Matemáticas

Página en donde se encontró esta información

http://www.loseskakeados.com

ANÁLISIS LINEAL
SERIES DE FOURIER

Ejercicios Resueltos

CONCEPTOS BÁSICOS

Las series de Fourier permiten representar funciones periódicas mediante combinaciones de senos y cosenos (serie trigonométrica de Fourier) o de exponenciales (forma compleja de la serie de Fourier).

Si f es una función periódica de período 2T seccionalmente continua, admite la siguiente representación en los puntos de continuidad:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\text{®}t}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\text{®}t}{T} \right)$$

Donde:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+2T} f(t)\cos\frac{n\text{®}t}{T}dt$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+2T} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\text{®}t}{T}dt$$

Nótese que las integrales pueden ejecutarse entre dos valores cualesquiera separados por un período. En los puntos de discontinuidad de la función, la serie anteriormente mencionada converge a la semisuma de los límites laterales de la función.

Otra forma de representar la misma función es mediante una serie compleja, en la cual se aprovecha la fórmula de Euler $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b)$. Resulta, en tal caso:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\text{®}t/T}$$

Donde:

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-in\text{®}t/T}dt$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.) Serie de Fourier de una función periódica de período distinto a 2®. Hallar la serie trigonométrica de Fourier para la función periódica definida por:

$$f(t)=\begin{cases} t^2 \quad , \quad 0<t<2 \\ f(t+2)=f(t) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Aquí T = 1. Hallemos en primer lugar los coeficientes. Son:

$$a_n=\int_0^2 t^2\cos n®t\,dt \overset{\substack{\text{por partes}\\ \downarrow}}{=} \left.\frac{2n®t\cos(n®t)-2\,\text{sen}(n®t)+n^2®^2t^2\,\text{sen}(n®t)}{n^3®^3}\right|_0^2=$$

$$=\frac{4n®\cos(2n®)-2\,\text{sen}(2n®)+4n^2®^2\,\text{sen}(2n®)}{n^3®^3}=\frac{4}{n^2®^2}$$

$$b_n=\int_0^2 t^2\,\text{sen}\,n®t\,dt=\left.\frac{2n®t\,\text{sen}(2n®)+2\cos(n®t)-n^2®^2t^2\cos(n®t)}{n^3®^3}\right|_0^2=$$

$$\frac{4n®\,\text{sen}(2n®)+2\cos(2n®)-4n^2®^2\cos(2n®)}{n^3®^3}-\frac{2}{n^3®^3}=-\frac{1}{n®}$$

El coeficiente a_0 debemos calcularlo por separado, dado que la forma de a_n obtenida arriba no está definida para n = 0. Calculamos, así:

$$a_0=\int_0^2 t^2\cos 0®t\,dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^2=\tfrac{8}{3}$$

De esa forma, la serie de Fourier buscada será:

$$f(t)=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2®^2}\cos n®t-\frac{4}{n®}\,\text{sen}\,n®t\right)$$

2.) Aprovechamiento de la serie de Fourier para calcular una serie numérica. Dada

$$f(t)=\begin{cases} -® \quad , \quad -®<t<0 \\ t \quad , \quad 0<\text{t}<® \end{cases}$$

a) Obtener la serie trigonométrica de Fourier de f(t).
b) Graficar la suma de esa serie en [-4®; 4®].
c) Aprovechar dicha serie para calcular la suma de los recíprocos de los cuadrados de todos los enteros impares positivos.

SOLUCIÓN

Podemos hacer una extensión periódica de esta función, considerándola como de período 2®. De esa manera tenemos T = ® y podemos calcular los coeficientes como:

$$a_n = \frac{1}{\circledR}\int_a^{a+2T} f(t)\cos\frac{n\circledR t}{T}dt$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+2T} f(t)\,\text{sen}\frac{n\circledR t}{T}dt$$

$$a_n = \frac{1}{\circledR}\int_{-\circledR}^{\circledR} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\circledR}\int_{-\circledR}^{0} -\circledR\cos(nt)dt + \frac{1}{\circledR}\int_0^{\circledR} t\cos(nt)dt =$$

$$-\frac{\text{sen}\,n\circledR}{n} - \frac{1}{n^2\circledR} + \frac{\cos n\circledR + n\circledR\,\text{sen}\,n\circledR}{n^2\circledR} = \frac{1}{n^2\circledR}(\cos n\circledR - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{\circledR}\int_{-\circledR}^{\circledR} f(t)\,\text{sen}(nt)dt = \frac{1}{\circledR}\int_{-\circledR}^{0} -\circledR\,\text{sen}(nt)dt + \frac{1}{\circledR}\int_0^{\circledR} t\,\text{sen}(nt)dt =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{\cos n\circledR}{n} + \frac{\text{sen}\,n\circledR - n\circledR\cos n\circledR}{n^2\circledR} = \frac{1}{n}(1 - 2\cos n\circledR)$$

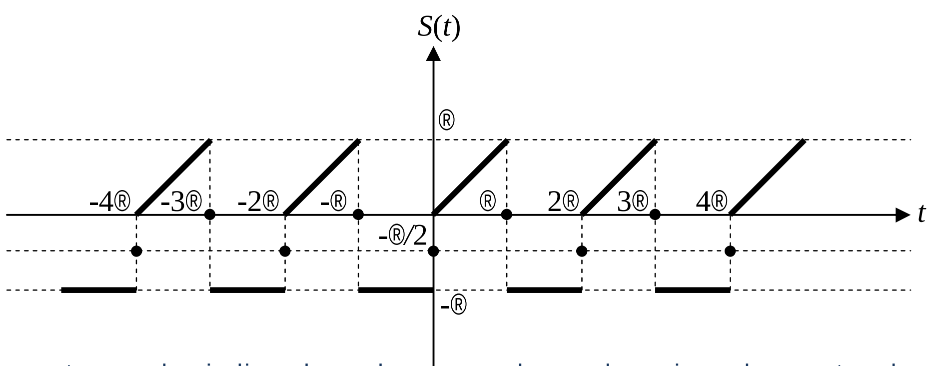
El coeficiente a_0 lo calculamos por separado y da:

$$a_0 = \frac{1}{\circledR}\int_{-\circledR}^{\circledR} f(t)\cos(0t)dt = \frac{1}{\circledR}\int_{-\circledR}^{0} -\circledR dt + \frac{1}{\circledR}\int_0^{\circledR} t dt = -\frac{\circledR}{2}$$

De modo que la serie queda:

$$S(t) = -\frac{\circledR}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\circledR}(\cos n\circledR - 1)\cos nt + \frac{1}{n}(1 - 2\cos n\circledR)\,\text{sen}\,nt\right)$$

b) Para graficar la suma de la serie, recordemos que coincide con la función en los puntos en que ésta es continua, y converge a la semisuma de los límites laterales en los puntos de discontinuidad. Tenemos así:



Los puntos gordos indican los valores que alcanza la serie en los puntos de discontinuidad, que son la semisuma de los límites laterales en cada caso.

c) Para evaluar la serie numérica que nos piden, evaluaremos la serie en un punto adecuado. A todas luces el punto más sencillo para evaluar la serie es t = 0. Allí tenemos que los sen(nt) se hacen todos cero y los cos(nt) se hacen todos unos. De esa manera la serie quedaría:

$$S(0) = -\frac{\circledR}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\circledR}(\cos n\circledR - 1)$$

El valor de cos(n®) será -1 cuando n sea impar, y 1 cuando n sea par. Por ende, resultará que (cos(n®) - 1) es -2 cuando n es impar, y 0 cuando n es par. De esa manera, en la serie sobreviven sólo los términos impares, y en ellos reemplazamos (cos(n®) - 1) por -2. Así podemos escribir:

$$S(0) = -\frac{®}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)^2 ®}$$

Pero por otro lado, y de la gráfica anterior, es S(0) = -®/2. Reemplazando esto arriba queda:

$$-\frac{®}{2} = -\frac{®}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)^2 ®} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)^2 ®} = -\frac{®}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{®^2}{8}$$

Obtuvimos así la suma de los recíprocos de todos los naturales al cuadrado, como nos pedía el enunciado.

3.) Serie compleja de Fourier. Desarrollar en serie compleja de Fourier $f(t) = e^{-\sim t}$, donde -® < ~ < ®. Aprovechar ese resultado para calcular la suma de la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sim^2 + n^2} .$$

SOLUCIÓN

Hallaremos en primer lugar los coeficientes:

$$c_n = \frac{1}{2®} \int_{-®}^{®} e^{\sim t} e^{-i\,nt}\, dt = \frac{1}{2®} \int_{-®}^{®} e^{(\sim - i\,n)t}\, dt = \frac{1}{2®(\sim - in)} e^{(\sim - i\,n)t} \Big|_{-®}^{®} =$$

$$= \frac{1}{2®(\sim - in)} \left(e^{\sim®} e^{-i\,n®} - e^{-\sim®} e^{i\,n®} \right) \overset{\substack{\text{fórmula de Euler} \\ \downarrow}}{=} \frac{\left(e^{\sim®} - e^{-\sim®} \right)}{2®(\sim - in)} \cos n®$$

Luego:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in®t/T} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(e^{\sim®} - e^{-\sim®} \right)}{2®(\sim - in)} \cos(n®) e^{i\,nt} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(e^{\sim®} - e^{-\sim®} \right)(\sim + in)}{2®(\sim^2 + n^2)} \cos(n®) e^{i\,nt}$$

Esta equivalencia es válida en todos los puntos de continuidad de f, en particular en el 0. Si evaluamos ahora la serie en 0, debe dar lo mismo que f(0), esto es, 1. Por otro lado la exponencial e^{int}, evaluada en 0, es igual a 1. De allí tenemos:

$$f(0) = 1 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(e^{\sim®} - e^{-\sim®} \right)(\sim + in)}{2®(\sim^2 + n^2)} \cos(n®)$$

Obsérvese por otra parte que los términos en in con n positivo se anularán con los que tienen n negativo, de modo que podemos escribir:

$$1 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(e^{\sim®} - e^{-\sim®} \right)\sim}{2®(\sim^2 + n^2)} \cos(n®) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(e^{\sim®} - e^{-\sim®} \right)\sim}{2®(\sim^2 + n^2)} (-1)^n \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sim^2 + n^2)} = \frac{2®}{\left(e^{\sim®} - e^{-\sim®} \right)\sim}$$

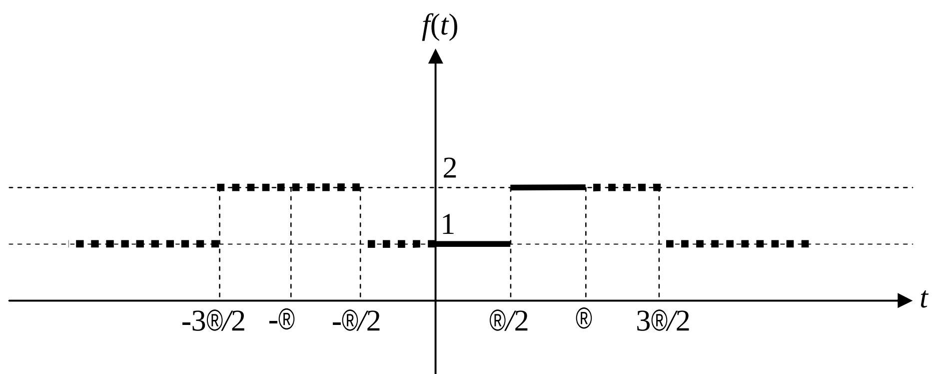
4.) Serie cosenoidal de Fourier. Dada la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t < \frac{®}{2} \\ 2 & , \quad \frac{®}{2} \le \mathrm{t} < ® \end{cases}$$

a) Desarrollarla en serie cosenoidal de Fourier.
b) Hallar la suma de la serie en los intervalos (0; ®/2), (®/2; ®) y en los puntos 0 y ®.
c) Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

SOLUCIÓN

Para que una serie de Fourier sea de sólo cosenos la función debe ser par. Por ende, debemos plantear una extensión periódica de f tal que sea simétrica respecto al eje de ordenadas. Vemos que eso lo logramos planteando que la extensión periódica sea igual a 1 en (-®/2; 0) y a 2 entre (-®; -®/2). Aparece como natural en ese caso que el período sea 2®. La gráfica será:



Donde las líneas gruesas marcan la función original, y las de puntos la extensión periódica. Vemos que para calcular los coeficientes conviene tomar el intervalo que va de -®/2 a 3®/2, de modo de hace sólo dos integrales por coeficiente. Por otra parte sólo debemos calcular los coeficientes a, dado que la función es par y su desarrollo no tendrá senos. Tenemos así:

$$a_n = \frac{1}{®}\int_{-®/2}^{3®/2} f(t)\cos ntdt = \frac{1}{®}\left[\int_{-®/2}^{®/2} 1\cdot\cos ntdt + \int_{®/2}^{3®/2} 2\cdot\cos ntdt\right] = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{3n®}{2}}{n®}$$

Por otro lado es fácil calcular que a_0 es 3. De esa forma:

$$S(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{3n®}{2}}{n®}\cos nt$$

Para calcular la serie que nos piden, tengamos en cuenta que S(0) = 1 (coincide con el valor de la función, que es continua en ese punto). El cos(nt) es 1 en el mismo punto. Así tendremos:

$$S(0) = 1 = \tfrac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3n®}{2}}{n®}$$

Sabemos además que el sen(3n®/2) en esa sumatoria vale 0 para n pares, y alterna entre -1 y 1 para n impares. Más precisamente, vale $(-1)^k$ para n = 2k - 1. De ese modo, sólo sobrevivirán los términos impares, y será:

$$S(0) = 1 = \tfrac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n-1)®} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n-1)®} = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{®}{4}$$

Que es el valor que buscábamos.

Página en donde se encontró esta información

http://www.loseskakeados.com