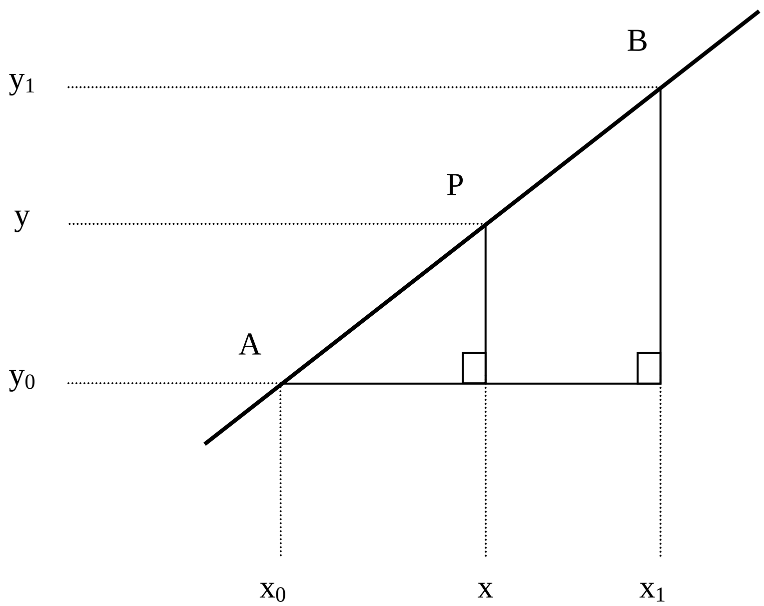
Unidad II : Geometría Analítica en el Plano

Línea recta

De la Geometría Euclidiana se sabe que dos puntos determinan una línea recta. Se intentará hallar una ecuación que permita describir este lugar geométrico, a partir de dos puntos (x_0, y_0) *y* (x_1, y_1)



A partir de la figura tenemos: (se han omitido los ejes coordenados.)

- $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$; ecuación que puede recibir el nombre de ecuación punto-punto.

Y si definimos como pendiente la razón del incremento en el eje y al incremento en el eje x , con $m=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ la ecuación anterior se puede re-escribir como: $y-y_0=m(x-x_0)$

y que se podría denominar punto-pendiente :

Finalmente, si se trabaja un poco la forma en que esta última está escrita:
$y-y_0 = m(x-x_0) \rightarrow y = m\cdot x - m\cdot x_0 + y_0$ y llamamos intercepto en el eje y a $b = -m\cdot x_0 + y_0$, la ecuación anterior se puede re-escribir como $y = mx + b$, que puede recibir el nombre de ecuación pendiente-intercepto.

Hay otras formas en que se puede escribir la ecuación de una línea recta y son las siguientes (en coordenadas rectangulares):

- Ecuación general : Ax+By+C = 0
- Ecuación intercepto-intercepto: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$; ecuación que da el intercepto “p” en el eje x y el intercepto “q” en el eje y.

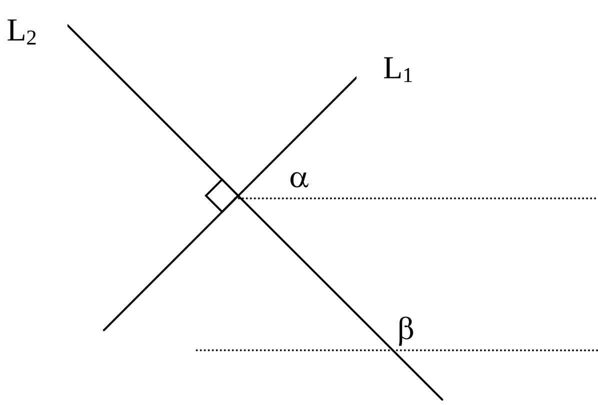
Distancia entre dos puntos: Sean $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ los puntos. Aprovechando la figura anterior, y ocupando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo, se tiene

$d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ (estudiar y trabajar con programa alusivo)

¿Bajo qué condiciones dos líneas rectas son paralelas?

Se puede visualizar claramente haciendo un dibujo que dos líneas rectas son paralelas si se cumple que sus pendientes son iguales y recíprocamente si las pendientes de dos líneas rectas son iguales entonces son paralelas

¿Bajo qué condiciones dos líneas rectas son perpendiculares?



Como la tangente del ángulo que forma una línea recta con una línea horizontal(o bien con el eje x) da la pendiente de la línea.
En este caso se tiene:
$m_1 = tg\alpha$ y $m_2 = tg\beta$.

Además la relación entre los ángulos:
$\beta = \alpha + 90º$

Al calcular la tangente, en ambos miembros : $tg\beta = tg(\alpha+90)$; se obtiene:

$$\tan\beta = \tan(\alpha+90^\circ)$$
$$\tan\beta = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\tan\beta = -1$$
$$(\tan\alpha)(\tan\beta) = -1$$
$$m_1\cdot m_2 = -1$$

finalmente se concluye que : $m_1 \cdot m_2 = -1$, quedando esta expresión como la condición para que dos líneas rectas sean perpendiculares, siendo ésta una condición necesaria y suficiente.

Es decir:

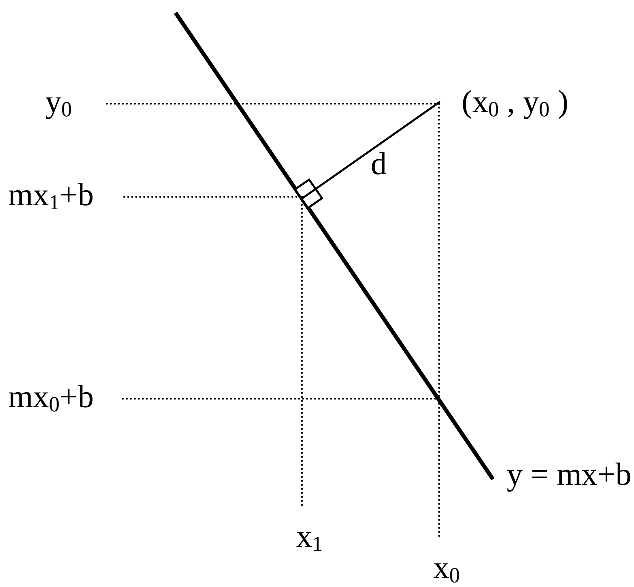
L_1 es perpendicular con $L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$; siendo m_1 y m_2 sus pendientes respectivas.

El problema de la distancia de un punto a una línea recta:

Trazando diversos segmentos desde un punto a una línea recta se puede visualizar que la distancia más corta desde el punto a la línea recta es la dada por el segmento perpendicular a ella. La medida de este segmento (la distancia mínima) se ha elegido como la distancia de un punto a una línea recta. Ocupando Cálculo Diferencial, se demuestra que ésta está dada por:

$$d(P,L) = \frac{|y_0 - mx_0 - b|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{o bien} \quad d(P,L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Siendo L, la línea recta dada en la forma y = mx+b o bien en la forma Ax+By+C=0 y P el punto $P(x_0, y_0)$.



Observaciones:

- el punto (x_1 , y_1) pertenece a la línea recta y sus coordenadas se desconocen.
- se conoce el punto (x_0 , y_0), exterior a la recta.
- el segmento perpendicular es subconjunto de la línea recta: $y = (-1/m)(x-x_0)$
- la intersección entre la línea y = mx+b y la anterior, es el punto de coordenadas desconocidas (x_1 , y_1)
- se cumple el teorema de Pitágoras en todos los triángulos rectángulos que aparecen en la figura.
- $\dfrac{y_0 - mx_1 - b}{x_0 - x_1} = \dfrac{-1}{m}$ es la relación entre la pendiente de la línea recta y el segmento perpendicular.

Realizando un trabajo algebraico con las ecuaciones antes descritas en el cuadro, es posible deducir la primera de las fórmulas dadas, la segunda se puede deducir de la primera. Se desarrollará en clases a modo de ejercicio.

Guía de Ejercicios "Ecuación de la línea Recta " y Función lineal.

Objetivos de la guía:
1.- Familiarizarse con el concepto de línea recta y sus propiedades en diferentes contextos.
2.- Visualizar el concepto de línea recta en distintos contextos.
3.- Aplicar el concepto de línea recta y sus propiedades en la resolución de situaciones problemáticas sencillas.

1.- Hallar la ecuación de la línea recta que en el primer cuadrante forma un triángulo rectángulo de área 6 cm^2 con los ejes coordenados como base y altura. ¿ Cuántas soluciones hay ?

2.- Dos puntos de una línea recta son A(2,4) y B(3,6) Hallar la ecuación de la línea recta.

3.- Graficar la línea recta : y / 4 + x / 5 = 1 . ¿ A qué corresponden los valores 4 y 5?

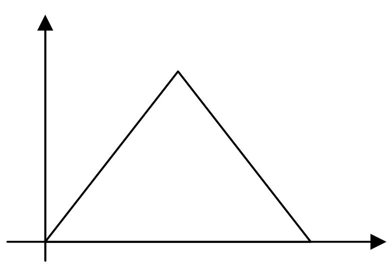
4.- La línea recta y = mx +b pasa por el punto (2,7) Hallar m y b sabiendo que la línea se intercepta con el eje X en x= 6.

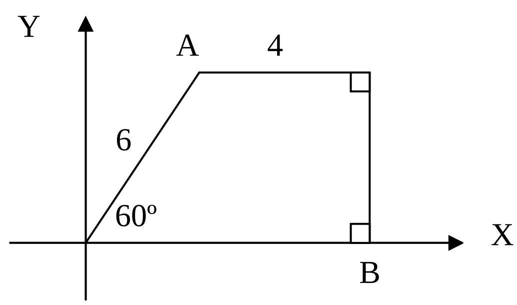
5.- La recta L_1 : y = mx + b es paralela con L_2 : y = 4x-7 y se sabe además que $A(2,3)\in L_1$
Hallar la ecuación de la línea recta.

6.- .- La recta L_1 : y = mx + b es paralela con L_2 : y = 4x-7 y se sabe además que $d(L_1;L_2)$ =4
Hallar la ecuación de la línea recta. ¿ Cuántas Líneas rectas satisfacen la condición ?

7.- Hallar la línea recta L_2 perpendicular con L_1 : y = (2/3)x +3 sabiendo que $(2,1)\in L_2$

8.- Hallar la ecuación de la línea recta que pasa por A y B. Ver figura. Calcular además el área de la figura.





9.- La figura muestra un triángulo equilátero de área 10 cm^2 .Hallar las ecuaciones de las líneas rectas que coinciden con los lados del triángulo.

10.- Verificar si los siguientes puntos pertenecen o no a la línea recta dada:
A(2,4) ; B(4,5) ; C(-1, -5) ; D(4,10) L : y = 3x - 2

11.- Escribir un vector unitario que describa la dirección de la línea recta y = 2x+5

12.- Un móvil se desplaza a lo largo de la línea recta y = 2x-5, a partir del punto (3,1) a una velocidad constante de 4 [m/s] durante 5 segundos Hallar la posición del móvil en ese tiempo.

serbachi@hotmail.com

13.- $v_F = v_i + at$ es la línea recta que describe la velocidad de un cuerpo en cualquier tiempo. Identifique cuál es la variable dependiente, la variable independiente, la pendiente y el intercepto con el eje vertical.
¿Qué velocidad se tiene transcurridos 4 segundos? Sabiendo que $a = 2$ m/s^2 ; $v_i = 10$ ms

14.- La presión absoluta bajo un líquido expuesto a la atmósfera (por ejemplo :agua) se rige por la ecuación $P = P_{[atm]} + \rho gh$ en donde:
$P_{[atm]} = 1,013\text{x}10^5$ [Pa] ; $\rho_{agua} = 1000$ kg/m^3 ; $g = 9,8$ m/s^2

¿ A qué profundidad en un lago de agua dulce, la presión es de 5 [atm] ?
(recordar : 1[Pa] = 1 N/m^2 ; 1 [N] = 1 [kg.m/s^2]

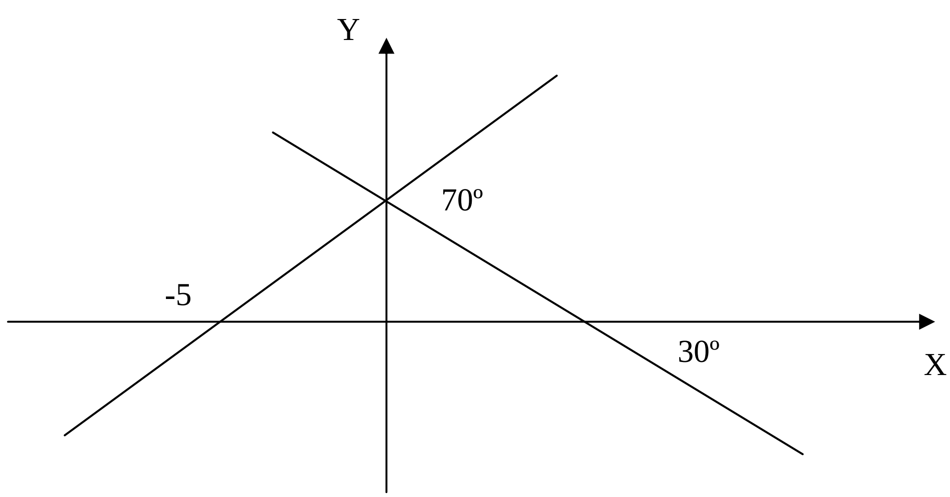
15.- Hallar K de modo que la línea recta $y= 3x+ 2(k+1)$,pase por el punto A(7,-3)

16.- Hallar k de modo que las siguientes líneas rectas sean paralelas :

L_1 : $y = (k+3)x - 4$ y L_2 : $y = (3k - 8)x - 4$

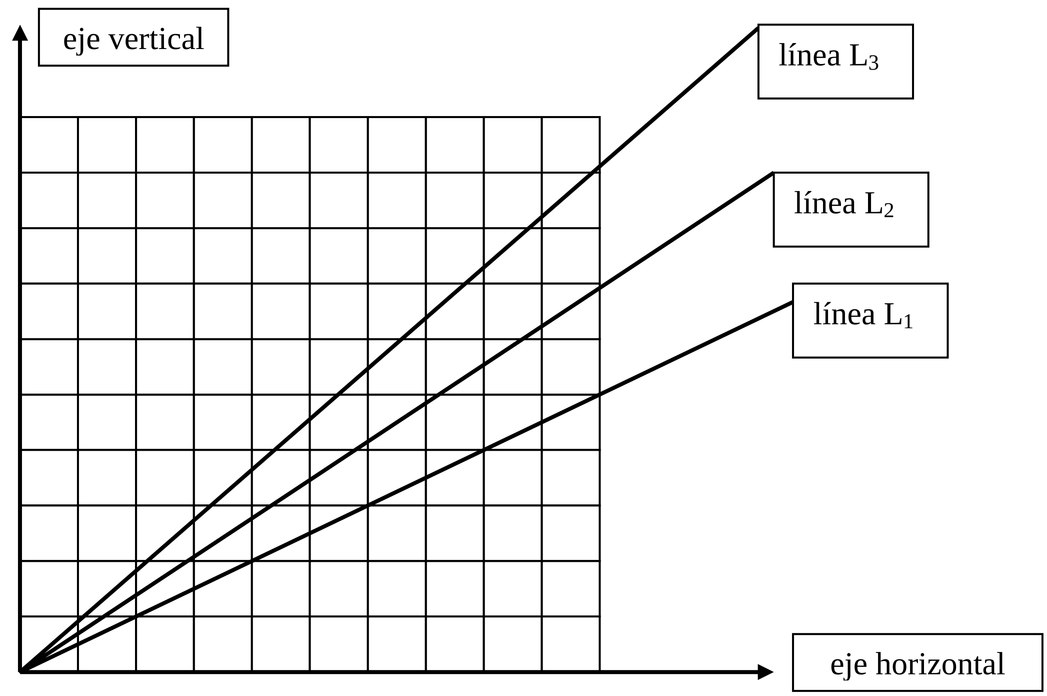
17.- Hallar k de modo que las líneas rectas del ejercicio anterior sean perpendiculares.

18.- Escribir las ecuaciones da cada línea recta que se muestra en la figura :



19.- La ecuación de la pendiente de la línea recta tangente a una cierta curva en cualquier punto está dada por $m(x) = 2x$. Graficar pequeños segmentos de estas líneas rectas tangentes en el intervalo $[-4,4] \subset \Re$ considerando $x \in [-4,4]$, con $x \in Z$ (números enteros) ¿De qué curva se trata ?

Objetivo : Lectura de gráficos , cálculo de porcentajes, proporciones, pendiente de una línea recta



• **Interpretando las gráficas como líneas de porcentajes:**

Con ayuda de las gráficas calcular :

1.- El 20 % de 50.
2.- El 40% de 70.
3.- El 60% de 90.

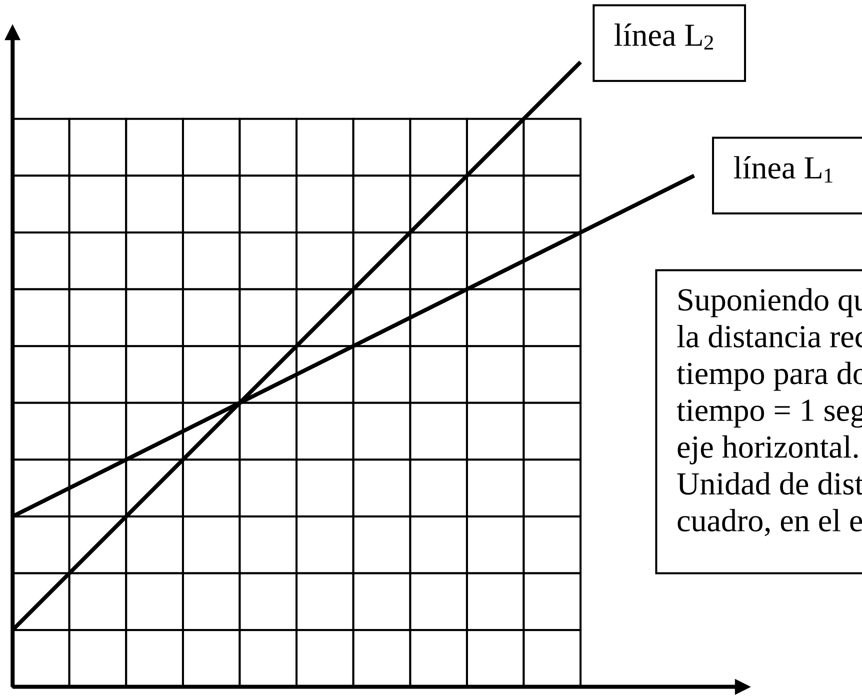
4.- ¿Qué porcentaje es 20 de 50 ?
5.- ¿Qué porcentaje es 45 de 90 ?
6.- ¿Qué porcentaje es 30 de 50 ?
7.- ¿Qué porcentaje es 3 de 5 ?
8.- ¿Qué porcentaje es 300 de 500 ?

9.- ¿Qué pendiente tiene cada una de los segmentos rectilíneos de la figura ?

• **Interpretando las gráficas como la relación entre distancia y tiempo**

Suponiendo ahora, en otro contexto, que las gráficas representan la distancia recorrida por tres móviles diferentes, (móvil 1,2 y 3) en donde ahora el eje vertical representa distancia medida en metros y el eje horizontal representa tiempo en segundos , y en donde cada cuadro representa una unidad de distancia o tiempo ¿Cuál de ellos es el que se mueve más rápido?

• ¿Con qué rapidez se mueve cada móvil ?
• ¿Qué distancia habrá recorrido el móvil 1 al cabo de 10 segundos. ?
• ¿Cuánto tiempo le demanda al móvil 1 recorrer una distancia de 30 [m] suponiendo que cada unidad en el eje vertical es de 10[m]?
• ¿A qué concepto físico corresponde la pendiente de cada segmento rectilíneo?



Suponiendo que las líneas representan la distancia recorrida en función del tiempo para dos móviles. Unidad de tiempo = 1 segundo = 1 cuadro, en el eje horizontal.
Unidad de distancia = 10 metros = 1 cuadro, en el eje vertical.

1.- ¿Cuál de los dos se mueve más rápido ?
2.- ¿Cuál de los dos partió con ventaja ?
3.- En el tiempo cero (cuando iniciamos el cronómetro...) ¿Cuál es la distancia inicial con que partió cada móvil ?
4.- Suponiendo que ambos se mueven según un camino rectilíneo y en una misma dirección.
¿ En qué instante, estos móviles se hallan en la misma posición con respecto al punto de partida ?
5.- ¿Cuál es la distancia de separación entre ellos al cabo de 6 segundos?
6.- ¿En qué tiempos la distancia de separación entre ellos es de 20 metros?

En otro contexto : Suponiendo que las líneas rectas describen el costo de manufactura de dos artículos diferentes. Con la línea vertical como costo en unidades de 2000 pesos y la línea horizontal como cantidad de artículos en unidades de 100. El costo asociado a una producción cero se interpretará aquí como el costo previo de preparación de las talleres de trabajo o montaje.
Preguntamos :

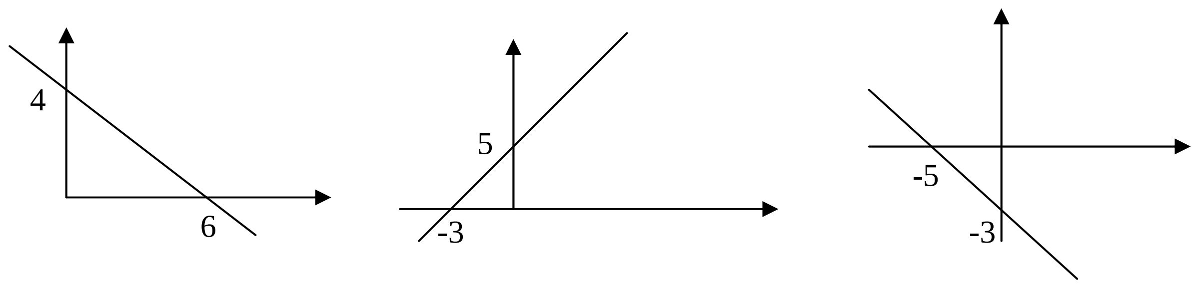
1.- ¿Cuál es el costo de producción de 300 artículos de la línea 1?
2.- ¿Cuál es el costo total para 700 artículos de la línea 2 ?
3.- ¿ Para qué producción de artículos 1 y 2 el costo es el mismo ?
4.- Construya una línea que describa el costo total de la producción de ambos artículos.
5.- ¿ Para qué producción de artículos 1 y 2 la diferencia en el costo es de 4000 pesos ?
6.- ¿Cuántos artículos 1 se producen cuando su costo de producción ha sido de 1400 ?
7-.- ¿Cuántos artículos 1 y 2 se producen cuando el costo total de producción ha sido de 1400 ?

Línea recta y distancia entre dos puntos

Objetivos:

1.- Familiarizar al estudiante con el concepto de línea recta y distancia entre dos puntos.
2.- Aplicar las definiciones asociadas a línea recta, pendiente, distancia entre dos puntos a situaciones contextualizadas en temas asociados a la geometría y la física.

1.- Graficar la línea recta que pasa por el punto (5,6) y que tiene por pendiente $m = 7$
2.- Escribir la ecuación de las líneas mostradas en la figura, los ejes son x-y usuales.



3.- Si el punto A (x_0 , y_0) pertenece a la línea recta $4x + 3y = 9$ y si además se sabe que que $x_0 = 3$, hallar la ordenada. y_0

4.- Completar la siguiente tabla de valores para la línea recta $5y - 8x = 10$
Para $x = 0 ; 7$ y para $y = 3 ; -2$
5.- Hallar la ecuación de la línea recta paralela con $y = 2x + 8$ y que pasa por el punto (2,4)

6.- Hallar la ecuación de la línea recta paralela con $5y +2x + 8= 0$ y que pasa por el punto (-2,-4)

7.- Hallar el punto de intersección entre las líneas rectas $5y +2x + 8= 0$ y $-5y +2x - 4= 0$

8.- Hallar el punto (a, b) que pertenece a la línea recta $y = 2x + 4$, y que está a 5 unidades de distancia del punto (1, 6)

9.- Hallar el punto medio entre los puntos A(2,3) y B(-5,8) Represente con un dibujo.

10.- Hallar el área asociada a la superficie determinada por el triángulo cuyos vértices son : A(2,3) ; B(6,5); C(4,8). Ayúdese con un dibujo adecuado.

11.- Hallar la ecuación de la línea recta que pasa por el punto (8,9) y por el punto medio del segmento determinado por A(2,5) y B(-4,7)

12.- Hallar la distancia entre los puntos medios de los segmentos determinados por A(2,4) , B(6,8) y C(-5,7) , D(2,7)

13.- Siguiendo un camino rectilíneo a lo largo de los segmentos AB, BC y CD ; una hormiga se desplaza de A a D. ¿ Qué distancia recorre ? Como datos tenemos : A(2,3) ; B(-5,6) ; C(-5,7) y D(2,7) ¿ Cuál ha sido su desplazamiento neto de A a D en línea recta?

14.- Hallar la distancia más corta entre el punto A(2,3) y la línea recta $y = 4x+2$

15.- Calcular la pendiente de los segmentos que unen los siguientes puntos :
A(2,3) ; B(-5,6) ; C(-5,7) y D(2,7)

16.- En un gráfico distancia – tiempo grafique las siguientes situaciones:

velocidad	distancia inicial en el tiempo t = 0 seg
2 [m/s]	4 [m]
6 [m/s]	6 [m]
1 [m/s]	2[m]
4 [m/s]	7[m]

17 .- Diseñe un gráfico que permita calcular cualquier porcentaje de la cantidad 60.

18.- Diseñe un gráfico que permita calcular qué porcentaje es 30 de la cantidad 80.

19.- Diseñe un gráfico que permita calcular de qué cantidad es 20 el 40%

20.- Si el costo de 5 cuadernos universitarios es 1200 pesos. Diseñe un gráfico que permita visualizar el costo de una cierta cantidad de cuadernos en el rango 0 a 40 cuadernos.

21.- Realice un estudio de las siguientes líneas rectas determinando cuáles entre ellas son paralelas o perpendiculares:

	L_5 : y = 3x +2	L_6: y = 3x +2	L_7 : y +x +2 = 0
L_1 : y = 3x +2			
L_2 : y = (1/3)x +2			
L_3 : y = - 3x +2			
L_4 : y = 3x -10			

22.- Dibujar en cada caso solicitado el cuadrado (en un plano coordenado cartesiano) de lados 4 unidades, sabiendo que : Nota bene: Puede haber más de una respuesta.

su centroide es el punto	(-2,6)
su vértice inferior izquierdo es el punto	(2,4)
el punto medio de su base inferior es	(5,6)
el vértice inferior izquierdo está a	5 unidades del origen de coordenadas
está en el segundo cuadrante	
está en el tercer cuadrante	su centroide se halla sobre la línea recta y = 6

23.- Dibujar en cada caso solicitado el triángulo rectángulo (en un plano coordenado cartesiano) de área 4 unidades cuadradas, sabiendo que su base es paralela con el eje X, y su ángulo de 90º se halla a la izquierda. Notabene: Puede haber más de una respuesta.

su centroide es el punto	(-2,6)
su vértice inferior izquierdo es el punto	(2,4)
el punto medio de su base inferior es	(5,6)
el vértice inferior izquierdo está a	5 unidades del origen de coordenadas
está en el segundo cuadrante	su vértice superior está sobre la línea recta y =5
está en el tercer cuadrante	su centroide se halla sobre la línea recta y = 6

Guía de Ejercicio de Matemática

1.- Determine y grafique la Ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2:

a) $P_1 = (-3, -5)$ $P_2 = (3, 5)$
b) $P_1 = (-1, 4)$ $P_2 = (4, 1)$
c) $P_1 = (0, 6)$ $P_2 = (3, -2)$
d) $P_1 = (-3, -2)$ $P_2 = (0, 0)$
e) $P_1 = (-2, 0)$ $P_2 = (-3, -3)$

2.- Determine y grafique la ecuación de la recta que pasa por P y es paralela a L:

a) P = (2, 3) L: $y = 2x - 3$
b) P = (-2, 0) L: $y = -3x + 5$
c) P = (1, -3) L: $y = 4x + 7$
d) P = (0, 4) L: $y = -x - 4$
e) P = (-3, 4) L: $y = 2x$

3.- Determine y grafique la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a L:

a) P = (-1, -2) L: $y = -2x + 3$
b) P = (-2, 3) L: $y = -x + 6$
c) P = (4, -2) L: $y = 3x -5$
d) P = (1, 0) L: $y = -2x$
e) P = (0, -4) L: $y = -3x -2$

4.- Determine pendiente e intercepto de las siguientes ecuaciones de líneas rectas

a) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+5}{2}$

b) $\frac{3}{2y} = \frac{5}{2-x}$

c) $\frac{x-3}{y+2} = \frac{1}{5}$

d) $\dfrac{x+4}{y-5}=\dfrac{2x-3}{2y+2}$

e) $\dfrac{2(1-3x)}{(1+y)(x-1)}=\dfrac{6}{1-y}$

5.- Sean los puntos $P_1 = (-4, 6)$; $P_2 = (1, -3)$ y $P_3 = (5, 4)$:

a) Determine la ecuación de la recta L_1 que pasa por P_1 y P_2.
b) Determine la ecuación de la recta L_2 que pasa por P_2 y P_3.
c) Determine la ecuación de la recta L_3 que pasa por P_1 y P_3.
d) ¿ Es el $\Delta\, P_1P_2P_3$ rectángulo ?
e) Determine la recta // a L_1 que pasa por P_3
f) Determine la recta $\perp$ a L_3 que pasa por P_2
g) Grafique toda la situación anterior.

6.- Sean las rectas L_1: $y = -2x + 4$ y L_2: $y = x - 2$

a) Determine la ecuación de la recta L_3, de pendiente positiva, que pase por $P = (-4, 0)$ de forma que el Δ formado por L_1, L_2 y L_3 sea rectángulo.
b) Determine la ecuación de la recta L_4, de pendiente negativa, que pase por $P = (-4, 0)$ de forma que el Δ formado por L_1, L_2 y L_4 sea rectángulo.
c) Grafique la situación anterior.

7.- Determine la intersección entre las rectas

a) L_1: $y = -x + 4$ y L_2: $y = 3x - 2$
b) L_1: $y = 2x + 5$ y L_2: $y = -2x + 1$
c) L_1: $y = -3x - 3$ y L_2: $y = 4x - 1$
d) L_1: $y = -2x$ y L_2: $y = x$
e) L_1: $y = 5x - 7$ y L_2: $y = -3x + 3$

8.- Sean los puntos $P_1 = (-4, 0)$; $P_2 = (0, 4)$ y $P_3 = (0, 0)$, determine un punto P sobre la recta L_1 que une P_1 con P_2 de forma que la recta L_2 que une P con P_3 sea $\perp$ a L_1

9.- Convierta los siguientes ángulos de grados a radianes:(¿Se ocupa el concepto de línea recta?)

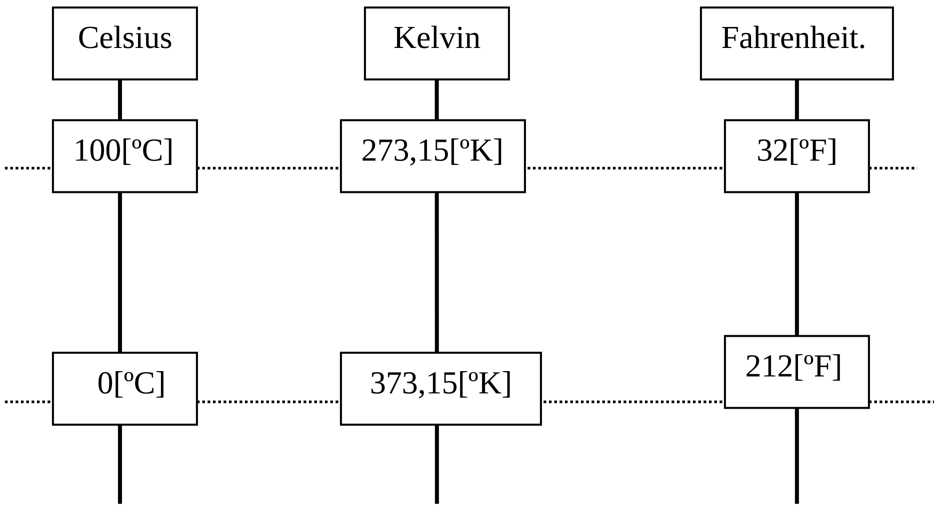
a) 30º
b) 45º
c) 60º
d) 90º
e) 150º

10.- Convierta los siguientes ángulos de radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{5\pi}{6}$

11.- Construya una gráfica(línea recta) para resolver el problema de conversión en forma gráfica en el intervalo $[0,2\pi]$

Escalas de temperatura :



Ecuaciones de conversión :

$$T_F = (9/5)\ T_C + 32ºF \qquad T_K = T_C + 273{,}15$$

Ejercicios :

1.- Deducir ambas relaciones, y además hallar la ecuación de conversión de [ºK] a [ºF]

2.- Cuando la lectura de un termómetro Fahrenheit es de 102[ºF], ¿ Cuál será la lectura en un termómetro Centígrado ?
3.- Un acondicionador de aire baja 15[ºF] la temperatura de un cuarto. ¿ Cuál es el equivalente del descenso en grados centígrados ?
4.- La temperatura crítica del bióxido de carbono es de 31[ºC] .¿ Cuál es el equivalente en la escala Fahrenheit ?

RESULTADOS :

2..- 39[ºC] 3.- 8,33[ºC] 4.- 87,8 [ºF]

Cónicas.

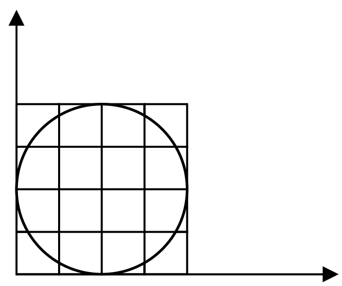
Las curvas que estudiaremos reciben el nombre genérico de cónicas, las situaremos en una superficie plana, y son las siguientes:

La circunferencia, la elipse, la hipérbola, y la parábola.

Circunferencia

¿Qué curva forman los puntos que se sitúan equidistantes de un punto fijo?

La respuesta a esta pregunta nos sitúa en el estudio de la circunferencia:
El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia de estos puntos equidistantes es lo que conocemos como radio de la circunferencia
En la figura observamos la circunferencia de radio 2, con centro en el punto (2,2)



Un punto cualquiera de ella satisface la ecuación de la distancia : $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

En general: si una circunferencia está centrada en el punto (h , k) y tiene radio R , entonces su ecuación está dada por la relación : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$

Ejercicios :

1.- Graficar las circunferencias asociadas a los siguientes datos:

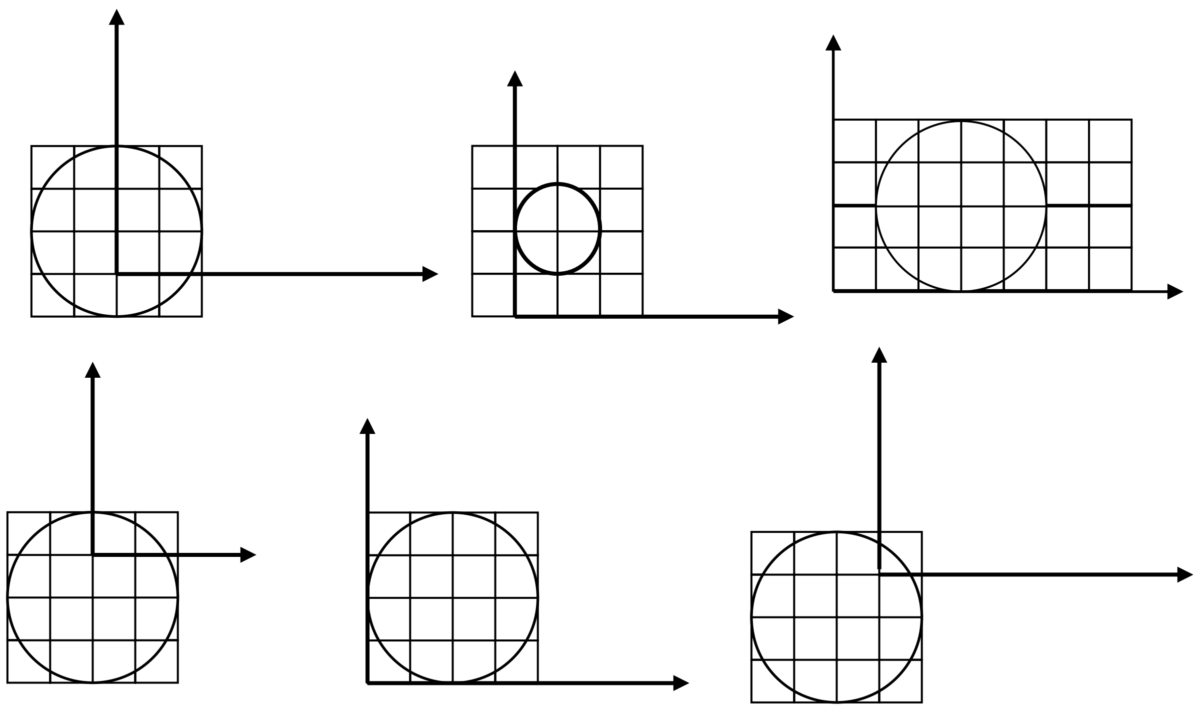
centro	radio		centro		Radio
(0,5)	3		(4,5)		3
(-3,0)	4		(-3,4)		4
(-4,0)	5		(-4,-4)		5
(0,0)	2		(3,-5)		2
(0,-6)	4		(0,6)		4

2.- Escribir la ecuación de la circunferencia de radio 3, que es tangente con el eje X, en el primer cuadrante. ¿Cuántas circunferencias satisfacen este requerimiento?

3.- Si agregamos al ejercicio anterior la condición de que además sea tangente al eje Y; ¿Cómo se modifica la solución?

4.- Escribir la ecuación de diámetro 6: centrada en el origen de coordenadas.
5.- Se tienen dos circunferencias concéntricas, se sabe además que la diferencia entre sus radios es 2 y que su suma es 6. Hallar el área de la zona comprendida entre ambas circunferencias.

6.- Escribir la ecuación de cada circunferencia que se muestra en la figura, en donde los Sistemas de Coordenadas son los usuales.



7.- Practique con el Programa de la circunferencia facilitado.

8.- En los siguientes ejercicios encuentre el radio y el centro de la circunferencia dada en forma general, y grafique cada una de ellas.

1	$x^2 + y^2 = 25$	4	$x^2 + 2x + y^2 = 15$	7	$x^2 + 2x + y^2 + 4y = 11$
2	$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 11$	5	$x^2 + 4x + y^2 + 4y = 1$	8	$x^2 + y^2 + 8y + 7 = 0$
3	$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 11$	6	$x^2 - 2x + y^2 - 6y = 15$	9	$x^2 + 12x + y^2 + 27 = 0$

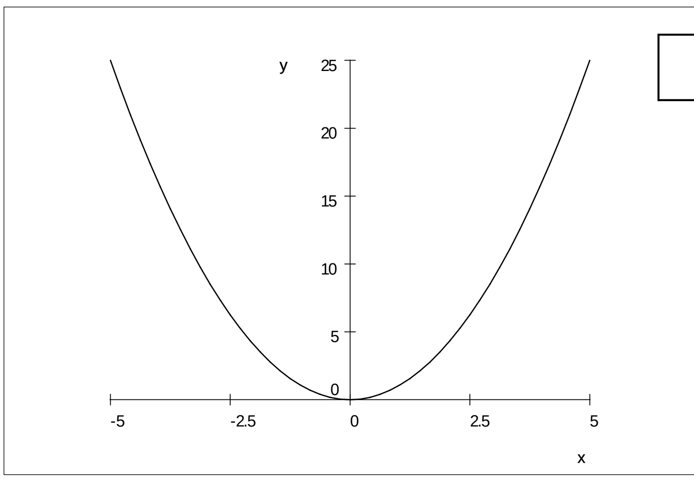
Como ayuda:
Se requiere completar el cuadrado de binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

serbachi@hotmail.com

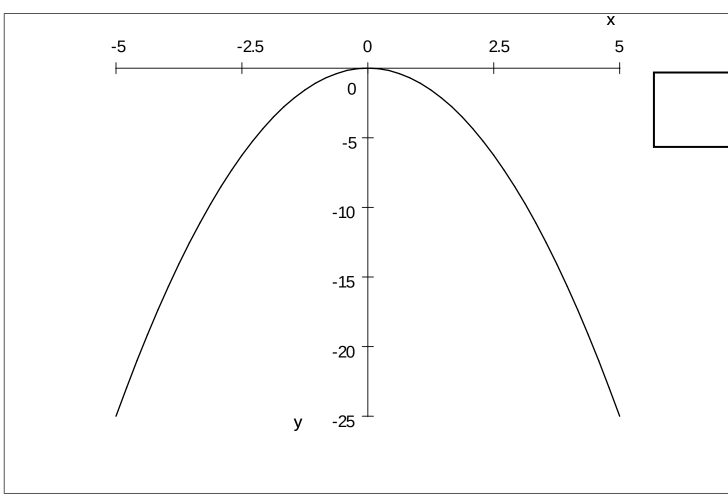
Parábola

Es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de un punto fijo llamado foco y de una línea recta llamada directriz.

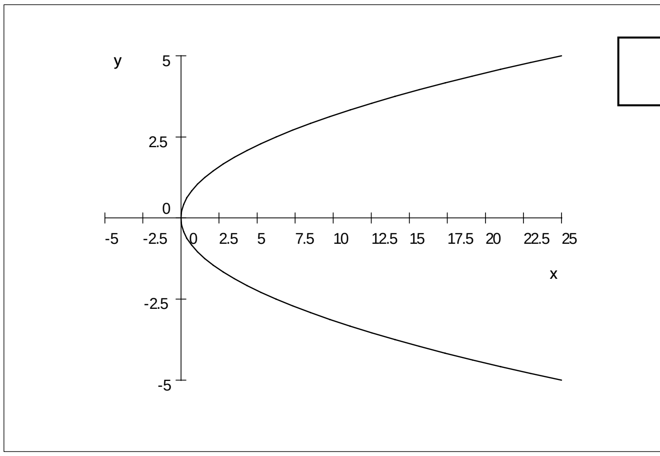
Se presentan cuatro casos posibles: abierta hacia arriba o hacia abajo y parábola abierta hacia la derecha o hacia la izquierda. En este trabajo no se considerará la posibilidad de que la directriz sea una línea recta oblicua.(inclinada).



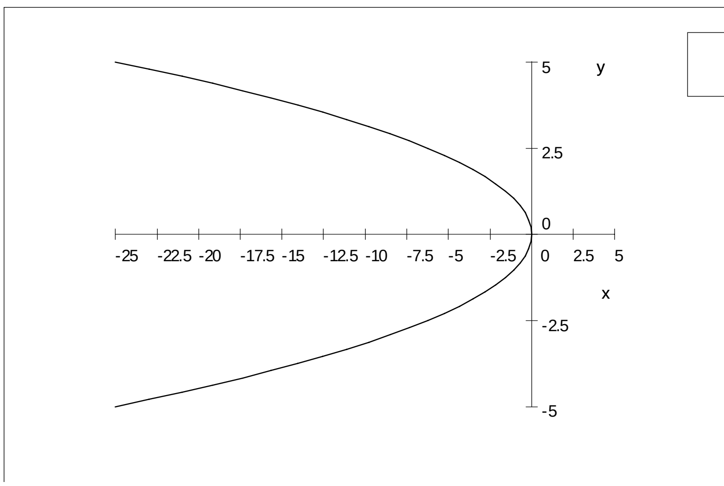
Parábola: $y = x^2$



Parábola: $y = - x^2$



Parábola: $y^2 = x$



Parábola: $y^2 = -x$

Las ecuaciones son en general:

$(x - h)^2 = 4p(y-k)$ describe una parábola abierta hacia arriba

$(x - h)^2 = -4p(y-k)$ describe una parábola abierta hacia abajo

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ describe una parábola acostada , abierta hacia la derecha

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$ describe una parábola acostada , abierta hacia la izquierda

Nota bene: *no olvide trabajar con el programa facilitado*
En cada caso el punto (h, k) es el vértice de la parábola, y el valor de p es la distancia entre el vértice de la parábola y el foco; y también la distancia entre el vértice y la directriz.
La parábola tiene un eje de simetría, y es sobre este eje que se alinean el vértice y el foco de ella.

Ejercicios :

1.- Escribir la ecuación de la parábola cuyos datos se especifican en la tabla, y determinar adicionalmente ecuación de la directriz.

vértice	foco		vértice	foco
(2,2)	(3,2)		(2,2)	(2,4)
(2,2)	(0,2)		(2,2)	(2,-2)
(-3,4)	(1,4)		(-3,4)	(-3,6)

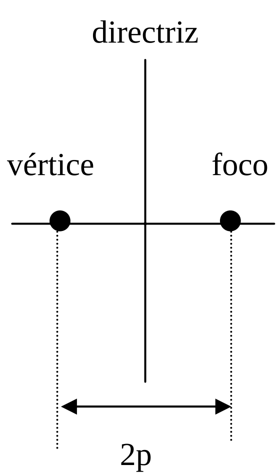
2.- Dibujar las siguientes parábolas, determinando vértice, foco, y ecuación de la directriz.

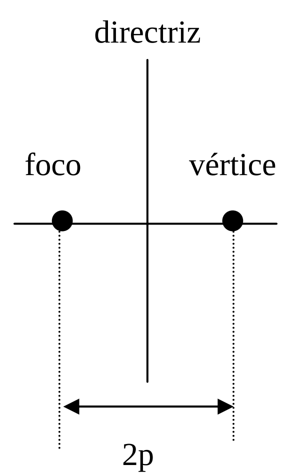
$(y-2)^2 = 8(x-5)$		$(x-2)^2 = 12(y-3)$
$(y-3)^2 = -4(x+2)$		$(x-3)^2 = -4(y-3)$
$(x+2)^2 = 10(y-4)$		$(y-5)^2 = 12(x-4)$
$(x+3)^2 = 6(y-3)$		$y^2 = -8(x-5)$

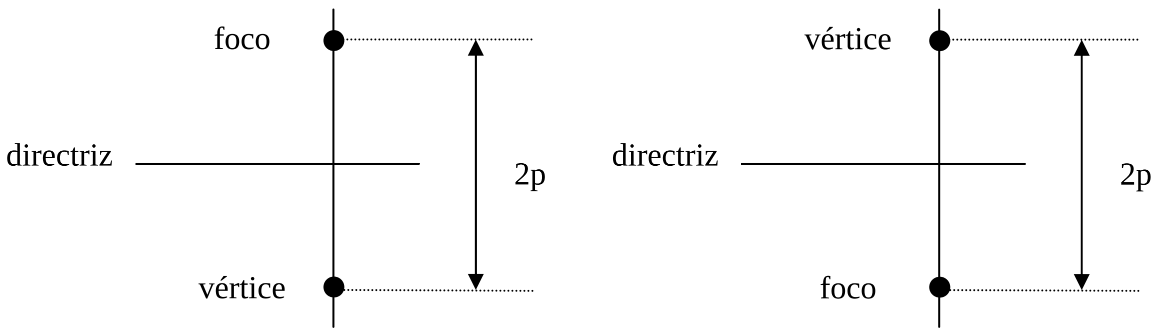
3.- Escribir la ecuación de la parábola cuyos datos se especifican en la tabla:

vértice	ecuación de la directriz		foco	ecuación de la directriz
(2,2)	x = 3		(2,2)	y = 4
(2,2)	x = -4		(2,2)	y = - 4
(-3,4)	y = 2		(-3,3)	y = 1

Notabene: Recuerde que en cada caso siempre se está dando alguna de las situaciones mostradas en las figuras que siguen: (la palta para resolver estos ejercicios...)







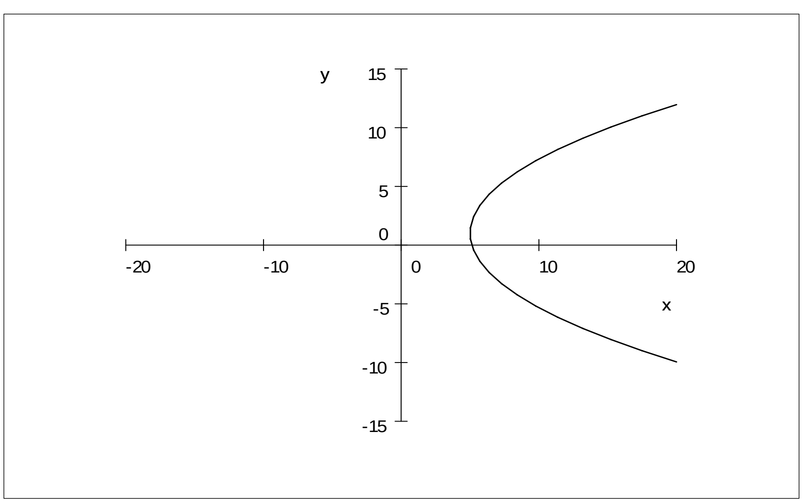
4.- Dibujar las siguientes parábolas, determinando vértice, foco, y ecuación de la directriz.

$y^2 - 2y - 8x + 41 = 0$	$y^2 - 4y + 4x - 4 = 0$	$y^2 + 4x - 4 = 0$
$x^2 - 4x - 4y + 12 = 0$	$x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$	$x^2 + 4y + 8 = 0$

Ejemplo:

$$y^2 - 2y - 8x + 41 = 0$$
$$y^2 - 2y = 8x - 41$$
$$y^2 - 2y + 1 = 8x - 41 + 1$$
$$(y-1)^2 = 8x - 40$$
$$(y-1)^2 = 8(x-5)$$

al comparar con $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, se tiene:
Vértice de la parábola: V(5,1) , p=2
de aquí que: Foco: $F(5+2, 1)$
directriz: $x = -2$



Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante

La ecuación de la hipérbola se parece mucho a la ecuación de la elipse, según podemos observar:

$$(x-h)^2 / a^2 - (y-k)^2 / b^2 = 1$$

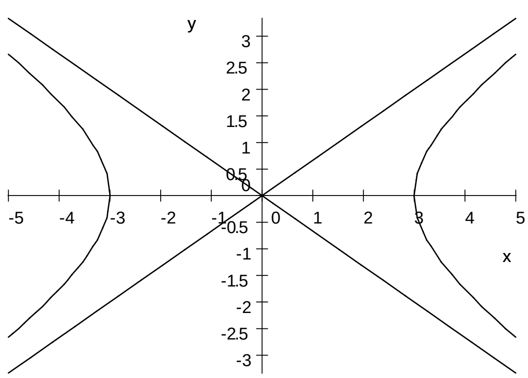
Distinguimos los siguientes elementos en la gráfica de la hipérbola abierta hacia los lados izquierdo y derecho.

- Centro : C(h,k)

- Vértices : V(h ± a, k)

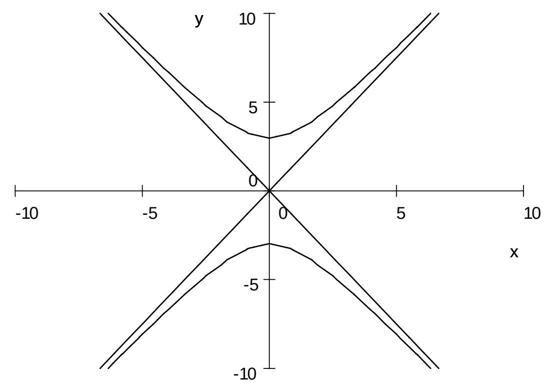
- Focos : F(h ±c , k) en donde c se obtiene a partir de la relación : $c^2 = a^2 + b^2$; gráficamente corresponde al punto de intersección entre su eje horizontal de simetría y el arco de circunferencia de radio c.

- Asíntotas : usando la ecuación punto- pendiente : y –k = ± (b/a)(x-h)



Ecuación de la hipérbola de la figura: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
Ecuación de las asíntotas: $y = \pm\frac{2}{3}x$

Así como la hipérbola se puede abrir hacia los lados izquierdo y derecho también se puede abrir hacia arriba y hacia abajo como en el siguiente ejemplo:



Ecuación de la hipérbola de la figura: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

Ecuación de las asíntotas: $y = \pm\frac{3}{2}x$

Ejercicio de observación y análisis:

1.- Comparar ambas ecuaciones y establezca diferencias y semejanzas.
2.- Intente escribir la ecuación general para este tipo de hipérbola.
3.- Hallar Focos y vértices y ecuaciones de las asíntotas para este tipo de hipérbola

Una forma bastante práctica de dibujar esta curva a mano alzada está dada por el siguiente procedimiento(para la hipérbola abierta hacia los lados)

1.- Ubicar el punto centro de la hipérbola C(h,k)

2.- Con los valores de “a” medido en el eje horizontal y de “b” en el vertical, dibujar un rectángulo de lados 2a y 2b, con su centroide en el punto C(h,k)

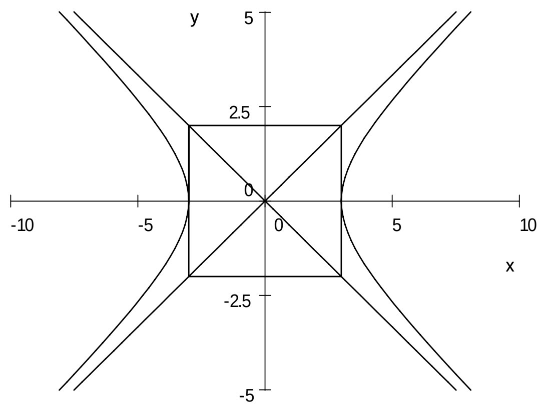
3.- Trazar las asíntotas uniendo los vértices opuestos del rectángulo.

4.- Dibujar las dos ramas de la curva teniendo en cuenta que éstas se acercan asintóticamente a las asíntotas.

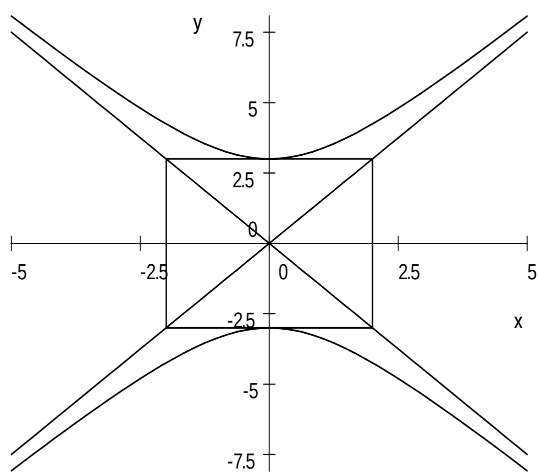
5.- Cada foco se obtiene, intersectando el arco de circunferencia de radio c y centro en C(h,k)

Ejemplos de lo que decimos:

Ecuación de la hipérbola de la figura: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
Ecuación de las asíntotas: $y = \pm\frac{2}{3}x$



Ecuación de la hipérbola de la figura: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$
Ecuación de las asíntotas: $y = \pm\frac{3}{2}x$



Ejercicios:

1.- Graficar las siguientes hipérbolas, determinando además, centro, focos, vértices y ecuaciones de las asíntotas.

$(x-2)^2 / 16 - (y+2)^2 / 9 = 1$	$(x+6)^2 / 9 - (y-5)^2 / 4 = 1$	$(x-4)^2 / 25 - y^2 / 16 = 1$
$x^2 / 16 - (y+2)^2 / 25 = 1$	$(x-4)^2 / 4 - (y-5)^2 / 9 = 1$	$(x+3)^2 / 9 - y^2 / 4 = 1$
$(x-2)^2 / 16 - (y+2)^2 / 9 = 1$	$(x+6)^2 / 4 - (y-5)^2 / 9 = 1$	$(x-4)^2 / 9 - y^2 / 4 = 1$

2.- Dados los siguientes datos, determinar la ecuación de la hipérbola:

Centro	a, b		Centro	Foco(s)	Vértice(s)
(2,2)	a =3; b=2		(2,2)	(7,2)	(6,2)
(2,2)	a=3;b=3		(-2,4)	(3,4)	(1,4)
(-3,4)	a=4;b=4		(-3,3)	(2,3)	(0,3)