando por el punto C

Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica entre los puntos inicial A y final C, esto es,

$$(K+U)_A = (K+U)_C \tag{19}$$

Punto inicial A:

Energía cinética:

$$K_A = \frac{mv_A^2}{2} \tag{20}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_g = mgy_A = mgh \tag{21}$$

Luego:

$$\left(K+U\right)_A = \frac{mv_A^2}{2} + mgh \tag{22}$$

Punto final C *:*

Energía cinética:

$$K_C = \frac{mv_C^2}{2} \tag{23}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_g = mgy_C = mg2R \tag{24}$$

Luego:

$$\left(K+U\right)_C = \frac{mv_C^2}{2} + mg2R \tag{25}$$

Reemplazando en el teorema de conservación dado por (19), se tiene:

$$\frac{mv_A^2}{2} + mg4.5R = \frac{mv_C^2}{2} + 2mgR \tag{26}$$

Despejando, obtenemos la velocidad en el punto C:

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 5gR} \tag{27}$$

Numéricamente, se tiene:

$$v_C = \sqrt{(0.8)^2\left(m^2/s^2\right) + 5\times 9.8\left(m/s^2\right)\times 0.19\left(m\right)} \tag{28}$$

$$v_C = 3.15\left(m/s\right) \tag{29}$$

Para hallar la normal en C, hagamos un diagrama de cuerpo libre, tal como se muestra en la Fig. (4.1.3). El peso mg y la normal N_C apuntan hacia el centro de la circunferencia, y son responsables de la aceleración centrípeta, esto es:

$$N_C + mg = ma_{centrípeta} = m\frac{v_C^2}{R} \tag{30}$$

$$N_C = m\frac{v_C^2}{R} - mg \tag{31}$$

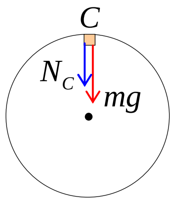

Figura (4.1.3)

Reemplazando el valor $v_C = 3.15\left(m/s\right)$, obtenido en (29), en la relación (31), se tiene

$$N_C = 1\left(kg\right)\frac{\left(3.15\right)^2\left(m^2/s^2\right)}{0.19\left(m\right)} - 1\left(kg\right)\times 9.8\left(m/s^2\right) \tag{32}$$

$$N_C = 42.42(N) \tag{33}$$

Ejercicio (4.2) Un péndulo simple de masa m y largo L se suelta desde el reposo en la posición horizontal y el hilo llega a chocar con un clavo que se encuentra en el punto P, ubicado verticalmente una distancia $d > \dfrac{L}{2}$ más abajo del punto donde cuelga el péndulo.

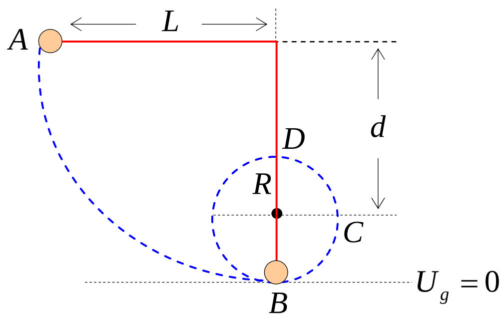

Figura (4.2.1)

Calcular la velocidad de la masa y la tensión en la cuerda en el punto D, después de que la cuerda choca contra el clavo y el péndulo describe una circunferencia de radio $R=(L-d)$.

Nota: *Dado que no hay fuerzas de roce, el trabajo de las fuerzas disipativas es cero:* $W_D=0$*, por lo tanto se cumple el teorema de conservación de la energía:*

$$(K+U)_{\text{inicial}}=(K+U)_{\text{final}} \tag{1}$$

Se elige el punto más bajo de la trayectoria como el nivel cero de energía potencial $U_g=0$*, tal como se muestra en la Fig. (4.2.1)*

Solución

a) Calcular la velocidad en el punto más alto D *de la trayectoria de radio* $R=(L-d)$.

Aplicaremos el teorema de conservación de la energía entre el punto inicial A y el punto final D., esto es,

$$(K+U)_{\text{A}}=(K+U)_{\text{D}} \tag{2}$$

El nivel cero de energía potencial se muestra en la Fig. (4.2.1).

Punto inicial A*:*

Energía cinética inicial (con $v_A=0$):

$$K_A=\frac{1}{2}mv_A^2=0 \tag{3}$$

Energía potencial inicial:

$$U_{gA}=mgy_A \tag{4}$$

Por lo tanto,

$$(K+U)_{\text{A}}=mgy_A \tag{5}$$

Punto Final D*:*

Energía cinética final:

$$K_D=\frac{1}{2}mv_D^2 \tag{6}$$

Energía potencial final:

$$U_{gD}=mgy_D \tag{7}$$

Por lo tanto,

$$\left(K+U\right)_{\mathrm{D}}=\frac{1}{2}mv_D^2+mgy_D \tag{8}$$

Aplicando el teorema de conservación de la energía dado por (2), se tiene

$$\left(K+U\right)_{\mathrm{A}}=\left(K+U\right)_{\mathrm{D}} \tag{9}$$

$$mgy_A=\frac{1}{2}mv_D^2+mgy_D \tag{10}$$

Despejando

$$v_D=\sqrt{2g\left(y_A-y_D\right)} \tag{11}$$

Sabemos que $y_A=L$ y que $y_D=2R=2(L-d)$, luego

$$\left(y_A-y_D\right)=L-2(L-d)=2d-L \tag{12}$$

Usando los datos, se tiene finalmente la velocidad en el punto D:

$$v_D=\sqrt{2g\left(2d-L\right)} \tag{13}$$

b) Calcular la tensión en la cuerda en el punto D.

En D, la tensión T en la cuerda y el peso mg apuntan hacia abajo, como se muestra en la Fig. (4.2.2).

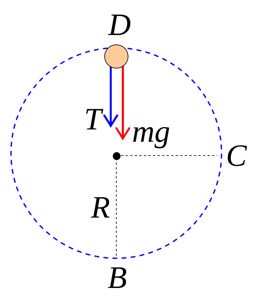

Figura (4.2.2)

Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$$T_D+mg=ma_C=m\frac{v_D^2}{R} \tag{14}$$

Donde la aceleración centrípeta a_C viene dada por $a_C=\frac{v_D^2}{R}$. El radio vale $R=\left(L-d\right)$.

Despejando el valor de la tensión, se tiene:

$$T_D = m\frac{v_D^2}{(L-d)} - mg \tag{15}$$

Pero de (13) sabemos que $v_D^2 = 2g\left(2d - L\right)$, luego,

$$T_D = m\frac{2g\left(2d-L\right)}{\left(L-d\right)} - mg \tag{16}$$

finalmente,

$$T_D = mg\left(\frac{5d-3L}{L-d}\right) \tag{17}$$

Ejercicio (4.3) Un bloque de masa $m = 1(kg)$ pasa por el punto A con velocidad $v_A = 3(m/s)$ y llega a chocar a un resorte de constante $k = 100(N/m)$ que se encuentra estirado en su largo natural, tal como se muestra en la Fig. (4.3.1). Si todo el plano horizontal tiene el mismo coeficiente de roce $\mu_k = 0.2$, y la distancia $l = d_{AB} = 1.8(m)$ Hallar

a) La velocidad v_B al pasar por el punto B.

b) ¿cuál es la máxima compresión del resorte? (ver punto C).

c) ¿Hasta dónde se devuelve el bloque?

d) Hallar la distancia total recorrida por el bloque antes de quedar en reposo.

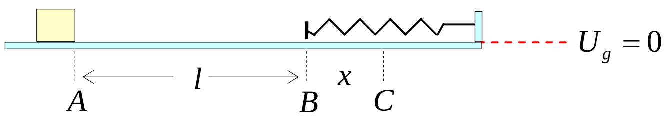

Figura (4.3.1)

Nota: *Dado que existe roce usaremos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas:*

$$W_d = \left(K+U\right)_f - \left(K+U\right)_i \tag{1}$$

El trabajo W_d de la fuerza de roce o fuerza disipativa es negativo y viene dado por

$$W_d = -\mu_k N d_r \tag{2}$$

d_r *es la distancia total recorrida sobre el camino "con roce", y* N *es la normal ejercida por el plano sobre el bloque. El teorema queda en la forma:*

$$-\mu_k N d_r = \left(K+U\right)_f - \left(K+U\right)_i \tag{3}$$

La energía cinética viene dada por

$$K = \frac{mv^2}{2} \tag{4}$$

El símbolo U *representa la suma de las energías potenciales presentes en el problema, que en este caso solo pueden ser de dos tipos:*

Energía potencial gravitacional:

$$U_g = mgy \tag{5}$$

Energía potencial elástica:

$$U_e = \frac{kx^2}{2} \tag{6}$$

Luego, la energía potencial total U *, viene dada por:*

$$U = U_g + U_e \tag{7}$$

Solución:

a) *Hallar la velocidad* v_B *del bloque al pasar por el punto* B.

Aplicaremos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas entre el punto inicial es A y el punto final es B, usando la forma dada por (3), esto es,

$$-\mu_k N d_r = \left(K+U\right)_B - \left(K+U\right)_A \tag{8}$$

Escribamos las energías en cada punto.

Punto inicial A.

Energía cinética:

$$K_A = \frac{mv_A^2}{2} \tag{9}$$

Energía potencial gravitatoria:

Si elegimos el nivel cero de la energía potencial gravitacional $U_g = 0$ en el plano horizontal, tal como se muestra en la Fig. (4.3.1), entonces las energías potencial gravitacional inicial y final del bloque son iguales a cero, porque el bloque nunca se mueve del nivel horizontal, es decir,

$$U_{gA} = U_{gB} = 0 \tag{10}$$

Energía potencial elástica:

En el punto inicial A no existe ningún resorte ni estirado ni comprimido, luego, la energía potencial elástica es cero:

$$U_{eA} = 0 \tag{11}$$

En consecuencia, $(K+U)_A$ queda:

$$(K+U)_A = \frac{mv_A^2}{2} + 0 + 0 \tag{12}$$

$$(K+U)_A = \frac{mv_A^2}{2} \tag{13}$$

Punto final B.

Energía cinética:

$$K_B = \frac{mv_B^2}{2} \tag{14}$$

Energía potencial elástica:

En el punto final B tampoco existe ningún resorte ni estirado ni comprimido, luego, la energía potencial elástica es cero:

$$U_{eB} = 0 \tag{15}$$

En consecuencia, $(K+U)_B$ queda:

$$(K+U)_B = \frac{mv_B^2}{2} + 0 + 0 \tag{16}$$

$$(K+U)_B = \frac{mv_B^2}{2} \tag{17}$$

Trabajo de las fuerzas disipativas W_d *:*

El trabajo de las fuerzas disipativas viene dado por el trabajo de la única fuerza disipativa presente en el problema: la fuerza de roce entre el bloque y el plano horizontal:

$$W_d = -\mu_k N d_{AB} = -\mu_k N l \tag{18}$$

donde $l = d_{AB}$ es la distancia recorrida por el bloque sobre el camino con roce entre los puntos inicial y final que estamos considerando. En este caso particular la normal es igual al peso: $N = mg$, reemplazando, se tiene

$$W_d = -\mu_k mgl \tag{19}$$

Reemplazando los resultados dados por (13), (17) y (19), en el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado por la relación (8), se tiene

$$-\mu_k mgl = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} \tag{20}$$

despejando la velocidad v_B, obtenemos

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2\mu_k gl} \tag{21}$$

Nótese que la velocidad final en el punto B debe ser una cantidad real, es decir, se debe cumplir que la cantidad bajo la raíz debe ser mayor o igual a cero, esto es,

$$v_A^2 \geq 2\mu_k gl \tag{22}$$

Esta condición nos permite conocer por ejemplo, cuál debe ser la relación que debe cumplir la distancia $l = d_{AB}$ de separación entre los puntos inicial y final, a saber,

$$l \leq \frac{v_A^2}{2\mu_k g} \tag{23}$$

Así, si $l > \frac{v_A^2}{2\mu_k g}$, entonces el bloque se detiene antes del punto B, por eso que la velocidad v_B aparecería como imaginaria, porque el punto B sería imposible de alcanzar. En cambio, si $l = \frac{v_A^2}{2\mu_k g}$, entonces $v_B = 0$, y el bloque se detendría justo en el punto B. Si $l \leq \frac{v_A^2}{2\mu_k g}$, entonces $v_B > 0$, es decir, el bloque pasa por el punto B con velocidad distinta de cero y puede empezar a comprimir al resorte.

Numéricamente, la velocidad al pasar por el punto B viene dada por:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2\mu_k gl} = \sqrt{9\left(m^2/s^2\right) - 2\times 0.2\times 9.8\left(m/s^2\right)\times 1.8\left(m\right)} \tag{24}$$

$$v_B = 1.38\left(m/s\right) \tag{25}$$

Nótese que, debido al trabajo negativo de la fuerza de fricción, la velocidad del bloque ha disminuido desde $v_A = 3\left(m/s\right)$ a $v_B = 1.38\left(m/s\right)$.

b) *¿cuál es la máxima compresión del resorte? (ver punto C).*

Esta pregunta se puede responder usando dos formas distintas: i) usando el punto A como punto inicial y el punto C como punto final. ii) usando el punto B como punto inicial (al cual le acabamos de calcular su velocidad) y el punto C como punto final.

En este ejercicio, usaremos la forma dada por i), ya que tiene la ventaja de usar solamente datos dados originalmente en el problema y no tenemos que usar datos recién calculados, los cuales pueden estar mal calculados. De nuevo se trata de un problema donde existen fuerzas disipativas (la fuerza de roce) y por lo tanto aplicamos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado por relación (3):

$$-\mu_k N d_r = \left(K+U\right)_C - \left(K+U\right)_A \tag{26}$$

Calculemos las energías cinética y potencial en los puntos inicial A y final C donde el bloque se detiene momentáneamente antes de ser empujado de vuelta por la fuerza elástica de los resortes.

Las energías en el punto inicial A, ya son conocidas:

$$K_A = \frac{mv_A^2}{2}; \quad U_{gA} = 0; \quad U_{eA} = 0 \tag{27}$$

Luego,

$$\left(K+U\right)_A = \frac{mv_A^2}{2} \tag{28}$$

Energías en el punto final C.

En este punto el bloque se detiene momentáneamente, es decir, $v_C = 0$, porque el resorte no sigue comprimiéndose, es decir, llegó a su máxima compresión posible d_{BC}, debido a la energía cinética que trae el bloque al momento de chocar con el resorte.

Energía cinética:

$$K_C = \frac{mv_C^2}{2} = 0 \tag{29}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gC} = 0 \tag{30}$$

porque está justo sobre el nivel cero de energía potencial.

Energía potencial elástica:

$$U_{eC} = \frac{kd_{BC}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \tag{31}$$

hemos llamado $x = d_{BC}$ a la distancia máxima que se comprime el resorte.

Luego,

$$(K+U)_C = \frac{kx^2}{2} \tag{32}$$

Trabajo de la fuerza de roce en el tramo desde A hasta C.

Nótese que el camino con roce que recorre el bloque es

$$d_{AC} = d_{AB} + d_{BC} = (l + x) \tag{33}$$

y que la normal vale $N = mg$, luego, el trabajo de la fuerza de roce queda:

$$W_d = -\mu_k N d_{AC} = -\mu_k mg\,(l + x) \tag{34}$$

Reemplazando los resultados encontrados en (28), (32) y (34) en el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado por (26), tenemos

$$-\mu_k mg\,(l + x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} \tag{35}$$

Este es una ecuación de segundo grado en la incógnita x, que corresponde a la máxima compresión posible del resorte:

$$x^2 + \left(\frac{2\mu_k mg}{k}\right)x + \left(\frac{2\mu_k mgl}{k} - \frac{mv_A^2}{k}\right) = 0 \tag{36}$$

Reemplazando los datos numéricos, obtenemos,

$$x^2 + 0.0392 - 0.01944 = 0 \tag{37}$$

La solución positiva viene dada por:

$$x = 0.121(m) \tag{38}$$

El otro resultado de la ecuación de segundo grado es $x' = -0.16(m)$. Pero esta solución no tiene sentido físico porque es una magnitud negativa y nosotros estamos calculando una distancia.

c) ¿*Hasta dónde se devuelve el bloque*?

El bloque parte del reposo en el punto C ($v_C = 0$) y en algún punto D llega a detenerse ($v_D = 0$) por efecto de la fuerza de roce que siempre está presente. Supondremos que el punto D está más allá del punto B, es decir, el bloque se detiene entre B y A, tal como se indica en la Fig. (4.3.2).

En C la velocidad del bloque es cero y el resorte está comprimido una distancia $x = 0.121(m)$, obtenida en (38).

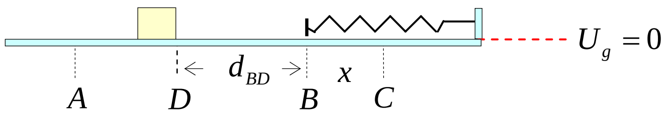

Figura (4.3.2)

Dado que existe roce en todo el trayecto posible del bloque, usaremos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado en (3).

$$-\mu_k N d_r = (K+U)_D - (K+U)_C \tag{39}$$

En lo que sigue, ya no explicitaremos la energía potencial gravitatoria U_g, porque vale cero en todos los puntos,

Energías en el punto inicial C.

Energía cinética:

$$K_i = \frac{mv_C^2}{2} = 0 \tag{40}$$

Energía potencial elástica:

$$U_{ei} = \frac{kx^2}{2} \tag{41}$$

Luego,

$$(K+U)_C = \frac{kx^2}{2} \tag{42}$$

Energías en el punto final D:

Energía cinética:

$$K_D = \frac{mv_D^2}{2} = 0 \tag{43}$$

Energía potencial elástica:

$$U_{eD} = 0 \tag{44}$$

Luego

$$(K+U)_D = 0 \tag{45}$$

Llamemos d_{BD} a la distancia que recorre el bloque entre el punto B y el punto D donde se detiene.

Trabajo de la fuerza de roce en el tramo desde C *hasta* D.

Nótese que el camino con roce que recorre el bloque es

$$d_{CD} = d_{CB} + d_{BD} = x + d_{BD} \tag{46}$$

y que la normal vale $N = mg$. Luego, el trabajo de la fuerza de roce en el trayecto desde C hasta D, vale

$$W_d = -\mu_k N d_{CD} = -\mu_k mg\left(x + d_{BD}\right) \tag{47}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (42), (45) y (47) en la relación (39), podemos escribir,

$$-\mu_k mg\left(x + d_{BD}\right) = 0 - \frac{kx^2}{2} \tag{48}$$

Despejando la distancia incógnita d_{BD}, obtenemos:

$$d_{BD} = \frac{kx^2}{2\mu_k mg} - x \tag{49}$$

Numéricamente, se tiene:

$$d_{BD} = \frac{100\left(N/m\right)\times\left(0.121\right)^2\left(m^2/s^2\right)}{2\times 0.2\times 1\left(kg\right)\times 9.8\left(m/s^2\right)} - 0.121\left(m\right) \tag{50}$$

$$d_{BD} = 0.253\left(m\right) \tag{51}$$

d) *Distancia total recorrida por el bloque antes de quedar en reposo.*

En total, el bloque recorrió la distancia total d_T

$$d_T = d_{AB} + d_{BC} + d_{CB} + d_{BD} = l + x + x + d_{BD} \tag{52}$$

$$d_T = 1.800\left(m\right) + 0.121\left(m\right) + 0.121\left(m\right) + 0.253\left(m\right) \tag{53}$$

La distancia total recorrida en el camino con roce antes de detenerse es:

$$d_T = 2.295\left(m\right) \tag{54}$$

Esta distancia total también se puede obtener aplicando el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas entre el punto inicial A y el punto final D, a saber:

$$-\mu_k N d_r = \left(K + U\right)_D - \left(K + U\right)_A \tag{55}$$

Energías en el punto inicial A:

$$K_A = \frac{mv_A^2}{2}; \quad U_{gA} = 0; \quad U_{eA} = 0 \tag{56}$$

Luego,

$$\left(K+U\right)_A = \frac{mv_A^2}{2} \tag{57}$$

Energías en el punto final D*:*

$$K_D = \frac{mv_D^2}{2} = 0; \quad U_{gD} = 0; \quad U_{eD} = 0 \tag{58}$$

Luego,

$$\left(K+U\right)_D = 0 \tag{59}$$

Trabajo de la fuerza de roce en el tramo total desde A *hasta* C *y desde* C *hasta* D.

La distancia total $d_T = d_{AD}$ que recorre el bloque en el camino con roce es

$$d_T = d_{AD} = d_{AB} + d_{BC} + d_{CB} + d_{BD} \tag{60}$$

El trabajo de la fuerza de roce en todo este trayecto viene dada por

$$W_d = -\mu_k N d_T = -\mu_k m g d_T \tag{61}$$

Reemplazando los resultados (57), (59) y (61) en la relación (55), tenemos

$$-\mu_k m g d_T = 0 - \frac{mv_A^2}{2} \tag{62}$$

De esta relación obtenemos la distancia total recorrida:

$$d_T = \frac{v_A^2}{2\mu_k g} \tag{63}$$

Numéricamente:

$$d_T = \frac{v_A^2}{2\mu_k g} = \frac{9\left(m^2/s^2\right)}{2\times 0.2\times 9.8\left(m/s^2\right)} \tag{64}$$

$$d_T = 2.295\left(m\right) \tag{65}$$

Este resultado coincide completamente con el resultado obtenido en (54), sumando las distancias parciales recorridas por el bloque en cada tramo antes de quedar detenido.

Ejercicio (4.4) Un bloque de masa $m = 10(kg)$ inicia su movimiento y llega a chocar al resorte de constante $k = 2250\left(N/m\right)$, comprimiéndolo una distancia $x = 0.3(m)$ y quedando momentáneamente en reposo en el punto E, tal como se muestra en la Fig. (4.4.1). El bloque parte con velocidad inicial $v_0 = 1.78(m/s)$ desde el punto A que está a una altura $h = 3(m)$ del plano. La pista tiene fricción despreciable en todas partes, excepto en el tramo BC de largo $l = 6(m)$. Hallar el coeficiente de roce dinámico μ_k entre la superficie BC y el bloque.

Nota: *El trabajo de la fuerza de roce en el tramo AE, viene dado por la expresión:*

$$W_d = -f_k d_r \tag{1}$$

pero $f_k = \mu_k N$, donde N es la normal y μ_k es el coeficiente de roce dinámico en los tramos donde existe roce. Luego, la relación (1) queda

$$W_d = -\mu_k N d_r \tag{2}$$

En esta expresión, d_r es la suma de todos los tramos donde existe roce, es decir, d_r representa la distancia total recorrida en el camino con roce. Si existen tramos del camino sin roce, esos tramos no contribuyen al trabajo del roce, porque en dichos tramos, la fuerza de roce vale cero.

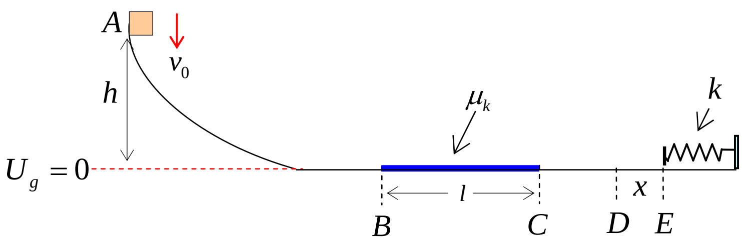

Figura (4.4.1)

Dado que existe roce, en este ejercicio debemos usar el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas:

$$W_d = -\mu_k N d_r = (K+U)_{final} - (K+U)_{inicial} \tag{3}$$

Solución:

En este ejercicio, en todo el trayecto desde A hasta E, el único tramo donde nos interesa conocer la normal N, es el tramo BC, que es el tramo donde existe roce. En este tramo, la normal vale $N = mg$ y la distancia con roce vale $d_r = d_{BC} = l$. Por lo tanto, el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado por (3), aplicado entre el punto inicial A y el punto final E, que corresponde al bloque detenido momentáneamente comprimiendo al resorte una distancia x, queda

$$-\mu_k mgl = \left(K+U\right)_E - \left(K+U\right)_A \tag{4}$$

Consideremos que el nivel cero de energía potencial gravitacional $U_g = 0$ está justo en el nivel del piso, como se muestra en la Fig. (4.4.1).

Punto inicial A*:*

Energía cinética:

$$K_A = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{5}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gA} = mgy_A = mgh \tag{6}$$

Energía potencial elástica:

$$U_{eA} = 0 \tag{7}$$

esto ocurre porque no hay ningún resorte estirado ni comprimido en el punto inicial.

La suma de energías queda:

$$\left(K + U\right)_A = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh \tag{8}$$

Punto final E *:*

Energía cinética:

$$K_E = \frac{1}{2} m v_E^2 = 0 \tag{9}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gE} = mgy_E = 0 \tag{10}$$

en este caso $y_E = 0$, porque el punto E está sobre el nivel cero de energía potencial gravitatoria.

Energía potencial elástica:

$$U_{eE} = \frac{1}{2} k x^2 \tag{11}$$

x es la distancia que logra comprimirse el resorte.

La suma de energías queda:

$$\left(K + U\right)_E = \frac{1}{2} k x^2 \tag{12}$$

Reemplazando las expresiones (8) y (12) en (4), obtenemos

$$-\mu_k mgl = \frac{1}{2} k x^2 - \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh \right) \tag{13}$$

Despejando el coeficiente de roce μ_k, se tiene:

$$\mu_k = \frac{h}{l} + \frac{v_0^2}{2gl} - \frac{kx^2}{2mgl} \tag{14}$$

Numéricamente:

$$\mu_k = \frac{3(m)}{6(m)} + \frac{(1.78)^2 (m^2/s^2)}{2\times 9.8(m/s^2)\times 6(m)} - \frac{2250(N/m)\times(0.3)^2 (m^2)}{2\times 10(kg)\times 9.8(m/s^2)\times 6(m)} \tag{15}$$

$$\mu_k = 0.355 \tag{16}$$

Ejercicio (4.5) Un bloque se mueve a lo largo de una vía con extremos elevados, como se muestra en la Fig. (4.5.1). La parte plana de la vía tiene una longitud $L = 1.6(m)$ y tiene un coeficiente de fricción $\mu_k = 0.2$. No existe roce en las partes curvas de la vía. Si el bloque parte con una velocidad inicial $v_A = 1.3(m/s)$ en el punto A que está a una altura $h_A = 0.8(m)$, calcular:

a) la altura h_D a la cuál llega el bloque en el lado derecho de la vía la primera vez,

b) dónde se queda detenido finalmente el bloque en el plano horizontal respecto al punto B.

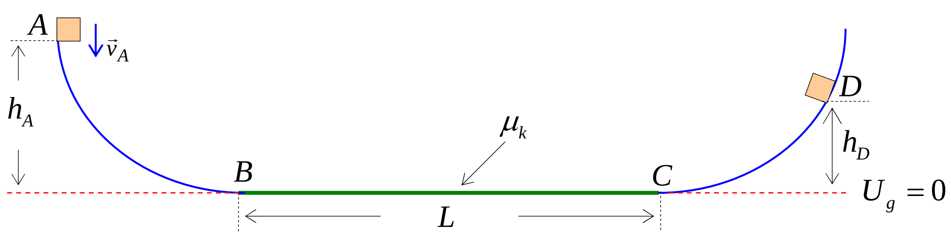

Figura (4.5.1)

Nota: *Dado que existen fuerzas de roce, se debe aplicar el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas:*

$$W_d = -\mu_k N d_r = (K+U)_{final} - (K+U)_{inicial} \tag{1}$$

d_r es la distancia recorrida en el camino con roce y $N = mg$ es la normal en el tramo con roce.

Se elige el nivel cero de energía potencial $U_g = 0$ en el punto más bajo.

Solución

a) calcular la altura h_D a la cuál llega el bloque en el lado derecho de la vía la primera vez.

Aplicaremos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas entre el punto A y el punto D. En este tramo $N = mg$ *y* $d_r = d_{BC} = L$, por lo tanto, la relación (1) queda:

$$-\mu_k mgL = \left(K+U\right)_{\mathrm{D}} - \left(K+U\right)_{\mathrm{A}} \tag{2}$$

Calculemos las energías entre los puntos extremos del movimiento, sabiendo que no existe energía potencial elástica, porque no existen resortes en este ejercicio.

En el punto inicial A:

Energía cinética:

$$K_A = \frac{mv_A^2}{2} \tag{3}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gA} = mgy_A = mgh_A \tag{4}$$

La suma de energías queda:

$$\left(K+U\right)_A = \frac{mv_A^2}{2} + mgh_A \tag{5}$$

En el punto final D se detiene.

Energía cinética:

$$K_D = \frac{mv_D^2}{2} = 0 \tag{6}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gD} = mgy_D = mgh_D \tag{7}$$

La suma de energías queda

$$\left(K+U\right)_D = mgh_D \tag{8}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (5) y (8) en el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas (2), tenemos:

$$-\mu_k mgL = mgh_D - \left(mgh_A + \frac{mv_A^2}{2}\right) \tag{9}$$

despejando h_D, tenemos

$$h_D = h_A + \frac{v_A^2}{2g} - \mu_k L \tag{10}$$

Numéricamente:

$$h_D = 0.8(m) + \frac{(1.3)^2 \left(m^2/s^2\right)}{2\times 9.8\left(m/s^2\right)} - 0.2\times 1.6(m) \tag{11}$$

$$h_D = 0.57(m) \tag{12}$$

b) *calcular dónde se queda finalmente detenido el bloque en el plano horizontal respecto al punto* B

En este caso, el punto inicial es A y el punto final es algún punto, que llamaremos P, en el camino plano con roce. En dicho punto final P, la energía cinética y la energía potencial gravitacional son cero, porque el bloque está detenido en el nivel cero de energía potencial. Aplicamos nuevamente el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas.

$$-\mu_k mgd_T = (K+U)_P - (K+U)_{\mathrm{A}} \tag{13}$$

La suma de energías en el punto A viene dada por (5)

$$(K+U)_A = \frac{mv_A^2}{2} + mgh_A \tag{14}$$

En el punto P, la energía cinética y la energía potencial gravitacional son cero, porque el bloque está detenido en el nivel cero de energía potencial, luego, la suma de energías en este punto queda:

$$(K+U)_P = 0 \tag{15}$$

El trabajo disipativo debido al roce en la parte plana del trayecto vale

$$W_d = -\mu_k mg\, d_T \tag{16}$$

donde d_T es la distancia total recorrida en el camino con roce, en todas las trayectorias de ida y vuelta cruzando por el tramo BC.

Reemplazando los resultados (14) y (15) en el teorema de las fuerzas disipativas (13), tenemos:

$$-\mu_k mg\, d_T = 0 - \left(mgh_A + \frac{mv_A^2}{2} \right) \tag{17}$$

Despejamos d_T

$$d_T = \frac{h_A}{\mu_k} + \frac{v_A^2}{2\mu_k g} \tag{18}$$

Numéricamente:

$$d_T = \frac{0.8(m)}{0.2} + \frac{(1.3)^2 (m^2/s^2)}{2\times 0.2\times 9.8(m/s^2)} \tag{19}$$

$$d_T = 4.43(m) \tag{20}$$

Si dividimos esta distancia total recorrida en el camino con roce, por la longitud de la sección plana con roce $d_{BC} = L = 1.6(m)$, se tiene el número de vueltas que alcanza a dar el bloque antes de detenerse:

$$\frac{d_T}{L} = \frac{4.43(m)}{1.6(m)} = 2.77 \tag{21}$$

Por lo tanto, el bloque recorre dos veces el largo L completamente, una vez de ida y una vez de vuelta, y todavía alcanza a recorrer una distancia de

$$d_x = 0.77L = 0.77\times 1.6(m) = 1.232(m) \tag{22}$$

Esta distancia es hacia la derecha del punto B. En resumen, el bloque queda detenido a la derecha del punto B, a una distancia de $1.232(m)$.

Ejercicio (4.6) Un bloque de masa $m = 1(kg)$ inicia su movimiento en el punto A a una altura $h_0 = 0.47(m)$ y se desliza hacia abajo por una pista curva de fricción despreciable, la cual empalma en el punto B con un plano inclinado, tal como se muestra en la Fig. (4.6.1). El coeficiente de fricción dinámico entre el bloque y el plano inclinado es $\mu_k = 0.25$.

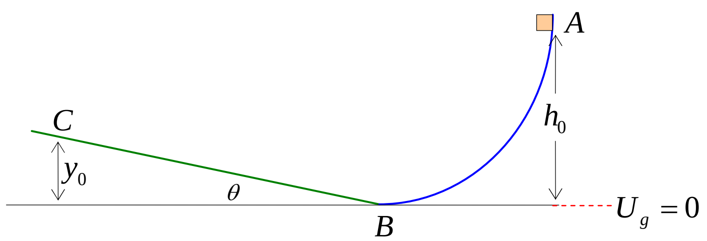

Figura (4.6.1)

a) Hallar la velocidad v_B del bloque al pasar por el punto B.

b) Hallar la máxima altura y_0 que alcanza el bloque sobre el plano inclinado con roce en el punto C.

c) ¿Cuál es la condición matemática que debe cumplirse para que el bloque siempre retorne hacia la base del plano inclinado?

d) Cuando el bloque se devuelve, bajando por el plano inclinado, ¿hasta qué altura h_1 llega sobre el riel sin roce?

e) En un segundo viaje partiendo del reposo desde el riel sin roce, ¿hasta qué altura y_1 alcanza el bloque sobre el plano inclinado con roce?

f) ¿Cuál es la distancia total d_T que recorre el bloque sobre el camino con roce antes de quedar en reposo definitivamente?

Nota: *En este problema existen dos tipos de tramos: el tramo AB sobre el riel curvo, donde no existe roce, y el tramo BC sobre el plano inclinado, donde sí existe roce. Sin embargo, dado que existe roce o fricción en algún tramo de la trayectoria, igual podemos usar el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas*

$$W_d = (K+U)_f - (K+U)_i \tag{1}$$

donde el trabajo de la fuerza de roce o fuerza disipativa W_d es negativo y viene dado por

$$W_d = -\mu_k N d_r \tag{2}$$

d_r *es la distancia total recorrida sobre el camino "con roce", y N es la normal.*

En el tramo en que no existe roce se cumple el teorema de conservación de la energía mecánica:

$$(K+U)_i = (K+U)_f \tag{3}$$

Es importante destacar que siempre podemos aplicar la segunda ley de Newton, aunque estemos usando métodos de energía.

Solución:

a) Hallar la velocidad del bloque al pasar por el punto B.

El bloque se mueve en el tramo AB donde no hay roce, luego se cumple el teorema de conservación de la energía (3). En este ejercicio no existen resortes, luego no usaremos la energía potencial elástica.

Punto inicial A:

Energía cinética:

$$K_A = \frac{mv_A^2}{2} = 0 \tag{4}$$

la velocidad v_A es cero, porque partió del reposo.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gA} = mgh_0 \tag{5}$$

La suma de energías queda:

$$\left(K+U\right)_A = mgh_0 \tag{6}$$

Punto final B :

Energía cinética:

$$K_B = \frac{mv_B^2}{2} \tag{7}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gB} = mgy_B = 0 \tag{8}$$

la coordenada y_B es cero, porque pasa justo por el nivel cero de energía potencial gravitatoria.

La suma de energías queda:

$$\left(K+U\right)_B = \frac{mv_B^2}{2} \tag{9}$$

Aplicando el teorema de conservación de la energía (3), escribimos:

$$\left(K+U\right)_A = \left(K+U\right)_B \tag{10}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (6) y (9), se tiene:

$$mgh_0 = \frac{mv_B^2}{2} \tag{11}$$

La velocidad v_B viene dada por:

$$v_B = \sqrt{2gh_0} \tag{12}$$

b) Hallar la máxima altura y_0 que alcanza el bloque sobre el plano inclinado con roce.

Podríamos aplicar el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas entre el punto inicial A y el punto final C; sin embargo, resolveremos el problema trabajando sólo en el tramo BC, donde existe roce, luego, el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas queda:

$$W_d = -\mu_k N d_0 = \left(K+U\right)_C - \left(K+U\right)_B \tag{13}$$

donde d_0 es la longitud que recorre sobre el plano inclinado hasta detenerse, $d_0 = d_{BC}$, tal como se muestra en la Fig. (4.6.2).

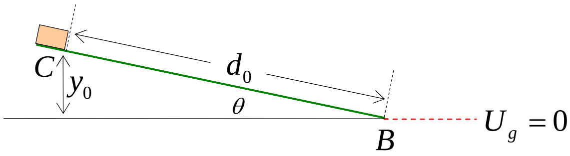

Figura (4.6.2)

Calculemos las energías y el trabajo del roce en este tramo BC.

La suma de energías en el punto inicial B ya se obtuvo en (9):

$$(K+U)_B = \frac{mv_B^2}{2} \tag{14}$$

Punto final C:

Energía cinética:

$$K_C = \frac{mv_C^2}{2} = 0 \tag{15}$$

La velocidad v_C vale cero porque se detiene en el punto C.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gC} = mgy_0 \tag{16}$$

La suma de energías queda:

$$(K+U)_C = mgy_0 \tag{17}$$

Trabajo de la fuerza de roce en el tramo BC:

$$W_d = -\mu_k N d_{BC} = -\mu_k N d_0 \tag{18}$$

$d_0 = d_{BC}$ es la distancia recorrida sobre el plano inclinado, tal como se muestra en la Fig. (4.6.2). La normal N viene dada por una de las componentes del peso

$$N = mg\cos\theta \tag{19}$$

Ahora podemos calcular el trabajo realizado por la fuerza de roce cuando el bloque sube por el plano inclinado una distancia $d_0 = d_{BC}$

$$W_d = -\mu_k mg\cos\theta d_0 \tag{20}$$

Aplicando el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado por (13), se obtiene

$$-\mu_k mg\cos\theta d_0 = mgy_0 - \frac{mv_B^2}{2} \tag{21}$$

Pero d_0 está relacionado con y_0 a través de la siguiente expresión (ver Fig. (4.6.2)):

$$d_0 = \frac{y_0}{\sin\theta} \tag{22}$$

Reemplazando este resultado en la relación (21), se tiene,

$$-\mu_k mg\cos\theta\frac{y_0}{\sin\theta} = mgy_0 - \frac{mv_B^2}{2} \tag{23}$$

Recordando que $mgh_0 = \dfrac{mv_B^2}{2}$, según vimos en (11), podemos escribir

$$-\mu_k mg\cos\theta\left(\frac{y_0}{\sin\theta}\right) = mgy_0 - mgh_0 \tag{24}$$

Despejando, se obtiene la altura máxima y_0, hasta la cual llega el bloque sobre el plano inclinado:

$$y_0 = \frac{h_0}{\left(1+\mu_k\cot\theta\right)} \tag{25}$$

c) *¿Cuál es la condición matemática que se debe cumplir para que el bloque siempre retorne hacia la base del plano inclinado?*

Para que el bloque, que *se encuentra detenido momentáneamente* en el punto más alto del plano inclinado con roce, se devuelva siempre hacia abajo con aceleración $a \neq 0$, debe ocurrir que la componente del peso hacia abajo: $mg\sin\theta$, sea mayor que la fuerza de fricción que apunta hacia arriba cuando el bloque baja o tiene intención de bajar: $\mu_k mg\cos\theta$ (ver Figura (4.6.3)).

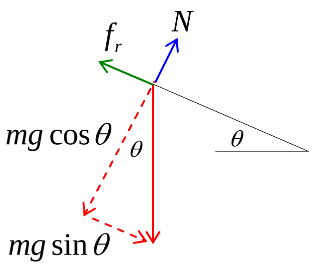

Figura (4.6.3)

Esta condición se escribe:

$$mg\sin\theta > \mu_k mg\cos\theta \tag{26}$$

Simplificando, se encuentra que la condición que se debe cumplir es:

$$\mu_k \cot\theta < 1 \tag{27}$$

Escribamos esta condición en una forma que nos será útil más adelante:

$$\left(1-\mu_k \cot\theta\right) > 0 \tag{28}$$

d) Cuando el bloque se devuelve por el plano inclinado con roce, ¿hasta qué altura h_1 llega sobre el riel sin roce?

En este tramo, el bloque parte del reposo en el punto C a una altura y_0, luego acelera hacia abajo del plano inclinado, pasa por el punto B, sube por el riel sin roce y llega hasta el punto D, donde su velocidad es cero y su altura desconocida es h_1, tal como se muestra en la Fig. (4.6.4).

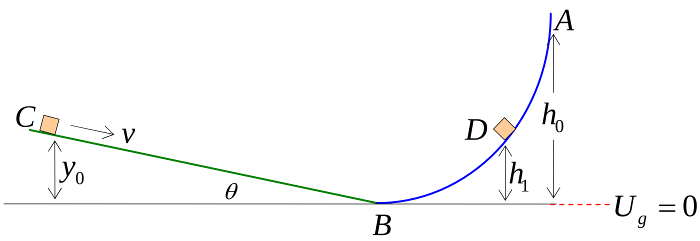

Figura (4.6.4)

Aplicaremos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas entre el punto inicial C y el punto final D,

$$-\mu_k N d_{CD} = \left(K+U\right)_D - \left(K+U\right)_C \tag{29}$$

Donde d_{CD} es la distancia total recorrida en el camino con roce. En este caso sólo existe roce en el tramo CB, porque el tramo BD está sobre el riel sin roce. Por lo tanto, $d_{CD} = d_{CB} = d_0$.

$$-\mu_k N d_0 = \left(K+U\right)_D - \left(K+U\right)_C \tag{30}$$

Punto inicial C:

Energía cinética:

$$K_C = \frac{1}{2} m v_C^2 = 0 \tag{31}$$

Dado que partió del reposo, la velocidad inicial v_C es cero.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gC} = mgy_0 \tag{32}$$

La suma de energías queda:

$$\left(K+U\right)_C = mgy_0 \tag{33}$$

Punto final D*:*

Energía cinética:

$$K_D = \frac{1}{2}mv_D^2 = 0 \tag{34}$$

Debido a que se detiene, la velocidad final v_D es cero.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gD} = mgh_1 \tag{35}$$

La suma de energías queda:

$$\left(K+U\right)_D = mgh_1 \tag{36}$$

Trabajo del roce al recorrer el plano inclinado una distancia d_0:

$$W_d = -\mu_k N d_0 = -\mu_k mg\cos\theta d_0 \tag{37}$$

Apliquemos ahora el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado por la relación (29), usando los resultados obtenidos en (33) y (36)

$$-\mu_k mg\cos\theta d_0 = mgh_1 - mgy_0 \tag{38}$$

Simplificando por mg y usando la relación $d_0 = \dfrac{y_0}{\sin\theta}$, obtenida en (22), escribimos

$$h_1 = y_0 - \mu_k \cos\theta\left(\frac{y_0}{\sin\theta}\right) \tag{39}$$

$$h_1 = y_0\left(1-\mu_k\cot\theta\right) \tag{40}$$

Usando el valor $y_0 = \dfrac{h_0}{\left(1+\mu_k\cot\theta\right)}$, obtenido en (25) se tiene la altura h_1 en función de los datos iniciales:

$$h_1 = h_0\left(\frac{1-\mu_k\cot\theta}{1+\mu_k\cot\theta}\right) \tag{41}$$

Nótese que la altura h_1 es positiva porque se cumple la condición: $\left(1-\mu_k \cot\theta\right) > 0$, que obtuvimos en la relación (28).

e) En un segundo viaje, desde D hasta E, ¿hasta qué altura y_1 alcanza el bloque sobre el plano inclinado con roce?

En el punto inicial D de este tramo, el bloque parte del reposo a una altura h_1 sobre el riel sin roce, recorre el riel sin roce, pasa por el punto B y sube por el plano inclinado con roce hasta el punto final E, donde se detiene momentáneamente a una altura desconocida y_1, tal como se muestra en la Fig. (4.6.5).

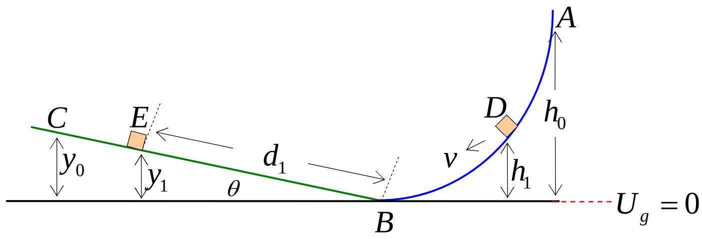

Figura (4.6.5)

Por otro lado, mirando la Fig. (4.6.5) se ve que entre y_1 y d_1 se cumple la siguiente relación:

$$d_1 = \frac{y_1}{\sin\theta} \tag{42}$$

Aplicaremos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas entre el punto inicial D y el punto final E,

$$-\mu_k N d_1 = \left(K+U\right)_E - \left(K+U\right)_D \tag{43}$$

Punto inicial D:

Ya vimos en (36) que la suma de energías en el punto D vale

$$\left(K+U\right)_D = mgh_1 \tag{44}$$

Punto final E:

Energía cinética:

$$K_E = \frac{1}{2} m v_E^2 = 0 \tag{45}$$

Porque el bloque se detiene en E.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gE} = mgy_1 \tag{46}$$

La suma de energías vale

$$\left(K+U\right)_E = mgy_1 \tag{47}$$

Trabajo del roce al recorrer el plano inclinado una distancia $d_1 = d_{BE}$

$$W_d = -\mu_k mg\cos\theta d_1 \tag{48}$$

Apliquemos ahora el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas en la forma dada en (43), usando los resultados obtenidos en (44) y (47),

$$-\mu_k mg\cos\theta d_1 = mgy_1 - mgh_1 \tag{49}$$

Pero de relación (42), conocemos la relación entre y_1 y d_1

$$d_1 = \frac{y_1}{\sin\theta} \tag{50}$$

Reemplazando en la relación (49) y simplificando por mg, se tiene

$$-\mu_k \cos\theta \frac{y_1}{\sin\theta} = y_1 - h_1 \tag{51}$$

Despejando y_1:

$$y_1 = \frac{h_1}{\left(1+\mu_k\cot\theta\right)} \tag{52}$$

Si reemplazamos el valor $h_1 = h_0\left(\frac{1-\mu_k\cot\theta}{1+\mu_k\cot\theta}\right)$, obtenido en (41), podemos expresar el valor de y_1 en función de los datos originales del problema,

$$y_1 = h_0\frac{\left(1-\mu_k\cot\theta\right)}{\left(1+\mu_k\cot\theta\right)^2} \tag{53}$$

Nótese que la altura y_1 es positiva porque se cumple la condición: $\left(1-\mu_k\cot\theta\right) > 0$, que encontramos en la relación (28).

¿Cuál es la distancia total d_T que recorre el bloque sobre el camino con roce antes de detenerse definitivamente?

Dado que se cumple la condición $(1-\mu_k \cot\theta)>0$ sobre el plano inclinado, cada vez que el bloque sube por plano inclinado con roce, llega hasta un punto donde se detiene, producto de la fricción, y luego siempre se devuelve hacia el punto B. Este proceso de calcular las alturas en ambos lados se sigue una y otra vez, hasta que se gasta toda la energía del bloque debido al trabajo negativo de la fuerza de roce en el plano inclinado. Cuando eso sucede, el bloque queda detenido en el punto B, el punto más bajo de la trayectoria Nótese que en el riel sin fricción la energía siempre se conserva.

Aplicaremos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas, considerando como punto inicial al punto A, y como punto final al punto B, donde el bloque queda en reposo. En dicho punto, todas las energías son cero. En el punto A el bloque tiene velocidad cero y se encuentra a una altura h_0.

$$W_d = (K+U)_B - (K+U)_A \tag{54}$$

Nótese que a diferencia de lo que ocurrió en la primera pregunta de este ejercicio, ahora en el punto B, se considera que la partícula tiene velocidad cero.

Suma de energías en el punto inicial A:

$$(K+U)_A = mgh_0 \tag{55}$$

Suma de energías en el punto final B:

$$(K+U)_B = 0 \tag{56}$$

Trabajo de la fuerza de roce a través del camino total con roce d_T:

$$W_d = -\mu_k mg\cos\theta d_T$$

Aplicando el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas (54), y los resultados (55) y (56), se tiene

$$-\mu_k mg\cos\theta d_T = 0 - mgh_0 \tag{57}$$

Despejando, se obtiene la distancia total recorrida en el plano inclinado con roce:

$$d_T = \frac{h_0}{\mu_k \cos\theta} \tag{58}$$

Ejercicio (4.7) Un bloque de masa $m = 1(kg)$ comprime a un resorte de constante $k = 196(N/m)$ una distancia $x_0 = 0.38(m)$. Cuando se suelta el bloque, se desliza a lo largo de una vía AB, con roce despreciable. El tramo BC es un plano inclinado un ángulo $\theta = 20^\circ$, con coeficiente de fricción dinámico $\mu_k = 0.6$. El punto B se encuentra a una altura $h = 1.1(m)$ sobre la línea punteada horizontal (ver Fig. (4.7.1)).

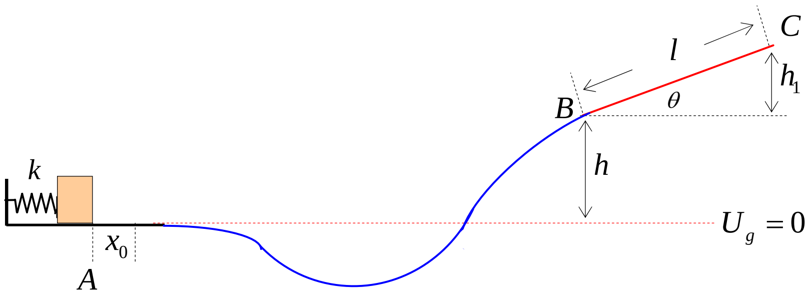

Figura (4.7.1)

Hallar:

a) la velocidad del bloque cuando va pasando por el punto B.

b) la distancia d que recorre el bloque en el camino con roce BC hasta que se detiene en C,

Nota: *Este ejercicio está formado por dos tramos: el tramo AB sin roce y el tramo BC con roce. En los tramos donde existe roce se debe usar el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas:*

$$W_D = -\mu_k N d_r = (K+U)_{\text{final}} - (K+U)_{\text{inicial}} \quad (1)$$

donde d_r es la distancia recorrida en el camino con roce y N es la normal en el plano inclinado.

En el caso de que no haya roce, entonces se cumple el teorema de conservación de la energía mecánica total, el cual es un caso particular del teorema del trabajo de las fuerzas disipativas escrito en (1), *ya que le trabajo del roce vale cero,*

$$(K+U)_{\text{inicial}} = (K+U)_{\text{final}} \quad (2)$$

Se elige el nivel cero de energía potencial $U_g = 0$ en la línea punteada que pasa por el punto inicial A.

Solución

a) Hallar la velocidad del bloque cuando va pasando por el punto B.

Dado que en tramo AB no existe roce, aplicaremos el teorema de conservación de la energía mecánica dado en (2),

$$(K+U)_{\text{A}} = (K+U)_{\text{B}} \quad (3)$$

Calculemos las energías en cada punto.

Punto inicial A:

Energía cinética:

$$K_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = 0 \tag{4}$$

dado que parte del reposo.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gA} = mgy_A = 0 \tag{5}$$

porque el cuerpo se encuentra justo en el nivel cero de energía potencial gravitatoria.

Energía potencial elástica:

$$U_{eA} = \frac{1}{2} k x_0^2 \tag{6}$$

La suma de energías queda:

$$\left(K + U\right)_A = \frac{1}{2} k x_0^2 \tag{7}$$

Punto final B:

Energía cinética:

$$K_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \tag{8}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gB} = mgy_B = mgh \tag{9}$$

Energía potencial elástica:

$$U_{eB} = 0 \tag{10}$$

Porque no existe resorte estirado ni comprimido en el punto B.

La suma de energías queda:

$$\left(K + U\right)_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh \tag{11}$$

Aplicando el teorema de conservación (3), usando los resultados obtenidos en (7) y (11), escribimos:

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh \tag{12}$$

Reordenando y despejando, se obtiene una expresión para la velocidad v_B:

$$v_B = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m} - 2gh} \tag{13}$$

Numéricamente:

$$v_B = \sqrt{\frac{196\left(N/m\right)\times\left(0.38\right)^2\left(m^2\right)}{1\left(kg\right)} - 2\times 9.8\left(m/s^2\right)\times 1.1\left(m\right)} \tag{14}$$

$$v_B = 2.6\left(m/s\right) \tag{15}$$

b) Hallar la distancia d que recorre el bloque en el camino con roce BC hasta que se detiene en C.

Aplicamos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado en (1) entre el punto inicial A, donde el resorte está comprimido y el bloque está en reposo ($v_A = 0$), y el punto final C, donde el bloque se detiene ($v_C = 0$).

$$-\mu_k N d_r = \left(K+U\right)_{\mathrm{C}} - \left(K+U\right)_{\mathrm{A}} \tag{16}$$

En este caso, la distancia total en el camino con roce vale $d_r = l$

La suma de energías en el punto inicial A es conocida de la relación (7)

$$\left(K+U\right)_A = \frac{1}{2}kx_0^2 \tag{17}$$

Punto final C :

Energía cinética:

$$K_C = \frac{1}{2}mv_C^2 = 0 \tag{18}$$

porque se detiene justo en C.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gC} = mgy_C = mg(h+h_1) \tag{19}$$

Energía potencial elástica:

$$U_{eC} = 0 \tag{20}$$

porque no hay resortes en C.

La suma de energías queda:

$$\left(K+U\right)_{\mathrm{C}} = mg(h+h_1) \tag{21}$$

Usando los resultados (17) y (21), el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas (16), queda

$$-\mu_k N d_r = mg(h+h_1) - \frac{1}{2}kx_0^2 \tag{22}$$

La distancia en el camino con roce vale $d_r = l$ (ver Fig. (4.7.1)), y la normal N sobre el plano inclinado con roce viene dada por una componente del peso

$$N = mg\cos\theta \tag{23}$$

Reemplazando en (22)

$$-\mu_k mg\cos\theta l = mg(h+h_1) - \frac{1}{2}kx_0^2 \tag{24}$$

Por otra parte, de la Fig. (4.7.1) se ve que la altura h_1 viene dada en función de la distancia l y del ángulo θ, en la forma:

$$h_1 = l\sin\theta \tag{25}$$

Reemplazando en (24), se tiene,

$$-\mu_k mg\cos\theta\, l = mg(h + l\sin\theta) - \frac{1}{2}kx_0^2 \tag{26}$$

reordenando y despejando, se tiene:

$$l = \frac{\left(kx_0^2 - 2mgh\right)}{2mg\left(\mu_k\cos\theta + \sin\theta\right)}$$

Reemplazando datos numéricos:

$$d = \frac{\left(196\left(N/m\right)\times\left(0.38\right)^2\left(m^2\right) - 2\times1\left(kg\right)\times9.8\left(m/s^2\right)\times1.1\left(m\right)\right)}{2\times1\left(kg\right)\times9.8\left(m/s^2\right)\left(0.6\times\cos 20^\circ + \sin 20^\circ\right)} \tag{27}$$

$$d = 0.38\left(m\right) \tag{28}$$

Ejercicio (4.8) Un bloque de masa $m = 0.59\left(kg\right)$ está en un plano inclinado un ángulo $\theta = 23^\circ$, comprimiendo una distancia $x_0 = 0.25\left(m\right)$ a un resorte de constante $k_1 = 300\left(N/m\right)$, tal como se muestra en el punto A de la Fig. (4.8.1). Una vez que el bloque se suelta del punto A, sube por el plano inclinado con roce ($\mu_k = 0.43$), recorre la distancia $d_{BC} = 1.47\left(m\right)$ hasta llegar a chocar y comprimir a un segundo resorte de constante $k_2 = 100\left(N/m\right)$. ¿Cuál es la máxima compresión x del resorte superior?.

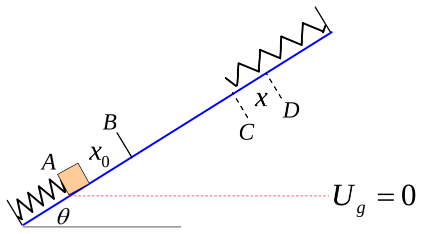

Figura (4.8.1)

Nota: *Dado que existe roce en todo el trayecto desde el punto inicial* A *hasta el punto final* D*, usaremos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas:*

$$W_d = -\mu_k N d_r = (K+U)_{final} - (K+U)_{inicial} \tag{1}$$

El bloque parte del reposo en A *y llega al reposo en* D.

Elegimos como nivel cero de energía potencial gravitacional $U_g = 0$*, al punto* A *desde donde parte el movimiento.*

Solución

El teorema del trabajo de las fuerzas disipativas queda,

$$W_d = -\mu_k N d_r = (K+U)_D - (K+U)_A \tag{2}$$

Donde d_r representa la distancia total recorrida en el camino con roce, entre los puntos inicial y final. Nótese que en general, la distancia en el camino con roce d_r puede ser menor que la distancia real d_{AD}, entre los dos puntos en estudio, es decir, en este caso, $d_r \le d_{AD}$, porque entre los puntos extremos podría haber partes del camino que no tuvieran roce. En dichos sectores sin roce, no existe trabajo del roce, y por eso no deben aparecer en la expresión del teorema.

Calculemos las energías en los puntos extremos. En este ejercicio hemos elegido como nivel cero de energía potencial $U_g = 0$, el punto más bajo del movimiento, es decir, el punto A, tal como se muestra en la Fig. (4.8.1).

Punto inicial A*:*

Energía cinética:

$$K_A = \frac{m v_A^2}{2} = 0 \tag{3}$$

porque el bloque parte del reposo.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gA} = mgy_A = 0 \tag{4}$$

El bloque está justo en el nivel cero de energía potencial.

Energía potencial elástica:

$$U_{eA} = \frac{k_1 x_0^2}{2} \tag{5}$$

El resorte de constante k_1 está comprimido una distancia x_0.

La suma de energías queda

$$\left(K + U\right)_A = \frac{k_1 x_0^2}{2} \tag{6}$$

Punto final D:

Energía cinética:

$$K_D = \frac{mv_D^2}{2} = 0 \tag{7}$$

porque el bloque se detiene en D.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gD} = mgy_D \tag{8}$$

Energía potencial elástica:

$$U_{eD} = \frac{k_2 x^2}{2} \tag{9}$$

porque el resorte de constante k_2 se comprime una distancia x desconocida.

La suma de las energías queda:

$$\left(K + U\right)_D = mgy_D + \frac{k_2 x^2}{2} \tag{10}$$

La Fig. (4.8.2) muestra la relación existente entre y_D y θ. En el triángulo rectángulo de la figura, se ve que la coordenada y_D viene dada por

$$y_D = d\sin\theta \tag{11}$$

donde la distancia $d = d_{AB} + d_{BC} + d_{CD}$ (ver Fig. (4.8.1)), recorrida en toda la región con roce viene dada por

$$d = \left(x_0 + L + x\right) \tag{12}$$

por lo tanto,

$$y_D = (x_0 + L + x)\sin\theta \tag{13}$$

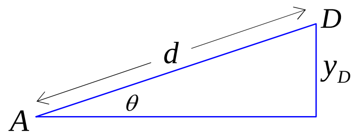

Figura (4.8.2)

Luego, la relación (10), queda

$$(K+U)_D = mg(x_0 + L + x)\sin\theta + \frac{k_2 x^2}{2} \tag{14}$$

Trabajo de las fuerzas disipativas W_d :

$$W_d = -\mu_k N d_r \tag{15}$$

N es la fuerza normal sobre el bloque producida por el plano inclinado. Esta normal viene dada por una componente del peso:

$$N = mg\cos\theta$$

En este caso, la distancia d_r recorrida en el camino con roce es igual a d obtenido en (12), es decir,

$$d_r = d = (x_0 + L + x) \tag{16}$$

Entonces, el trabajo de las fuerzas de roce, dado por (15) queda:

$$W_d = -\mu_k mg\cos\theta(x_0 + L + x) \tag{17}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (6), (14) y (17) en el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado por (2), se tiene:

$$-\mu_k mg\cos\theta(x_0 + L + x) = \left(mg(x_0 + L + x)\sin\theta + \frac{k_2 x^2}{2}\right) - \left(\frac{k_1 x_0^2}{2}\right)$$

Esta relación representa una ecuación de segundo grado en la incógnita x:

$$\frac{k_2 x^2}{2} + mg(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)x + mg(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)(x_0 + L) - \frac{k_1 x_0^2}{2} = 0 \tag{18}$$

Reemplazando los datos numéricos: $m = 0.59(kg)$, $\theta = 23^\circ$, $x_0 = 0.25(m)$, $k_1 = 300(N/m)$, $\mu_k = 0.43$, $d_{BC} = 1.47(m)$, $k_2 = 100(N/m)$, la ecuación de segundo grado queda:

$$50x^2 + 4.55x - 1.555 = 0 \tag{19}$$

La solución positiva corresponde a la distancia que se comprimió el resorte de constante k_2

$$x = 0.137(m) \tag{20}$$

Ejercicio (4.9) El sistema de la Fig. (4.9.1) parte del reposo y viaja hacia la derecha. Hallar la velocidad del sistema cuando m_1 ha bajado una distancia l. El coeficiente de roce dinámico entre el bloque de masa m_2 y el plano es μ_k. La cuerda y la polea son ideales.

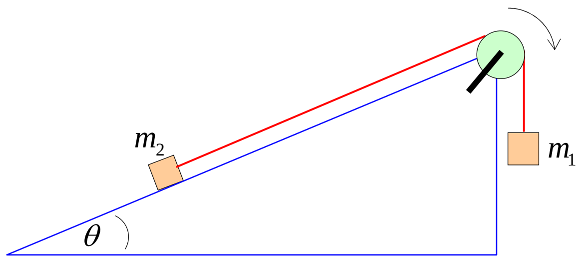

Figura (4.9.1)

Nota: *En este ejercicio compararemos el método de solución de problemas usando la segunda ley de Newton, con el método de solución de problemas a través de los teoremas de trabajo y energía. En primer lugar calcularemos rápidamente la aceleración del sistema usando la segunda ley de Newton, y a partir de ese resultado obtendremos la velocidad final después de recorrer una distancia l. Dado que la aceleración a que resulta es constante, podemos aplicar las ecuaciones de movimiento con aceleración constante, en particular, podemos aplicar la relación:*

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \tag{1}$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, a es la aceleración constante y x la distancia recorrida entre los puntos inicial y final. Dado que en este ejercicio $v_0 = 0$ y a que $x = l$, la velocidad final viene dada por:

$$v = \sqrt{2al} \tag{2}$$

Desde el punto de vista de los métodos de energía, debemos usar el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas:

$$W_d = -\mu_k N d_r = (K+U)_{final} - (K+U)_{inicial} \qquad (3)$$

donde la distancia recorrida en el camino con roce vale $d_r = l$.

Solución:

a) Cálculo de la velocidad usando la segunda ley de Newton.

Diagrama de cuerpo libre para cada masa. La Fig. (4.9.2) muestra todas las fuerzas que actúan sobre cada bloque y además muestra los ejes coordenados usados en cada caso. Por conveniencia, sobre el plano inclinado se usan los ejes inclinados, de modo que el movimiento ocurra siempre dentro de un único eje.

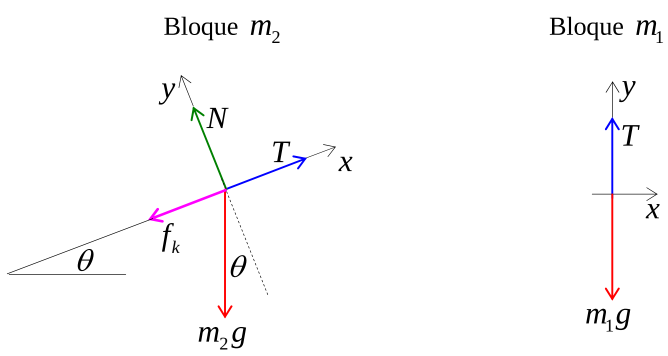

Figura (4.9.2)

Apliquemos ahora la segunda ley de Newton a cada bloque. En componentes, para cada bloque y según cada eje coordenado, se tiene:

Bloque de masa m_2.

$$T - m_2 g \sin\theta - \mu_k m_2 g \cos\theta = m_2 a \qquad (4)$$

Bloque colgante de masa m_1.

$$m_1 g - T = m_1 a \qquad (5)$$

Sumando las relaciones (4) y (5) se obtiene la aceleración del sistema:

$$a = \frac{m_1 - m_2\left(\sin\theta + \mu_k \cos\theta\right)}{\left(m_1 + m_2\right)} g \qquad (6)$$

Esta aceleración a es constante, porque sólo depende de valores constantes. Luego se pueden aplicar las ecuaciones de movimiento conocidas:

$$v = v_0 + at; \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (7)$$

Si eliminamos el tiempo de estas dos ecuaciones, se obtiene la siguiente relación:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \tag{8}$$

Dado que en este caso $v_0 = 0$ y $x = l$, se tiene

$$v = \sqrt{2al} \tag{9}$$

Relación que habíamos anticipado en (2), luego, reemplazando (6) en (9) se obtiene la velocidad final:

$$v = \sqrt{2gl\left(\frac{m_1 - m_2(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)}{(m_1 + m_2)}\right)} \tag{10}$$

b) Cálculo de la velocidad usando métodos de trabajo y energía.

Dado que el movimiento se realiza en un camino con roce, aplicaremos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas:

$$W_d = -\mu_k N d_r = (K + U)_{final} - (K + U)_{inicial} \tag{11}$$

donde $d_r = l$, ya que la distancia recorrida por ambos bloques es la misma (la cuerda es ideal). La normal sobre el plano inclinado vale

$$N = m_2 g \cos\theta \tag{12}$$

Luego la relación (11) queda

$$-\mu_k m_2 g \cos\theta\, l = (K + U)_{final} - (K + U)_{inicial} \tag{13}$$

Cálculo de la energía en los puntos extremos del movimiento. El punto inicial corresponde al momento en que el sistema inicia su movimiento con velocidad inicial cero, es decir, $v_{01} = v_{02} = 0$. Por simplicidad, consideremos que cada bloque tiene coordenada y_1 e y_2, medida desde el nivel cero de energía potencial gravitatoria, tal como se muestra en la Fig. (4.9.3).

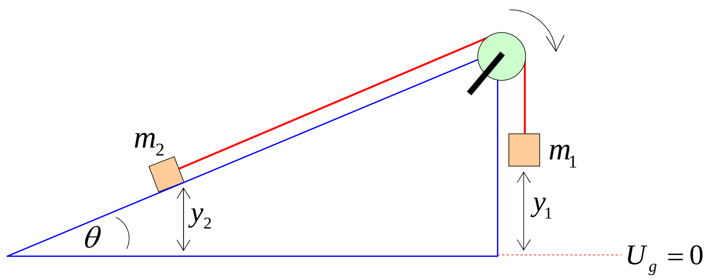

Figura (4.9.3)

La energía cinética del sistema de dos bloques es igual a la suma de las energías cinéticas individuales. La energía potencial es igual a la suma de las energías potenciales de todas las partículas.

Energías iniciales:

Energía cinética inicial:

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 \tag{14}$$

Pero como el sistema parte del reposo, $v_{01} = v_{02} = 0$, se tiene

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = 0 \tag{15}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gi} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{16}$$

La suma de las energías iniciales del sistema de partículas vale,

$$\left(K + U\right)_i = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{17}$$

Energías finales:

Energía cinética final:

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2 \tag{18}$$

Pero como el sistema se mueve como un todo, ambos bloques tienen la misma velocidad final v, es decir, $v_{f1} = v_{f2} = v$. Luego, la energía cinética queda:

$$K_f = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v^2 \tag{19}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{gf} = m_1 g y_{1,f} + m_2 g y_{2,f} \tag{20}$$

Antes de seguir avanzando, veamos la relación existente entre las nuevas coordenadas y_{1f} e y_{2f}, y la distancia l recorrida por el sistema. En la Fig. (4.9.4) se muestra la situación de manera esquemática. Allí se ve claramente que:

$$y_{1f} = y_1 - l \tag{21}$$

y que

$$y_{2f} = y_2 + l \sin\theta \tag{22}$$

Reemplazando estos resultados en la relación (20), tenemos:

$$U_{gf} = m_1 g\left(y_1 - l\right) + m_2 g\left(y_2 + l\sin\theta\right) \tag{23}$$

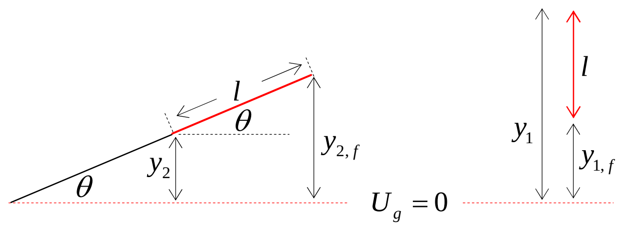

Figura (4.9.4)

La suma de las energías finales del sistema de partículas se obtiene usando (19) y (23),

$$\left(K+U\right)_f = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v^2 + m_1 g\left(y_1 - l\right) + m_2 g\left(y_2 + l\sin\theta\right) \tag{24}$$

Ahora aplicamos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas en la forma dada por (13)

$$-\mu_k m_2 g\cos\theta\, l = (K+U)_{final} - (K+U)_{inicial} \tag{25}$$

Usando los resultados obtenidos en (17) y en (24), escribimos:

$$-\mu_k m_2 g\cos\theta\, l = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v^2 + m_1 g\left(y_1 - l\right) + m_2 g\left(y_2 + l\sin\theta\right) - \left(m_1 g y_1 + m_2 g y_2\right) \tag{26}$$

Simplificando, tenemos

$$-\mu_k m_2 g\cos\theta\, l = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v^2 - m_1 g l + m_2 g l\sin\theta \tag{27}$$

Despejando la velocidad final se tiene:

$$v = \sqrt{\frac{2gl\left(m_1 - m_2\left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right)\right)}{\left(m_1 + m_2\right)}} \tag{28}$$

Resultado idéntico al obtenido en (10), usando la segunda ley de Newton.

Ejercicio (4.10) El sistema mostrado en la Fig. (4.10.1) parte del reposo. Hallar la velocidad del sistema en el momento en que el estiramiento del resorte es d , más allá de su de largo natural l_0, el cual coincide con la coordenada inicial $l_0 = y_{02}$ del bloque de masa m_2 en el punto inicial. El coeficiente de roce dinámico entre el plano inclinado y el bloque vale μ_k. Considere que la polea y la cuerda son ideales.

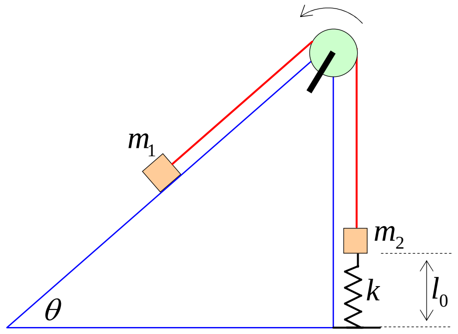

Figura (4.10.1)

Nota: *Este ejercicio es un poco distinto del ejercicio anterior, ya que en este caso no todas las fuerzas son constantes, sino que una de ellas, la fuerza elástica de resorte* $\vec{F}_e$, *depende del estiramiento, y por lo tanto, la fuerza depende de la posición. Esto significa que si queremos resolver el ejercicio usando la segunda ley de Newton, la aceleración* $\vec{a}$ *no es constante, sino que es una función de la posición* $\vec{a} = \vec{a}(x)$, *y por lo tanto, no se pueden aplicar las ecuaciones de movimiento conocidas* $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ *y* $v = v_0 + at$, *porque estas ecuaciones fueron encontradas bajo la condición de que la fuerza era constante y que por lo tanto, que la aceleración era constante. Esto no significa que el problema no pueda resolverse, sino que significa que hay que emplear técnicas de integración para encontrar la velocidad final. En cambio, la solución de este ejercicio por el método de la energía es muy sencilla, y dado que hay roce, debemos usar el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas:*

$$W_d = -\mu_k N d_r = \left(K + U\right)_{final} - \left(K + U\right)_{inicial} \tag{1}$$

donde d_r *es la distancia recorrida en el camino con roce.*

Solución:

Método de energías.

Calculemos las energías en los puntos inicial y final del movimiento, considerando el nivel cero de energía potencial gravitatoria marcado en la base del plano en la Fig. (4.10.2).

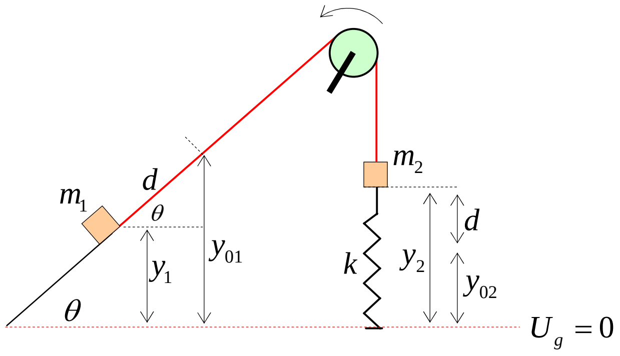

Figura (4.10.2)

Punto inicial:

El sistema está en reposo y el resorte está sin estirar.

Energía cinética:

$$K_i = \frac{1}{2}m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{02}^2 = 0 \tag{2}$$

ya que $v_{01} = v_{02} = 0$, porque el sistema parte del reposo.

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{g,i} = m_1 g y_{01} + m_2 g y_{02} \tag{3}$$

Donde y_{01} e y_{02} son las coordenadas de posición respecto del nivel cero de energía potencial. Estas coordenadas son desconocidas en principio, aunque en este caso se sabe que $y_{02} = l_0$, que es el largo natural del resorte, tal como se indicó en la Fig. (4.10.1).

Energía potencial elástica:

$$U_{e,i} = \frac{1}{2}kx_0^2 = 0 \tag{4}$$

debido a que el estiramiento inicial es cero, ya que el resorte se encuentra en su largo natural. Sumando los resultados (2), (3) y (4), se obtiene la energía inicial:

$$\left(K+U\right)_i = 0 + m_1 g y_{01} + m_2 g y_{02} + 0 \tag{5}$$

$$\left(K+U\right)_i = m_1 g y_{01} + m_2 g y_{02} \tag{6}$$

Punto final:

El sistema tiene una velocidad v y el resorte está estirado una distancia d .

Energía cinética:

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{7}$$

Dado que la cuerda es ideal, ambas masas se mueven con la misma velocidad, es decir, $v_1 = v_2 = v$, luego,

$$K_f = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v^2 \tag{8}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{g,f} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{9}$$

Observando la Fig. (4.10.2) se encuentra la relación entre y_{01} e y_1, y la relación entre y_{02} e y_2, a saber,

$$y_1 = \left(y_{01} - d\sin\theta\right) \tag{10}$$

$$y_2 = \left(y_{02} + d\right) \tag{11}$$

Reemplazando estos resultados en la relación (9), se obtiene

$$U_{g,f} = m_1 g\left(y_{01} - d\sin\theta\right) + m_2 g\left(y_{02} + d\right) \tag{12}$$

reordenando, escribimos:

$$U_{g,f} = \left(m_1 g y_{01} + m_2 g y_{02}\right) - m_1 g d\sin\theta + m_2 g d \tag{13}$$

Esta expresión se puede escribir en función de la energía potencial inicial U_{gi} del sistema dada en relación (3), en la forma,

$$U_{g,f} = U_{g,i} - m_1 g d\sin\theta + m_2 g d \tag{14}$$

Energía potencial elástica:

$$U_{e,f} = \frac{1}{2} k d^2 \tag{15}$$

ya que el resorte se ha estirado una distancia d, a partir de su largo natural.

Sumando los resultados (8), (13) y (15), se obtiene la energía final:

$$\left(K + U\right)_f = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v^2 + \left(m_1 g y_{01} + m_2 g y_{02}\right) - m_1 g d\sin\theta + m_2 g d + \frac{1}{2} k d^2 \tag{16}$$

Ahora sólo nos falta calcular el trabajo realizado por la fuerza de roce $W_d = -\mu_k N d_r$. El bloque de masa m_1 recorre la distancia $d_r = d$ en el plano inclinado, luego, la normal vale $N = m_1 g\cos\theta$, por lo tanto, el trabajo del roce vale

$$W_d = -\mu_k m_1 g \sin\theta d \tag{17}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (6), (16) y (17), el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas (1), queda:

$$\begin{aligned} -\mu_k m_1 g \sin\theta d = &\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v^2 + \left(m_1 g y_{01} + m_2 g y_{02}\right) - m_1 g d \sin\theta + m_2 g d + \frac{1}{2}kd^2 \\ &-\left(m_1 g y_{01} + m_2 g y_{02}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

Cancelando los términos comunes, obtenemos:

$$-\mu_k m_1 g \sin\theta d = \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v^2 - m_1 g d \sin\theta + m_2 g d + \frac{1}{2}kd^2 \tag{19}$$

A partir de esta expresión se obtiene la velocidad final:

$$v = \sqrt{\frac{2gd}{\left(m_1+m_2\right)}\left(m_1\left(\sin\theta - \mu_k \sin\theta\right) - m_2 - \frac{kd}{2g}\right)} \tag{20}$$

Método Newtoniano.

Por comparación, veamos la manera de resolver este ejercicio usando la segunda ley de Newton. En primer lugar debemos hacer un diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos. Antes es importante recordar que la fuerza elástica $\vec{F}_e$ que ejerce el resorte al ser estirado o comprimido una distancia x, a lo largo del eje X, viene dada por la llamada ley de Hooke:

$$\vec{F}_e = -k\Delta x\hat{i} \tag{21}$$

es decir, la fuerza elástica siempre se opone al desplazamiento, esto es, si el desplazamiento Δx es positivo, entonces la fuerza elástica apunta en la dirección negativa del eje X, y si el desplazamiento Δx es negativo, entonces la fuerza elástica apunta en la dirección positiva del eje X.

La Fig. (4.10.3) muestra todas las fuerzas que actúan sobre cada bloque. La fuerza elástica corresponde a un estiramiento x cualquiera del resorte.

Para la masa m_1, consideraremos que el eje X del sistema de coordenadas coincide con el plano inclinado.

Masa m_1.

La segunda ley de Newton queda:

$$m_1 g \sin\theta - \mu_k m_1 g \cos\theta - T = m_1 a \tag{22}$$

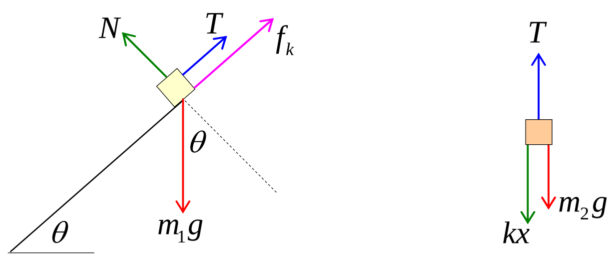

Figura (4.10.3)

Masa m_2

$$T - m_2 g - kx = m_2 a \tag{23}$$

Sumando estas dos relaciones, se obtiene la aceleración instantánea del sistema justo cuando el resorte se ha estirado una distancia x,

$$a = \frac{\left(m_1 g\left(\sin\theta - \mu_k \cos\theta\right) - m_2 g - kx\right)}{\left(m_1 + m_2\right)} \tag{24}$$

Claramente se ve que la aceleración ya no es una constante, sino que depende de la distancia x que se ha estirado el resorte de constante k. Como consecuencia, *ya no se pueden usar las ecuaciones de movimiento para aceleración constante.*

Para facilitar el análisis, escribamos la aceleración a como la suma de una parte constante y una parte variable:

$$a = \frac{\left(m_1 g\left(\sin\theta - \mu_k \cos\theta\right) - m_2 g\right)}{\left(m_1 + m_2\right)} - \frac{kx}{\left(m_1 + m_2\right)} \tag{25}$$

Para simplificar el cálculo, hagamos las siguientes definiciones momentáneas:

$$M = \left(m_1 + m_2\right) \tag{26}$$

$$\beta = \frac{\left(m_1 g\left(\sin\theta - \mu_k \cos\theta\right) - m_2 g\right)}{\left(m_1 + m_2\right)} \tag{27}$$

La aceleración (25) queda:

$$a = \beta - \left(\frac{k}{M}\right) x \tag{28}$$

A partir de esta aceleración variable debemos encontrar la velocidad final del sistema cuando el resorte se ha estirado una distancia d, es decir, cuando $x = d$. Recordemos la definición de aceleración en función de la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{29}$$

Ahora usemos la regla de la cadena de las derivadas para escribir esta derivada en función de la variable x:

$$a = \left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{30}$$

Pero $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ es la velocidad instantánea v, luego, la relación (30), queda

$$a = v\left(\frac{dv}{dx}\right) \tag{31}$$

Si multiplicamos por el diferencial dx, esta ecuación queda,

$$vdv = adx \tag{32}$$

Ahora podemos integrar esta ecuación en la siguiente forma:

$$\int_{v=0}^{v} vdv = \int_{x=0}^{x=d} adx \tag{33}$$

Para realizar esta integral, basta reemplazar la expresión de la aceleración obtenida en (28)

$$\int_{v=0}^{v} vdv = \int_{x=0}^{x=d} \left(\beta - \left(\frac{k}{M}\right)x\right)dx \tag{34}$$

Separando la integral de la derecha en la suma de integrales, se tiene

$$\int_{v=0}^{v} vdv = \int_{x=0}^{x=d} \beta dx - \int_{x=0}^{x=d} \left(\frac{k}{M}\right)xdx \tag{35}$$

Sacando las constantes fuera de las integrales e integrando, se tiene

$$\frac{1}{2}v^2\Big|_{v=0}^{v} = \beta\, x\Big|_{x=0}^{x=d} - \frac{k}{2M}x^2\Big|_{x=0}^{x=d} \tag{36}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, se obtiene

$$\frac{v^2}{2} = \beta d - \frac{k}{2M}d^2 \tag{37}$$

Despejando se obtiene la velocidad

$$v = \sqrt{2d\left(\beta - \frac{k}{2M}d\right)} \tag{38}$$

Reemplazando el valor de M dado en (26) y el valor de β dado en (27), se tiene

$$v = \sqrt{\frac{2gd}{(m_1+m_2)}\left(m_1\left(\sin\theta - \mu_k\cos\theta\right) - m_2 - \frac{kd}{2g}\right)} \tag{39}$$

Resultado idéntico al encontrado en (20), usando los métodos de energía.

CAPÍTULO 5
CHOQUES

Ejercicio (5.1) Desde la altura h se deja deslizar un bloque de masa m_1 por un riel con roce despreciable. El bloque de masa m_1 llega a chocar elásticamente a otro bloque de masa m_2 que se encuentra en reposo en el punto más bajo del lado curvo, tal como se muestra en la Fig. (5.1.1). Estudie los casos: a) $m_1 = m_2$, b) $m_1 < m_2$ y c) $m_1 > m_2$, d) $m_1 >>> m_2$ y e) $m_1 <<< m_2$.

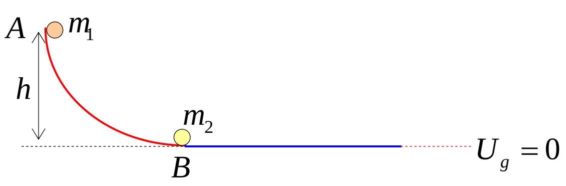

Figura (5.1.1)

Nota: *En un choque elástico se cumplen las siguientes condiciones:*

a) se conserva el momentum lineal del sistema de partículas

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} \tag{1}$$

b) se conserva la energía cinética del sistema de partículas

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 \tag{2}$$

Solución:

Antes de estudiar el choque propiamente tal, calculemos la velocidad de la masa m_1 al llegar a chocar a la masa m_2 en el punto B. Dado que no hay roce sobre el riel curvo, se cumple el teorema de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B:

$$\left(K + U\right)_A = \left(K + U\right)_B \tag{3}$$

Usando el nivel cero de energía potencial $U_g = 0$ en el piso, tal como se muestra en la Fig. (5.1.1), calcularemos $(K + U)$ en cada punto.

Cálculo de $(K + U)$ inicial:

$$\left(K+U\right)_A=\frac{1}{2}m_1v_A^2+m_1gy_A \tag{4}$$

La velocidad inicial vale $v_A=0$ y la coordenada vertical vale $y_A=h$, luego,

$$\left(K+U\right)_A=m_1gy_A \tag{5}$$

Cálculo de $(K+U)$ final:

$$\left(K+U\right)_B=\frac{1}{2}m_1v_B^2+m_1gy_B \tag{6}$$

Pero $y_B=0$ porque el punto B está justo sobre el nivel cero de energía potencial, luego,

$$\left(K+U\right)_B=\frac{1}{2}m_1v_B^2 \tag{7}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (5) y (7) en el teorema de conservación de la energía dado en (3), tenemos:

$$m_1gh=\frac{1}{2}m_1v_B^2 \tag{8}$$

Simplificando, se obtiene

$$v_B=\sqrt{2gh} \tag{9}$$

Ahora podemos estudiar el choque elástico en el punto B. Consideremos los datos iniciales, es decir, justo antes del choque:

$$v_{1,i}=v_B=\sqrt{2gh} \tag{10}$$

$$v_{2,i}=0 \tag{11}$$

porque el cuerpo de masa m_2 se encuentra en reposo en B.

Los valores finales $v_{1,f}$ y $v_{2,f}$, son desconocidos.

Condiciones que se deben cumplir en un choque elástico:

a) Conservación del momentum lineal:

$$\vec{p}_{1,i}+\vec{p}_{2,i}=\vec{p}_{1,f}+\vec{p}_{2,f} \tag{12}$$

Como el movimiento es en una sola dirección, escribimos esta relación sin los vectores unitarios, pero suponemos que cada componente puede tener signo más o menos, según que su velocidad sea en la dirección $+\hat{i}$, o $-\hat{i}$, respectivamente:

$$m_1v_{1,i}+m_2v_{2,i}=m_1v_{1,f}+m_2v_{2,f} \tag{13}$$

Usando el dato inicial $v_{2,i}=0$, escribimos

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \tag{14}$$

b) *Conservación de la energía cinética*:

$$K_{inicial} = K_{final} \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 \tag{16}$$

Usando el dato $v_{2,i}=0$, escribimos

$$m_1 v_{1,i}^2 = m_1 v_{1,f}^2 + m_2 v_{2,f}^2 \tag{17}$$

Reescribamos la relación (14), en la forma:

$$m_1\left(v_{1,i} - v_{1,f}\right) = m_2 v_{2,f} \tag{18}$$

y rescribamos la relación (17), en la forma:

$$m_1\left(v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2\right) = m_2 v_{2,f}^2 \tag{19}$$

escribamos el lado izquierdo de esta relación como un producto notable:

$$m_1\left(v_{1,i} - v_{1,f}\right)\left(v_{1,i} + v_{1,f}\right) = m_2 v_{2,f}^2 \tag{20}$$

Dividiendo la relación (20) por la relación (18), se tiene

$$\left(v_{1,i} + v_{1,f}\right) = v_{2,f} \tag{21}$$

Reescribamos la relación (18), en la forma:

$$\left(v_{1,i} - v_{1,f}\right) = \frac{m_2}{m_1} v_{2,f} \tag{22}$$

Sumando la relación (21) con la relación (22), se tiene:

$$v_{1,i} = \frac{\left(m_1 + m_2\right)}{2m_1} v_{2,f} \tag{23}$$

Despejando obtenemos $v_{2,f}$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{\left(m_1 + m_2\right)} v_{1,i} \tag{24}$$

Restando la relación (21) menos la relación (22), se tiene:

$$v_{1,f} = \frac{\left(m_1 - m_2\right)}{2m_1} v_{2,f} \tag{25}$$

Reemplazando $v_{2,f}$ dado por relación (24) en este resultado, se obtiene $v_{1,f}$

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} \tag{26}$$

En resumen, las velocidades finales vienen expresadas en función de la velocidad inicial antes del choque: $v_{1,i} = \sqrt{2gh}$:

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} \tag{27}$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} \tag{28}$$

Análisis de casos.

a) si $m_1 = m_2$

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} = 0 \tag{29}$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} = v_{1,i} \tag{30}$$

Después del choque, la partícula incidente se queda completamente detenida, $v_{1,f} = 0$, y la segunda partícula se mueve con la misma velocidad que llevaba la partícula incidente en el momento del choque, $v_{2,f} = v_{1,i}$.

b) si $m_1 < m_2$

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} < 0 \tag{31}$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} > 0 \tag{32}$$

Después del choque, la partícula incidente choca y se devuelve, $v_{1,f} < 0$, y la segunda partícula se mueve en la misma dirección que la partícula incidente, $v_{2,f} > 0$.

c) si $m_1 > m_2$

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} > 0 \tag{33}$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} > 0 \tag{34}$$

Después del choque, la partícula incidente choca y se sigue moviendo en la misma dirección incidente $v_{1,f} > 0$, y la segunda partícula también se mueve en la misma dirección que la partícula incidente, $v_{2,f} > 0$.

d) $m_1 >>> m_2$ (la partícula incidente tiene una masa muy grande)

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = 1 \quad \rightarrow \quad v_{1,f} = v_{1,i} > 0 \tag{35}$$

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} = 2 \quad \rightarrow \quad v_{2,f} = 2v_{1,i} > 0 \tag{36}$$

Después del choque, no cambia el movimiento de la partícula incidente, $v_{1,f} = v_{1,i} > 0$, pero la partícula de masa m_2 sale con el doble de la velocidad de la partícula incidente, $v_{2,f} = 2v_{1,i} > 0$.

e) $m_1 <<< m_2$ (la masa que está en reposo es muy grande)

$$\lim_{m_2 >> m_1} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = -1 \quad \rightarrow \quad v_{1,f} = -v_{1,i} > 0 \tag{37}$$

$$\lim_{m_2 >> m_1} \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} = 2\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad v_{2,f} \rightarrow 0 \tag{38}$$

Después del choque, la partícula incidente se devuelve con la misma rapidez inicial, $v_{1,f} = -v_{1,i}$, mientras que la partícula de masa m_2, prácticamente no se mueve, $v_{2,f} \rightarrow 0$, es decir, se queda en reposo.

Ejercicio (5.2) Dos partículas de masas $m_1 = 1.3(kg)$ y $m_2 = 3.7(kg)$ realizan un choque completamente inelástico o plástico. Si sus velocidades iniciales son:

$$\vec{v}_1 = \left(5\hat{i} + 2\hat{j}\right)(m/s) \tag{1}$$

$$\vec{v}_2 = \left(3\hat{i} - 4\hat{j}\right)(m/s) \tag{2}$$

a) hallar la velocidad final $\vec{v}_f$ de las dos partículas después del choque,

b) hallar el factor Q de la colisión.

Nota: *En un choque inelástico no se conserva la energía cinética, y sólo se cumple la conservación del momentum lineal del sistema de partículas:*

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} \tag{3}$$

Además, en un choque completamente inelástico, las partículas quedan pegadas o unidas después del choque. El factor Q de la colisión se define en función de la energía cinética del sistema de partículas, como:

$$Q \equiv K_{final} - K_{inicial} \tag{4}$$

Nótese que si el choque es elástico, entonces el factor Q de la colisión vale cero, $Q = 0$.

Solución:

a) Hallar la velocidad final $\vec{v}_f$ de las dos partículas después del choque.

A partir de las velocidades iniciales dadas en (1) y (2), los momentum, $\vec{p} = m\vec{v}$, de cada partícula antes del choque son:

$$\vec{p}_1 = m_1\left(5\hat{i} + 2\hat{j}\right) \tag{5}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\left(3\hat{i} - 4\hat{j}\right) \tag{6}$$

Después del choque las partículas continúan pegadas, por lo tanto, se mueven con una única velocidad final v_f, luego, existe un único momentum lineal $\vec{p}_f$:

$$\vec{p}_f = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}_f \tag{7}$$

Aplicando el teorema de conservación del momentum lineal dado en (3), se tiene:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \tag{8}$$

Reemplazando (5), (6) y (7) en (8), tenemos,

$$m_1\left(5\hat{i} + 2\hat{j}\right) + m_2\left(3\hat{i} - 4\hat{j}\right) = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}_f \tag{9}$$

Despejando, obtenemos $\vec{v}_f$,

$$\vec{v}_f = \frac{1}{\left(m_1 + m_2\right)}\left(5m_1 + 3m_2\right)\hat{i} + \left(2m_1 - 4m_2\right)\hat{j} \tag{10}$$

Reemplazando los valores de las masas $m_1 = 1.3\left(kg\right)$ y $m_2 = 3.7\left(kg\right)$, se obtiene

$$\vec{v}_f = \left(3.52\hat{i} - 2.44\hat{j}\right)\left(m/s\right) \tag{11}$$

b) Hallar el factor Q de la colisión.

Para hallar el factor Q, debemos calcular las energías cinéticas antes y después del choque.

La energía cinética antes del choque viene dada por

$$K_{inicial} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \tag{12}$$

La energía cinética después del choque viene dada por

$$K_{final} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v_f^2 \tag{13}$$

El factor Q del choque viene dado por

$$Q = K_{final} - K_{inicial} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v_f^2 - \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right) \tag{14}$$

Reemplazando los valores conocidos, se tiene:

$$Q = -19.24\left(J\right) \tag{15}$$

Lo anterior significa que la energía cinética final es menor que la energía cinética inicial.

Ejercicio (5.3) Una bala de masa $m_1 = 20.0\left(gr\right)$, se dispara horizontalmente con velocidad $v_{1,i}$ desconocida, contra un bloque de madera de masa $m_2 = 1.0\left(kg\right)$ que descansa sobre una superficie horizontal con roce ($\mu_k = 0.25$). La bala atraviesa el bloque y sale de él con una velocidad $v_{1,f} = 250.0\left(m/s\right)$. Si el bloque de madera se desplaza $5.0\left(m\right)$ antes de detenerse, ¿cuál era la velocidad inicial de la bala?

Nota: *Este ejercicio consiste de dos tramos bien diferentes. En un primer tramo se produce un choque entre la bala y el bloque de madera. En cualquier clase de choque, siempre se cumple el teorema de conservación del momentum lineal:*

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} \tag{1}$$

En el segundo tramo se trata de un bloque de madera que parte con alguna velocidad inicial, luego se mueve sobre un camino con roce y finalmente se detiene. En este caso debemos aplicar el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas:

$$W_d = -\mu_k N d_r = (K+U)_{final} - (K+U)_{inicial} \tag{2}$$

donde d_r es la distancia recorrida en el camino con roce y N es la normal.

Solución:

Primer tramo: choque entre dos partículas.

Conservación del momentum lineal en una sola dirección:

$$m_{1,i}v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \tag{3}$$

Reemplazando datos, con $v_{2,i} = 0$ y $v_{1,f} = 250\left(m/s\right)$, escribimos:

$$0.02(kg)v_{1,i} = 0.02(kg)\times 250\left(m/s\right) + 1(kg)v_{2,f} \tag{4}$$

$$v_{1,i} = 250 + 50v_{2,f} \tag{5}$$

Segundo tramo: movimiento del bloque.

En este tramo, el bloque inicia su movimiento con una velocidad inicial v_1, igual a la velocidad final del bloque en el primer tramo, esto es: $v_1 = v_{2,f}$.

Ahora consideramos el teorema de las fuerzas disipativas para estudiar el movimiento del bloque.

$$-\mu_k m_2 g d = \left(K+U\right)_f - \left(K+U\right)_i \tag{6}$$

donde la normal vale $N = m_2 g$, y donde $d = 5(m)$ es la distancia que recorre el bloque en el camino con roce, antes de detenerse.

Si elegimos el nivel cero de energía potencial, $U_g = 0$, justo en el plano, las energías potenciales inicial y final del bloque de masa $m_2 = 1(kg)$ son todas cero, es decir, $U_{g,i} = U_{g,f} = 0$. Las energías cinéticas del bloque son:

$$K_i = \frac{1}{2}m_2 v_1^2 \tag{7}$$

$$K_f = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = 0 \tag{8}$$

debido a que el bloque queda detenido.

Entonces, la suma de energías en los puntos inicial y final queda:

$$\left(K+U\right)_i = \frac{1}{2}m_2 v_1^2 \tag{9}$$

$$\left(K+U\right)_f = 0 \tag{10}$$

Reemplazando estos resultados en (6), se tiene:

$$-\mu_k m_2 g d = 0 - \frac{1}{2}m_2 v_1^2 \tag{11}$$

Pero $v_1 = v_{2,f}$, luego

$$\mu_k g d = \frac{1}{2} v_{2,f}^2 \tag{12}$$

Despejamos la velocidad $v_{2,f}$ de esta expresión:

$$v_{2,f} = \sqrt{2\mu_k g d} \tag{13}$$

Reemplazando los datos, escribimos,

$$v_{2,f} = \sqrt{2 \times 0.25 \times 9.8(m/s^2) \times 5(m)} \tag{14}$$

$$v_{2,f} = 4.95(m/s) \tag{15}$$

Reemplazando en la relación (5) podemos calcular la velocidad inicial $v_{1,i}$ de la bala,

$$v_{1,i} = 250 + 50 v_{2,f} \tag{16}$$

$$v_{1,i} = (250 + 50 \times 4.95)(m/s) \tag{17}$$

$$v_{1,i} = 497.5(m/s) \tag{18}$$

Ejercicio (5.4) Un bloque de plasticina de masa $m_2 = 1.2(kg)$ se encuentra en reposo en el punto A, a una distancia $l = 1.5(m)$ del extremo libre de un resorte (punto B). Una bolita de vidrio de masa $m_1 = 0.2(kg)$ llega a chocar contra el bloque de plasticina con velocidad $v_{1,i} = 30(m/s)$ y queda incrustada en él (choque plástico o completamente inelástico). Después del choque, el sistema se desliza sobre un plano horizontal con roce ($\mu_k = 0.17$) y llega a chocar al resorte de constante $k = 100(N/m)$ que se encuentra estirado en su largo natural. Hallar la máxima compresión x del resorte.

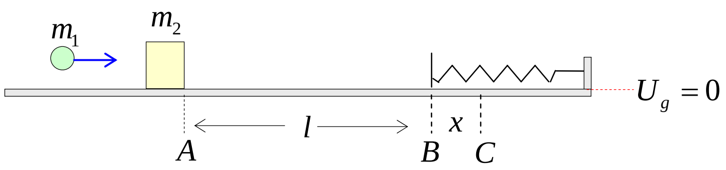

Figura (5.4.1)

Nota: *En este ejercicio existen dos tramos. En el primer tramo se produce un choque completamente inelástico o choque plástico, en el cual, la bolita de vidrio queda incrustada en el* *bloque de plasticina. En un choque completamente inelástico o plástico solamente se conserva el momentum lineal total:*

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} \tag{1}$$

El factor Q *de la colisión se define en función de la energía cinética del sistema de partículas, como:*

$$Q \equiv K_{final} - K_{inicial} \tag{2}$$

En un segundo tramo, el bloque se mueve junto con la bolita formando un solo cuerpo de masa $(m_1 + m_2)$*, el cual inicia un movimiento en un plano horizontal con roce, y antes de detenerse llega a chocar con un resorte, comprimiéndolo una distancia* x*. En este caso se debe aplicar el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas.*

$$W_d = -\mu_k N d_r = (K+U)_{final} - (K+U)_{inicial} \tag{3}$$

donde d_r *es la distancia total recorrida en el camino con roce entre los dos puntos extremos en estudio, y* N *es la normal que actúa sobre el bloque en la región donde hay roce.*

Solución:

Primer tramo: choque completamente inelástico o plástico.

En un choque plástico, sólo se conserva el momentum lineal. Como el movimiento es unidimensional, escribimos:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = (m_1 + m_2) v_f \tag{4}$$

donde v_f es la velocidad con que se mueve el bloque con la bolita incrustada. El bloque de plasticina está inicialmente en reposo, luego $v_{2,i} = 0$. Usando estos datos en la relación (4) se obtiene

$$v_f = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1,i} \tag{5}$$

$$v_f = 4.286(m/s) \tag{6}$$

Es decir, el sistema se mueve hacia la derecha con $v_f = 4.286(m/s)$.

Segundo tramo: movimiento en el plano con roce.

Ahora aplicamos el teorema del trabajo de las fuerzas disipativas dado por la relación (3), en el tramo AC, es decir,

$$-\mu_k N d_r = (K+U)_C - (K+U)_A \tag{7}$$

Si elegimos el nivel cero de energía potencial gravitatoria al nivel del plano, como se muestra en la Fig. (5.4.1), entonces la energía potencial gravitatoria vale cero en todos los puntos, y no interviene en esta parte del ejercicio.

En el plano horizontal con roce, la normal viene dada por

$$N = \left(m_1 + m_2\right) g \tag{8}$$

La distancia total $d_r = \left(d_{AB} + d_{BC}\right)$ recorrida en el tramo con roce entre el punto A y el punto C, donde el resorte está comprimido una distancia x, viene dada por:

$$d_r = \left(l + x\right) \tag{9}$$

Con estos datos, la relación (7), queda

$$-\mu_k (m_1 + m_2) g (l + x) = \left(K + U\right)_C - \left(K + U\right)_A \tag{10}$$

Calculemos ahora las energías al comienzo y al final.

Energías en el punto A

Energía cinética:

$$K_A = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_i^2 \tag{11}$$

Energía potencial elástica:

$$U_{e,A} = 0 \tag{12}$$

porque no hay resortes estirados ni comprimidos.

La suma de energías en el punto inicial queda:

$$(K + U)_A = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_i^2 \tag{13}$$

Energías en el punto C.

Energía cinética:

$$K_C = 0 \tag{14}$$

porque el bloque se detiene.

Energía potencial elástica:

$$U_{e,C} = \frac{1}{2} k x^2 \tag{15}$$

La suma de energías en el punto final queda:

$$(K + U)_C = \frac{1}{2} k x^2 \tag{16}$$

Usando los resultados (13) y (16), la relación (10) queda:

$$-\mu_k\left(m_1+m_2\right)g\left(l+x\right)=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v_i^2 \tag{17}$$

Reemplazando los datos del problema, se tiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$50x^2+2.334x-9.356=0 \tag{18}$$

La solución del problema corresponde al resultado positivo, ya que x representa la distancia que se comprimió el resorte

$$x=0.41(m) \tag{19}$$

Ejercicio (5.5) Dos bolitas de acero de masas m_1 y m_2, respectivamente, efectúan un choque elástico unidimensional. Si las velocidades de las bolitas antes del choque son v_1 y v_2, respectivamente,

a) demuestre que las velocidades v_1' y v_2' de las partículas después del choque son:

$$v_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 \tag{1}$$

$$v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2 \tag{2}$$

b) Hallar las velocidades después del choque, si $m_1=m_2=m$. ¿Qué ocurre si además $v_2=0$? Describa el movimiento de las partículas.

c) Hallar las velocidades después del choque si la masa m_1 es muy grande en comparación con la masa m_2, es decir, si $m_1 \gg m_2$ (algo así como una gran bola de acero y una pelota de ping-pong). ¿Cómo queda el resultado, si inicialmente m_2 está en reposo? Explique qué ocurre con las partículas.

d) Hallar las velocidades después del choque, si ahora la masa m_2 es muy grande en comparación con la masa m_1, es decir, si $m_2 \gg m_1$. ¿Cómo queda el resultado si inicialmente m_2 está en reposo? Explique qué ocurre con las partículas.

Nota: *Dado que el choque es elástico, se cumplen dos condiciones;*

a) se conserva el momentum lineal:

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1'+\vec{p}_2' \tag{3}$$

como se trata de un movimiento unidimensional escribimos

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \tag{4}$$

Entendiendo que las velocidades que hemos escrito en esta relación, pueden tener signos asociados a viajar a la derecha $(+)$*, o a la izquierda* $(-)$.

b) se conserva la energía cinética:

$$(K_1 + K_2) = (K_1' + K_2') \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{6}$$

Solución:

a) demuestre que las velocidades v_1' *y* v_2' *de las partículas después del choque son:*

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \tag{7}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \tag{8}$$

Usaremos las relaciones (4) y (6). Reescribamos la relación (4) de modo que en el lado izquierdo de la ecuación sólo quede todo lo relacionado con la masa m_1, y en el lado derecho, todo lo relacionado con la masa m_2,

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \tag{9}$$

Usemos el mismo procedimiento para la relación (6),

$$m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2\left(v_2'^2 - v_2^2\right) \tag{10}$$

Ahora usemos un producto notable para escribir esta ecuación en la forma:

$$m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \tag{11}$$

Si ahora reemplazamos la relación (9) en (11), se tiene

$$m_2(v_2' - v_2)(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \tag{12}$$

Simplificando, se tiene la siguiente relación entre las velocidades:

$$(v_1 + v_1') = (v_2' + v_2) \tag{13}$$

Ahora combinaremos las relaciones (9) y (13) para obtener la solución a este ejercicio. Despejando v_2' de la relación (13), se tiene

$$v_2' = (v_1 - v_2 + v_1') \tag{14}$$

Insertando este resultado en la relación (9), podemos escribir

$$m_1\left(v_1 - v_1'\right) = m_2\left(v_1 - v_2 + v_1' - v_2\right) \tag{15}$$

Despejando, obtenemos

$$v_1' = \frac{\left(m_1 - m_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)} v_1 + \frac{2m_2}{\left(m_1 + m_2\right)} v_2 \tag{16}$$

Reemplazando este resultado en (14), obtenemos v_2'

$$v_2' = \frac{2m_1}{\left(m_1 + m_2\right)} v_1 + \frac{\left(m_2 - m_1\right)}{\left(m_1 + m_2\right)} v_2 \tag{17}$$

a) Hallar las velocidades después del choque, si $m_1 = m_2 = m$. ¿Qué ocurre si además $v_2 = 0$? Describa el movimiento de las partículas.

Haciendo $m_1 = m_2 = m$ en las relaciones (16) y (17), se tiene $\left(m_2 - m_1\right) = 0$, luego, las velocidades finales quedan:

$$v_1' = v_2 \tag{18}$$

$$v_2' = v_1 \tag{19}$$

Es decir, después del choque las partículas intercambian sus velocidades.

Si ahora hacemos $v_2 = 0$, se tiene

$$v_1' = 0 \tag{20}$$

$$v_2' = v_1 \tag{21}$$

En este caso, la partícula que se encontraba en reposo sale con la velocidad que traía la partícula incidente, y la partícula incidente se queda en reposo.

b) Hallar las velocidades después del choque si la masa m_1 es muy grande en comparación con la masa m_2, es deci , si $m_1 \gg m_2$ (algo así como una bola de acero y una pelota de ping-pong). ¿Cómo queda el resultado, si inicialmente m_2 está en reposo? Explique qué ocurre con las partículas.

Dado que el resultado general obtenido en (16) y (17) presenta relaciones entre las masas, estudiemos primero cómo quedan dichas relaciones en el límite cuando $m_1 \gg m_2$.

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \approx 1 \tag{22}$$

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} \approx 0 \tag{23}$$

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} \approx 2 \tag{24}$$

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} \approx -1 \tag{25}$$

Reemplazando estos resultados en (16) y (17), se tiene,

$$v_1' \approx v_1 \tag{26}$$

$$v_2' \approx 2v_1 - v_2 \tag{27}$$

Esto significa que la partícula incidente de masa m_1, es decir, la bola de mayor masa, sigue su movimiento, "*casi sin darse cuenta del choque*", con su misma velocidad inicial v_1, y la segunda partícula sale "*casi con el doble de la velocidad inicial de la primera bola*", salvo porque se le resta su propia velocidad inicial.

Si inicialmente la partícula de masa m_2 está en reposo, eso significa que $v_2 = 0$, luego, las relaciones (26) y (27), quedan:

$$v_1' \approx v_1 \tag{28}$$

$$v_2' \approx 2v_1 \tag{29}$$

El único cambio que se produce, es que la segunda partícula que está en reposo sale con el doble de velocidad que la primera bola.

c) Hallar las velocidades después del choque, si ahora la masa m_2 es muy grande en comparación con la masa m_1, es decir, si $m_2 \gg m_1$. ¿Cómo queda el resultado si inicialmente m_2 está en reposo? Explique qué ocurre con las partículas.

Dado que el resultado general obtenido en (16) y (17) presenta relaciones entre las masas, estudiemos primero cómo quedan dichas relaciones en el límite cuando $m_1 \ll m_2$.

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \approx -1 \tag{30}$$

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{2m_2}{(m_1+m_2)} \approx 2 \quad (31)$$

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{2m_1}{(m_1+m_2)} \approx 0 \quad (32)$$

$$\lim_{m_1 >> m_2} \frac{(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)} \approx 1 \quad (33)$$

Reemplazando estos resultados en (16) y (17), se tiene,

$$v_1' \approx 2v_2 - v_1 \quad (34)$$

$$v_2' \approx v_2 \quad (35)$$

En este caso, la bola de mayor masa "*casi no se percata de que es chocada*", y sigue su movimiento, prácticamente con su misma velocidad inicial v_2. En cambio, la partícula incidente de masa $m_1 \ll m_2$ se mueve con una velocidad que es el doble de la velocidad de la partícula de mayor masa, salvo por la resta del valor de su propia velocidad inicial.

Si inicialmente la partícula de masa m_2 está en reposo, eso significa que $v_2 = 0$, luego, las relaciones (34) y (35), quedan:

$$v_1' \approx -v_1 \quad (36)$$

$$v_2' \approx 0 \quad (37)$$

Si m_2 está en reposo, sigue en reposo, pero la partícula incidente se devuelve con la misma velocidad inicial que traía.

Ejercicio (5.6) Dos péndulos simples se encuentran en equilibrio, en contacto uno con el otro y con sus hilos verticales paralelos Las esferas de cada uno de los péndulos tienen masas $m_1 = 3m$ y $m_2 = m$, respectivamente. Ambas masas se levantan una altura h de su posición de equilibrio y se sueltan y llegan a chocar elásticamente, tal como se muestra en la Fig. (5.6.1).

a) Hallar sus velocidades al momento de chocar (considere los signos).

b) Obtenga las velocidades de cada una de las masas después del choque (considere los signos).

c) Hallar la altura a la cual llega cada una de las masas después del choque.

d) Calcule de nuevo las velocidades con que llegan a chocar entre sí en este segundo viaje (considere los signos).

e) Obtenga nuevamente las velocidades de cada una de las masas después del choque (considere los signos).

f) Hallar la altura a la cual llega cada una de ellas en este segundo viaje

g) Explique lo que ocurre en los sucesivos viajes

h) ¿Explique qué ocurriría si $m_1 = m_2 = m$?

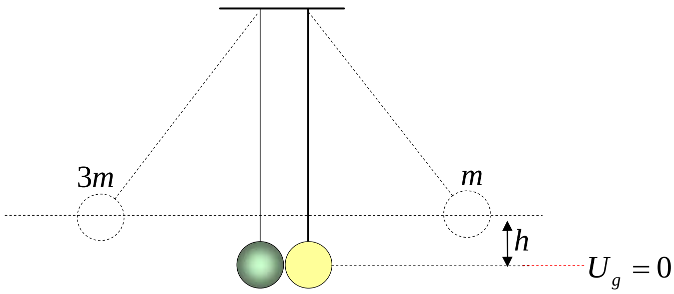

Figura (5.6.1)

Nota: *Dado que se considera que el roce es despreciable, se aplica el teorema de conservación de la energía mecánica total:*

$$\left(K + U\right)_{inicial} = \left(K + U\right)_{final} \tag{1}$$

Además, en los choques elásticos, se aplican las siguientes condiciones:

- *Conservación del momentum lineal total del sistema de partículas:*

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{1,f} = \vec{p}_{2,i} + \vec{p}_{2,f} \tag{2}$$

- *Conservación de la energía cinética total del sistema de partículas:*

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 \tag{3}$$

Solución:

a) Hallar las velocidades de las partículas al momento de chocar (considere los signos).

Como el roce se considera despreciable, emplearemos el teorema de conservación de la energía mecánica para cada masa, dado por la relación (1). Dado que ambas masas parten del reposo, sus energías cinéticas iniciales son cero,

$$K_{1,i} = K_{2,i} = 0 \tag{4}$$

Sin embargo, sus energías cinéticas en el punto más bajo $K_{1,f}$ y $K_{2,f}$, son distintas de cero.

Como ambas masas se encuentran a la misma altura en el punto inicial respecto del nivel cero de referencia de energía potencial gravitatoria, sus energías potenciales gravitatorias iniciales son:

$$U_{g,i,1} = m_1 gh \tag{5}$$

$$U_{g,i,2} = m_2 gh \tag{6}$$

En el estado final, las energías potenciales son cero, $U_{g,f,1} = 0$ y $U_{g,f,2} = 0$, porque ambas masas se encuentran justo sobre el nivel cero de energía potencial marcado en la Fig. (5.6.1)

Aplicando el teorema de conservación la energía para cada masa, se tiene:

Péndulo de masa m_1 *:*

$$\left(K_{1,i} + U_{1,g,i}\right) = \left(K_{1,f} + U_{1,g,f}\right) \tag{7}$$

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \tag{8}$$

Despejando, se obtiene:

$$v_1 = \sqrt{2gh} \tag{9}$$

Péndulo de masa m_2 *:*

$$\left(K_{2,i} + U_{2,g,i}\right) = \left(K_{2,f} + U_{2,g,f}\right) \tag{10}$$

$$m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{11}$$

Despejando, se obtiene:

$$v_2 = \sqrt{2gh} \tag{12}$$

Por lo tanto, en el momento del choque, ambas masas llegan a chocar con la misma rapidez: $v_1 = v_2 = \sqrt{2gh}$

b) Obtenga las velocidades de cada una de las masas después del choque (considere los signos).

En primer lugar debemos escribir adecuadamente los datos iniciales de cada masa, especialmente sus velocidades con signo para indicar la dirección de movimiento. En la Fig. (5.6.2) se muestran las velocidades antes del choque: $v_1 = \sqrt{2gh}$ y $v_2 = -v_1$. El signo menos indica que la partícula se mueve hacia la izquierda. Las masas son $m_1 = 3m$ y $m_2 = m$.

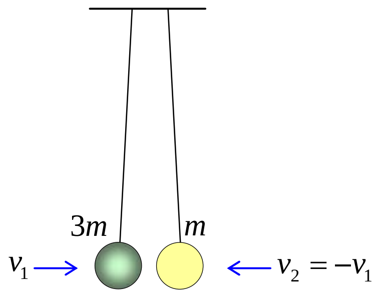

Figura (5.6.2)

En este caso se trata de un choque elástico unidimensional, por lo tanto se pueden usar las expresiones obtenidas en el ejercicio (5.5), para expresar las velocidades finales, v_1' y v_2', en función de las velocidades iniciales v_1 y v_2, a saber,

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} v_2 \tag{13}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} v_2 \tag{14}$$

Usando los datos iniciales, estas expresiones quedan:

$$v_1' = \frac{2m}{4m} v_1 + \frac{2m}{4m} v_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \tag{15}$$

Pero $v_2 = -v_1$, luego,

$$v_1' = \frac{1}{2}(v_1 - v_1) = 0 \tag{16}$$

$$v_1' = 0 \tag{17}$$

$$v_2' = \frac{6m}{4m} v_1 - \frac{2m}{4m} v_2 = \frac{1}{2}(3v_1 - v_2) \tag{18}$$

$$v_2' = \frac{1}{2}(3v_1 + v_1) = 2v_1 \tag{19}$$

$$v_2' = 2v_1 \tag{20}$$

En resumen: $v_1' = 0$ y $v_2' = 2v_1$. Esto significa que la masa m_1 se queda en reposo en el punto más bajo de la trayectoria, y que la masa m_2 inicia su movimiento con una velocidad $v_2' = 2v_1$ positiva (se mueve hacia la derecha), de magnitud el doble que su rapidez inicial.

c) Hallar la altura a la cual llega cada una de las masas después del choque.

Sólo debemos hallar hasta dónde sube m_2, porque m_1 está detenida. Usaremos el teorema de conservación de la energía dado por (1), para analizar el movimiento de la masa m_2.

Punto inicial:

$$\left(K+U\right)_i = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \tag{21}$$

la energía potencial gravitacional en el punto más bajo vale cero porque está sobre el nivel cero de energía potencial.

Punto final:

$$\left(K+U\right)_f = m_2 g h' \tag{22}$$

la energía cinética en el punto más alto es cero porque la masa se detiene.

Igualando (21) con (22), se tiene

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = m_2 g h' \tag{23}$$

$$h' = \frac{v_2'^2}{2g} \tag{24}$$

Usando $v_2' = 2v_1 = 2\sqrt{2gh}$, se tiene,

$$h' = \frac{1}{2g}\left(8gh\right) \tag{25}$$

$$h' = 4h \tag{26}$$

Por lo tanto, la partícula de masa $m_2 = m$, desciende, choca y luego rebota y logra llegar a una altura 4 veces mayor que la altura h desde la cual fue soltada originalmente.

d) Calcule de nuevo las velocidades con que llegan a chocar los péndulos entre sí en este segundo viaje (considere los signos).

En el segundo viaje, sólo se moverá la partícula de masa m_2 desde la altura $4h$ hasta llegar a chocar a la partícula de masa m_1 que continua en reposo en el nivel cero de energía potencial. Por conservación de la energía mecánica, esperamos que la rapidez inicial al subir v_2', debe ser igual a la rapidez final al bajar v_2'', pero demostrémoslo.

Punto de inicial:

$$(K+U)_i = m_2 g\left(4h\right) \tag{27}$$

Punto final:

$$(K+U)_f = \frac{1}{2} m_2 v_2''^2 \tag{28}$$

Igualando las expresiones (27) y (28), se tiene

$$m_2 g\left(4h\right) = \frac{1}{2} m_2 v_2''^2 \tag{29}$$

$$v_2'' = \sqrt{8gh} = 2\sqrt{2gh} \tag{30}$$

Usando $v_1 = \sqrt{2gh}$, se tiene que

$$v_2'' = 2v_1 \tag{31}$$

Valor idéntico a la velocidad inicial de subida v_2' obtenida en (20), tal como debe ser por conservación de la energía mecánica. Nótese que la masa m_2 se está moviendo hacia la izquierda en el momento de llegar a chocar a m_1.

e) Obtenga nuevamente las velocidades de cada una de las masas después del choque (considere los signos).

Ahora tenemos un nuevo choque en que sus velocidades iniciales son: $v_1''=0$ para m_1 y $v_2'' = -2v_1$ para m_2, porque se mueve hacia la izquierda. Reemplazando estos datos en las expresiones (13) y (14), se obtienen las velocidades finales de este nuevo choque:

$$v_1''' = \frac{2m}{4m} v_1'' + \frac{2m}{4m} v_2'' = \frac{1}{2}(v_1'' + v_2'') \tag{32}$$

Pero $v_1''=0$ y $v_2'' = -2v_1$, luego,

$$v_1''' = \frac{1}{2}(0 - 2v_1) = -v_1 \tag{33}$$

$$v_1''' = -v_1 \tag{34}$$

$$v_2''' = \frac{6m}{4m} v_1'' - \frac{2m}{4m} v_2'' = \frac{1}{2}(3v_1'' - v_2'') \tag{35}$$

Usando $v_1'' = 0$ y $v_2'' = -2v_1$

$$v_2''' = v_1 \tag{36}$$

En resumen, las velocidades después del choque son: $v_1''' = -v_1$ y $v_2''' = v_1$. Es decir, ambas masas inician su movimiento, alejándose entre sí, con la misma rapidez v_1 con que llegaron a chocar al inicio del ejercicio.

f) Hallar la altura a la cual llega cada una de las masas en este segundo viaje.

Por conservación de la energía mecánica, ambos deberían llegar a la misma altura inicial h. Demostrémoslo.

Para m_1 se tiene:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'''^{2}{}' = m_1 g h_1''' \tag{37}$$

$$h''' = \frac{v_1'''^2}{2g} \tag{38}$$

Pero $v_1''' = -v_1 = -\sqrt{2gh}$, luego,

$$h_1''' = \frac{2gh}{2g} = h \tag{39}$$

$$h_1''' = h \tag{40}$$

Para m_2 se tiene:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'''^{2}{}' = m_2 g h_2''' \tag{41}$$

$$h''' = \frac{v_1'''^2}{2g} \tag{42}$$

Pero $v_2''' = v_1 = \sqrt{2gh}$, luego,

$$h_2''' = \frac{2gh}{2g} = h \tag{43}$$

$$h_2'''' = h \qquad (44)$$

Por lo tanto, $h_1'''' = h_2'''' = h$, lo cual implica que ambas masas vuelven a la misma altura h, y se reinicia el movimiento. Repitiéndose el ciclo por siempre. Esto es cierto en nuestro modelo, porque hemos considerado que el roce es despreciable.

g) Explique lo que ocurre en los sucesivos choques.

El movimiento de los péndulos es un proceso cíclico formado por las siguientes etapas:

- Los dos péndulos caen desde una altura h y llegan a chocar en el punto más bajo con velocidades iguales y opuestas: $v_1 = -v_2 = \sqrt{2gh}$.
- Después del primer choque, la masa $m_1 = 3m$ se queda en reposo y la masa $m_2 = m$ sale con velocidad $v_2' = 2v_1$ y logra llegar hasta una altura $4h$.
- Después de caer, la masa m_2 llegar a chocar con velocidad $v_2'' = -2v_1$ a la masa m_1 que está en reposo.
- Después de este segundo choque, las dos masas salen con la misma velocidad inicial $v_1'''' = v_2'''' = v_1 = \sqrt{2gh}$, pero en direcciones opuestas, y logran subir hasta una altura h, idéntica al inicio del movimiento. Por lo tanto, todo se reinicia de nuevo, periódicamente.

h) ¿Explique qué ocurriría si $m_1 = m_2 = m$?

En este caso, usando las relaciones (13) y (14), obtenemos las velocidades después del choque:

$$v_1' = -v_1 \qquad (45)$$

$$v_2' = v_1 \qquad (46)$$

Esto significa que las dos partículas salen con la misma velocidad, pero en direcciones contrarias, y por lo tanto, por conservación de la energía vuelven a la altura h, y el movimiento se repite cíclicamente, en solo dos etapas, a diferencia del caso anterior que tiene cuatro etapas.

Ejercicio (5.7) Dos partículas de igual masa m participan en un choque elástico bidimensional. Las velocidades de cada partícula antes del choque son

$$\vec{v}_{1,i} = \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)\left(m/s\right); \quad \vec{v}_{2,i} = \left(-4\hat{j}\right)\left(m/s\right) \tag{1}$$

Después del choque, la partícula de masa m_2 se mueve haciendo un ángulo $\theta = -80^\circ$ con respecto al eje X . Hallar las velocidades de cada partícula después del choque.

Nota: *En un choque elástico se cumplen las siguientes condiciones:*

- *se conserva el momentum lineal* $\vec{p} = m\vec{v}$ *del sistema de partículas*

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} \tag{2}$$

- *se conserva la energía cinética del sistema de partículas*

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 \tag{3}$$

Consideremos el siguiente caso particular: las masas de las partículas son iguales, $m_1 = m_2 = m$.

Si las masas de las partículas son iguales, es decir, si $m_1 = m_2 = m$ *, entonces las ecuaciones (2) y (3) se simplifican, obteniéndose:*

$$\vec{v}_{1,i} + \vec{v}_{2,i} = \vec{v}_{1,f} + \vec{v}_{2,f} \tag{4}$$

$$v_{1,i}^2 + v_{2,i}^2 = v_{1,f}^2 + {}_{2,f}^2 \tag{5}$$

Elevemos al cuadrado la relación (4),

$$\left(\vec{v}_{1,i} + \vec{v}_{2,i}\right)^2 = \left(\vec{v}_{1,f} + \vec{v}_{2,f}\right)^2 \tag{6}$$

Por ser vectores, debe usarse el producto punto para multiplicar los vectores

$$\left(\vec{v}_{1,i} + \vec{v}_{2,i}\right)\cdot\left(\vec{v}_{1,i} + \vec{v}_{2,i}\right) = \left(\vec{v}_{1,f} + \vec{v}_{2,f}\right)\cdot\left(\vec{v}_{1,f} + \vec{v}_{2,f}\right) \tag{7}$$

Desarrollando el producto punto, se tiene

$$v_{1,i}^2 + v_{2,i}^2 + 2\vec{v}_{1,i}\cdot\vec{v}_{2,i} = v_{1,f}^2 + {}_{2,f}^2 + 2\vec{v}_{1,f}\cdot\vec{v}_{2,f} \tag{8}$$

donde hemos usado la propiedad general para un vector arbitrario $\vec{A}$ *:*

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A\,A\cos 0^0 = A^2 \tag{9}$$

Aplicando la relación (5) *en la relación* (8), *se obtiene la siguiente relación general:*

$$\vec{v}_{1,i}\cdot\vec{v}_{2,i} = \vec{v}_{1,f}\cdot\vec{v}_{2,f} \tag{10}$$

Esta es justamente la relación que se cumple en este ejercicio, puesto que las velocidades iniciales de las dos partículas son distintas de cero.

Consideremos ahora la siguiente situación particular en que una de las partículas está inicialmente en reposo. Supongamos que la partícula de masa m_2 *está en reposo, es decir,* $\vec{v}_{2,i} = \vec{0}$*, entonces, la relación general* (10)*, queda:*

$$\vec{v}_{1,f} \cdot \vec{v}_{2,f} = 0 \tag{11}$$

Esta relación vectorial implica que los vectores son perpendiculares, es decir, las velocidades de las dos partículas después del choque salen formando un ángulo recto entre sí. Nótese que este resultado vale sólo para masas iguales y una de ellas en reposo originalmente.

Solución:

Apliquemos las condiciones que se deben cumplir en un choque elástico.

Conservación del momentum lineal:

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} \tag{12}$$

En función de la definición de momentum lineal:

$$m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f} \tag{13}$$

Pero $m_1 = m_2$, luego se cancelan las masas:

$$\vec{v}_{1,i} + \vec{v}_{2,i} = \vec{v}_{1,f} + \vec{v}_{2,f} \tag{14}$$

Conocemos las dos velocidades iniciales

$$\vec{v}_{1,i} = \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)(m/s); \quad \vec{v}_{2,i} = \left(-4\hat{j}\right)(m/s) \tag{15}$$

y sólo conocemos la dirección de la velocidad de la segunda partícula después del choque. Por lo tanto, la velocidad $\vec{v}_{2,f}$ se puede escribir en la forma:

$$\vec{v}_{2,f} = v_{2,f}\cos\left(-80^\circ\right)\hat{i} + v_{2,f}\sin\left(-80^\circ\right)\hat{j} \tag{16}$$

La magnitud de la velocidad de la segunda partícula (la rapidez) $v_{2,f}$ es una de las incógnitas del problema; la otra incógnita es la velocidad $\vec{v}_{1,f}$.

Ahora podemos reemplazar estos datos e incógnitas en la relación (4):

$$\vec{v}_{1,i} + \vec{v}_{2,i} = \vec{v}_{1,f} + \vec{v}_{2,f} \tag{17}$$

$$\left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right) + \left(-4\hat{j}\right) = \left(v_{1,f,x}\hat{i} + v_{1,f,y}\hat{j}\right) + \left(v_2\cos\left(80^\circ\right)\hat{i} - v_2\sin\left(80^\circ\right)\hat{j}\right) \tag{18}$$

Agrupando por componentes podemos escribir:

$$\begin{aligned} v_{1,f,x} &= 3 - v_{2,f}\cos 80^0 \\ v_{1,f,y} &= 1 + v_{2,f}\sin 80^0 \end{aligned} \tag{19}$$

Conservación de la energía cinética:

La aplicación de la conservación de la energía cinética del sistema de partículas, con $m_1 = m_2$ y la cancelación del valor $1/2$, nos da la siguiente relación que debe cumplirse:

$$v_{1,i}^2 + v_{2,i}^2 = v_{1,f}^2 + v_{2,f}^2 \tag{20}$$

Antes de reemplazar las expresiones en esta relación, calculemos los módulos cuadráticos de cada velocidad.

Antes del choque:

$$\begin{aligned} v_{1,i}^2 &= 9 + 25 = 34 \\ v_{2,i}^2 &= 16 \end{aligned} \tag{21}$$

Después del choque:

$$v_{1,f}^2 = v_{1,f,x}^2 + v_{1,f,y}^2 \tag{22}$$

Reemplazando los valores conocidos y las incógnitas en la relación (20), se tiene:

$$34 + 16 = v_{1,f,x}^2 + v_{1,f,y}^2 + v_{2,f}^2 \tag{23}$$

Si reemplazamos los valores de $v_{1,f,x}$ y $v_{1,f,y}$ dados por la relación (19) en la relación (23), se tiene:

$$50 = \left(3 - v_{2,f}\cos 80^0\right)^2 + \left(1 + v_{2,f}\sin 80^0\right)^2 + v_{2,f}^2 \tag{24}$$

Desarrollando los cuadrados de binomio, y recordando que $\left(\cos 80^\circ\right)^2 + \left(\sin 80^\circ\right)^2 = 1$, se tiene:

$$v_{2,f}^2 + 0.464 v_{2,f} - 20 = 0 \tag{25}$$

La solución positiva (porque es el módulo de un vector) es:

$$v_{2,f} = 4.24615\left(m/s\right) \tag{26}$$

Ahora podemos calcular el vector $\vec{v}_{2,f}$ usando la relación (16) y este resultado:

$$\vec{v}_{2,f} = 4.24615 \times \left(0.174\,\hat{i} - 0.985\,\hat{j}\right) \tag{27}$$

$$\vec{v}_{2,f} = \left(0.73734\,\hat{i} - 4.18164\,\hat{j}\right)\left(m/s\right) \tag{28}$$

A partir de la relación (17)

$$\vec{v}_{1,f} = \vec{v}_{1,i} + \vec{v}_{2,i} - \vec{v}_{2,f} \tag{29}$$

estamos en condiciones de encontrar la velocidad $\vec{v}_{1,f}$ del cuerpo 1 después del choque, ya que conocemos $\vec{v}_{2,f}$ de la relación (28):

$$\vec{v}_{1,f} = \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right) + \left(-4\hat{j}\right) - \left(0.73734\,\hat{i} - 4.18164\,\hat{j}\right) \tag{30}$$

simplificando

$$\vec{v}_{1,f} = 2.26266\hat{i} + 5.18164\hat{j} \tag{31}$$

Su módulo viene dado por

$$v_{1,f} = \sqrt{\left(2.26266\right)^2 + \left(5.18164\right)^2} \tag{32}$$

$$v_{1,f} = 5.6541\left(m/s\right) \tag{33}$$

Ahora que conocemos todos los vectores, podemos calcular el ángulo que hace el vector velocidad de partícula de masa m_1 con el eje X, usando el producto punto:

$$\vec{v}_{1,f} \cdot \hat{i} = v_{1,f} \cos\alpha \tag{34}$$

Usando la relación (31), obtenemos el producto punto de la izquierda,

$$2.26266 = v_{1,f} \cos\alpha \tag{35}$$

Reemplazando el valor del módulo del vector $\vec{v}_{1,f}$, dado por (33), tenemos

$$2.26266 = 5.6541\cos\alpha \tag{36}$$

Despejando se tiene

$$\cos\alpha = \frac{2.26266}{5.6541} \tag{37}$$

Relación de la cual se obtiene el ángulo entre $\vec{v}_{1,f}$ y el eje X

$$\alpha = 66.41^0 \tag{38}$$

El ángulo que hacen los vectores velocidad final de ambas partículas entre sí, es la suma de los ángulos $\theta = 80^0$ y $\alpha = 66.41^0$, esto es,

$$\phi = \theta + \alpha = 80^0 + 66.41^0 \tag{39}$$

$$\phi = 146.41^0 \tag{40}$$

Este resultado también lo podemos obtener usando la relación (10),

$$\vec{v}_{1,i} \cdot \vec{v}_{2,i} = \vec{v}_{1,f} \cdot \vec{v}_{2,f} \tag{41}$$

Usando los datos iniciales y los datos calculados, podemos reemplazar en esta relación,

$$\left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right) \cdot \left(-4\hat{j}\right) = v_{1,f} v_{2,f} \cos\phi \tag{42}$$

donde ϕ es el ángulo entre los vectores $\vec{v}_{1,f}$ y $\vec{v}_{2,f}$. Reemplazando los módulos de los vectores obtenidos en (26) y en (33), se tiene,

$$\left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right) \cdot \left(-4\hat{j}\right) = 5.6541 \times 4.24615 \cos\phi \tag{43}$$

Realizando el producto punto,

$$-20 = 5.6541 \times 4.24615 \cos\phi \tag{44}$$

Despejando el coseno, se tiene

$$\cos\phi = \frac{-20}{24.0081} \tag{45}$$

El ángulo entre los vectores vale

$$\phi = 146.41^0 \tag{46}$$

resultado que coincide con el obtenido en relación (40).

CAPÍTULO 6
EQUILIBRIO DE CUERPO RÍGIDO

Problema (6.1) Una escalera de mano de largo L y masa M, descansa sobre una pared con roce despreciable, a una altura h del suelo. El centro de masas de la escalera está justo en la mitad de la escalera ($L/2$). Un estudiante de masa m comienza a subir por la escalera (ver Fig. (6.1.1)).

a) Hallar todas las fuerzas que actúan sobre los extremos de la escalera en función de la distancia d que recorre el estudiante a lo largo de la escalera.

b) Si el coeficiente de roce estático vale μ_s, ¿cuál es la máxima distancia que puede subir el estudiante sobre la escalera, antes de que ésta empiece a resbalar?

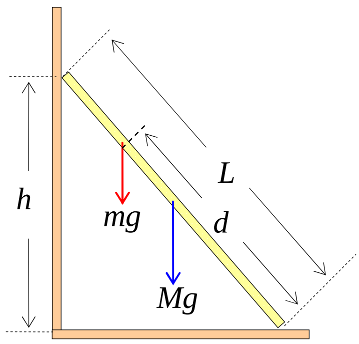

Figura (6.1.1)

Nota: *Para que un cuerpo rígido se encuentre en equilibrio, es necesario que se encuentre en equilibrio de rotación y en equilibrio de traslación, simultáneamente, es decir, es necesario que se cumplan las siguientes dos condiciones al mismo tiempo:*

a) Equilibrio traslacional:

$$\vec{F}_R = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = \vec{0} \tag{1}$$

b) Equilibrio rotacional:

$$\vec{\tau}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \vec{0} \tag{2}$$

Esta última condición se debe cumplir para cualquier punto elegido como origen de torques.

El torque $\vec{\tau}$ se define de la siguiente forma:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r\,F\sin\theta\,\hat{e}_{\perp} \tag{3}$$

donde $\hat{e}_{\perp}$ *es un vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores* $\vec{r}$ *y* $\vec{F}$ *, y que se obtiene siguiendo la regla de la mano derecha.*

Recordemos que cuando trabajamos con cuerpos rígidos que giran respecto a un eje fijo, el módulo del torque τ *se puede expresar como:*

$$\tau = F\,b \tag{4}$$

donde $b = r\sin\theta$ *se llama brazo de la fuerza, y corresponde a la distancia perpendicular medida desde la línea de acción de la fuerza hasta el origen de torques. El signo del torque se pone según la siguiente convención arbitraria: el torque que tiende a hacer girar al cuerpo rígido ideal en la dirección del movimiento de los punteros del reloj, será considerado positivo.*

Recordemos además que si los cuerpos rígidos homogéneos presentan algún eje de simetría, entonces su centro de masas se ubica en algún punto de dicho eje de simetría.

Solución:

a) Hallar todas las fuerzas que actúan sobre los extremos de la escalera en función de la distancia d *que recorre el estudiante a lo largo de la escalera.*

La Fig. (6.1.2) muestra el diagrama de cuerpo libre de la escalera con el estudiante sobre ella. Se ha dibujado una fuerza horizontal f_1 en el piso para evitar que la escalera resbale, debido a que existe fricción en el piso.

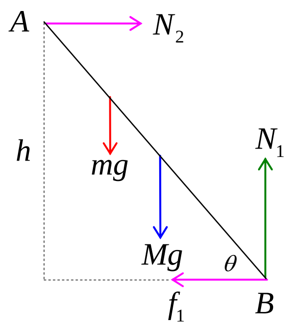

Figura (6.1.2)

El ángulo θ es conocido, ya que se conoce el cateto opuesto del triángulo rectángulo h, y se conoce la hipotenusa L. Por lo tanto,

$$\sin\theta = \frac{h}{L} \tag{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L} \tag{6}$$

Condición de equilibrio traslacional:

Elijamos un sistema de ejes coordenados derecho. Según la relación (1), la suma de las fuerzas a lo largo de cada eje debe ser cero, esto es,

Eje X :

$$\mathrm{N}_2 = f_1 \tag{7}$$

Eje Y :

$$N_1 = \left(M + m\right) g \tag{8}$$

N_1 es conocido , ya que M y m son datos. Podemos ver que la normal N_1 no depende de la posición d del estudiante en la escalera, pero N_2 y f_1 son incógnitas.

Condición de equilibrio rotacional.

Antes de aplicar esta condición, es absolutamente obligatorio *definir un origen de torques*. No importa cual sea el punto elegido. Sin embargo, la práctica aconseja elegir como origen de torques aquel punto del problema por donde pasa el mayor número de fuerzas desconocidas. De ese modo, dichas fuerzas desconocidas no producirán torque. En este ejercicio, elegiremos como origen de torques el punto B porque por allí pasan las dos fuerzas desconocidas N_1 y f_1 (ver Fig. (6.1.2)).

Calculemos el torque producido por cada fuerza respecto al punto B usando la relación (4). Para el caso de equilibrio, usaremos como convención que los torques son positivos si tienden a hacer girar el cuerpo en dirección del movimiento de los punteros del reloj, en caso contrario será negativo.

Torque de N_1:

$$\tau_{N_1} = N_1 b_{N_1} = 0 \tag{9}$$

$\tau_{N_1} = 0$ debido a que el brazo de la fuerza b_{N_1} se anula, es decir, $b_{N_1} = 0$, ya que la fuerza N_1 pasa justo por el origen de torques, como se muestra en la Fig. (6.1.2).

Torque de f_1:

$$\tau_{f_1} = f_1 b_{f_1} = 0 \tag{10}$$

$\tau_{f_1} = 0$ debido a que el brazo de la fuerza b_{f_1} se anula, es decir, $b_{f_1} = 0$, ya que la fuerza f_1 también pasa justo por el origen de torques.

Torque de N_2 :

$$\tau_{N_2} = +N_2 b_{N_2} \tag{11}$$

De acuerdo a nuestra convención, este torque es positivo porque tiende a hacer girar el cuerpo en la misma dirección que el movimiento de los punteros del reloj.

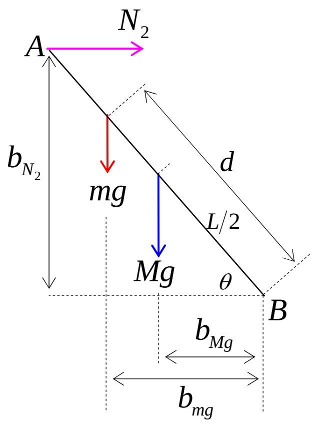

Figura (6.1.3)

Mirando la Fig. (6.1.3), se ve que el brazo de la fuerza N_2 vale $b_{N_2} = h$, luego

$$\tau_{N_2} = N_2\,h \tag{12}$$

Torque del peso Mg de la escalera:

$$\tau_W = -Mg\, b_{Mg} \tag{13}$$

Según nuestra convención, este torque es negativo porque tiende a hacer girar el cuerpo en sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj. El peso de la viga está en $\left(\frac{L}{2}\right)$. Mirando la Fig. (6.1.3), vemos que en el triángulo rectángulo, el brazo b_{Mg} vale $b_{Mg} = \left(\frac{L}{2}\right)\cos\theta$, luego,

$$\tau_{Mg} = -Mg\,\frac{L}{2}\cos\theta \tag{14}$$

Torque del peso mg del estudiante:

$$\tau_{mg} = -mg\, b_{mg} \tag{15}$$

Este torque es negativo porque tiende a hacer girar el cuerpo en sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj. Mirando la Fig. (6.1.3), vemos que en el triángulo rectángulo, el brazo b_{mg} vale $b_{mg} = d\cos\theta$, luego

$$\tau_w = -mgd\cos\theta \tag{16}$$

Ahora que hemos calculado todos los torques podemos aplicar la condición de equilibrio rotacional dada por la relación (2): la sumatoria de todos los torques respecto al origen de torques (el punto B en este ejercicio) debe ser cero, es decir,

$$0+0+N_2h-Mg\frac{L}{2}\cos\theta-mgd\cos\theta=0 \tag{17}$$

Se ve claramente que en esta ecuación existe una única incógnita, N_2, la cual se calcula de inmediato:

$$N_2=\frac{g\cos\theta}{h}\left(M\frac{L}{2}+md\right) \tag{18}$$

De la relación (7) sabemos que $\mathrm{N}_2 = f_1$, por lo tanto

$$f_1=N_2=\frac{g\cos\theta}{h}\left(M\frac{L}{2}+md\right) \tag{19}$$

De este modo hemos obtenido las fuerzas horizontales como función de la distancia d que recorre el estudiante sobre la escalera.

b) Si el coeficiente de roce estático vale μ_s, ¿cuál es la máxima distancia que puede subir el estudiante sobre la escalera, antes de que ésta empiece a resbalar?

La fuerza de roce con el piso f_1, va creciendo a medida que el estudiante sube por la escalera, tal como lo muestra la relación (19), pero la máxima fuerza de roce estático viene dada por $\mu_s N_1$, por lo tanto, la relación que se debe cumplir es:

$$f_1 \le \mu_s N_1 \tag{20}$$

Reemplazando el valor encontrado para f_1 en la relación (19), se tiene:

$$\frac{g\cos\theta}{h}\left(\frac{ML}{2}+md\right)\le \mu_s N_1 \tag{21}$$

Usando el resultado $N_1=(M+m)g$, obtenido en (8), escribimos,

$$\frac{g\cos\theta}{h}\left(\frac{ML}{2}+md\right)\le \mu_s (M+m)g \tag{22}$$

Despejando, se obtiene la condición para la distancia d que puede subir el estudiante sobre la escalera:

$$d\le\frac{\mu_s h}{m\cos\theta}(M+m)-\frac{LM}{2m} \tag{23}$$

Reordenemos de la siguiente forma este resultado:

$$d \leq \frac{L}{2m}\left(2\mu_s\left(M+m\right)\frac{h}{L\cos\theta}-M\right) \tag{24}$$

Pero de relación (5) sabemos que $\frac{h}{L}=\sin\theta$, reemplazando en (24), se tiene:

$$d \leq \frac{L}{2m}\left(2\mu_s\left(M+m\right)\tan\theta-M\right) \tag{25}$$

La distancia máxima $d_{máx}$ se obtiene cuando se considera el signo igual:

$$d = \frac{L}{2m}\left(2\mu_s\left(M+m\right)\tan\theta-M\right) \tag{26}$$

Ejercicio (6.2) Una viga uniforme de largo l y masa M, se encuentra articulada en la pared en el punto A, y a su vez está amarrada a la pared en el punto C mediante una cuerda, tal como se muestra en la Fig. (6.2.1). En el extremo B cuelga un cuerpo de masa m. Si el sistema se encuentra en equilibrio, calcular la tensión en la cuerda BC y las reacciones horizontal N_h y vertical N_v. Se consideran los siguientes datos: $M=4(kg)$, $m=1(kg)$, $\theta=30^0$, $l=2(m)$ y $d=1.35(m)$.

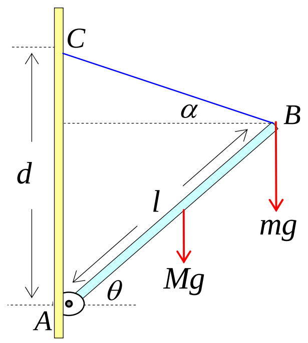

Figura (6.2.1)

Nota: *Para que un cuerpo rígido se encuentre en equilibrio, es necesario que se cumplan las siguientes dos condiciones, simultáneamente: a) Equilibrio traslacional:* $\vec{F}_R=\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j=\vec{0}$, *y b) Equilibrio rotacional:* $\vec{\tau}_R=\sum_{i=1}^{n}\vec{\tau}_i=\vec{0}$. *Esta última condición se debe cumplir para cualquier punto elegido como origen de torques. Recordemos que para un cuerpo rígido ideal que gira respecto a un eje fijo, el módulo del torque se puede expresar como:* $\tau=F\,b$, *donde* b *es el brazo de la* *fuerza, es decir,* b *es la distancia perpendicular medida desde la línea de acción de la fuerza hasta el origen de torques. Sin embargo, el signo del torque depende de una cierta convención. En estos ejercicios estamos suponiendo positivos los torques que tienden a hacer girar al cuerpo rígido en el sentido de movimiento de los punteros del reloj.*

Solución:

La Fig. (6.2.2) muestra *el diagrama de cuerpo libre* de la viga.

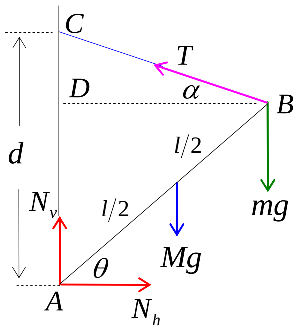

Figura (6.2.2)

Apliquemos las condiciones de equilibrio.

Equilibrio traslacional:

La condición que debe cumplirse es que la suma vectorial de todas las fuerzas sea cero. En este caso elegimos ejes coordenados derechos. En componentes, se tiene,

Eje X :

$$N_h = T\cos\alpha \tag{1}$$

Eje Y :

$$N_v + T\sin\alpha = Mg + mg \tag{2}$$

El ángulo α definido en el triángulo BCD se puede expresar en función del ángulo θ. En el triángulo rectángulo ABD, el lado BD vale

$$BD = l\cos\theta \tag{3}$$

Numéricamente,

$$BD = 2(m)\times\cos 30^\circ \tag{4}$$

$$BD = 1.73(m) \tag{5}$$

y el lado AD vale

$$AD = l\sin\theta \tag{6}$$

Numéricamente,

$$AD = 2(m) \times \sin 30^\circ \tag{7}$$

$$AD = 1(m) \tag{8}$$

En el triángulo BCD, el lado CD vale

$$CD = AC - AD \tag{9}$$

Pero $AC = d = 1.35(m)$ y $AD = 1(m)$, luego

$$CD = 0.35(m) \tag{10}$$

La hipotenusa BC de este triángulo rectángulo BCD, vale:

$$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{0.35^2 + 1.73^2} = 1.77(m) \tag{11}$$

Numéricamente, usando los resultados obtenidos en (5) y (10), se tiene.,

$$BC = \sqrt{0.35^2 + 1.73^2} \tag{12}$$

$$BC = 1.77(m) \tag{13}$$

En resumen, los lados del triángulo BCD vienen dados por:

$$BD = 1.73(m); \quad CD = 0.35(m); \quad BC = 1.77(m) \tag{14}$$

Por lo tanto, podemos conocer las funciones seno y coseno del ángulo α :

$$\sin\alpha = \frac{CD}{BC} = \frac{0.35(m)}{1.77(m)} \tag{15}$$

$$\sin\alpha = 0.198 \tag{16}$$

$$\cos\alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{1.73(m)}{1.77(m)} \tag{17}$$

$$\cos\alpha = 0.977 \tag{18}$$

El ángulo α vale,

$$\alpha = \arctan\left(\frac{0.35}{1.73}\right) \tag{19}$$

$$\alpha = 11.437^0 \tag{20}$$

Equilibrio Rotacional:

La Fig. (6.2.3) muestra las fuerzas y sus líneas de acción, lo cual permite calcular fácilmente los brazos de las fuerzas para el cálculo del torque. Nótese que hemos hecho una nueva descomposición de la tensión T, para efectos de hacer un cálculo rápido y fácil de su torque. La componente $T_1 = T\sin(\alpha+\theta)$ es perpendicular a la viga y la componente $T_2 = T\cos(\alpha+\theta)$, coincide con la viga, de modo que su línea de acción pasa justo por el punto A. Elegimos el punto A como origen de torques, porque por dicho punto pasa la mayor cantidad de fuerzas desconocidas: N_v, N_h y T_2.

Supondremos positivos los torques que tienden a hacen girar a la viga en la dirección de movimiento de los punteros del reloj.

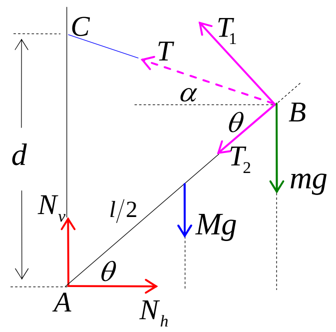

Figura (6.2.3)

Los torques producidos por las fuerzas N_v, N_h y T_2 son cero, ya que el brazo de cada fuerza vale cero, es decir,

$$\tau_{N_h} = \tau_{N_v} = \tau_{T_2} = 0 \tag{21}$$

Torque de Mg *:*

$$\tau_{Mg} = +Mg\, b_{Mg} \tag{22}$$

Este torque es positivo porque coincide con nuestra convención de signos de los torques. El brazo de la fuerza Mg, es la distancia horizontal que existe entre el punto A y la línea de acción de la fuerza Mg. Recordemos que si la viga es homogénea, su centro de masas se encuentra justo en la mitad de su largo $\left(\frac{l}{2}\right)$. En el triángulo rectángulo que se forma, se cumple

$$b_{Mg} = \left(\frac{AB}{2}\right)\cos\theta = \left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta \tag{23}$$

Reemplazando en (22)

$$\tau_{Mg} = Mg\frac{l}{2}\cos\theta \tag{24}$$

Numéricamente, usando el valor de BD obtenido en (5), se tiene,

$$\tau_{Mg} = 4(kg)\times 9.8\left(m/s^2\right)\times\left(\frac{2(m)}{2}\right)\cos 30^0 \tag{25}$$

$$\tau_{Mg} = 33.95\left(Nm\right) \tag{26}$$

Torque de mg *:*

$$\tau_{mg} = +mg\, b_{mg} \tag{27}$$

El brazo de mg vale $b_{mg} = BD = l\cos\theta$, luego

$$\tau_{mg} = mgl\cos\theta \tag{28}$$

Numéricamente:

$$\tau_{mg} = 1(kg) \times 9.8\left(m/s^2\right) \times 2(m) \times \cos 30^0 \tag{29}$$

$$\tau_{mg} = 16.97(Nm) \tag{30}$$

Torque de T :

Tal como dijimos antes, la Fig. (6.2.3) muestra una descomposición de la tensión T, en una componente perpendicular a la viga T_1, y una componente que va en la misma dirección de la viga: T_2, la cual pasa justo por el origen de torques A, por lo tanto su torque es cero. En cambio la componente T_1 tiene como brazo justo el largo de la viga, esto es, $b_{T_1} = l$, luego

$$\tau_T = -T_1 l \tag{31}$$

El signo menos indica que esta fuerza tiende a hacer girar a la viga en la dirección contraria al movimiento de los punteros del reloj. La componente T_1 viene dada por

$$T_1 = T\sin\left(\alpha + \theta\right) \tag{32}$$

Reemplazando en (31), se tiene,

$$\tau_T = -Tl\sin\left(\alpha + \theta\right) \tag{33}$$

Usando los datos numéricos conocidos: $l = 2(m)$, $\theta = 30^0$ y el ángulo $\alpha = 11.437^0$ obtenido en relación (20), se tiene

$$\tau_T = -T \times 2(m) \times \sin\left(11.437^0 + 30^0\right) \tag{34}$$

$$\tau_T = -1.3236T \tag{35}$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar la condición de equilibrio rotacional que indica que la suma de todos los torques con respecto a cualquier origen de torques debe ser cero, esto es,

$$\tau_{N_v} + \tau_{N_h} + \tau_{Mg} + \tau_{mg} + \tau_T = 0 \tag{36}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en relaciones (21), (26), (30) y (35) en la relación (36), se tiene:

$$0 + 0 + 33.95\left(Nm\right) + 16.97(Nm) - 1.3236\,T(Nm) = 0 \tag{37}$$

$$1.3236\,T = 50.92 \tag{38}$$

Despejando, obtenemos el valor de la tensión en la cuerda,

$$T = 38.47(N) \tag{39}$$

Ahora podemos calcular las reacciones horizontal N_h y vertical N_v, sobre la viga en el punto A. De la relación (1) sabemos que $N_h = T_x$, luego, usando resultados (16) y (39), se tiene,

$$N_h = T_x = T\cos\alpha = 38.47(N)\times 0.977 \tag{40}$$

$$N_h = 37.59(N) \tag{41}$$

De la relación (1) sabemos que $N_v = Mg + mg - T_y$, con $T_y = T\sin\alpha$,

$$N_v = (M+m)g - T\sin\alpha \tag{42}$$

Numéricamente, usando resultados (18) y (39), se tiene:

$$N_v = (4(kg)+1(kg))\times 9.8\left(m/s^2\right) - 38.47(N)\times 0.198 \tag{43}$$

$$N_v = 41.38(N) \tag{44}$$

Ejercicio (6.3) Una viga uniforme de masa $M = 25(kg)$ y largo l, se sostiene por medio de un cable en el punto C. La viga puede girar alrededor de un pivote en A. Un cuerpo de masa $m = 13(kg)$ se cuelga en el punto B a una distancia $AB = d = \frac{4l}{5}$ del punto A. Encuentre la tensión en el cable y las componentes horizontal y vertical de la reacción sobre la viga en A (ver Fig. (6.3.1)).

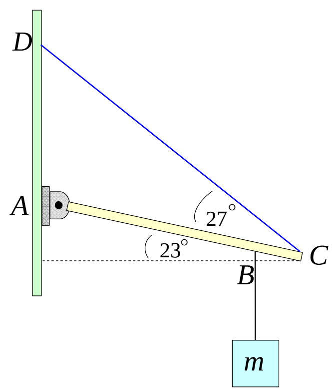

Figura (6.3.1)

Nota: *Para que un cuerpo rígido se encuentre en equilibrio, es necesario que se cumplan las siguientes dos condiciones, simultáneamente:*

a) Equilibrio traslacional: $\vec{F}_R = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = \vec{0}$, *y* *b) Equilibrio rotacional:* $\vec{\tau}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \vec{0}$.

Solución:

La Fig. (6.3.2) muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga, incluyendo una descomposición de la tensión en ejes coordenados derechos.

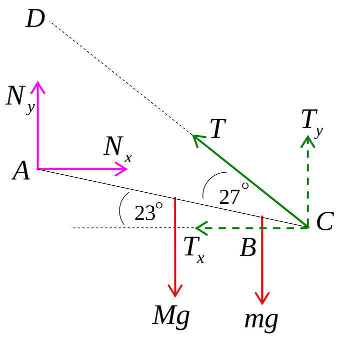

Figura (6.3.2)

Equilibrio traslacional:

La condición de equilibrio de traslación indica que la suma vectorial de todas las fuerzas es cero. En componentes según ejes derechos, se tiene,

Eje X :

$$N_x = T_x \tag{1}$$

donde T_x viene dado por

$$T_x = T\cos(23^0 + 27^0) = T\cos(50^0) \tag{2}$$

Reemplazando en (1), se tiene

$$N_x = T\cos(50^0) \tag{3}$$

Eje Y :

$$N_y + T_y = (M + m)g \tag{4}$$

donde T_y viene dado por

$$T_y = T\sin(23^0 + 27^0) = T\sin(50^0) \tag{5}$$

Luego, (4) queda,

$$N_y = (M + m)g - T\sin(50^0) \tag{6}$$

Equilibrio rotacional:

La condición de equilibrio de rotación indica que la suma de los torques respecto a cualquier origen vale cero. Se elige el punto A como origen de torques y además consideramos positivos los torques que tienden a hacer girar al cuerpo en el sentido del movimiento de los punteros del reloj. Los torques producidos por las fuerzas N_x y N_y valen cero, porque el brazo de cada fuerza vale cero, debido a que las dos fuerzas pasan por el origen de torques A, esto es,

$$\tau_{N_x} = \tau_{N_y} = 0 \tag{7}$$

Torque de Mg :

$$\tau_{Mg} = +Mgb_{Mg} \tag{8}$$

El peso de la viga homogénea se ubica en el centro de masas de la viga, el cual está justo en su centro,

$$b_{Mg} = \frac{l}{2}\cos 23^0 \tag{9}$$

$$\tau_{Mg} = Mg\frac{l}{2}\cos 23^0 \tag{10}$$

Torque de mg :

$$\tau_{mg} = +mgb_{mg} \tag{11}$$

$$b_{mg} = \frac{4l}{5}\cos 23^0 \tag{12}$$

$$\tau_{mg} = mg\frac{4l}{5}\cos 23^0 \tag{13}$$

Torque de T :

La Fig. (6.3.3) muestra que la tensión T se puede descomponer de una manera distinta a la mostrada en la Fig. (6.3.2). En este caso, la tensión se descompone en una componente a lo largo de un eje perpendicular a la barra AC, que llamaremos T_1, y una componente que coincide con la barra AC, que llamaremos T_2. Nótese que la línea de acción de T_2 pasa por el origen de torques A.

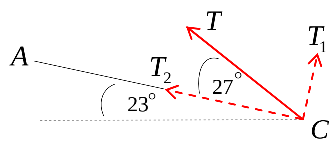

Figura (6.3.3)

La componente T_1 de la tensión T, es la única que produce torque, luego,

$$\tau_T = -T_1 b_{T_1} \tag{14}$$

El signo del torque es negativo, porque esta fuerza tiende a hacer girar a la viga en dirección contraria al movimiento de los punteros del reloj.

La componente T_1 viene dada por

$$T_1 = T \sin 27^0 \tag{15}$$

Dado que T_1 es perpendicular a la viga AC, el brazo de T_1 vale justo el largo l de la viga, esto es,

$$b_{T_1} = l \tag{16}$$

luego, el torque de la tensión T, dado por la relación (14), queda

$$\tau_T = -Tl \sin 27^0 \tag{17}$$

Para cumplir con la condición de equilibrio rotacional, sumamos todos los torques obtenidos en las relaciones (7), (10), (13) y (17),

$$\tau_{N_x} + \tau_{N_y} + \tau_{Mg} + \tau_{mg} + \tau_T = 0 \tag{18}$$

$$0 + 0 + Mg\frac{l}{2}\cos 23^0 + mg\frac{4l}{5}\cos 23^0 - Tl \sin 27^0 = 0 \tag{19}$$

Despejando la tensión, se tiene,

$$T = \left(\frac{1}{2}M + \frac{4}{5}m\right) g \frac{\cos 23^0}{\sin 27^0} \tag{20}$$

Numéricamente, usando los datos $M = 25(kg)$ y $m = 13(kg)$, se tiene,

$$T = 455(N) \tag{21}$$

A partir de este resultado podemos encontrar los valores de las normales N_x y N_y.

Usando la relación (3)

$$N_x = T_x = T\cos 50^0 \tag{22}$$

Reemplazando el valor de T dado en (21), se obtiene,

$$N_x = 292.5(N) \tag{23}$$

Usando la relación (6)

$$N_y = (M + m)g - T\sin(50^0) \tag{24}$$

Reemplazando el valor de T dado en (21), se obtiene,

$$N_y = 23.85(N) \tag{25}$$

Ejercicio (6.4) Una viga uniforme de masa $M = 120(kg)$ y largo l, se sostiene en equilibrio por medio de un cable en el punto B, el cual está ubicado a una distancia $\left(\frac{3l}{4}\right)$ del punto A. La viga puede girar alrededor de un pivote en A; y un cuerpo de masa $m = 200(kg)$ se cuelga en su parte superior en el punto C. Encuentre

a) la tensión en el cable

b) las componentes horizontal y vertical de la reacción sobre la viga en A.

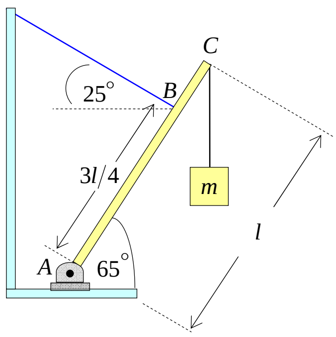

Figura (6.4.1)

Solución:

La Fig. (6.4.2) muestra el diagrama de fuerzas que actúan sobre la viga.

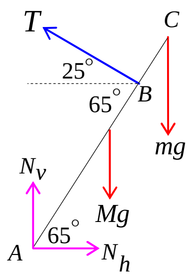

Figura (6.4.2)

Equilibrio traslacional.

Ahora podemos aplicar la condición de equilibrio traslacional que establece que la suma vectorial de fuerzas debe ser cero. Eligiendo ejes coordenados derechos, podemos escribir para cada eje:

Eje X :

$$N_h = T\cos 25^\circ \tag{1}$$

Eje Y

$$N_v + T\sin 25^\circ = Mg + mg \tag{2}$$

Equilibrio rotacional.

Calculemos los torques debidos a cada uno de las fuerzas. Elegimos el punto A de la Fig. (6.4.2) como origen de torques; y elegimos como positivos los torques que tratan de hacer girar al cuerpo en el sentido de movimiento de los punteros del reloj. Con esta elección de origen de torques, se anulan los torques de las fuerzas N_v y N_h, ya que pasan justo por el origen de torques y por lo tanto sus brazos son cero:

$$\tau_{N_h} = \tau_{N_v} = 0 \tag{3}$$

Torque de Mg :

El peso Mg se ubica en el centro de masas de la viga homogénea, ubicado justo en $\frac{l}{2}$, luego su torque respecto al punto A, viene dado por:

$$\tau_{Mg} = +Mg\left(\frac{l}{2}\cos 65^\circ\right) \tag{4}$$

Donde $b_{Mg} = \frac{l}{2}\cos 65^\circ$ es el brazo de la fuerza Mg.

Torque de mg :

$$\tau_{mg} = +mg\left(l\cos 65^\circ\right) \tag{5}$$

Donde $b_{mg} = l\cos 65^\circ$ es el brazo de la fuerza mg.

Torque de T :

De la Fig. (6.4.2) se puede ver claramente que la tensión T es perpendicular a la viga, ya que el ángulo entre la viga y la cuerda vale: $\phi = 25^0 + 65^0 = 90^0$. Por lo tanto, la distancia $AB = \frac{3l}{4}$ es justo el brazo de la tensión, es decir, $b_T = \frac{3l}{4}$, por lo tanto, el torque de la tensión vale:

$$\tau_T = -Tb_T \tag{6}$$

$$\tau_T = -T\left(\frac{3l}{4}\right) \tag{7}$$

El signo negativo se debe a que esta fuerza tiende a hacer girar a la viga en dirección contraria al movimiento de los punteros del reloj.

Ahora podemos aplicar la condición de equilibrio rotacional

$$\tau_{N_h} + \tau_{N_v} + \tau_{Mg} + \tau_{mg} + \tau_{T_x} + \tau_{T_y} = 0 \tag{8}$$

Reemplazando los valores obtenidos en (3), (4), (5) y (7), se tiene:

$$0 + 0 + Mg\left(\frac{l}{2}\cos 65^\circ\right) + mg\left(l\cos 65^\circ\right) - T\left(\frac{3l}{4}\right) = 0 \tag{9}$$

Reordenando y cancelando el largo l de la viga se obtiene la tensión,

$$T = \frac{4}{3}\left(\frac{M}{2} + m\right) g\cos 65^\circ \tag{10}$$

Numéricamente

$$T = \frac{4}{3}\left(\frac{120}{2} + 200\right)(kg) \times 9.8\left(m/s^2\right) \times \cos 65^\circ = 1435.78(N) \tag{11}$$

$$T = 1435.78(N) \tag{12}$$

Usando la relación (1) y el resultado (12), tenemos

$$N_h = T\cos 25^\circ \tag{13}$$

$$N_h = 1435.78(N) \times \cos 25^\circ \tag{14}$$

$$N_h = 1301.26(N) \tag{15}$$

Usando la relación (2) y el resultado (12), tenemos

$$N_v = Mg + mg - T\sin 25^\circ \tag{16}$$

$$N_v = (120 + 200)(kg) \times 9.8(m/s^2) - 1435.78(N) \times \sin 25^\circ \tag{17}$$

$$N_v = 2529.2(N) \tag{18}$$

Ejercicio (6.5) Una barra uniforme de masa M y longitud L se sostiene en sus extremos por medio de una cuña sin fricción, tal como se muestra en la Fig. (6.5.1).

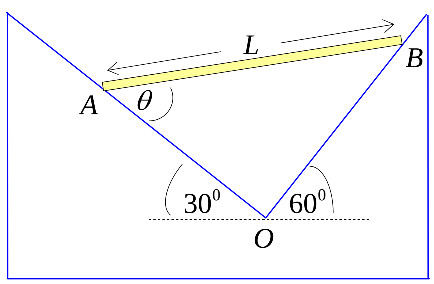

Figura (6.5.1)

Si el sistema se encuentra en equilibrio, hallar:

a) las reacciones normales en A y B

b) el ángulo θ en el equilibrio.

Solución:

a) Hallar las reacciones normales en A y B

Las reacciones normales N_A y N_B en los puntos A y B, respectivamente, son perpendiculares a los planos inclinados porque no hay roce. Usaremos ejes coordenados derechos para hacer la descomposición de las fuerzas, tal como se muestra en la Fig. (6.5.2).

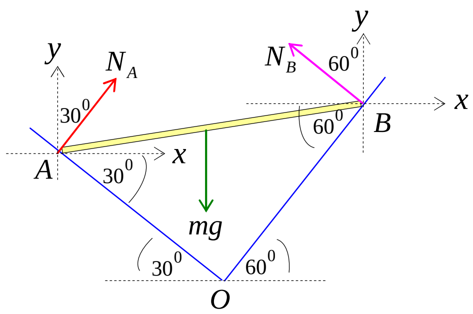

Figura (6.5.2)

Equilibrio traslacional.

Eje X :

$$N_A \sin 30^0 - N_B \sin 60^0 = 0 \tag{1}$$

Eje Y

$$N_A \cos 30^0 + N_B \cos 60^0 = mg \tag{2}$$

Dado que $\sin 60^0 = \cos 30^0$; $\cos 60^0 = \sin 30^0$, la relación (1), se puede escribir en la forma:

$$N_B = N_A \tan 30^0 \tag{3}$$

Insertando este resultado en la relación (2), se tiene

$$N_A \cos 30^0 + N_A \tan 30^0 \sin 30^0 = mg \tag{4}$$

$$N_A \left(\cos^2 30^0 + \sin^2 30^0\right) = mg \cos 30^0 \tag{5}$$

$$N_A = mg \cos 30^0 \tag{6}$$

Reemplazando en (3), obtenemos

$$N_B = mg \sin 30^0 \tag{7}$$

b) *Hallar el ángulo θ en el equilibrio.*

Debemos ahora aplicar la condición de equilibrio rotacional. La Fig. (6.5.3) es idéntica a la Fig. (6.5.2), pero ahora se expresa en función del ángulo θ.

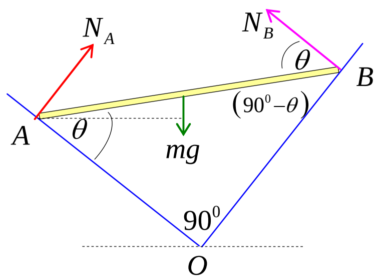

Figura (6.5.3)

Consideremos el origen de torques en el punto A y consideremos como positivos, los torques que tienden a hacer girar la varilla en la dirección del movimiento de los punteros del reloj.

El torque debido a N_A se anula, porque la fuerza pasa por el origen de torques y el brazo de la fuerza se hace cero.

$$\tau_{N_A} = N_A b_{N_A} = 0 \tag{8}$$

Torque del peso mg :

$$\tau_{mg} = mgb_{mg} = mg\frac{L}{2}\cos\left(\theta - 30^0\right) \tag{9}$$

donde el brazo de la fuerza peso viene dado por $b_{mg} = \frac{L}{2}\cos\left(\theta - 30^0\right)$

Torque de N_B :

La reacción N_B se puede descomponer en una componente $N_{B,1}$ que coincide con la dirección de la varilla, y una componente $N_{B,2}$, perpendicular a la varilla. La componente $N_{B,1}$ no produce torque porque pasa justo por el origen de torques A. La componente perpendicular a la varilla $N_{B,2}$ viene dada por $N_{B,2} = N_B \sin\theta$, donde $N_B = mg\sin 30^0$, según relación (7), luego $N_{B,2}$ queda

$$N_{B,2} = mg\sin 30^0 \sin\theta \tag{10}$$

Torque de $N_{B,2}$:

$$\tau_{N_{B,2}} = -N_{B,2} b_{N_{B,2}} = -mg\sin 30^0 \sin\theta\, b_{N_{B,2}} \tag{11}$$

El brazo de $N_{B,2}$ es justo el largo L de la varilla, luego, (11) queda

$$\tau_{N_{B,2}} = -mgL\sin 30^0 \sin\theta \tag{12}$$

El torque es negativo porque tiende a hacer girar a la varilla en sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj.

Sumando los torques y aplicando la condición de equilibrio rotacional, se tiene:

$$mg\frac{L}{2}\cos\left(\theta-30^0\right)-mgL\sin 30^0\sin\theta=0 \tag{13}$$

Simplificando, se obtiene

$$\cos\left(\theta-30^0\right)=\sin\theta \tag{14}$$

Pero $\sin\theta=\cos\left(90^0-\theta\right)$, entonces (14) se escribe

$$\cos\left(\theta-30^0\right)=\cos\left(90^0-\theta\right) \tag{15}$$

Igualando los ángulos, se tiene

$$\theta-30^0=90^0-\theta \tag{16}$$

$$2\theta=120^0 \tag{17}$$

luego,

$$\theta=60^0 \tag{18}$$

Ejercicio (6.6) Un tablón de peso $W=445\left(N\right)$ y de longitud $L=6.1(m)$, descansa sobre el piso y sobre un rodillo sin rozamiento en la parte superior de una pared de altura $h=3.05(m)$. El centro de masas del tablón homogéneo se encuentra en su centro. El tablón permanece en equilibrio para cualquier valor de $\theta\geq 70^0$, pero resbala si $\theta<70^0$.

a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre el tablón

b) Hallar el coeficiente de roce estático μ_s entre el tablón y el piso, justo antes de que empiece a resbalar.

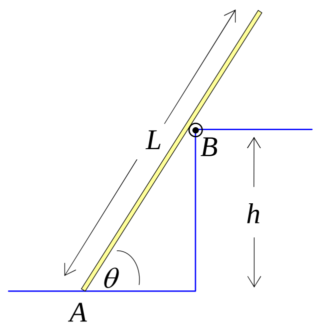

Figura (6.6.1)

Solución:

a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre el tablón

La Fig. (6.6.2) muestra el diagrama de cuerpo libre del tablón.

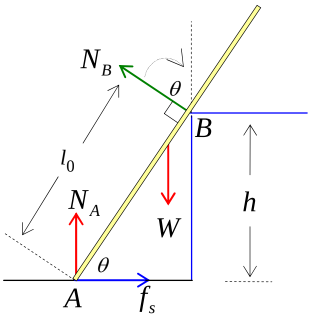

Figura (6.6.2)

b) Hallar el coeficiente de roce estático μ_s entre el tablón y el piso, justo antes de que empiece a resbalar.

El tablón comienza a deslizar si $\theta < 70^0$, por lo tanto, para $\theta = 70^0$ el roce es máximo y la fuerza de roce estática viene dada por la fórmula experimental:

$$f_s = \mu_s N_A \tag{1}$$

donde μ_s es el coeficiente de roce estático entre el tablón y el piso.

Equilibrio traslacional.

Considerando que el ángulo vale justo $\theta = 70^0$,

Eje X:

$$f_s - N_B \sin 70^0 = 0 \tag{2}$$

Aplicando la relación (1), escribimos

$$\mu_s N_A = N_B \sin 70^0 \tag{3}$$

El coeficiente de roce estático μ_s vale:

$$\mu_s = \frac{N_B \sin 70^0}{N_A} \tag{4}$$

Eje Y:

$$N_A + N_B \cos 70^0 - W = 0 \tag{5}$$

Despejando N_A,

$$N_A = W - N_B \cos 70^0 \tag{6}$$

Reemplazando (6) en (4), se tiene

$$\mu_s = \frac{N_B \sin 70^0}{W - N_B \cos 70^0} \tag{7}$$

Por lo tanto, basta conocer N_B para resolver el problema.

Equilibrio rotacional.

La condición de equilibrio rotacional indica que la suma de todos los torques debe ser cero. Antes de calcular los torques, debemos elegir el origen de torques y el sentido positivo de los torques. Elegimos como positivos los torques que tienden a hacer girar al cuerpo a favor del movimiento de los punteros del reloj y ponemos el origen de torques en el punto A, porque por allí pasa el mayor número de fuerzas desconocidas.

Torque de N_A *:*

$$\tau_{N_A} = N_A b_{N_A} = 0 \tag{8}$$

porque la línea de acción de la fuerza pasa por el origen de torques, por lo tanto el brazo de la fuerza se hace cero: $b_{N_A} = 0$.

Torque del peso W *:*

El peso del tablón está en la mitad de su largo, es decir, en su centro de masas, luego,

$$\tau_W = +Wb_W = W\frac{L}{2}\cos 70^0 \tag{9}$$

Torque de N_B *:*

$$\tau_{N_B} = -N_B b_{N_B} = -N_B l_0 \tag{10}$$

Porque N_B es perpendicular al tablón y l_0 es su brazo.

De la Fig. (6.6.2) vemos que

$$\sin 70^0 = \frac{h}{l_0} \tag{11}$$

Por lo tanto,

$$l_0 = \frac{h}{\sin 70^0} \tag{12}$$

Luego el torque de N_B queda

$$\tau_{N_B} = -N_B \frac{h}{\sin 70^0} \tag{13}$$

Usando los resultados obtenidos en (8), (9) y (13), la condición de equilibrio rotacional queda:

$$\frac{WL}{2}\cos 70^0 - N_B \frac{h}{\sin 70^0} = 0 \tag{14}$$

De esta relación obtenemos N_B

$$N_B = \frac{WL}{2h}\cos 70^0 \sin 70^0 \tag{15}$$

Reemplazando este resultado en la relación (7) que expresa el coeficiente de roce, tenemos,

$$\mu_s = \frac{L\cos 70^0 \sin^2 70^0}{(2h - L\cos^2 70^0 \sin 70^0)} \tag{16}$$

Numéricamente,

$$\mu_s = \frac{6.1(m)\times\cos 70^0 \times \sin^2 70^0}{(2\times 3.05(m) - 6.1(m)\times\cos^2 70^0 \times \sin 70^0)} \tag{17}$$

$$\mu_s = 0.34 \tag{18}$$

Ejercicio (6.7) Una varilla uniforme de masa $m = 2.3(kg)$ y longitud L se mantiene en posición inclinada como indica la Fig. (6.7.1). El coeficiente de roce estático entre la varilla y el piso vale $\mu_s = 0.6$. La varilla está a punto de deslizar hacia la derecha. Hallar:

a) la tensión en el alambre de soporte BC

b) el ángulo θ que forma el alambre BC con la pared vertical.

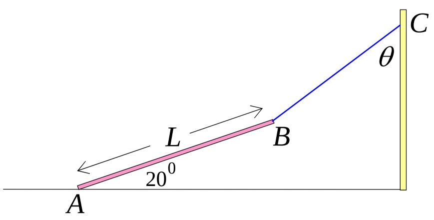

Figura (6.7.1)

Solución:

La Fig. (6.7.2) muestra el diagrama de cuerpo libre de la varilla.

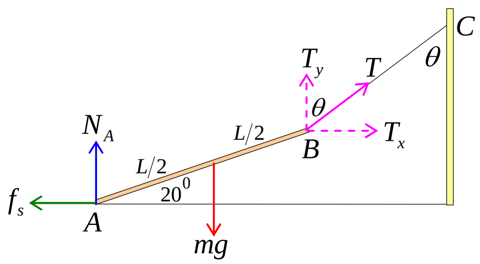

Figura (6.7.2)

Equilibrio traslacional.

Dado que la varilla está a punto de deslizar, el roce estático es máximo y en dicho punto máximo, la fuerza roce viene dada por la fórmula experimental:

$$f_s = \mu_s N_A \tag{1}$$

Aplicando la condición de equilibrio de traslación, se tiene:

Eje X :

$$f_s - T\sin\theta = 0 \tag{2}$$

Aplicando (1), la relación (2): queda,

$$\mu_s N_A = T\sin\theta \tag{3}$$

Eje Y

$$N_A + T\cos\theta = mg \tag{4}$$

Equilibrio rotacional.

Apliquemos ahora la condición de equilibrio rotacional que indica que la suma de todos los torques debe ser cero. Antes debemos elegir el origen de torques y el sentido positivo de los torques. Elegimos como positivos los torques que tienden a hacer girar al cuerpo a favor del movimiento de los punteros del reloj y elegimos como origen de torques al punto B.

Torque de la tensión T

$$\tau_T = Tb_T = 0 \tag{5}$$

porque la línea de acción de la fuerza pasa por el origen de torques, por lo tanto el brazo de la fuerza se hace cero: $b_T = 0$.

Torque del peso mg *:*

$$\tau_{mg} = -mgb_{mg} = -mg\frac{L}{2}\cos 20^0 \tag{6}$$

Torque de N_A *:*

$$\tau_{N_A} = N_A b_{N_A} = N_A L\cos 20^0 \tag{7}$$

Torque de f_s *:*

$$\tau_{f_s} = f_s b_{f_s} = f_s L\sin 20^0 \tag{8}$$

Aplicando la condición de equilibrio rotacional, se tiene:

$$N_A L\cos 20^0 + f_s L\sin 20^0 - mg\frac{L}{2}\cos 20^0 = 0 \tag{9}$$

Usando $f_s = \mu_s N_A$ dado por relación (1), cancelando L y dividiendo por $\cos 20^0$, se tiene

$$N_A\left(1+\mu_s \tan 20^0\right)=\frac{mg}{2} \tag{10}$$

Despejando N_A,

$$N_A=\frac{mg}{2\left(1+\mu_s \tan 20^0\right)} \tag{11}$$

Numéricamente,

$$N_A=\frac{2.3(kg)\times 9.8\left(m/s^2\right)}{2\left(1+0.6\times \tan 20^0\right)} \tag{12}$$

$$N_A=9.25(N) \tag{13}$$

Usando las ecuaciones (3), (5) y (13), podemos obtener el ángulo θ.

De (3), tenemos

$$T\sin\theta=\mu_s N_A \tag{14}$$

De (5), tenemos

$$T\cos\theta=mg-N_A \tag{15}$$

Dividiendo miembro a miembro estas dos ecuaciones entre sí, tenemos:

$$\tan\theta=\frac{\mu_s N_A}{mg-N_A} \tag{16}$$

Numéricamente, usando el resultado obtenido en (13), se tiene,

$$\tan\theta=\frac{0.6\times 9.25(N)}{2.3(kg)\times 9.8(m/s^2)-9.25(N)} \tag{17}$$

$$\tan\theta=0.4176059... \tag{18}$$

$$\theta=22.67^0 \tag{19}$$

La relación (16) se puede reescribir en la forma:

$$\tan\theta=\frac{\mu_s N_A}{mg-N_A}=\frac{\mu_s}{\frac{mg}{N_A}-1} \tag{20}$$

Si reemplazamos $\frac{mg}{N_A}$ dado por la relación (11), nos queda:

$$\tan\theta=\frac{\mu_s}{2\left(1+\mu_s \tan 20^0\right)-1} \tag{21}$$

$$\tan\theta=\frac{\mu_s}{\left(1+2\mu_s \tan 20^0\right)} \tag{22}$$

De la relación (14), obtenemos la tensión T en la cuerda:

$$T = \frac{\mu_s N_A}{\sin\theta} \tag{23}$$

Numéricamente

$$T = \frac{0.6 \times 9.25(N)}{\sin 22.67^0} \tag{24}$$

$$T = 14.4(N) \tag{25}$$

Usando las ecuaciones (14) y (15), también podemos obtener la tensión T, sin usar el ángulo θ recién calculado, sumando los cuadrados de ambos miembros:

$$T = \sqrt{\left(\mu_s N_A\right)^2 + \left(mg - N_A\right)^2} \tag{26}$$

Numéricamente

$$T = \sqrt{\left(0.6 \times 9.25(N)\right)^2 + \left(2.3(kg) \times 9.8(m/s^2) - 9.25(N)\right)^2} \tag{27}$$

$$T = 14.4(N) \tag{28}$$

Solución alternativa, usando el punto A como origen de torques.

Además de las relaciones obtenidas en (3) y (5)

$$\mu_s N_A = T \sin\theta \tag{29}$$

$$N_A + T\cos\theta = mg \tag{30}$$

Consideremos ahora el punto A como origen de torques, eligiendo como positivos los torques que tienden a hacer girar al cuerpo a favor del movimiento de los punteros del reloj.

De la Fig. (6.7.2) se ve claramente que los torques de N_A y f_s son cero porque las fuerzas pasan por el punto A que es el origen del torques,

$$\tau_{N_A} = 0; \quad \tau_{f_s} = 0 \tag{31}$$

Torque del peso mg :

$$\tau_{mg} = mgb_{mg} = mg\left(\frac{L}{2}\cos 20^0\right) \tag{32}$$

Torque de $T_x = T\sin\theta$:

$$\tau_{T_x} = T_x b_{T_x} = T\sin\theta\left(L\sin 20^0\right) \tag{33}$$

Torque de $T_y = T\cos\theta$:

$$\tau_{T_y} = -T_y b_{T_y} = -T\cos\theta\left(L\cos 20^0\right) \tag{34}$$

Aplicando la ecuación de equilibrio rotacional, usando los resultados obtenidos en (31), (32), (33) y (34), se tiene

$$mg\frac{L}{2}\cos 20^0 + TL\sin\theta\sin 20^0 - TL\cos\theta\cos 20^0 = 0 \tag{35}$$

Simplificando, se obtiene la tensión T en función del ángulo θ

$$T = \frac{mg\cos 20^0}{2\left(\cos\theta\cos 20^0 - \sin\theta\sin 20^0\right)} \tag{36}$$

Eliminando N_A de las ecuaciones (29) y (30), también se puede expresar la tensión T en función del ángulo θ

$$T = \frac{\mu_s mg}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta} \tag{37}$$

Igualando las expresiones dadas por (36) y (37), se tiene

$$\frac{mg\cos 20^0}{2\left(\cos\theta\cos 20^0 - \sin\theta\sin 20^0\right)} = \frac{\mu_s mg}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta} \tag{38}$$

Reordenando, obtenemos la siguiente relación,

$$\cos 20^0\left(\sin\theta + \mu_s\cos\theta\right) = 2\mu_s\left(\cos\theta\cos 20^0 - \sin\theta\sin 20^0\right) \tag{39}$$

Dividiendo por $\cos 20^0\cos\theta$, se tiene:

$$\left(\tan\theta + \mu_s\right) = 2\mu_s\left(1 - \tan\theta\tan 20^0\right) \tag{40}$$

Despejando, obtenemos la expresión final de $\tan\theta$:

$$\tan\theta = \frac{\mu_s}{\left(1 + 2\mu_s\tan 20^0\right)} \tag{41}$$

Expresión idéntica a la obtenida en (22), usando el punto B como origen de torques.

CAPÍTULO 7

DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

Ejercicio (7.1) De una polea de masa M y radio R, cuelgan dos masas m_1 y m_2. Hallar la aceleración angular de la polea y las tensiones en la cuerda. Este dispositivo se denomina Máquina de Atwood, y ya fue analizada cuando estudiamos dinámica de una partícula, pero considerando que la polea era ideal, es decir, de momento de inercia despreciable.

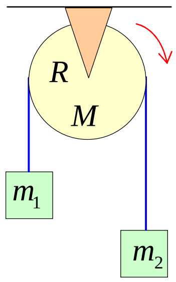

Figura (7.1.1)

Nota: *En este ejercicio, las masas* m_1 *y* m_2 *sólo tienen movimiento de traslación, y la polea de masa* M *sólo tiene movimiento de rotación. En consecuencia, cuando analizamos las masas colgantes usamos la segunda ley de Newton en la forma:*

$$\vec{F}_R = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = m\vec{a} \tag{1}$$

dado que suponemos que la masa no cambia con el tiempo, es decir, $\dfrac{dm}{dt} = 0$.

Cuando analizamos la polea que rota o gira respecto a un eje fijo en el espacio, usamos la relación análoga a la segunda ley de Newton:

$$\tau_R = \sum_{j=1}^{N} \tau_j = I\alpha \tag{2}$$

Donde I *representa el momento de inercia de la polea respecto al eje de giro y* α *es la aceleración angular de la polea.*

Solución.

La Fig. (7.1.2) muestra el diagrama de cuerpo libre de las masas y de la polea. En dicha figura no se ha dibujado el peso Mg de la polea, ni la normal N ejercida por el eje que sujeta a la polea, porque esas fuerzas no producen torque, ya que se aplican justo sobre el eje de giro, y por lo tanto su brazo es cero.

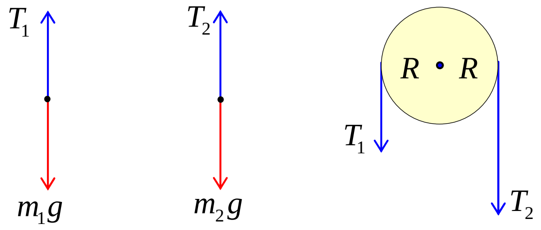

Figura (7.1.2)

Apliquemos la segunda ley de Newton (1) a cada una de las masas m_1 y m_2.

Masa m_1 *:*

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \tag{3}$$

donde a_1 es la aceleración lineal de la masa m_1. Esta aceleración lineal es igual a la aceleración tangencial a_T de un punto del borde de la polea que está conectada a la masa m_1 a través de la cuerda que transmite la tensión T_1. Esto es

$$a_1 = a_T \tag{4}$$

A su vez, la aceleración tangencial a_T está relacionada con la aceleración angular α de toda la polea, a través de la siguiente relación,

$$a_T = \alpha r \tag{5}$$

Donde r es la distancia desde el punto donde está aplicada la acción de la cuerda sobre la polea en forma tangencial al eje de giro. En este caso se cumple que $r = R$, porque la tensión está aplicada en el borde de la polea, por lo tanto, la aceleración tangencial vale

$$a_T = \alpha R \tag{6}$$

Con este resultado, la relación (3), queda,

$$T_1 - m_1 g = m_1 \alpha R \tag{7}$$

Masa m_2 *:*

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \tag{8}$$

Siguiendo el mismo razonamiento anterior, se cumple que,

$$a_2 = a_T = \alpha R \tag{9}$$

debido a que la cuerda actúa sobre la polea a la distancia R del eje de giro. Por lo tanto, (8) queda,

$$m_2 g - T_2 = m_2 \alpha R \tag{10}$$

Polea de masa M *:*

Aplicamos el análogo rotacional de la segunda ley de Newton dado en relación (2).

En primer lugar, calculemos el torque que produce cada tensión. Antes de calcular los torques debemos elegir un origen de torques, y además debemos tener una convención para definir los torques positivos y negativos. El origen de torques, en este caso, es el centro de la polea por donde pasa el eje de giro. El convenio de signos es el siguiente: consideramos positivos los torques de aquellas fuerzas que tienden a hacer girar al cuerpo rígido en la dirección en que el cuerpo está girando, y negativos los torques que tienden a hacer girar al cuerpo en la dirección contraria de su verdadero movimiento. Este convenio es análogo al convenio usado para escribir las componentes de las fuerzas cuando aplicamos la segunda ley de Newton en dinámica lineal.

En la Fig. (7.1.2) se muestra claramente que el brazo de cada tensión vale R, luego,

Torque de T_1

$$\tau_{T_1} = -T_1 b_{T_1} \tag{11}$$

$$\tau_{T_1} = -T_1 R \tag{12}$$

El torque es negativo porque esta fuerza tiende a hacer girar la polea en sentido contrario al cual está girando.

Torque de T_2

$$\tau_{T_2} = +T_2 b_{T_2} \tag{13}$$

$$\tau_{T_2} = T_2 R \tag{14}$$

El torque es positivo porque esta fuerza tiende a hacer girar la polea en la misma dirección de rotación.

La condición dinámica rotacional (2), queda,

$$-T_1 R + T_2 R = I\alpha \tag{15}$$

dividiendo por R esta relación, se tiene,

$$T_2 - T_1 = \frac{I}{R}\alpha \tag{16}$$

En resumen, las relaciones (7), (10) y (16) permiten calcular las incógnitas del problema

$$T_1 - m_1 g = m_1 \alpha R \tag{17}$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 \alpha R \tag{18}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{I}{R}\alpha \tag{19}$$

Sumando estas tres ecuaciones, se eliminan las tensiones y se obtiene la aceleración angular,

$$\alpha = \frac{(m_2 - m_1)}{R\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)} g \tag{20}$$

La aceleración tangencial $a_T = \alpha R$ vale lo mismo que la aceleración lineal a de cada masa, luego, usando (20), escribimos,

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)} g \tag{21}$$

Nótese que si suponemos que la polea es ideal (de masa despreciable), es decir, si suponemos que su momento de inercia tiende a cero, $I \to 0$, entonces se recupera el valor de la aceleración lineal obtenido en el ejercicio (3.2) del Capítulo 3 para la máquina de Atwood,

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g \tag{22}$$

Ejercicio (7.2) El sistema mostrado en la Fig. (7.2.1) está formado por dos bloques de masas $m_1 = 12(kg)$ y $m_2 = 38(kg)$ que se mueven hacia la derecha. Los bloques están unidos por una cuerda ideal que pasa por una polea de masa $M = 146(kg)$ y radio $R = 0.7(m)$. Los bloques se mueven sobre un plano inclinado y el coeficiente de roce en todas las superficies vale $\mu_k = 0.17$.

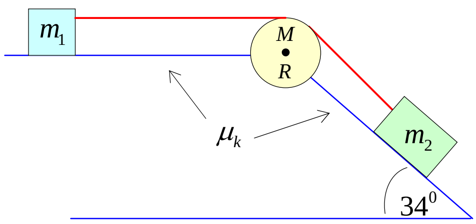

Figura (7.2.1)

Calcular:

a) la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea de radio R y masa M, cuyo momento de Inercia con respecto a su eje de giro vale $I = \frac{MR^2}{2}$,

b) la aceleración lineal de cada masa

c) las tensiones en la cuerda.

Nota: *El sistema está formado por dos cuerpos con movimiento de traslación (las masas* m_1 *y* m_2*) para los cuales se cumple la segunda ley de Newton:* $\vec{F}_R = m\vec{a}$*, y por un cuerpo que rota respecto a un eje fijo (la polea de radio* R*, masa* M *y momento de inercia* I *) para el cual se cumple una relación análoga a la segunda ley de Newton:* $\tau_R = I\alpha$ *, donde* $\tau_i = F_i b_{F_i}$ *es el módulo del torque o momento de la fuerza respecto al eje de giro. Dicho torque es producido por la presencia de la fuerza externa* F_i*, cuyo brazo es* b_{F_i}*. En este caso, el origen de torques es justo el eje de giro de la polea,* I *es el momento de inercia de la polea respecto al eje fijo o eje de giro, y* α *es la aceleración angular de la polea que gira respecto a su eje.*

Solución:

La Fig. (7.2.2) muestra el diagrama de cuerpo libre para cada masa, incluida la polea.

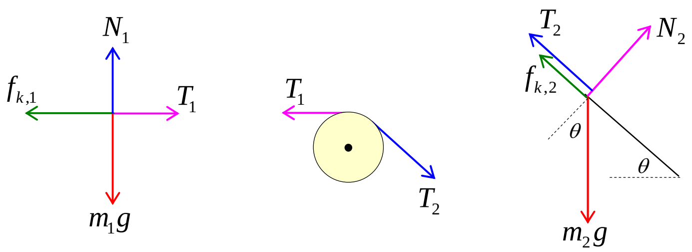

Figura (7.2.2)

Apliquemos ahora la segunda ley de Newton a los bloques que se desplazan. En componentes, se tiene,

Bloque de masa m_1*:*

Eje X :

$$T_1 - \mu_k N_1 = m_1 a \tag{1}$$

Eje Y :

$$N_1 = m_1 g \tag{2}$$

Reemplazando N_1 podemos escribir

$$T_1 - \mu_k m_1 g = m_1 a \tag{3}$$

Bloque de masa m_2*:*

Eje X :

Para esta masa usamos ejes inclinados, de modo que el eje X coincide con el plano inclinado.

$$m_2 g \sin\theta - \mu_k N_2 - T_2 = m_2 a \tag{4}$$

Eje Y :

$$N_2 = m_2 g \cos\theta \tag{5}$$

Reemplazando N_2 en (4), podemos escribir

$$m_2 g \left(\sin\theta - \mu_k \cos\theta\right) - T_2 = m_2 a \tag{6}$$

Polea de masa M que gira respecto a un eje fijo en su centro.

Consideraremos positivos los torques que tienden a hacer rotar a la polea en el sentido de giro de la polea.

Torque de T_1:

$$\tau_1 = -T_1 R \tag{7}$$

donde R es el brazo de la tensión T_1. El torque es negativo porque tiende a hacer girar a la polea en dirección contraria al movimiento real.

Torque de T_2:

$$\tau_2 = T_2 R \tag{8}$$

donde R es el brazo de la tensión T_2. El torque es positivo porque tiende a hacer girar a la polea en dirección al movimiento real.

La ecuación análoga a la segunda ley de Newton para rotación respecto a un eje fijo, viene dada por

$$\tau_1 + \tau_2 = I\alpha \tag{9}$$

Reemplazando los resultados (7) y (8), se tiene,

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha \tag{10}$$

Por otra parte, sabemos que la aceleración tangencial a_T del borde de la polea de radio R está relacionada con la aceleración angular α de la polea, a través de la siguiente ecuación:

$$a_T = \alpha R \tag{11}$$

Pero, la aceleración tangencial a_T de un punto del borde de la polea es igual a la aceleración lineal a de los bloques, es decir, $a_T = a$. Luego, la aceleración angular se puede expresar como,

$$\alpha = \frac{a}{R} \tag{12}$$

El momento de inercia I para la polea con respecto a su eje de giro vale, $I = \frac{MR^2}{2}$. Reemplazando I y α en (10), podemos escribir:

$$\left(T_2 - T_1\right) R = \left(\frac{MR^2}{2}\right)\left(\frac{a}{R}\right) \tag{13}$$

Simplificando, se tiene

$$T_2 - T_1 = \frac{M}{2} a \tag{14}$$

En resumen, las ecuaciones que describen el movimiento del sistema, son:

$$T_1 - \mu_k m_1 g = m_1 a \tag{15}$$

$$m_2 g\left(\sin\theta - \mu_k \cos\theta\right) - T_2 = m_2 a \tag{16}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{M}{2} a \tag{17}$$

Usando los datos $m_1 = 12(kg)$, $m_2 = 38(kg)$, $M = 146(kg)$, $\mu_k = 0.17$ y $\theta = 34^0$, estas ecuaciones quedan,

$$T_1 - 19.992 = 12a \tag{18}$$

$$155.76 - T_2 = 38a \tag{19}$$

$$T_2 - T_1 = 73a \tag{20}$$

Si sumamos todas las ecuaciones entre sí, se eliminan las tensiones (son fuerzas de acción y reacción) y se obtiene la aceleración lineal de cada una de las masas, la cual a su vez es la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea de radio R:

$$a = \frac{135.768}{123}\left(m/s^2\right) \tag{21}$$

$$a = 1.104(m/s^2) \tag{22}$$

Cálculo de las tensiones T_1 y T_2:

De la relación (18) se obtiene de inmediato la tensión T_1, usando la aceleración obtenida en (22),

$$T_1 = 33,25(N) \tag{23}$$

De la relación (19) y del resultado (22), se obtiene T_2:

$$T_2 = 113.81(N) \tag{24}$$

Claramente las tensiones a cada lado de la polea no son iguales, a diferencia del caso de las poleas ideales.

Ejercicio (7.3) El sistema de poleas acopladas mostrado en la Fig. (7.3.1) tiene un momento de inercia $I = 100(kg\,m^2)$ respecto a su eje de giro. Los radios son $R_1 = 0.2(m)$ y $R_2 = 0.7(m)$. Calcular la diferencia de tensiones $\Delta T \equiv T_2 - T_1$ entre ambos lados de la cuerda cuando el bloque de masa $m = 500(kg)$ desciende con aceleración constante $a = 1.8\left(m/s^2\right)$.

Nota: *El sistema está formado por un cuerpo en movimiento de traslación (la masa m) para el cual se cumple la segunda ley de Newton: $\vec{F}_R = m\vec{a}$, y por un cuerpo que rota respecto a un eje fijo (la polea de radios R_1 y R_2 y momento de inercia I) para el cual se cumple una relación análoga a la segunda ley de Newton: $\tau_R = I\alpha$, donde $\tau_i = F_i b_{F_i}$ es el módulo del torque o momento de la fuerza respecto al eje de giro, producido por la presencia de la fuerza externa F_i, cuyo brazo es b_{F_i}. En este caso, el origen de torques es justo el eje de giro de la polea, I es el momento de inercia de la polea respecto al eje fijo o eje de giro, y α es la aceleración angular de la polea que gira respecto a su eje.*

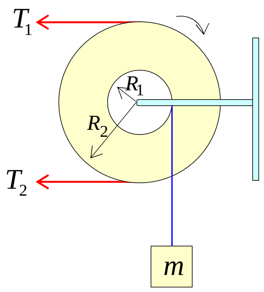

Figura (7.3.1)

Solución:

La Fig. (7.3.2) muestra el diagrama de cuerpo libre para la polea y para el bloque colgante.

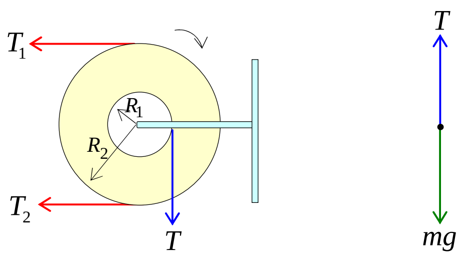

Figura (7.3.2)

Ahora apliquemos la segunda ley de Newton a la masa m que desciende con aceleración a:

$$mg - T = ma \tag{1}$$

Calculemos ahora cada uno de los torques respecto al eje de giro de la polea, considerando positivos los torques que tienden a hacer girar a la polea en la dirección del movimiento de los punteros del reloj, es decir, en la dirección en que desciende la masa m.

Torque de T_1 *:*

$$\tau_{T_1} = -T_1\, b_{T_1} \tag{2}$$

El torque es negativo porque tiende a hacer girar al cuerpo en dirección contraria al movimiento de los punteros del reloj. b_{T_1} es el brazo de la fuerza T_1, es decir, es la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza al eje de giro. En este caso

$$b_{T_1} = R_2 \tag{3}$$

luego,

$$\tau_{T_1} = -T_1\, R_2 \tag{4}$$

Torque de T_2 *:*

$$\tau_{T_2} = +T_2\, b_{T_2} \tag{5}$$

El torque es positivo porque tiende a hacer girar al cuerpo en dirección del movimiento de los punteros del reloj, b_{T_2} es el brazo de la fuerza T_2, es decir, es la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza al eje de giro. En este caso

$$b_{T_2} = R_2 \tag{6}$$

luego,

$$\tau_{T_2} = +T_2\, R_2 \tag{7}$$

Torque de T *:*

$$\tau_T = +T\, b_T \tag{8}$$

El torque es positivo porque tiende a hacer girar al cuerpo en dirección del movimiento de los punteros del reloj, b_T es el brazo de la fuerza T_2, es decir, es la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza al eje de giro. En este caso

$$b_T = R_1 \tag{9}$$

luego,

$$\tau_T = +T\, R_1 \tag{10}$$

Usando los resultados de los torques dados por (2), (7) y (10), podemos escribir la ecuación dinámica rotacional como

$$-T_1\, R_2 + T_2\, R_2 + T\, R_1 = I\alpha \tag{11}$$

reordenando, se tiene,

$$\left(T_2 - T_1\right) R_2 = I\alpha - T\, R_1 \tag{12}$$

Insertando la tensión T obtenida en la relación (1), la relación (12), queda,

$$\left(T_2 - T_1\right) = \frac{I}{R_2}\alpha - m\left(g - a\right)\frac{R_1}{R_2} \tag{13}$$

Por otra parte, sabemos que la aceleración tangencial a_T está relacionada con la aceleración angular α a través de la expresión

$$a_T = \alpha R \tag{14}$$

donde R es la distancia desde el eje de giro al punto del borde donde queremos medir la aceleración tangencial. En nuestro caso, la aceleración tangencial de un punto del borde del resalte de radio R_1 viene dada por

$$a_T = \alpha R_1 \tag{15}$$

pero esta aceleración tangencial a_T es justo la aceleración lineal a de la masa m que cuelga de la cuerda, por lo tanto,

$$a = a_T = \alpha R_1 \tag{16}$$

Despejando α en función de a, se tiene:

$$\alpha = \frac{a}{R_1} \tag{17}$$

Numéricamente, la aceleración angular vale,

$$\alpha = \frac{1.8\left(m/s^2\right)}{0.2(m)} = 9(rad/s^2) \tag{18}$$

Usando los datos $R_1 = 0.2(m)$, $R_2 = 0.7(m)$, $I = 100(kg\,m^2)$, $a = 1.8\left(m/s^2\right)$ y el resultado (18), en la relación (13), se tiene,

$$\left(T_2 - T_1\right) = \frac{100\left(kg\,m^2\right)}{0.7(m)} \times 9(rad/s^2) - 500(kg) \times \left(9.8 - 1.8\right)\left(m/s^2\right) \times \left(\frac{0.2(m)}{0.7(m)}\right) \tag{19}$$

$$\left(T_2 - T_1\right) = 142.86(N) \tag{20}$$

Ejercicio (7.4) Dos poleas cuyos radios son $R_1 = 0.3(m)$ y $R_2 = 1.0(m)$ están pegadas entre sí, formando un bloque que gira alrededor de su eje horizontal. El momento de inercia de las dos poleas pegadas vale $I = 10(kg\ m^2)$. De la polea pequeña de radio R_1 cuelga verticalmente una masa $m_1 = 100(kg)$. De la polea grande de radio R_2 cuelga una masa $m_2 = 20(kg)$ que se apoya en un plano inclinado fijo y con roce despreciable.

Si la polea gira hacia la derecha, de modo que el bloque m_1 desciende, calcular:

a) la aceleración angular α de la polea,

b) las aceleraciones lineales de cada masa,

c) las tensiones en las cuerdas.

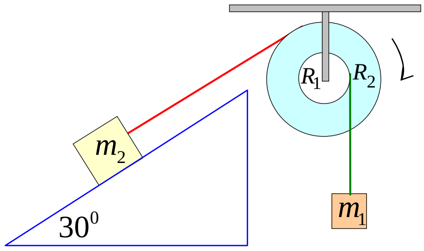

Figura (7.4.1)

Nota: *El sistema está formado por cuerpos con movimiento de traslación (las masas* m_1 *y* m_2*), para los cuales se cumple la segunda ley de Newton:* $\vec{F}_R = m\vec{a}$*, y por cuerpos que rotan respecto a un eje fijo (la polea de radios* R_1 *y* R_2 *y momento de inercia* I*) para los cuales se cumple una relación análoga a la segunda ley de Newton:* $\tau_R = I\alpha$*, donde* $\tau_i = F_i b_{F_i}$ *es el módulo del torque o momento de la fuerza respecto al eje de giro, producido por la presencia de la fuerza externa* F_i*, cuyo brazo es* b_{F_i}*. En este caso, el origen de torques es justo el eje de giro de la polea.* I *es el momento de inercia de la polea respecto al eje fijo o eje de giro, y* α *es la aceleración angular de la polea que gira respecto a su eje.*

Solución:

La Fig. (7.4.2) muestra el diagrama de cuerpo libre de cada bloque y de la polea.

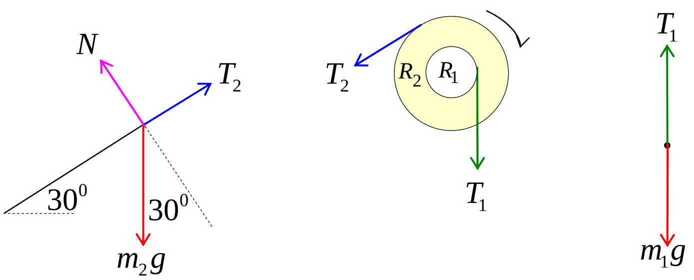

Figura (7.4.2)

Aplicación de la segunda ley de Newton.

Cuerpo de masa m_1 *:*

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \tag{1}$$

Donde a_1 es la aceleración lineal con la cual desciende el cuerpo de masa m_1. Esta aceleración coincide con la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea de radio R_1, y está relacionada con la aceleración angular α de la poleas, en la forma:

$$a_1 = a_{1,\text{tang}} = \alpha R_1 \tag{2}$$

Reemplazando este resultado en la relación (1), tenemos:

$$m_1 g - T_1 = m_1 R_1 \alpha \tag{3}$$

Cuerpo de masa m_2 *:*

$$T_2 - m_2 g \sin 30^\circ = m_2 a_2 \tag{4}$$

Donde a_2 es la aceleración lineal con la cual sube por el plano inclinado el cuerpo de masa m_2**.** Esta aceleración coincide con la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea de radio R_2, y está relacionada con la aceleración angular α de la poleas, en la forma:

$$a_2 = a_{2,\text{tang}} = \alpha R_2 \tag{5}$$

Reemplazando este resultado en la relación (4), tenemos:

$$T_2 - m_2 g \sin 30^\circ = m_2 R_2 \alpha \tag{6}$$

Calculemos ahora los torques que actúan sobre las poleas. En este caso, el origen de torques coincide con el eje de giro de las poleas. Por convención, consideramos positivos los torques que tienden a hacer girar las poleas en el sentido de giro de la polea.

Torque de T_1 *:*

$$\tau_{T_1} = +T_1 b_{T_1} \tag{7}$$

El brazo de la fuerza T_1 viene dado por

$$b_{T_1} = R_1 \tag{8}$$

luego,

$$\tau_{T_1} = +T_1 R_1 \tag{9}$$

Este torque es positivo porque tiende hacer girar al cuerpo en la dirección de nuestra convención positiva.

Torque de T_2 *:*

$$\tau_{T_2} = -T_2 b_{T_2} \tag{10}$$

El brazo de la fuerza T_2 viene dado por

$$b_{T_2} = R_2 \tag{11}$$

luego,

$$\tau_{T_2} = -T_2 R_2 \tag{12}$$

Este torque es negativo porque la tensión tiende a hacer girar al cuerpo en dirección contraria a nuestra convención positiva.

La ecuación dinámica, análoga a la segunda ley de Newton, viene dada por

$$\tau_{T_1} + \tau_{T_2} = I\alpha \tag{13}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (9) y (12), se tiene,

$$T_1 R_1 - T_2 R_2 = I\alpha \tag{14}$$

Reemplazando en esta relación, los valores de las tensiones obtenidos en (3) y (6), se obtiene

$$(m_1 g - m_1 R_1 \alpha) R_1 - \left(m_2 g \sin 30^\circ + m_2 R_2 \alpha\right) R_2 = I\alpha \tag{15}$$

De esta relación despejamos la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{m_1 g R_1 - m_2 g R_2 \sin 30^\circ}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} \tag{16}$$

Numéricamente, usando los datos: $R_1 = 0.3(m)$, $R_2 = 1.0(m)$, $I = 10(kg\ m^2)$, $m_1 = 100(kg)$ y $m_2 = 20(kg)$, se tiene,

$$\alpha = \frac{100(kg)\times 0.3(m) - 20(kg)\times 1(m)\times 0.5}{100(kg)\times 0.3^2\left(m^2\right) + 20(kg)\times 1\left(m^2\right) + 10(kg\ m^2)} 9.8\left(m/s^2\right) \tag{17}$$

$$\alpha = 5.03\left(rad/s^2\right) \tag{18}$$

Usando las relaciones (2) y (5) se obtienen las aceleraciones lineales:

$$a_1 = \alpha R_1 = 5.03\left(rad/s^2\right)\times 0.3(m) = 1.51\left(m/s^2\right) \tag{19}$$

$$a_2 = \alpha R_2 = 5.03\left(rad/s^2\right)\times 1(m) = 5.03\left(m/s^2\right) \tag{20}$$

De las relaciones (3) y (6), se obtienen las tensiones en las cuerdas:

$$T_1 = m_1 (g - a_1) = 100(kg)\times\left(9.8\left(m/s^2\right) - 1.51\left(m/s^2\right)\right) \tag{21}$$

$$T_1 = 829(N) \tag{22}$$

$$T_2 = m_2\left(g \sin 30^\circ + a_2\right) = 20(kg)\left(4.9\left(m/s^2\right) + 5.03\left(m/s^2\right)\right) \tag{23}$$

$$T_2 = 198.6(N) \tag{24}$$

Ejercicio (7.5) Se tiene un sistema de dos poleas acopladas de radios $R_1 = 0.3(m)$ y $R_2 = 0.4(m)$, las cuales rotan respecto a su propio eje fijo. La pequeña polea de radio R_1 tiene masa despreciable, por lo tanto, para la combinación de poleas se considera un único momento de inercia $I_1 = 2.3\left(kg\, m^2\right)$. De la polea de radio R_2 cuelga una masa $m_1 = 1.7(kg)$, y de la polea de radio R_1 sale una cuerda que se conecta con otra polea de radio $R_3 = 0.2(m)$ y momento de inercia $I_2 = 1.2\left(kg\, m^2\right)$, de la cual cuelga una masa $m_2 = 4.6(kg)$, como se muestra en la Fig. (7.5.1). Hallar:

a) las aceleraciones angulares α_1 y α_2,

b) las tensiones en las cuerdas.

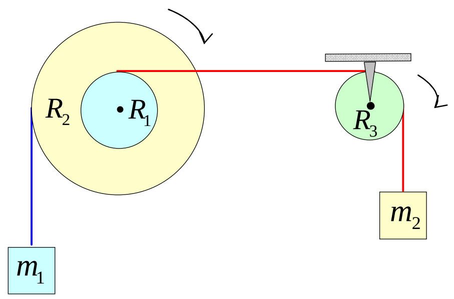

Figura (7.5.1)

Nota: *El sistema está formado por cuerpos con movimiento de traslación (las masas m_1 y m_2), para los cuales se cumple la segunda ley de Newton: $\vec{F}_R = m\vec{a}$, y por cuerpos que rotan respecto a un eje fijo (la polea izquierda de radios R_1 y R_2 y momento de inercia I_1 y la polea derecha de radio R_3 y momento de inercia I_2), para los cuales se cumple una relación análoga a la segunda ley de Newton: $\tau_R = I\alpha$, donde $\tau_i = F_i b_{F_i}$ es el torque o momento de la fuerza respecto al eje de giro, producido por la presencia de la fuerza externa F_i, cuyo brazo es b_{F_i}. En este caso, el origen de torques es justo el eje de giro de cada polea.*

Solución:

a) Hallar las aceleraciones angulares α_1 y α_2

La Fig. (7.5.2) muestra el diagrama de cuerpo libre de cada bloque y de cada polea.

Aplicamos la segunda ley de Newton a las masas m_1 y m_2 que se trasladan:

Masa m_1

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \tag{1}$$

La aceleración lineal a_1 es igual a la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea izquierda de radio R_2 que gira con aceleración angular α_1,

$$a_1 = \alpha_1 R_2 \tag{2}$$

luego, (1) queda,

$$T_1 - m_1 g = m_1 \alpha_1 R_2 \tag{3}$$

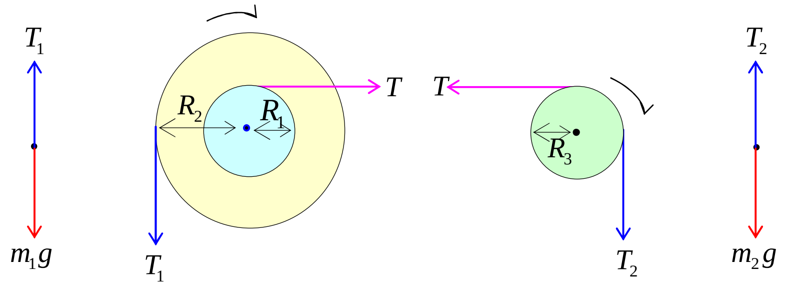

Figura (7.5.2)

Masa m_2

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \tag{4}$$

La aceleración lineal a_2 es igual a la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea derecha de radio R_3 que gira con aceleración angular α_2,

$$a_2 = \alpha_2 R_3 \tag{5}$$

luego, (4) queda,

$$m_2 g - T_2 = m_2 \alpha_2 R_3 \tag{6}$$

Ahora aplicamos el análogo de la segunda ley de Newton para el caso rotacional a las dos poleas. El origen de torques de cada polea es el centro de la polea donde se encuentra el eje de giro. Consideramos positivos los torques que hacen rotar a las poleas en la dirección real de movimiento indicada en la Fig. (8.5.2).

Polea izquierda que gira con aceleración angular α_1

Torque de T_1

$$\tau_{T_1} = -T_1 R_2 \tag{7}$$

Donde el brazo de esta fuerza vale $b_{T_1} = R_2$. Este torque es negativo porque tiende a hacer girar la polea izquierda en sentido contrario al sentido positivo.

Torque de T

$$\tau_T = TR_1 \tag{8}$$

Donde el brazo de esta fuerza vale $b_T = R_1$. Este torque es positivo porque tiende a hacer girar la polea izquierda en el sentido elegido como positivo.

La ecuación análoga a la segunda ley de Newton queda

$$TR_1 - T_1R_2 = I_1\alpha_1 \tag{9}$$

donde I_1 es el momento de inercia de la polea izquierda que gira con aceleración angular α_1

Polea derecha que gira con aceleración angular α_2.

Torque de T_2

$$\tau_{T_2} = T_2R_3 \tag{10}$$

Donde el brazo de esta fuerza vale $b_{T_2} = R_3$. Este torque es positivo porque tiende a hacer girar la polea derecha en el sentido positivo.

Torque de T

$$\tau_T = -TR_3 \tag{11}$$

Donde el brazo de esta fuerza vale $b_T = R_3$. Este torque es negativo porque tiende a hacer girar la polea derecha en el sentido contrario al sentido elegido como positivo.

La ecuación análoga a la segunda ley de Newton queda

$$T_2R_3 - TR_3 = I_2\alpha_2 \tag{12}$$

donde I_2 es el momento de inercia de la polea derecha que gira con aceleración angular α_2

Además se cumple la igualdad de las aceleraciones tangenciales de todos los puntos de la cuerda que lleva la tensión T:

$$\alpha_1R_1 = \alpha_2R_3 \tag{13}$$

Nótese que la aceleración angular α_1 es la misma para las dos poleas acopladas de radios R_1 y R_2, pero que sus aceleraciones tangenciales son distintas según el radio. Reemplazando $\alpha_2R_3 = \alpha_1R_1$ en (6) se tiene

$$m_2g - T_2 = m_2R_1\alpha_1 \tag{14}$$

Reemplazando α_2 dado por (13) en la relación (12), nos queda

$$T_2 - T = \frac{I_2 R_1}{R_3^2}\alpha_1 \tag{15}$$

Ahora tenemos las cuatro relaciones (1), (9), (14) y (15): en función de α_1:

$$T_1 - m_1 g = m_1 R_2 \alpha_1 \tag{16}$$

$$T\frac{R_1}{R_2} - T_1 = \frac{I_1}{R_2}\alpha_1 \tag{17}$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 R_1 \alpha_1 \tag{18}$$

$$T_2 - T = \frac{I_2 R_1}{R_3^2}\alpha_1 \tag{19}$$

Si sumamos las ecuaciones (16) y (17), se elimina T_1 y se obtiene T en función de α_1:

$$T = \frac{R_2}{R_1}\left[m_1 g + \left(m_1 R_2 + \frac{I_1}{R_2} \right)\alpha_1 \right] \tag{20}$$

Si sumamos las ecuaciones (18) y(19), se elimina T_2 y se obtiene T en función de α_1:

$$T = m_2 g - \left(m_2 R_1 + \frac{I_2 R_1}{R_3^2} \right)\alpha_1 \tag{21}$$

Igualando (20) y (21), se tiene

$$\alpha_1 = \frac{\left(m_2 R_1 - m_1 R_2 \right) g}{\left[m_1 R_2^2 + m_2 R_1^2 + I_1 + \frac{I_2 R_1^2}{R_3^2} \right]} \tag{22}$$

Numéricamente, tenemos

$$\alpha_1 = \frac{\left(4.6(kg)\times 0.3(m) - 1.7(kg)\times 0.4(m)\right)\times 9.8\left(m/s^2\right)}{\left[1.7(kg)\times 0.4^2(m^2) + 4.6(kg)\times 0.3^2(m^2) + 2.3\left(kg\, m^2\right) + \frac{1.2\left(kg\, m^2\right)\times 0.3^2(m^2)}{0.2^2(m^2)} \right]} \tag{23}$$

$$\alpha_1 = 1.21\left(\frac{rad}{s^2}\right) \tag{24}$$

Usando la relación (13), obtenemos α_2

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{R_1}{R_3} = 1.21\left(rad/s^2\right)\times\frac{0.3(m)}{0.2(m)} \tag{25}$$

$$\alpha_2 = 1.81\left(\frac{rad}{s^2}\right) \tag{26}$$

b) Hallar las tensiones en las cuerdas

De la relación (16) se tiene

$$T_1 = m_1\left(g + R_2\alpha_1\right) \tag{27}$$

$$T_1 = 1.7(kg)\times\left(9.8\left(m/s^2\right) + 0.4(m)\times 1.21\left(\frac{rad}{s^2}\right)\right) \tag{28}$$

$$T_1 = 17.5\left(N\right) \tag{29}$$

De la relación (18) se tiene

$$T_2 = m_2\left(g - R_1\alpha_1\right) \tag{30}$$

$$T_2 = 4.6(kg)\times\left(9.8\left(m/s^2\right) - 0.3(m)\times 1.21\left(\frac{rad}{s^2}\right)\right) \tag{31}$$

$$T_2 = 43.4(N) \tag{32}$$

De la relación (19) se tiene

$$T = T_2 - \frac{I_2 R_1}{R_3^2}\alpha_1 \tag{33}$$

$$T = 43.4(N) - \frac{1.2\left(kg\,m^2\right)\times 0.3(m)}{0.2^2(m^2)}\times 1.21\left(\frac{rad}{s^2}\right) \tag{34}$$

$$T = 32.6(N) \tag{35}$$

Ejercicio (7.6) Se tiene un sistema por dos poleas que rotan respecto de ejes fijos y un bloque de masa $m = 1.4(kg)$ que se desplaza sobre un plano inclinado mientras se desenrolla la cuerda de la polea izquierda de radio r. La polea de radio $r = 0.15(m)$ tiene un momento de inercia $I_1 = 0.5\left(kg\,m^2\right)$ y la polea de radio $R = 0.23(m)$ tiene un momento de inercia $I_2 = 0.9\left(kg\,m^2\right)$. Sobre la polea de radio r actúa una fuerza de roce constante $f_r = 1.6(N)$ como se muestra en la Fig. (7.6.1).

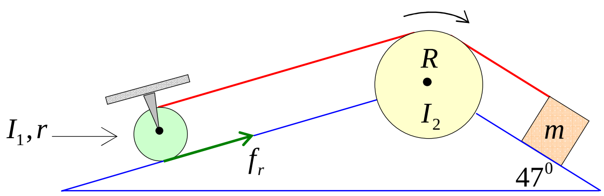

Figura (7.6.1)

El coeficiente de roce dinámico entre la masa m y el plano inclinado $\theta = 47^0$ es $\mu_k = 0.27$.
Hallar:

a) la aceleración lineal a de la masa m,

b) las tensiones en la cuerda.

Nota: *El sistema está formado por cuerpos con movimiento de traslación (la masas m), para los cuales se cumple la segunda ley de Newton: $\vec{F}_R = m\vec{a}$, y por cuerpos que rotan respecto a un eje fijo (la polea izquierda de radio R_1 y momento de inercia I_1 y la polea derecha de radio R_2 y momento de inercia I_2), para los cuales se cumple una relación análoga a la segunda ley de Newton: $\tau_R = I\alpha$, donde $\tau_i = F_i b_{F_i}$ es el torque o momento de la fuerza respecto al eje de giro, producido por la presencia de la fuerza externa F_i, cuyo brazo es b_{F_i}. En este caso, el origen de torques es justo el eje de giro de cada polea.*

Solución:

La Fig. (7.6.2) muestra el diagrama de cuerpo libre de las dos poleas y de la masa.

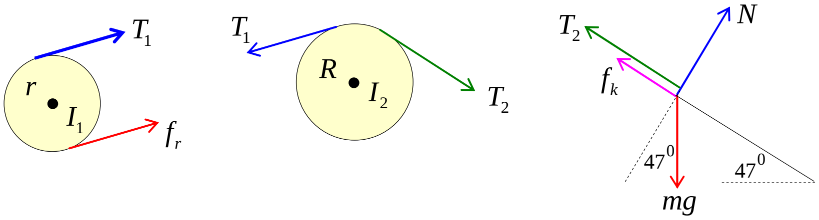

Figura (7.6.2)

Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m, considerando ejes inclinados, se tiene:

Eje X:

$$m_1 g \sin 47^0 - T_2 - f_k = ma \tag{1}$$

Eje Y:

$$N = mg\cos 47^0 \tag{2}$$

Pero como $f_k = \mu_k N$, usando (2), la relación (1) queda:

$$mg\left(\sin 47^0 - \mu_k \cos 47^0\right) - T_2 = ma \tag{3}$$

Dinámica rotacional.

Consideremos como positivos los torques en la dirección en que rotan las poleas, en este caso, en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj

Polea de momento de inercia I_1

Los torques vienen dados por:

$$\tau_{T_1} = T_1 r \tag{4}$$

$$\tau_{f_r} = -f_r r \tag{5}$$

Aplicando la segunda ley de Newton rotacional, se tiene:

$$\left(T_1 - f_r\right) r = I_1 \alpha_1 \tag{6}$$

Polea de momento de inercia I_2

Los torques vienen dados por:

$$\tau_{T_1} = -T_1 R \tag{7}$$

$$\tau_{T_2} = T_2 R \tag{8}$$

Aplicando la segunda ley de Newton rotacional, se tiene:

$$\left(T_2 - T_1\right) R = I_2 \alpha_2 \tag{9}$$

Además se cumple que las aceleraciones tangenciales de un punto del borde de las poleas que están conectadas por la cuerda, son iguales, es decir,

$$a_{1,\text{tang}} = a_{2,\text{tang}} = a \tag{10}$$

$$\alpha_1 r = \alpha_2 R = a \tag{11}$$

Usando estas relaciones entre aceleraciones para eliminar α_1 y α_2 de las ecuaciones (6) y (9), tenemos

$$T_1 - f_r = \frac{I_1}{r^2} a \tag{12}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{I_2}{R^2} a \tag{13}$$

Estas relaciones, más la relación (3), dada por,

$$mg\left(\sin 47^0 - \mu_k \cos 47^0\right) - T_2 = ma \tag{14}$$

permiten calcular la aceleración y las tensiones en la cuerda. Sumando miembro a miembro las ecuaciones (12), (13) y (14), se obtiene la aceleración lineal

$$a = \frac{mg\left(\sin 47^0 - \mu_k \cos 47^0\right) - f_r}{\left(m + \frac{I_1}{r^2} + \frac{I_2}{R^2}\right)} \tag{15}$$

Numéricamente

$$a = \frac{1.4(kg)\times 9.8\left(m/s^2\right)\left(\sin 47^0 - 0.27\times\cos 47^0\right) - 1.6(N)}{\left(1.4(kg) + \frac{0.5\left(kg\,m^2\right)}{\left(0.15(m)\right)^2} + \frac{0.9\left(kg\,m^2\right)}{\left(0.23(m)\right)^2}\right)} \tag{16}$$

$$a = 0.145\left(m/s^2\right) \tag{17}$$

De la ecuación (12) obtenemos T_1

$$T_1 = f_r + \frac{I_1}{r^2}a \tag{18}$$

Numéricamente,

$$T_1 = 1.6(N) + \frac{0.5\left(kg\,m^2\right)}{\left(0.15(m)\right)^2}\times 0.145\left(m/s^2\right) \tag{19}$$

$$T_1 = 4.82(N) \tag{20}$$

De la ecuación (13) obtenemos T_2

$$T_2 = T_1 + \frac{I_2}{R^2}a \tag{21}$$

Numéricamente,

$$T_2 = 4.82(N) + \frac{0.9\left(kg\,m^2\right)}{\left(0.23(m)\right)^2}\times 0.145(m/s^2) \tag{22}$$

$$T_2 = 7.29(N) \tag{23}$$

De la ecuación (14) también podemos calcular T_2:

$$T_2 = mg\left(\sin 47^0 - \mu_k \cos 47^0\right) - ma \tag{24}$$

Numéricamente,

$$T_2 = 1.4(kg)\times 9.8\left(m/s^2\right)\times\left(\sin 47^0 - 0.27\times\cos 47^0\right) - 1.4(kg)\times 0.145\left(m/s^2\right) \tag{25}$$

$$T_2 = 7.29(N) \tag{26}$$

Resultado idéntico al obtenido en relación (23).

CAPÍTULO 8
OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Ejercicio (8.1) En un sistema masa-resorte, una partícula de masa $m=1(kg)$ oscila con movimiento armónico simple (M.A.S.) de amplitud $0.3(m)$ y frecuencia $15(Hz)$, cuya constante de fase inicial vale $\phi_0=27^0$. Considere que la posición de la partícula en función del tiempo viene dada por: $x=A\sin(\omega t+\phi_0)$.

a) Hallar los valores máximos de la velocidad $\dot{x}$ y la aceleración $\ddot{x}$.

b) Hallar la velocidad y aceleración en $x_1=0$ y en $x_2=\pm A$.

c) Calcule la posición, velocidad y aceleración en $t_1=0(s)$ y en $t_2=\frac{1}{60}(s)$.

d) Describa el movimiento en cada uno de los casos del punto c); es decir, diga dónde se encuentra la partícula, para dónde se mueve, y si acelera o retarda.

e) Calcule la energía total E_T del sistema.

f) Calcular la energía cinética y la energía potencial en cada uno de los casos del punto c).

g) Calcular las energías cinética y potencial para los casos en que $x_1=-\frac{A}{2}$ y $x_2=\frac{2}{3}A$.

h) Encuentre todos los tiempos t en los cuales la energía cinética E_c del sistema toma el valor $E_c=\frac{3}{5}E_T$.

Nota: *Una partícula de masa m realiza un movimiento armónico simple (M.A.S.) cuando su posición en función del tiempo viene dada por una relación del tipo:*

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t+\phi_0) \\ x(t) &= A\cos(\omega t+\phi_0) \end{aligned} \qquad (1)$$

Existen dos constantes: A es la amplitud máxima del movimiento y ϕ_0 es la constante de fase inicial. El movimiento armónico simple es acotado en el intervalo $x\in[-A,A]$ y ω es la frecuencia angular de oscilación. El movimiento M.A.S. es periódico de periodo

$$T=\frac{2\pi}{\omega}(s) \qquad (2)$$

La frecuencia de oscilación $\nu = \frac{1}{T}$ *se mide en* $(Hertz) = (Hz) = \left(\frac{1}{s}\right)$ *y viene dada por la relación*

$$\omega = 2\pi\nu \left(\frac{rad}{s}\right) \tag{3}$$

Solución: El argumento de la función armónica seno o coseno, se denomina fase $\phi(t) = \left(\omega t + \phi_0\right)$ de la oscilación y se mide en radianes. La fase de la función armónica seno o coseno, debe ser un número real, por lo tanto, debemos transformar la constante de fase inicial $\phi_0 = 27^0$ a radianes:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \left(\frac{27^0}{180^0}\right)\pi\left(rad\right)\\ \phi_0 &= 0.15\pi\left(rad\right)\\ \phi_0 &= 0.47124\left(rad\right)\end{aligned} \tag{4}$$

Usando los datos del problema, la frecuencia angular, viene dada por

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi\nu = 2\pi 15(Hz)\\ \omega &= 30\pi(Hz)\end{aligned} \tag{5}$$

Por lo tanto, el oscilador armónico viene dado por la siguiente relación:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi_0) \tag{6}$$

$$x(t) = 0.3(m)\sin(30\pi t + 0.15\pi) \tag{7}$$

a) Hallar los valores máximos de la velocidad $\dot{x}$ *y la aceleración* $\ddot{x}$.

La velocidad y la aceleración en el M.A.S. vienen dados derivando la relación general (6) respecto del tiempo.

Velocidad:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi_0) \tag{8}$$

En módulo, el valor máximo de la velocidad v_m viene dado por:

$$v_m = A\omega \tag{9}$$

Numéricamente

$$v_m = 0.3(m)\times 30\pi\left(\frac{rad}{s}\right) = 28.3\left(\frac{m}{s}\right) \tag{10}$$

Aceleración:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin\left(\omega t + \phi_0\right) \tag{11}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \tag{12}$$

En módulo, el valor máximo de la aceleración a_m viene dado por:

$$a_m = A\omega^2 \tag{13}$$

Numéricamente

$$a_m = 0.3(m) \times 900\pi^2 \left(\frac{rad}{s^2}\right) = 2664.8\left(\frac{m}{s^2}\right) \tag{14}$$

b) Hallar la velocidad y aceleración en $x_1 = 0$ *y en* $x_2 = \pm A$.

A partir de los resultados generales obtenidos en las relaciones (8) y (11), se puede obtener la velocidad y la aceleración en cualquier punto.

Si $x_1 = 0$, entonces se puede obtener el valor de la fase $\phi(t) = (\omega t + \phi_0)$ para ese caso, esto es,

$$x = 0 = A\sin(\omega t + \phi_0) \rightarrow \sin(\omega t + \phi_0) = 0 \tag{15}$$

De esta relación se obtienen los valores permitidos de la fase:

$$\phi(t) = (\omega t + \phi_0) = 0, \pi, ... \tag{16}$$

Usando estos valores de la fase en la relación (8), se obtiene la velocidad

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{x}(t) = A\omega\cos(0) = A\omega \\ v(t) &= \dot{x}(t) = A\omega\cos(\pi) = -A\omega \end{aligned} \tag{17}$$

Usando estos valores de la fase en la relación (11), se obtiene la aceleración

$$\begin{aligned} a(t) &= \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(0) = 0 \\ a(t) &= \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Estos resultados implican que al pasar por el punto de equilibrio $x = 0$, la velocidad del oscilador armónico simple siempre es la velocidad máxima $v = v_m$, independientemente si se mueve hacia la derecha o hacia la izquierda y la aceleración es siempre cero $a = 0$.

Si $x_2 = \pm A$, la fase $\phi(t)$ viene dada por:

$$x = \pm A = A\sin(\omega t + \phi_0) \rightarrow \sin(\omega t + \phi_0) = \pm 1 \tag{19}$$

En este caso, los valores permitidos de la fase son:

$$\phi(t) = (\omega t + \phi_0) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ... \tag{20}$$

Con estos valores de la fase, la velocidad y la aceleración en los extremos $x_2 = \pm A$ del movimiento, vienen dadas por:

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \tag{21}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 \tag{22}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -A\omega^2 \tag{23}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = A\omega^2 \tag{24}$$

Es decir, al pasar por los puntos extremos del movimiento $x_2 = \pm A$, la velocidad del oscilador armónico simple siempre es cero $v = 0$ y la aceleración es la máxima $a = a_m$.

c) Calcule la posición, velocidad y aceleración en $t_1 = 0(s)$ *y en* $t_2 = \frac{1}{60}(s)$.

Para obtener los resultados pedidos, basta reemplazar los valores de los parámetros en las relaciones (8) y (11).

Para $t_1 = 0(s)$, se tiene

$$\begin{aligned} x(t=0) &= 0.3(m) \times \sin\left(30\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \times 0(s) + 0.15\pi\right) \\ v(t=0) = \dot{x}(t=0) &= 0.3(m) \times 30\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \times \cos\left(30\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \times 0(s) + 0.15\pi\right) \\ a(t=0) = \ddot{x}(t=0) &= -0.3(m) \times 900\pi^2\left(\frac{rad}{s^2}\right) \times \sin\left(30\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \times 0(s) + 0.15\pi\right) \end{aligned} \tag{25}$$

Numéricamente,

$$\begin{aligned} x(t=0) &= 0.1362(m) \\ v(t=0) = \dot{x}(t=0) &= 25.19\left(\frac{m}{s}\right) \\ a(t=0) = \ddot{x}(t=0) &= -1209.8\left(\frac{rad}{s^2}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

Para $t_2 = \frac{1}{60}(s)$, se tiene

$$x(t = \frac{1}{60}) = 0.3(m) \times \sin\left(30\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \times \frac{1}{60}(s) + 0.15\pi\right) \tag{27}$$

$$v(t = \frac{1}{60}) = \dot{x}(t = \frac{1}{60}) = 0.3(m) \times 30\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \times \cos\left(30\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \times \frac{1}{60}(s) + 0.15\pi\right) \tag{28}$$

$$a(t=\frac{1}{60})=\ddot{x}(t=\frac{1}{60})=-0.3(m)\times 900\pi^2\left(\frac{rad}{s^2}\right)\times\sin\left(30\pi\left(\frac{rad}{s}\right)\times\frac{1}{60}(s)+0.15\pi\right) \qquad (29)$$

Numéricamente,

$$\begin{aligned} x(t=\frac{1}{60})&=0.2673(m)\\ v(t=\frac{1}{60})=\dot{x}(t=\frac{1}{60})&=-12.84\left(\frac{m}{s}\right)\\ a(t=\frac{1}{60})=\ddot{x}(t=\frac{1}{60})&=-2374.4\left(\frac{m}{s^2}\right)\end{aligned} \qquad (30)$$

d) Describa el movimiento en cada uno de los casos del punto c); es decir, diga dónde se encuentra la partícula, para dónde se mueve, y si acelera o retarda.

Para $t_1=0(s)$, la partícula se encuentra a la derecha del punto de equilibrio $x=0(m)$ ya que su posición $x(t=0)=0.1362(m)$ es positiva, y está viajando hacia el extremo derecho porque su velocidad instantánea es positiva. La partícula va retardando para llegar a detenerse en $x=0.3(m)$, ya que la velocidad y la aceleración tienen distinto signo.

Para $t_2=\frac{1}{60}(s)$, la partícula se encuentra a la derecha del punto de equilibrio $x=0(m)$ ya que su posición $x(t=\frac{1}{60})=0.2673(m)$ es positiva, y está viajando hacia el origen, dado que su velocidad instantánea es negativa. La partícula va acelerando ya que la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo.

e) Calcule la energía total E_T del sistema.

La energía total E_T viene dada por la suma de la energía cinética E_c, más la energía potencial E_p, esto es,

$$E_T=E_c+E_p \qquad (31)$$

donde la energía cinética viene dada por la relación:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) \qquad (32)$$

y la energía potencial viene dada por la relación:

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2(t) \qquad (33)$$

Pero, para un sistema genérico tipo masa resorte, la masa m y la constante de resorte k están relacionadas con la frecuencia angular ω, a través de la siguiente expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{34}$$

Reemplazando la expresión de la posición dada por (1), y la expresión de la velocidad dada por (8), la energía cinética y potencial, vienen dadas por:

$$E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) \tag{35}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) \tag{36}$$

Pero, según (34), $k = m\omega^2$, luego (36) queda:

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) \tag{37}$$

Usando (35) y (37), la energía total E_T, dada por (31), se puede expresar como

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) \tag{38}$$

Simplificando, obtenemos una expresión general,

$$E_T = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \tag{39}$$

Numéricamente,

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{2} 1.0(kg) \times 900\pi^2 \left(\frac{rad}{s^2}\right) \times 0.3^2 (m^2) \\ E_T &= 399.7(J) \end{aligned} \tag{40}$$

f) Calcular la energía cinética y la energía potencial en cada uno de los casos del punto c).

Para $t_1 = 0(s)$.

Usando los datos obtenidos en (26) y las expresiones para las energías cinética y potencial, se tiene

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) = E_c = \frac{1}{2} 1.0(kg) \times (25.19)^2 (\frac{m^2}{s^2}) \tag{41}$$

$$E_c = 317.3(J) \tag{42}$$

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2(t) = \frac{1}{2} 1.0(kg) \times 900\pi^2 \left(\frac{rad}{s^2}\right) \times (0.1362)^2 (m^2) \tag{43}$$

$$E_p = 82.4(J) \tag{44}$$

La energía total vale,

$$E_T = E_c + E_p = 317.3(J) + 82.4(J) = 399.7(J) \tag{45}$$

resultado idéntico al obtenido en (40).

Para $t_2 = \frac{1}{60}(s)$.

Usando los datos obtenidos en (30) y las expresiones para las energías cinética y potencial, se tiene

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = E_c = \frac{1}{2}1.0(kg)\times\left(-12.836\right)^2(\frac{m^2}{s^2}) \tag{46}$$

$$E_c = 82.4(J) \tag{47}$$

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(t) = \frac{1}{2}1.0(kg)\times 900\pi^2\left(\frac{rad}{s^2}\right)\times\left(0.2673\right)^2(m^2) \tag{48}$$

$$E_p = 317.3(J) \tag{49}$$

La energía total vale,

$$E_T = E_c + E_p = 82.4(J) + 317.3(J) = 399.7(J) \tag{50}$$

resultado idéntico al obtenido en (40).

g) Calcular las energías cinética y potencial para los casos en que $x_1 = -\frac{A}{2}$ *y* $x_2 = \frac{2}{3}A$.

Usando los valores de la posición dónde se quiere calcular las energías, se pueden obtener los distintos valores de fase $\phi(t) = \left(\omega t + \phi_0\right)$ en los cuales se cumple la condición dada.

Caso $x_1 = -\frac{A}{2}$*:*

Reemplazando $x_1 = -\frac{A}{2}$ en la relación (1), se tiene,

$$-\frac{A}{2} = x(t) = A\sin(\omega t + \phi_0) \tag{51}$$

Simplificando, se obtiene la siguiente relación:

$$\sin(\omega t + \phi_0) = -\frac{1}{2} \tag{52}$$

Existen infinitos valores de la fase $\phi(t) = \left(\omega t + \phi_0\right)$ que cumplen con esta relación, pero los dos primeros valores son suficientes para dar cuenta de todos los comportamientos diferentes, es decir,

$$\phi(t) = (\omega t + \phi_0) = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \ldots \tag{53}$$

Usando las expresiones para la posición y la velocidad dadas por (1) y (8), y los valores de las fases obtenidos en (53), se tiene:

$$\begin{aligned} x_{1,a} &= 0.3(\mathrm{m})\sin(\frac{7\pi}{6}) = -0.15(\mathrm{m}) \\ x_{1,b} &= 0.3(\mathrm{m})\sin(\frac{11\pi}{6}) = -0.15(\mathrm{m}) \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,a} &= 0.3(\mathrm{m})\times 30\pi\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)\times\cos(\frac{7\pi}{6}) = -24.48\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \\ \dot{x}_{1,b} &= 0.3(\mathrm{m})\times 30\pi\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)\times\cos(\frac{11\pi}{6}) = 24.48\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \end{aligned} \tag{55}$$

La energía cinética en los dos valores distintos de la fase, vale lo mismo, porque la velocidad $\dot{x}(t)$ interviene al cuadrado, luego

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = 0.5\times 1(kg)\times\left(\pm 24.5\right)^2\left(\frac{m^2}{s^2}\right) = 299.8(J) \tag{56}$$

La energía potencial en los dos valores distintos de la fase, vale lo mismo, porque la posición $x(t)$ interviene al cuadrado, luego

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{57}$$

$$E_p = 0.5\times 1(kg)\times\left(30\pi\right)^2\left(\frac{rad}{s^2}\right)\times\left(-0.15\right)^2\left(m^2\right) = 99.93(J) \tag{58}$$

Nótese que siempre se cumple que la energía total E_T es una constante:

$$E_T = E_c + E_p = 299.8(J) + 99.93(J) = 399.7(J) \tag{59}$$

tal como se obtuvo en (40).

Caso $x_2 = \frac{2A}{3}$*:*

Reemplazando $x_2 = \frac{2A}{3}$ en la relación (1), se tiene,

$$\frac{2A}{3} = x(t) = A\sin(\omega t + \phi_0) \tag{60}$$

Simplificando, se obtiene la siguiente relación:

$$\sin(\omega t + \phi_0) = \frac{2}{3} \tag{61}$$

Es decir, la fase viene dada por:

$$\phi(t) = (\omega t + \phi_0) = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \tag{62}$$

De la expresión (61) obtenemos el valor del coseno:

$$\cos(\omega t + \phi_0) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \tag{63}$$

Igual que antes, como sólo interesan los valores de la posición y la velocidad al cuadrado, no necesitamos usar los distintos valores de la fase $\phi(t) = \left(\omega t + \phi_0\right)$.

Usando las expresiones para la posición y la velocidad dadas por (1) y (8), y los valores del seno y el coseno (61) y (63), se tiene:

$$\mathrm{x}_2 = 0.3(\mathrm{m}) \times \sin(\phi(\mathrm{t})) = 0.3(\mathrm{m}) \times \left(\frac{2}{3}\right) = 0.2(\mathrm{m}) \tag{64}$$

$$\dot{\mathrm{x}}_2 = 0.3(\mathrm{m}) \times 30\pi\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right) \times \cos(\phi(\mathrm{t})) \tag{65}$$

$$\dot{\mathrm{x}}_2 = 0.3(\mathrm{m}) \times 30\pi\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 21.07\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \tag{66}$$

La energía cinética vale

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = 0.5 \times 1(kg) \times \left(\pm 21.07\right)^2\left(\frac{m^2}{s^2}\right) = 222.066(J) \tag{67}$$

La energía potencial vale

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{68}$$

$$E_p = 0.5 \times 1(kg) \times \left(30\pi\right)^2\left(\frac{rad}{s^2}\right) \times \left(0.2\right)^2\left(\frac{m^2}{s^2}\right) = 177.65(J) \tag{69}$$

Nótese que siempre se cumple que la energía total E_T es una constante:

$$E_T = E_c + E_p = 222.066(J) + 177.65(J) = 399.7(J) \tag{70}$$

h) *Encuentre todos los tiempos t en los cuales la energía cinética E_c del sistema toma el valor* $E_c = \frac{3}{5}E_T$.

De acuerdo a relación (39), la energía total del oscilador viene dada por

$$E_T = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{71}$$

Reemplazando esta expresión y la expresión de la energía cinética dada por (35), en la condición $E_c = \frac{3}{5}E_T$, se tiene

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \left(\frac{3}{5}\right)\frac{1}{2}kA^2 \tag{72}$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) = \left(\frac{3}{5}\right)\frac{1}{2}kA^2 \tag{73}$$

Pero sabemos que $k = m\omega^2$, luego, esta expresión queda:

$$\cos^2(\omega t + \phi_0) = \left(\frac{3}{5}\right) = 0.6 \tag{74}$$

luego

$$\cos(\omega t + \phi_0) = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm\sqrt{0.6} \tag{75}$$

Usando la función arco coseno, se obtiene el valor de las fases para los dos signos posibles:

$$\phi_1 = (\omega t + \phi_0) = 0.684719 \tag{76}$$

$$\phi_2 = (\omega t + \phi_0) = 2.456873 \tag{77}$$

Pero dado que se necesita calcular los tiempos t_m en que se cumple una cierta condición sobre la energía cinética, y dado que la energía cinética depende del coseno al cuadrado, entonces, el periodo de la función $\cos^2(\omega t + \phi_0)$ es $\mathrm{m}\pi$, donde $\mathrm{m} = 0,1,2,....$, luego, la condición sobre las fases de la relación (76) y (77), viene dada por:

$$\phi_1 = (\omega t + \phi_0) = 0.684719 + m\pi \tag{78}$$

$$\phi_2 = (\omega t + \phi_0) = 2.456873 + m\pi \tag{79}$$

Despejando los tiempos de cada ecuación, se tiene:

$$t_{1,m} = \frac{0.684719 - \phi_0}{\omega} + \frac{m\pi}{\omega} \tag{80}$$

$$t_{2,m} = \frac{2.456873 - \phi_0}{\omega} + \frac{m\pi}{\omega} \tag{81}$$

Usando los valores conocidos de $\phi_0 = 0.47124(rad)$ y $\omega = 30\pi\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$, se obtiene finalmente,

$$t_{1,m} = 0.002265 + \frac{m}{30} \tag{82}$$

$$t_{2,m} = 0.021068 + \frac{m}{30} \tag{83}$$

Ejercicio (8.2) En un oscilador armónico simple, determine la amplitud A del movimiento y la constante de fase inicial ϕ_0, a partir de los valores iniciales de la posición $x(0) = x_0$ y de la velocidad $\dot{x}(0) = v_0$. Considere que $x = A\cos(\omega t + \phi_0)$.

Nota: *Se denomina condiciones iniciales a los valores de la posición* $x(t)$ *y de la velocidad* $\dot{x}(t)$ *evaluados en* $t = 0(s)$ *A partir de las condiciones iniciales se debe obtener.* A *y* ϕ_0.

Solución:

La posición $x(t)$ y la velocidad $\dot{x}(t)$ de este oscilador armónico vienen dados por

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi_0) \tag{2}$$

Aplicando las condiciones iniciales dadas en el problema: $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, escribimos

$$x(0) = x_0 = A\cos(\phi_0) \tag{3}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A\omega\sin(\phi_0) \tag{4}$$

Dividiendo la relación (4) por la relación (3), se obtiene la tangente de la constante de fase:

$$\tan\phi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0} \tag{5}$$

Luego, la constante de fase ϕ_0 se expresa en función de las condiciones iniciales usando la función arco tangente:

$$\phi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \tag{6}$$

Usando de nuevo las relaciones (3) y (4), en la forma:

$$A\cos(\phi_0) = x_0 \tag{7}$$

$$A\sin(\phi_0) = -\frac{v_0}{\omega} \tag{8}$$

Elevando al cuadrado cada uno de los términos y sumando, se obtiene la amplitud A del oscilador armónico en función de las condiciones iniciales.

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \tag{9}$$

Ejercicio (8.3) Un movimiento armónico simple de periodo $T = 0.5(s)$ tiene una aceleración máxima $a_{\text{m}} = \ddot{x}_{\max} = 170\left(\dfrac{cm}{s^2}\right)$. En $t_1 = 0.19(s)$ se midió la posición de la partícula y se obtuvo $x(t_1) = 0.47(cm)$ y se observó que su velocidad era negativa, es decir, $v = \dot{x} < 0$. Escriba la ecuación del movimiento armónico simple, es decir, obtenga ω, A y ϕ_0. Considere que $x = A\sin(\omega t + \phi_0)$.

Nota: *A partir de los datos iniciales se deben determinar los datos que faltan para definir completamente al oscilador armónico.*

Solución:

Si conocemos el periodo $T = 0.5(s)$, entonces conocemos la frecuencia a través de la relación $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Numéricamente, se obtiene,

$$\omega = \frac{2\pi}{0.5(s)} = 4\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \tag{1}$$

Por otra parte, usando el valor de la aceleración máxima $a_{\text{m}} = \ddot{x}_{\max} = 170\left(\dfrac{cm}{s^2}\right)$, y usando la aceleración máxima dada por la relación (13), $a_m = A\omega^2$, se tiene

$$a_m = A\omega^2 = 170\left(\frac{cm}{s^2}\right) \tag{2}$$

Expresión de la cual obtenemos la amplitud del movimiento armónico simple, usando el valor conocido de la frecuencia angular dado por (1)

$$A = \frac{170}{\omega^2}(cm) = \frac{170}{(4\pi)^2}(cm) = 1.076538(cm) \tag{3}$$

Además sabemos que en $t_1 = 0.19(s)$ se midió la posición de la partícula y se obtuvo $x(t_1) = 0.47(cm)$ y se observó que su velocidad era negativa, es decir, $v = \dot{x} < 0$. Usando $x = A\sin(\omega t + \phi_0)$, esta condición se escribe:

$$x(t_1 = 0.19(s)) = 0.47(cm) = A\sin(\omega \times 0.19(s) + \phi_0) \tag{4}$$

Reemplazando los valores conocidos de A y ω, tenemos,

$$0.47(cm) = 1.076538(cm) \times \sin(4\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \times 0.19(s) + \phi_0) \tag{5}$$

Simplificando

$$\sin(2.38761+\phi_0)=0.436585 \tag{6}$$

Usando la función arco seno, se tiene

$$(\phi_0+2.38761)=\arcsin(0.436585) \tag{7}$$

$$(\phi_{01}+2.38761)=0.451799 \tag{8}$$

Pero dado que $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, podemos obtener otro valor de ϕ_0

$$(\phi_{02}+2.38761)=\pi-\arcsin(0.436585) \tag{9}$$

$$(\phi_{02}+2.38761)=2.689793 \tag{10}$$

Usando (8) y (10), obtenemos ϕ_{01} y ϕ_{02}:

$$\phi_{01}=0.451799-2.38761=-1.935811 \tag{11}$$

$$\phi_{02}=2.689793-2.38761=0.302183 \tag{12}$$

El valor correcto de la constante de fase es aquel que logra que la velocidad en $t_1=0.19(s)$ sea negativa, es decir, que se cumpla que $v=\dot{x}<0$. Sabemos que $x=A\sin(\omega t+\phi_0)$, luego la velocidad viene dada por

$$v=\dot{x}=A\omega\cos(\omega t+\phi_0) \tag{13}$$

Necesitamos saber cuál de los valores (8) o (10) es el que hace que el coseno sea negativo. Dichos valores fueron obtenidos para el tiempo $t_1=0.19(s)$. Reemplacemos dichos valores en (13).

Para ϕ_{01}:

$$\cos(0.451799)=0.899663 \tag{14}$$

Para ϕ_{02}:

$$\cos(2.689793)=-0.899663 \tag{15}$$

En consecuencia, el coseno se hace negativo para $\phi_{02}=0.302183$, pues en ese caso la velocidad v dada por (13) se hace negativa en $t_1=0.19(s)$.

Por lo tanto, la ecuación del movimiento armónico simple para este problema específico viene dada por:

$$x(t)=1.076538(cm)\sin(4\pi t+0.302183) \tag{16}$$

Ejercicio (8.4) Una partícula suspendida de un resorte vertical realiza un movimiento vibratorio armónico con una amplitud $A=10\left(cm\right)$ y una frecuencia $\nu=0.5\left(Hz\right)$. El tiempo se empieza a contar en el instante en que la partícula está a $5\left(cm\right)$ de su posición de equilibrio y bajando. Considere que $y=A\sin(\omega t+\phi_0)$.

a) Obtenga su ecuación de movimiento

b) ¿En qué instantes la partícula alcanza la máxima elongación negativa?

c) ¿En qué instantes la partícula pasa por la posición inicial?

Nota: *A partir de los datos dados en el enunciado y de la condición inicial, se deben calcular los datos faltantes para escribir la ecuación de movimiento.*

Solución:

Dado que $\omega=2\pi\nu$, conocemos la frecuencia angular, numéricamente, se tiene $\omega=2\pi\times 0.5\left(Hz\right)=\pi\left(\frac{rad}{s}\right)$. Entonces, $y=A\sin(\omega t+\phi_0)$, queda:

$$y(t)=10(cm)\sin(\pi t+\phi_0) \tag{1}$$

a) Obtenga su ecuación de movimiento

Para obtener la ecuación de movimiento debemos obtener la constante de fase inicial ϕ_0. Sabemos que en $t=0\left(s\right)$ la partícula está a $5\left(cm\right)$ de su posición de equilibrio y bajando, es decir, $y(0)=+5\left(cm\right)$. Reemplazando en la relación (1), se tiene,

$$5\left(cm\right)=10(cm)\sin(\pi\times 0\left(s\right)+\phi_0) \tag{2}$$

$$\sin(\phi_0)=0.5 \tag{3}$$

Usando la función arco seno, los primeros valores posibles de la fase inicial son:

$$\phi_{01}=\frac{\pi}{6} \tag{4}$$

$$\phi_{02}=\frac{5\pi}{6} \tag{5}$$

El correcto ϕ_0 es aquel que produce una velocidad negativa en ese instante, $v=\dot{y}<0$, es decir, se debe cumplir que

$$v=\dot{y}=10(cm)\times\pi\left(\frac{rad}{s}\right)\times\cos(\pi\times 0\left(s\right)+\phi_0)<0 \tag{6}$$

$$v=\dot{y}=10\pi\cos(\phi_0)<0 \tag{7}$$

Dado que sabemos que el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante, nos damos cuenta de inmediato que el correcto ϕ_0 es $\phi_{02} = \frac{5\pi}{6}$. Luego, la ecuación de movimiento viene dada por

$$y(t) = 10(cm)\sin(\pi t + \frac{5\pi}{6}) \tag{8}$$

b) ¿En qué instantes la partícula alcanza la máxima elongación negativa?

La máxima elongación negativa se produce en $y = -10(cm)$. Reemplazando este valor en la ecuación de movimiento (8), tenemos:

$$-10(cm) = 10(cm)\sin(\pi t + \frac{5\pi}{6}) \tag{9}$$

Obtenemos

$$\sin(\pi t + \frac{5\pi}{6}) = -1 \tag{10}$$

Usando la función arco seno, se tiene

$$(\pi t + \frac{5\pi}{6}) = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi, \quad m = 0,1,2.... \tag{11}$$

Despejando, obtenemos los tiempos en que la partícula pasa por el punto más bajo de su movimiento:

$$t = \frac{3}{2} - \frac{5}{6} + 2m, \quad m = 0,1,2.... \tag{12}$$

$$t = \frac{2}{3} + 2m, \quad m = 0,1,2.... \tag{13}$$

c) ¿En qué instantes la partícula pasa por la posición inicial?

La posición inicial es $y(0) = +5(cm)$. Reemplazando en la ecuación de movimiento (8), se tiene

$$5(cm) = 10(cm)\sin(\pi t + \frac{5\pi}{6}) \tag{14}$$

Simplificando

$$\sin(\pi t + \frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2} \tag{15}$$

Usando el arco seno, obtenemos

$$(\pi t + \frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + 2m\pi, \quad m = 0,1,2.... \tag{16}$$

y

$$(\pi t+\frac{5\pi}{6})=\frac{5\pi}{6}+2n\pi,\quad n=0,1,2.... \tag{17}$$

Estos resultados corresponden a los casos en que la partícula pasa por el punto inicial tanto de subida como de bajada, es decir, cuando su velocidad es positiva y negativa, respectivamente. Finalmente, se tiene,

$$\begin{aligned} t_s &= -\frac{2}{3}+2m,\quad m=0,1,2....\\ t_b &= 2n,\quad n=0,1,2.... \end{aligned} \tag{18}$$

Ejercicio (8.5) Un oscilador armónico simple viene descrito por la ecuación $x=A\sin(\omega t+\phi_0)$.

a) A partir de x y $\dot{x}$, elimine la fase $\phi(t)=\left(\omega t+\phi_0\right)$ y obtenga una relación analítica entre la posición x y la velocidad $\dot{x}$. Demuestre que la curva resultante es una elipse y grafique la relación obtenida en un sistema de ejes ortogonales $(x,\dot{x})$, llamado espacio de fases.

b) Demuestre que esta curva trayectoria en el espacio de fases $(x,\dot{x})$ corresponde a los puntos donde la energía total $E_T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$ es constante de valor $E_T=\frac{1}{2}kA^2$.

Nota: *La ecuación de la elipse con ejes coincidentes con los ejes coordenados x e y, viene dada por la relación:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1 \tag{1}$$

donde a y b son los semi-ejes mayores y menores, respectivamente.

Solución:

a) A partir de x y $\dot{x}$, elimine la fase $\phi(t)=\left(\omega t+\phi_0\right)$ y obtenga una relación analítica entre la posición x y la velocidad $\dot{x}$. Demuestre que la curva resultante es una elipse y grafique la relación obtenida en un sistema de ejes ortogonales $(x,\dot{x})$, llamado espacio de fases.

La posición viene dada por

$$x=A\sin(\omega t+\phi_0) \tag{2}$$

$$\sin(\omega t+\phi_0)=\frac{x}{A} \tag{3}$$

y la velocidad viene dada por

$$\dot{x}=A\omega\cos(\omega t+\phi_0) \tag{4}$$

$$\cos(\omega t + \phi_0) = \frac{\dot{x}}{A\omega} \tag{5}$$

Elevando al cuadrado los términos dados por (3) y (5) y sumándolos, se tiene

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1 \tag{6}$$

De acuerdo a la nota inicial, se ve que esta relación representa a una elipse en el plano formado por los ejes x y $\dot{x}$, tal como lo muestra la Fig. (8.5.1).

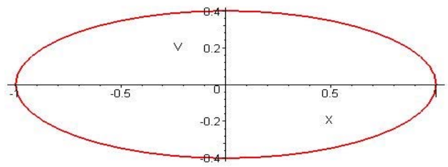

Figura (8.5.1)

b) Demuestre que esta curva trayectoria en el espacio de fases $(x, \dot{x})$ *corresponde a los puntos donde la energía total* $E_T = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ *es constante de valor* $E_T = \frac{1}{2}kA^2$.

La ecuación de la energía se escribe:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{7}$$

Dividiendo por $E_T = \frac{1}{2}kA^2$, se tiene

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{m\dot{x}^2}{kA^2} = 1 \tag{8}$$

Pero $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Reemplazando en (8), tenemos

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1 \tag{9}$$

En consecuencia, la elipse es la curva que representa a la conservación de la energía mecánica total.

Ejercicio (8.6) Hallar las ecuaciones del movimiento armónico simple (MAS) para cada uno de los sistemas físicos que se muestran a continuación. En cada caso obtenga la frecuencia angular ω en función de los parámetros físicos del sistema. En los casos en que corresponda, indique claramente cuáles son sus aproximaciones para lograr el movimiento lineal o armónico.

a) Péndulo simple de masa m y largo l.

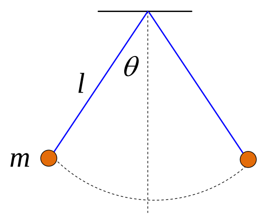

Figura (8.6.1)

Nota: *Hay que hacer análisis de fuerzas sobre el péndulo para determinar la ecuación de movimiento.*

Solución:

La Fig. (8.6.2) muestra las fuerzas que actúan sobre la partícula en un punto cualquiera de su trayectoria circunferencial: su peso $m\vec{g}$ y la tensión en la cuerda T.

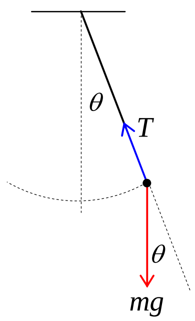

Figura (8.6.2)

Utilicemos un sistema de ejes, tal que el eje Y coincida con la dirección de la tensión, y que el eje X sea tangente a la trayectoria circunferencial (y también perpendicular a Y). La segunda ley de Newton aplicada a la componente tangencial de las fuerzas, se escribe:

$$ma_t = -mg\sin\theta \tag{1}$$

El desplazamiento tangencial ds sobre el arco de la circunferencia de radio l viene dado por

$$ds = ld\theta \tag{2}$$

Por lo tanto la aceleración tangencial viene dada por $a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}$. Usando la relación (2), la aceleración queda:

$$a_t = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3}$$

Reemplazando en la relación (1), obtenemos,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{4}$$

Simplificando, se tiene la ecuación diferencial del péndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0 \tag{5}$$

Esta ecuación diferencial es no lineal, y *no corresponde a un oscilador armónico simple*. Para lograr que esta ecuación se comporte como oscilador armónico simple, debemos hacer la suposición de $\theta(t)$ es muy pequeño, de modo de que sea válida la aproximación:

$$\sin\theta \approx \theta \tag{6}$$

donde $\theta(t)$ se expresa en radianes (rad). Esta aproximación numéricamente es válida para valores de $|\theta(t)| \leq 0.10472(rad)$ (donde $6^0 = 0.10472(rad)$). Si imponemos dicha aproximación en la ecuación diferencial del péndulo dada por la ecuación (5), la ecuación diferencial se simplifica y se transforma en la ecuación diferencial del oscilador armónico simple

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \tag{7}$$

donde hemos escrito la frecuencia angular ω de oscilación del péndulo simple, como

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{8}$$

b) *Péndulo físico de momento de inercia I y centro de masas (c. m.) a una distancia l del origen de torques o eje de giro O (ver Fig. (8.6.3))*

Nota: *En este caso, lo importante para producir el movimiento de rotación en torno a un eje fijo (el punto O) no son las fuerzas $\vec{F}_j$ por sí solas, sino que los torques τ_j producidos por las fuerzas $\vec{F}_j$. La ecuación dinámica viene dada por: $\tau = I\alpha$, donde $\tau = Fb$ es el módulo del torque de la fuerza F y b es el brazo de acción de la fuerza.*

La aceleración angular α *viene dada por* $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

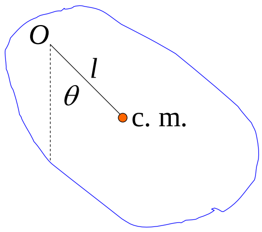

Figura (8.6.3)

Solución:

La Fig. (8.6.4) muestra la fuerza peso $m\vec{g}$ que actúa sobre el centro de masas (c.m.) del péndulo físico. El torque producido por el peso es el causante del movimiento de rotación en torno al eje fijo O. En dicha figura también se muestra el brazo b_{mg} de la fuerza peso. El brazo se define como la distancia perpendicular bajada desde la línea de acción de la fuerza (el peso $m\vec{g}$ en este caso), hasta el origen de torques O, luego,

$$b_{mg} = l\sin\theta \tag{9}$$

El torque del peso lo consideramos negativo porque tiende a hacer girar al cuerpo rígido siempre hacia el estado de equilibrio:

$$\tau_{mg} = -mg\,b_{mg} = -mg\,l\sin\theta \tag{10}$$

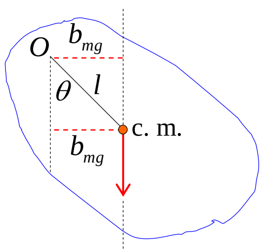

Figura (8.6.4)

Ahora aplicamos la relación análoga a la segunda ley de Newton obtenida en dinámica rotacional: $\tau = I\alpha$, donde τ representa el torque resultante debido a la suma de todos los torques individuales producidos por cada una de las fuerzas externas que actúan sobre el péndulo físico, y α es la aceleración angular $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Para este caso específico existe una única fuerza que produce torque, luego, se tiene,

$$\tau = -mgl\sin\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{11}$$

Reordenando, tenemos,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgl}{I}\right)\sin\theta = 0 \tag{12}$$

Esta es la ecuación diferencial que describe las oscilaciones del péndulo físico. Tal como vimos en el caso del péndulo simple, esta ecuación diferencial es no lineal, por lo tanto, *el péndulo físico general no realiza oscilaciones armónicas simples*. Para obtener oscilaciones armónicas simples debemos hacer una aproximación sobre los posibles valores permitidos para el ángulo $\theta(t)$. La aproximación es la misma que vimos antes y corresponde al caso en que $\sin\theta \approx \theta(rad)$. Esta aproximación se mantiene válida para $|\theta(t)| \le 0.10472(rad)$. Aplicando esta aproximación a la relación (12), obtenemos la ecuación diferencial del oscilador armónico simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgl}{I}\right)\theta = 0 \tag{13}$$

Si definimos la frecuencia angular ω para este caso en la forma

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \tag{14}$$

La ecuación del péndulo físico en la aproximación armónica simple queda:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \tag{15}$$

c) Circuito en serie de inductancia L y capacitancia C (circuito LC).

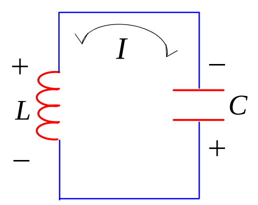

Figura (8.6.5)

Nota: *La ecuación dinámica se obtiene a partir de las leyes de Kirchhoff, sumando las diferencias de potencial en el circuito cerrado. A través de la inductancia* L*, la diferencia de potencial viene dada por* $\Delta V = L\dfrac{dI}{dt}$*, donde* $I = \dfrac{dq}{dt}$ *es la corriente eléctrica y* q *es la carga eléctrica. A través del condensador* C*, la diferencia de potencial viene dada por* $\Delta V = \dfrac{q}{C}$.

Solución:

Aplicando la ley de Kirchhoff sobre la suma de las diferencias de potencial a través de un circuito cerrado, se tiene

$$-L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \tag{16}$$

Pero, $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$, reemplazando en (16), nos queda

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC}\right)q = 0 \tag{17}$$

Si definimos la frecuencia angular ω de oscilación de la carga en el condensador en la forma

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{18}$$

La ecuación de la oscilación armónica simple que expresa el valor de la carga en función del tiempo viene dada por

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \tag{19}$$

d) Sistema formado por una masa m *atada a dos cuerdas de largo* l *que ejercen una tensión constante* T *sobre la masa.*

Suponga que el roce es despreciable, que la masa de la cuerda es despreciable y que la gravedad es nula. Estudie el movimiento armónico a lo largo del eje Y para valores muy pequeños de la coordenada y.

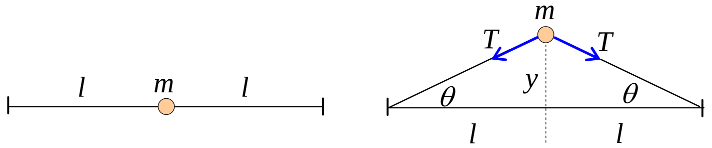

Figura (8.6.6)

Nota: *A partir de un diagrama de cuerpo libre para la masa m, se obtiene la ecuación de movimiento.*

Solución:

La Fig. (8.6.7) es un diagrama de cuerpo libre y muestra que las tensiones T en la cuerda a cada lado de la masa m, son las únicas fuerzas que intervienen en el movimiento oscilatorio vertical.

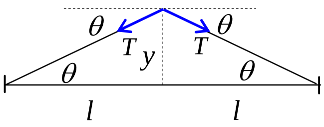

Figura (8.6.7)

Dado que no hay gravedad, sólo existe la fuerza debida a las tensiones, por lo tanto, la segunda ley de Newton a lo largo del eje Y, queda,

$$m\ddot{y} = -2T\sin\theta \tag{20}$$

Si trabajamos en la aproximación de ángulos pequeños, entonces se cumple $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$. Según la Fig. (8.6.7), se tiene que

$$\tan\theta = \frac{y}{l} \tag{21}$$

Reemplazando este resultado en la relación (20), obtenemos

$$\ddot{y} + \left(\frac{2T}{ml}\right) y = 0 \tag{22}$$

En este caso, la frecuencia angular ω viene dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{2T}{ml}} \tag{23}$$

Finalmente, la ecuación diferencial del movimiento en la aproximación de ángulos pequeños o aproximación armónica, viene dada por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{24}$$

Esta ecuación, y todas las ecuaciones diferenciales de movimiento que hemos encontrado en este ejercicio presentan la misma forma genérica y corresponden al movimiento de un oscilador armónico simple. La solución de la ecuación diferencial viene dada por cualquiera de las siguientes relaciones generales, donde hemos usado la variable $x(t)$ en forma genérica.

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t + \phi_0) \\ x(t) &= A\cos(\omega t + \phi_0) \\ x(t) &= A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \\ x(t) &= Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{25}$$

Nótese que en cada caso se tienen dos contantes indeterminadas: A y ϕ_0, o A y B, las cuales tomarán valores específicos, según las condiciones iniciales que se impongan sobre el oscilador armónico.

Ejercicio (8.7) Calcular la frecuencia angular de oscilación de un cuerpo de masa m, cuando es colgado de dos resortes de constantes k_1 y k_2, respectivamente. Considere los siguientes casos, tal como se muestra en la Fig. (8.7.1):

a) conexión en serie.

b) conexión en paralelo.

c) masa entre resortes.

d) Obtenga los resultados anteriores cuando los dos resortes tienen la misma constante k.

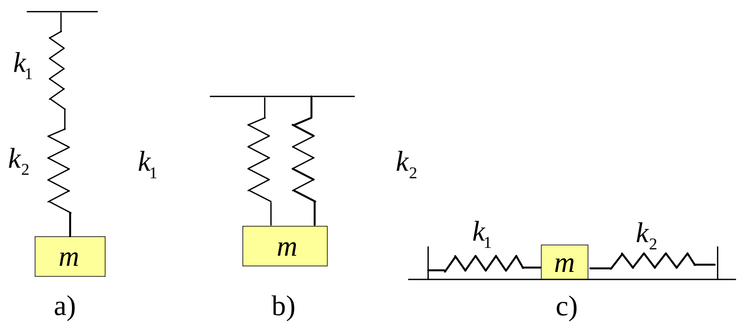

Figura (8.7.1)

Solución:

a) conexión en serie.

Nota: *En este caso podemos suponer que entre los resortes en serie existe una masa M (ver Fig. (8.7.2)). De ese modo se trataría de un problema con dos masas conectadas a los resortes. Después escribimos las ecuaciones de movimiento de cada masa y finalmente hacemos cero la masa M.*

En este caso, y tal como se indica en la Nota, vamos a considerar un bloque de masa M inserto entre los dos resortes. Apliquemos la segunda ley de Newton para cada bloque.

Bloque de masa M :

Al desplazar este bloque hacia abajo en y_1, el resorte de constante elástica k_1 se estira y ejerce una fuerza hacia arriba dada por $F_1 = -k_1 y_1$, porque se opone al desplazamiento y_1. A su vez, el resorte de constante k_2 se estira y ejerce una fuerza hacia debajo de valor $F_2 = k_2\left(y_2 - y_1\right)$ que va en la dirección del desplazamiento y_1.

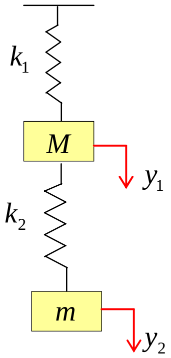

Figura (8.7.2)

La segunda ley de Newton para el bloque de masa M , queda:

$$M\,\ddot{y}_1 = -k_1 y_1 + k_2\left(y_2 - y_1\right) \tag{1}$$

Bloque de masa m :

Al desplazar este bloque hacia abajo en y_2, el resorte de constante k_2 ejerce una fuerza hacia arriba de valor $F_2 = -k_2\left(y_2 - y_1\right)$ que se opone al desplazamiento y_2. La segunda ley de Newton para este bloque queda:

$$m\,\ddot{y}_2 = -k_2\left(y_2 - y_1\right) \tag{2}$$

En resumen, las ecuaciones de movimiento que hemos obtenido son:

$$M\,\ddot{y}_1 = -k_1 y_1 + k_2\left(y_2 - y_1\right) \tag{3}$$

$$m\,\ddot{y}_2 = -k_2\left(y_2 - y_1\right) \tag{4}$$

Si ahora eliminamos el bloque de masa M haciendo $M = 0$, la relación (3), queda:

$$k_1 y_1 = k_2\left(y_2 - y_1\right) \tag{5}$$

Despejando, obtenemos el desplazamiento y_1 en función de y_2:

$$y_1 = \left(\frac{k_2}{k_1 + k_2} \right) y_2 \tag{6}$$

Reemplazando este resultado en la relación (4), tenemos,

$$m\,\ddot{y}_2 = -k_2 \left(1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2} \right) y_2 \tag{7}$$

La ecuación diferencial que resulta es

$$\ddot{y}_2 + \left(\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)} \right) y_2 = 0 \tag{8}$$

Por lo tanto, la frecuencia angular del movimiento armónico simple resultante, viene dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} \tag{9}$$

b) conexión en paralelo.

La Fig. (8.7.3) muestra la conexión en paralelo.

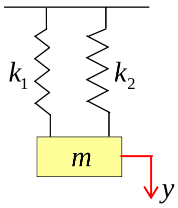

Figura (8.7.3)

Cuando el bloque de masa m se desplaza y hacia abajo, aparece una fuerza restauradora elástica hacia arriba dada por la suma de las fuerzas elásticas ejercidas por cada resorte, esto es,

$$F_R = -k_1 y - k_2 y \tag{10}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene

$$m\ddot{y} = -(k_1 + k_2)\, y \tag{11}$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m} \right) y = 0 \tag{12}$$

Por lo tanto, la frecuencia angular viene dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \tag{13}$$

c) masa entre resortes.

La Fig. (8.7.4) muestra la situación en estudio.

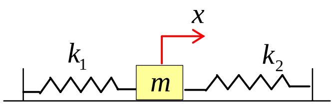

Figura (8.7.4)

Cuando la masa m se desplaza hacia la derecha en x, aparecen dos fuerzas elásticas actuando sobre ella. El resorte de constante k_1 produce una fuerza hacia la izquierda dada por $F_1 = -k_1 x$ y el resorte de constante k_2 produce también una fuerza hacia la izquierda dada por $F_2 = -k_2 x$. Con estas fuerzas, la segunda ley de Newton queda:

$$m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x \tag{14}$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)x = 0 \tag{15}$$

Por lo tanto, la frecuencia angular del movimiento armónico, viene dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \tag{16}$$

d) Obtenga los resultados anteriores cuando los dos resortes tienen la misma constante k *.*

Si $k_1 = k_2 = k$, los resultados anteriores quedan:

Caso a) conexión en serie:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}} \tag{17}$$

Caso b) conexión en paralelo:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{18}$$

Caso c) masa entre resortes:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{19}$$

Ejercicio (8.8) Sobre un plano inclinado de roce despreciable, se coloca un bloque de masa m conectado a un resorte de constante k y largo natural l_0.

a) Hallar el estiramiento x_0 más allá de su largo natural l_0, cuando el sistema queda en equilibrio sobre el plano inclinado

b) A partir de la posición de equilibrio, se desplaza el bloque hacia abajo y se suelta. Hallar la ecuación del movimiento armónico simple y la frecuencia ω.

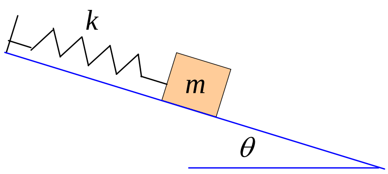

Figura (8.8.1)

Solución:

a) Hallar el estiramiento x_0 *más allá de su largo natural* l_0*, cuando el sistema queda en equilibrio sobre el plano inclinado.*

Nota: *Cuando el bloque se deja caer lentamente, el resorte se estira una distancia* x_0*, hasta que queda en equilibrio (y en reposo) debido a que se iguala la componente de la fuerza peso* $mg\sin\theta$ *con la fuerza restauradora elástica del resorte* kx_0*. La Fig. (8.8.2) muestra claramente dicha situación. Nótese que en este ejercicio, el roce se considera despreciable.*

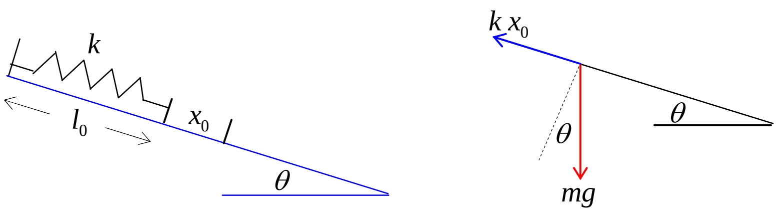

Figura (8.8.2)

Aplicando la condición de equilibrio $\sum \vec{F}_j = \vec{0}$, a lo largo del eje X que coincide con el plano inclinado, se tiene,

$$mg\sin\theta - kx_0 = 0 \tag{1}$$

De esta relación obtenemos el estiramiento x_0 del resorte:

$$x_0 = \frac{mg\sin\theta}{k} \tag{2}$$

b) A partir de la posición de equilibrio, se desplaza el bloque hacia abajo y se suelta. Hallar la ecuación del movimiento armónico simple y la frecuencia ω.

La Fig. (8.8.3) muestra la situación dinámica, correspondiente al caso en que el bloque de masa m oscila en torno a la posición de equilibrio ubicada en $(l_0 + x_0)$.

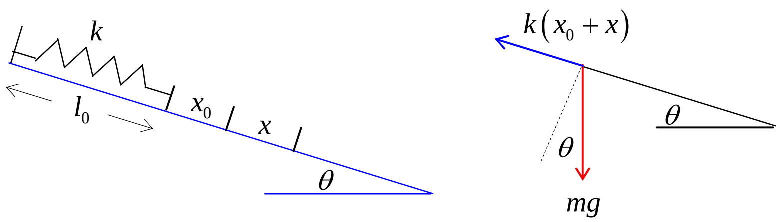

Figura (8.8.3)

La posición $x(t)$ del bloque en función del tiempo, se obtiene después de aplicar la segunda ley de Newton al bloque de masa m, sometido a la componente de la fuerza peso $mg\sin\theta$ y a la fuerza elástica $k(x_0 + x)$.

$$m\ddot{x} = -k(x_0 + x) + mg\sin\theta \tag{3}$$

Nótese que la componente de la fuerza peso $mg\sin\theta$, no depende de la posición del bloque $x(t)$ mientras oscila, y claramente corresponde a una fuerza externa constante.

Para eliminar el estiramiento x_0 de la relación dinámica (3), reemplacemos el valor obtenido en la relación (2) en la relación (3), obtenemos

$$m\ddot{x} = -k\left(\frac{mg\sin\theta}{k} + x\right) + mg\sin\theta \tag{4}$$

Simplificando, se obtiene la ecuación del oscilador armónico simple:

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \tag{5}$$

donde la frecuencia angular viene dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$