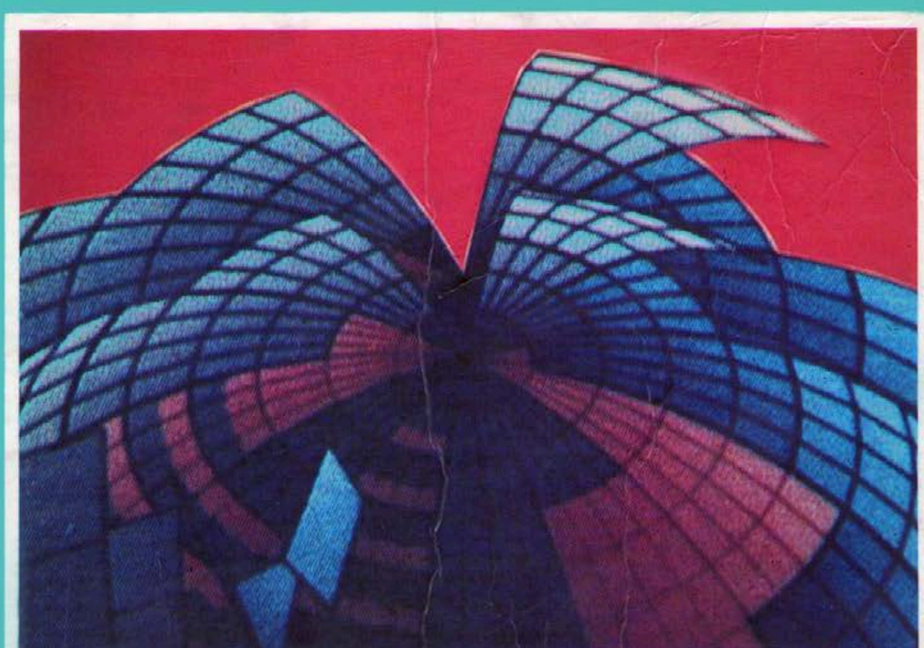
Schaum

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Murray R. Spiegel



McGraw-Hill

Schaum
TRANSFORMADAS DE LAPLACE Spiegel
McGraw-Hill

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

MURRAY R. SPIEGEL, Ph. D.

Profesor de Matemáticas
Rensselaer Polytechnic Institute

TRADUCCION Y ADAPTACION

JOSE D. ARIAS PAEZ
Profesor de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAN • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN 968-422-881-3

Traducido de la primera edición en inglés de
SCHAUM'S OUTLINE OF LAPLACE TRANSFORMS

ISBN 0-07-060231-X

8901234567 ING-91 9087543216

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Septiembre de 1996 en
Programas Educativos, S.A. de C.V.
Calz. Chabacano No. 65-A
Col. Asturias
Delegación Cuauhtémoc,
06850 México, D.F.

Se tiraron 870 ejemplares

PROLOGO

La teoría de las transformadas o transformaciones de Laplace, conocida tambhién con el nombre de cálculo operacional, ha venido a constituir en los últimos años una parte esencial de la matemática requerida por los ingenieros, físicos, matemáticos y otros científicos. Esto se debe a que, además del enorme interés teórico, propio de la materia, los métodos de la transformada de Laplace constituyen un instrumento fácil y efectivo para la solución de mnchos problemas de la ciencia y la ingenieria.

Esta materia se originó cuando se quiso dar justificación rigurosa a ciertas "reglas operacionales" usadas por Heaviside a finales del siglo XIX para resolver algunas ecuaciones de la teoría electromagnética. Estos iuteutos fueron exitosamente coronados a principio del siglo XX gracias a los trabajos de Bromwich, Carson, van der Pol y otros, quienes emplearon la teoría de variable compleja.

Este libro está destinado como auxiliar de los textos corrieutes o tambiéu como texto para un curso formal de teoría de las transformadas de Laplace y sus aplicaciones; además, puede ser de gran utilidad para quienes siguen cursos en matemáticas, física, ingeniería eléctrica, mecánica, flujos de calor y mnchos otros campos en los cuales se emplea el método de la transformada de Laplaee.

Cada capitulo comienza con el enunciado claro de las definiciones, principios y teoremas, junto con sus correspondientes ilustraciones y material descriptivo. Aparecen después conjuntos gradnados de problemas resneltos y propuestos. Los problemas resueltos, que sirven para ilustrar y ampliar la teoría, constituyeu parte eseneial del texto, siu los cuales el lector no obtendrá un conoeimiento seguro de la materia; contienen además una insistente repetición de los principios básicos, lo cual es efectivo y vital para el aprendizaje. En dichos problemas resueltos hay demostraciones de teoremas y deducciones de fórmulas. El gran número de problemas propuestos, eon sus respuestas, constituye material de revisión completo para cada capítulo.

Entre los temas tratados están las propiedades de la transformada de Laplace y sn iuversa, junto con sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, a las ecuaciones iutegrales, a las ecuaciones de diferencias y a los problemas de frontera. El uso de la variable compleja se intrnduce después de la mitad de la ohra; esto se hace, en primer lugar, para que el lector posea mejor conocimiento de la teoría y del poderoso método de la fórmula de inversión compleja y, en segundo lugar, para hallar suficientemente justificado el material tratado previamente. Los capítulos sobre la teoría de variable compleja y las series e integrales de Fourier van dirigidos a aquellos que uo estáu familiarizados con dichos temas.

Se ha tratado mueho más de la materia correspondiente a un primer curso con la inteución de darle flexibilidad e interés a la obra y para que pueda servir también como un libro de referencia en tópicos afines.

Deseo que sea ésta la oportunidad de expresar mis agradecimieutos al personal de la Schaum Pnblishing Company por su espléndida cooperación.

M. R. SPIEGEL

TABLA DE MATERIAS

Capítulo 1

Transformada de Laplace

DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea $F(t)$ una función de t definida para $t > 0$. La *transformada de Laplace* de $F(t)$, denotada por $\mathcal{L}\{F(t)\}$, se define como

$$\mathcal{L}\{F(t)\} \quad = \quad f(s) \quad = \quad \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \tag{1}$$

donde se supone, por ahora, que el parámetro s es real. Posteriormente se verá la utilidad de considerar a s complejo.

Se dice que la transformada de Laplace de $F(t)$ existe cuando la integral (*1*) *converge* para algún valor de s; de otra manera, se dice que no existe. En la página 2 se dan condiciones de suficiencia para la existencia de la transformada de Laplace.

NOTACION

Cuando se indique con mayúscula una función de t, como $F(t)$, $G(t)$, $Y(t)$, ete., la transformada de Laplace de dicha función se denotará por la correspondiente letra miuúscula, es decir, $f(s)$, $g(s)$, $y(s)$, etc. En otros casos se usará el signo ($\sim$) para denotar la transformada de Laplace. Así, por ejemplo, la transformada de Laplace de $u(t)$ es $\tilde{u}(s)$.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

La tabla adyacente muestra las transformadas de Laplace de varias funciones elementales. Para los detalles de su evaluación mediante la definición (1), véanse los problemas 1 y 2. En el apéndice B, páginas 245 a 254, se encontrará una tabla más extensa.

	$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
1.	1	$\dfrac{1}{s} \qquad s > 0$
2.	t	$\dfrac{1}{s^2} \qquad s > 0$
3.	t^n $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}} \qquad s > 0$ *Nota:* n factorial $= n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ También, por definición, $0! = 1$.
4.	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a} \qquad s > a$
5.	sen at	$\dfrac{a}{s^2+a^2} \qquad s > 0$
6.	cos at	$\dfrac{s}{s^2+a^2} \qquad s > 0$
7.	senh at	$\dfrac{a}{s^2-a^2} \qquad s > \lvert a \rvert$
8.	cosh at	$\dfrac{s}{s^2-a^2} \qquad s > \lvert a \rvert$

CONTINUIDAD SECCIONAL O A TRAZOS

Se dice que una función es *seccionalmente continua* o *continua a trazos* en un intervalo $\alpha \leqq t \leqq \beta$ si es posible partir el intervalo en un número finito de subintervalos de tal manera que la función sea continua en cada uno de ellos y tenga límites a izquierda y derecha.

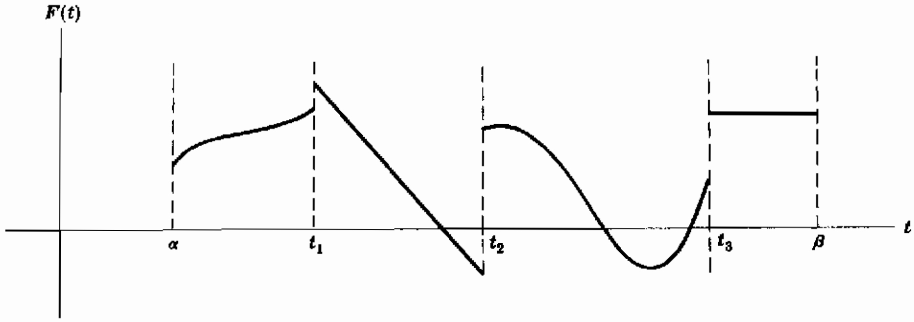


Fig. 1-1

En la Fig. 1-1 se da un ejemplo gráfico de una función seccionalmente continua. Esta función tiene discontinuidades en t_1, t_2 y t_3. Nótese que en t_2, por ejemplo, los límites a derecha y a izquierda se representan por $\lim_{\epsilon \to 0} F(t_2 + \epsilon) = F(t_2 + 0) = F(t_2 +)$ y $\lim_{\epsilon \to 0} F(t_2 - \epsilon) = F(t_2 - 0) = F(t_2 -)$ respectivamente, donde ϵ es positivo.

FUNCIONES DE ORDEN EXPONENCIAL

Si existen constantes reales $M > 0$ y γ tales que para todo $t > N$

$$|e^{-\gamma t} F(t)| < M \qquad \text{o} \qquad |F(t)| < Me^{\gamma t}$$

se dice que $F(t)$ es una *función de orden exponencial* γ cuando $t \to \infty$, o simplemente, que es una *función de orden exponencial*.

Ejemplo 1. $F(t) = t^2$ es de orden exponencial 3 (por ejemplo) ya que $|t^2| = t^2 < e^{3t}$ para todo $t > 0$.

Ejemplo 2. $F(t) = e^{t^3}$ no es de orden exponencial puesto que $|e^{-\gamma t} e^{t^3}| = e^{t^3 - \gamma t}$ puede hacerse más grande que cualquier constante al hacer crecer t.

Intuitivamente, las fórmulas de orden exponencial no pueden "crecer" en valor absoluto más rápidamente que $Me^{\gamma t}$ cuando t crece. En la práctica, sin embargo, esto no constituye restricción alguna ya que M y γ pueden ser tan grandes como se quiera.

Funciones acotadas, tales como sen at o cos at son de orden exponencial.

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Teorema 1-1. Si $F(t)$ es seccionalmente continua en cada intervalo finito $0 \leqq t \leqq N$ de orden exponencial γ para $t > N$, entonces existe la transformada de Laplace $f(s)$ para todo $s > \gamma$.

Para la demostración véase el problema 47. Debe hacerse énfasis en que las condiciones establecidas son *suficientes* para garantizar la existencia de la transformada de Laplace. Sin embargo, si las condiciones no son satisfechas, la transformada de Laplace puede o no existir [véase el problema 32]; así que las condiciones no son *necesarias* para la existencia de la transformada de Laplace.

Para otras condiciones de suficiencia el lector puede ver el problema 145.

ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para los teoremas que siguen se supondrá, a menos que se establezca lo contrario, que todas las funciones satisfacen las condiciones del *teorema 1-1,* de modo que sus transformadas de Laplace existen.

1. Propiedad de la linealidad.

Teorema 1-2. Si c_1 y c_2 son constantes y $F_1(t)$ y $F_2(t)$ son funciones cuyas transformadas de Laplace son, respectivamente, $f_1(s)$ y $f_2(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} \;=\; c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} \;=\; c_1f_1(s) + c_2f_2(s) \tag{2}$$

Este resultado puede extenderse fácilmente a más de dos funciones.

Ejemplo.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} &= 4\mathcal{L}\{t^2\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\}\\ &= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 5\left(\frac{1}{s+1}\right)\\ &= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1}\end{aligned}$$

El símbolo $\mathcal{L}$, que transforma $F(t)$ en $f(s)$, frecuentemente se llama el *operador transformada de Laplace.* Debido a la propiedad de $\mathcal{L}$ expresada en este teorema, se dice que $\mathcal{L}$ es un *operador lineal* o que tiene la *propiedad de linealidad.*

2. Primera propiedad de traslación.

Teorema 1-3. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} \;=\; f(s-a) \tag{3}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \dfrac{s}{s^2+4}$, se tiene que

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \;=\; \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

3. Segunda propiedad de traslación.

Teorema 1-4. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ y $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$, entonces

$$\mathcal{L}\{G(t)\} \;=\; e^{-as}f(s) \tag{4}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{t^3\} = \dfrac{3!}{s^4} = \dfrac{6}{s^4}$, la transformada de Laplace de la función

$$G(t) \;=\; \begin{cases}(t-2)^3 & t > 2\\ 0 & t < 2\end{cases}$$

es $6e^{-2s}/s^4$.

4. Propiedad del cambio de escala.

Teorema 1-5. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{F(at)\} \;=\; \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right) \tag{5}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$, se tiene

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(s/3)^2+1} \;=\; \frac{3}{s^2+9}$$ tal como puede ser verificado directamente.

5. Transformada de Laplace de las derivadas.

Teorema 1-6. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0) \tag{6}$$

si $F(t)$ es continua para $0 \leqq t \leqq N$ y de orden exponencial para $t > N$ mientras que $F'(t)$ es seccionalmente continua para $0 \leqq t \leqq N$.

Ejemplo. Si $F(t) = \cos 3t$, entonces $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{s}{s^2+9}$ y se tendrá

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\{-3 \operatorname{sen} 3t\} = s\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

Este método es útil para calcular transformadas de Laplace sin integración [véase el problema 15].

Teorema 1-7. Si en el *teorema 1-6*, $F(t)$ no satisface la continuidad en $t = 0$, pero lim $F(t) = F(0+)$ existe [aunque no sea igual a $F(0)$, el cual puede o no existir], entonces

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0+) \tag{7}$$

Teorema 1-8. Si en el *teorema 1-6*, $F(t)$ deja de ser continua en $t = a$, entonces

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0) - e^{-as}\{F(a+) - F(a-)\} \tag{8}$$

donde $F(a+) - F(a-)$ se llama el *salto* en la discontinuidad $t = a$. Pueden hacerse las modificaciones adecuadas para más de un salto.

Teorema 1-9. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - s\,F(0) - F'(0) \tag{9}$$

si $F(t)$ y $F'(t)$ son continuas para $0 \leqq t \leqq N$ y de orden exponencial para $t > N$; además, si $F''(t)$ es seccionalmente continua para $0 \leqq t \leqq N$.

Si $F(t)$ y $F'(t)$ tienen discontinuidades, pueden efectuarse sobre (9) las modificaciones adecuadas para más de un salto, según las sugerencias de los *teoremas 1-7* y *1-8*.

Teorema 1-10. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - s\,F^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0) \tag{10}$$

si $F(t), F'(t), \ldots, F^{(n-1)}(t)$ son continuas para $0 \leqq t \leqq N$ y de orden exponencial para $t > N$, además, si $F^{(n)}(t)$ es seccionalmente continua para $0 \leqq t \leqq N$.

6. Transformada de Laplace de integrales.

Teorema 1-11. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s} \tag{11}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = \dfrac{2}{s^2+4}$, se tiene que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \operatorname{sen} 2u\,du\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

como se puede verificar directamente.

7. Multiplicación por t^n.

Teorema 1-12. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s) \tag{12}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \dfrac{1}{s-2}$, se tendrá

$$\mathcal{L}\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

8. División por t.

Teorema 1-13. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du \tag{13}$$

siempre que exista $\lim_{t\to 0} F(t)/t$.

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ y $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$, se tiene que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(1/s)$$

9. Funciones periódicas.

Teorema 1-14. Sea $F(t)$ con período $T > 0$ tal que $F(t+T) = F(t)$ [véase Fig. 1-2].

Entonces
$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t)\,dt}{1-e^{-sT}} \tag{14}$$

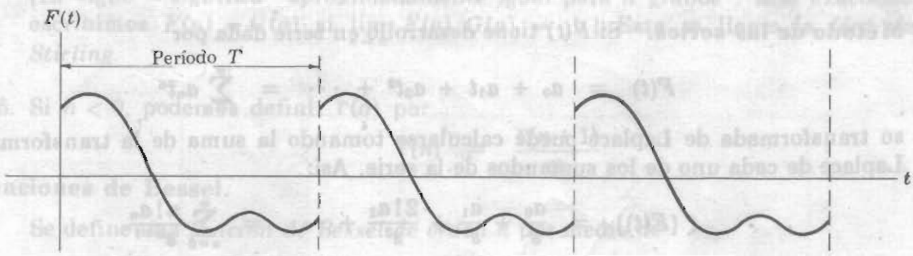


Fig. 1-2

10. Comportamiento de $f(s)$ cuando $s \to \infty$.

Teorema 1-15. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0 \tag{15}$$

11. Teorema del valor inicial.

Teorema 1-16. Si existen los límites indicados, entonces

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} s\,f(s) \tag{16}$$

12. Teorema del valor final.

Teorema 1-17. Si existen los valores indicados, entonces

$$\lim_{t \to \infty} F(t) \quad = \quad \lim_{s \to 0} s\,f(s) \tag{17}$$

13. Generalización del teorema del valor inicial.

Si $\lim_{t \to 0} F(t)/G(t) = 1$, se dice que $F(t)$ está próxima a $G(t)$ para valores de t cercanos a $t = 0$ [t pequeña] y se escribe $F(t) \sim G(t)$ para $t \to 0$.

Análogamente, si $\lim_{s \to \infty} f(s)/g(s) = 1$, se dice que $f(s)$ *está próxima a* $g(s)$ para grandes valores de s y se escribe $f(s) \sim g(s)$ cuando $s \to \infty$.

Con esta notación se tiene la siguiente generalización del *teorema 1-16.*

Teorema 1-18. Si $F(t) \sim G(t)$ cuando $t \to 0$, entonces $f(s) \sim g(s)$ cuando $s \to \infty$; se supone aquí que $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ y $g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$.

14. Generalización del teorema del valor final.

Si $\lim_{t \to \infty} F(t)/G(t) = 1$, escribimos $F(t) \sim G(s)$ cuando $t \to \infty$. Análogamente, si $\lim_{s \to 0} f(s)/g(s) = 1$, escribimos $f(s) \sim g(s)$ cuando $s \to 0$. Tenemos entonces la siguiente generalización del *teorema 1-17.*

Teorema 1-19. Si $F(t) \sim G(t)$ cuando $t \to \infty$, entonces $f(s) \sim g(s)$ cuando $s \to 0$; aquí, $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ y $g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$.

METODOS PARA CALCULAR TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Existen varios métodos para calcular transformadas de Laplace, como se indica en la lista que aparece a continuación.

1. Método directo. Haciendo uso directo de la definición *(1)*.

2. Método de las series. Si $F(t)$ tiene desarrollo en serie dada por

$$F(t) \quad = \quad a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{18}$$

su transformada de Laplace puede calcularse tomando la suma de la transformada de Laplace de cada uno de los sumandos de la serie. Así:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} \quad = \quad \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!\,a_2}{s^3} + \cdots \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{s^{n+1}} \tag{19}$$

Una condición bajo la cual este resultado es válido es que la serie *(19)* sea convergente para $s > \gamma$. Véanse los problemas 34, 36, 39 y 48.

3. Método de las ecuaciones diferenciales. Consiste en hallar una ecuación diferencial que sea satisfecha por $F(t)$ y aplicar luego los teoremas anteriores. Véanse los problemas 34 y 48.

4. Derivación con respecto a un parámetro. Véase el problema 20.

5. Diversos métodos. Comprenden diferentes artificios tales como los indicados en los teoremas anteriores, por ejemplo, en el *teorema 1-13.*

6. Mediante el uso de tablas. Véase el apéndice.

EVALUACION DE INTEGRALES

Si $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, entonces

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt \quad = \quad f(s) \tag{20}$$

Tomando el límite cuando $s \to 0$, tenemos que

$$\int_0^\infty F(t)\,dt \quad = \quad f(0) \tag{21}$$

suponiendo que la integral sea convergente.

Los resultados (*20*) y (*21*) presentan frecuente utilidad para calcular varias integrales. Véanse los problemas 45 y 46.

ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

I. La función gamma.

Si $n > 0$, la función gamma se define por

$$\Gamma(n) \quad = \quad \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\,du \tag{22}$$

Las siguientes son algunas propiedades importantes de la función gamma.

1. $$\Gamma(n+1) \quad = \quad n\,\Gamma(n), \qquad n > 0$$

   Como $\Gamma(1) = 1$, entonces $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2! = 2$, $\Gamma(4) = 3!$ y en general $\Gamma(n+1) = n!$, si n es un entero positivo. Por esta razón la función gamma se llama a veces función factorial

2. $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) \quad = \quad \sqrt{\pi}$$

3. $$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) \quad = \quad \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}, \qquad 0 < p < 1$$

4. Para n convenientemente grande,

   $$\Gamma(n+1) \quad \sim \quad \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

   [El signo $\sim$ significa "aproximadamente igual para n grande". Más exactamente, escribimos $F(n) \sim G(n)$ si $\lim_{n\to\infty} F(n)/G(n) = 1$.] Esta se llama la *fórmula de Stirling*.

5. Si $n < 0$, podemos definir $\Gamma(n)$ por

   $$\Gamma(n) \quad = \quad \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

II. Funciones de Bessel.

Se define una *función de Bessel de orden n* por medio de

$$J_n(t) \quad = \quad \frac{t^n}{2^n\,\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\} \tag{23}$$

Algunas propiedades importantes son

1. $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ si n es un entero positivo.
2. $J_{n+1}(t) = \dfrac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$
3. $\dfrac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$. Si $n = 0$, se tiene $J_0'(t) = -J_1(t)$.
4. $e^{\frac{1}{2}t(u-1/u)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) u^n$

   Esta se llama la *función generadora* para las funciones de Bessel.

5. $J_n(t)$ satisface la *ecuación diferencial de Bessel*.

$$t^2 Y''(t) + t\,Y'(t) + (t^2 - n^2)\,Y(t) \quad = \quad 0$$

Es conveniente definir $J_n(it) = i^{-n} I_n(t)$; $I_n(t)$ se llama la *función modificada de Bessel de orden n*.

III. La función de error se define como

$$\operatorname{fer}(t) \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}\,du \tag{24}$$

IV. La función complementaria de error se define como

$$\operatorname{fce}(t) = 1 - \operatorname{fer}(t) \quad = \quad 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2} du \tag{25}$$

V. Las integrales del seno y del coseno se definen por

$$\operatorname{Is}(t) \quad = \quad \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du \tag{26}$$

$$\operatorname{Ic}(t) \quad = \quad \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du \tag{27}$$

VI. La integral exponencial se define como

$$\operatorname{Ie}(t) \quad = \quad \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du \tag{28}$$

VII. Función escalonada unitaria, llamada también *función unitaria de Heaviside,* se define por

$$\mathcal{U}(t-a) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \tag{29}$$

Véase la Fig. 1-3.

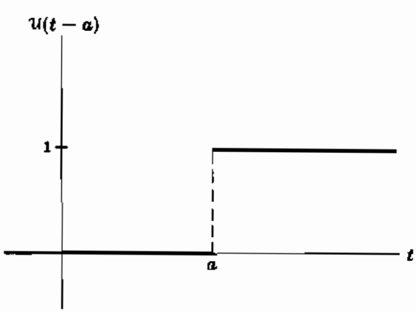


Fig. 1-3

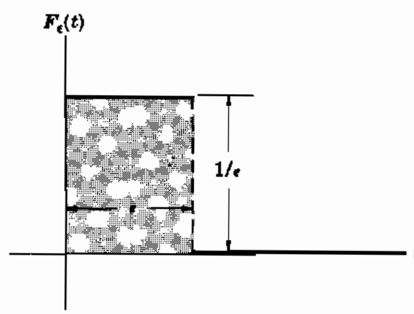


Fig. 1-4

VIII. Función de impulso unitario o función delta de Dirac.

Consideremos la función

$$F_\epsilon(t) \quad = \quad \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leqq t \leqq \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases} \tag{30}$$

donde $\epsilon > 0$; su gráfica aparece en la Fig. 1-4.

Geométricamente es evidente que cuando $\epsilon \to 0$, la altura de la región rectangular sombreada crece indefinidamente y la base decrece, en tal forma que el área es siempre igual a 1, es decir $\int_0^\infty F_\epsilon(t)\,dt = 1$.

Esta idea ha llevado a algunos ingenieros y físicos a pensar en una función limitante, denotada por $\delta(t)$, aproximada por $F_\epsilon(t)$ cuando $\epsilon \to 0$. Esta función limitante ha sido llamada la *función de impulso unitario* o *función delta de Dirac*. Algunas de sus propiedades son:

1. $\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1$

2. $\int_0^\infty \delta(t)\,G(t)\,dt = G(0)$ para cualquier función continua $G(t)$.

3. $\int_0^\infty \delta(t-a)\,G(t)\,dt = G(a)$ para cualquier función continua $G(t)$.

A pesar de que, matemáticamente hablando, tal función no existe, pueden formalizarse algunas manipulaciones y operaciones con ella.

IX. Funciones nulas. Si $\mathcal{N}(t)$ es una función de t, tal que para todo $t>0$

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)\,du = 0 \tag{31}$$

$\mathcal{N}(t)$ se llamará una *función nula.*

Ejemplo. La función $F(t) = \begin{cases} 1 & t = 1/2 \\ -1 & t = 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ es una función nula.

En general, cualquier función que valga cero en todas partes, excepto, a lo más, en un conjunto enumerable de puntos [es decir, un conjunto de puntos que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales 1, 2, 3, ...] es una función nula.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

En la tabla siguiente aparece una lista de transformadas de Laplace de varias funciones especiales. Para una lista más extensa véase el apéndice, página B .

Tabla de transformadas de Laplace de funciones especiales

	$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
1.	t^n	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ Nótese que si $n = 0,1,2,$ ésta se reduce al 3 en la tabla de la pág. 1.
2.	$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
3.	$J_n(at)$	$\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}$
4.	$\operatorname{sen}\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\,e^{-1/4s}$
5.	$\dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}\,e^{-1/4s}$

Tabla de transformadas de Laplace de funciones especiales (cont.)

	$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
6.	fer(t)	$\dfrac{e^{s^2/4}}{s}$ fce$(s/2)$
7.	fer$(\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}$
8.	Is(t)	$\dfrac{1}{s}\tan^{-1}\dfrac{1}{s}$
9.	Ic(t)	$\dfrac{\ln(s^2+1)}{2s}$
10.	Ie(t)	$\dfrac{\ln(s+1)}{s}$
11.	$\mathcal{U}(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
12.	$\delta(t)$	1
13.	$\delta(t-a)$	e^{-as}
14.	$\mathcal{N}(t)$	0

Problemas resueltos

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

1. Demostrar que (a) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $s>0$; (b) $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$, $s>0$; (c) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s>a$.

(a)
$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^P = \lim_{P\to\infty}\frac{1-e^{-sP}}{s} = \frac{1}{s} \quad \text{si } s>0$$

(b)
$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}(t)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P t\,e^{-st}\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty} \left.(t)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - (1)\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right|_0^P = \lim_{P\to\infty}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sP}}{s^2} - \frac{Pe^{-sP}}{s}\right)$$
$$= \frac{1}{s^2} \quad \text{si } s>0$$

Aquí hemos utilizado la integración por partes.

(c)
$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at})\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-(s-a)t}\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty} \left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^P = \lim_{P\to\infty}\frac{1-e^{-(s-a)P}}{s-a} = \frac{1}{s-a} \quad \text{si } s > a$$

Para métodos que no utilizan directamente la integración, véase el problema 15.

Demostrar que (a) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, (b) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ si $s > 0$.

(a)
$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}(-s\operatorname{sen} at - a\cos at)}{s^2+a^2}\right|_0^P$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left\{\frac{a}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sP}(s\operatorname{sen} aP + a\cos aP)}{s^2+a^2}\right\}$$
$$= \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{si } s > 0$$

(b)
$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\cos at\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}(-s\cos at + a\operatorname{sen} at)}{s^2+a^2}\right|_0^P$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left\{\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sP}(s\cos aP - a\operatorname{sen} aP)}{s^2+a^2}\right\}$$
$$= \frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{si } s > 0$$

Aquí hemos usado los siguientes resultados

$$\int e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\,dt = \frac{e^{\alpha t}(\alpha\operatorname{sen}\beta t - \beta\cos\beta t)}{\alpha^2+\beta^2} \tag{1}$$

$$\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt = \frac{e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t + \beta\operatorname{sen}\beta t)}{\alpha^2+\beta^2} \tag{2}$$

Otro método. Suponiendo que el resultado del problema 1(*c*) sea válido para números complejos (lo cual puede demostrarse), tenemos

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} \tag{3}$$

Pero $e^{iat} = \cos at + i\operatorname{sen} at$. Entonces

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cos at + i\operatorname{sen} at) \tag{4}$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt + i\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt = \mathcal{L}\{\cos at\} + i\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\}$$

Al igualar las partes reales e imaginarias de (3) y (4) se obtiene

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad \mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

3. Demostrar que (*a*) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$, (*b*) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$ si $s > |a|$.

(*a*)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st} e^{-at}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \text{para } s > |a|
\end{aligned}$$

Otro método. Usando la linealidad de la transformada de Laplace se obtiene directamente que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \text{para } s > |a|
\end{aligned}$$

(*b*) Como en la parte (*a*),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad \text{para } s > |a|
\end{aligned}$$

4. Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$ si $F(t) = \begin{cases} 5 & 0 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$

Por definición,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = \int_0^3 e^{-st}(5)\, dt + \int_3^\infty e^{-st}(0)\, dt \\
&= 5\int_0^3 e^{-st}\, dt = 5\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^3 = \frac{5(1 - e^{-3s})}{s}
\end{aligned}$$

PROPIEDAD DE LINEALIDAD

5. Demostrar la *propiedad de linealidad* [*teorema 1-2*].

Sean $\mathcal{L}\{F_1(t)\} = f_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} F_1(t)\, dt$ y $\mathcal{L}\{F_2(t)\} = f_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} F_2(t)\, dt$. Entonces, si c_1 y c_2 son dos constantes cualesquiera,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\}\, dt \\
&= c_1\int_0^\infty e^{-st} F_1(t)\, dt + c_2\int_0^\infty e^{-st} F_2(t)\, dt \\
&= c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} \\
&= c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)
\end{aligned}$$

Este resultado se puede generalizar fácilmente [véase el problema 61].

6. **Hallar** $\mathcal{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\operatorname{sen} 4t + 2\cos 2t\}$.

Por la propiedad de linealidad [problema 5] se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\operatorname{sen} 4t + 2\cos 2t\} &= 4\mathcal{L}\{e^{5t}\} + 6\mathcal{L}\{t^3\} - 3\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 4t\} + 2\mathcal{L}\{\cos 2t\}\\ &= 4\left(\frac{1}{s-5}\right) + 6\left(\frac{3!}{s^4}\right) - 3\left(\frac{4}{s^2+16}\right) + 2\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\\ &= \frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{12}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+4}\end{aligned}$$

donde $s > 5$.

PROPIEDADES DE TRASLACION Y CAMBIO DE ESCALA

7. Demostrar la *primera propiedad de traslación.* Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$.

Tenemos que $$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = f(s)$$

Entonces $$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at} F(t)\}\,dt\\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)\,dt = f(s-a)\end{aligned}$$

8. **Hallar** (*a*) $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{e^{-2t}\operatorname{sen} 4t\}$, (*c*) $\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\}$, (*d*) $\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\operatorname{sen} 6t)\}$.

(*a*) $\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2!}{s^3} = \dfrac{2}{s^3}$. Entonces $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\} = \dfrac{2}{(s-3)^3}$.

(*b*) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 4t\} = \dfrac{4}{s^2+16}$. Entonces $\mathcal{L}\{e^{-2t}\operatorname{sen} 4t\} = \dfrac{4}{(s+2)^2+16} = \dfrac{4}{s^2+4s+20}$.

(*c*) $\mathcal{L}\{\cosh 5t\} = \dfrac{s}{s^2-25}$. Entonces $\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\} = \dfrac{s-4}{(s-4)^2-25} = \dfrac{s-4}{s^2-8s-9}$.

Otro método.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\} &= \mathcal{L}\left\{e^{4t}\left(\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{9t}+e^{-t}\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-9}+\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{s-4}{s^2-8s-9}\end{aligned}$$

(*d*) $$\begin{aligned}\mathcal{L}\{3\cos 6t - 5\operatorname{sen} 6t\} &= 3\mathcal{L}\{\cos 6t\} - 5\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 6t\}\\ &= 3\left(\frac{s}{s^2+36}\right) - 5\left(\frac{6}{s^2+36}\right) = \frac{3s-30}{s^2+36}\end{aligned}$$

Entonces $$\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\operatorname{sen} 6t)\} = \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36} = \frac{3s-24}{s^2+4s+40}$$

9. Demostrar la *segunda propiedad de traslación:*

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ y $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$, entonces $\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt = \int_0^a e^{-st}G(t)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}G(t)\,dt \\
&= \int_0^a e^{-st}(0)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}F(t-a)\,dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}F(t-a)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(u+a)}F(u)\,du \\
&= e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}F(u)\,du \\
&= e^{-as}f(s)
\end{aligned}$$

donde se ha hecho la sustitución $t = u + a$.

10. Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$ si $F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & t > 2\pi/3 \\ 0 & t < 2\pi/3 \end{cases}$.

Método 1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^{2\pi/3} e^{-st}(0)\,dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st}\cos(t-2\pi/3)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(u+2\pi/3)}\cos u\,du \\
&= e^{-2\pi s/3}\int_0^\infty e^{-su}\cos u\,du = \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Método 2. Puesto que $\mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$, como caso particular del problema 9 cuando $a = 2\pi/3$, se deduce que

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+1}$$

11. Demostrar la *propiedad del cambio de escala:* Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $\mathcal{L}\{F(at)\} = \dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{s}{a}\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st}F(at)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(u/a)}F(u)\,d(u/a) \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-su/a}F(u)\,du \\
&= \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}$$

haciendo uso de la transformación $t = u/a$.

12. Dado que $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \tan^{-1}(1/s)$, hallar $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{sen} at}{t}\right\}$.

Por el problema 11,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} at}{at}\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} at}{t}\right\} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\{1/(s/a)\} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(a/s)$$

Luego $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{sen} at}{t}\right\} = \tan^{-1}(a/s)$.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE LAS DERIVADAS

13. Demostrar el *teorema 1-6:* Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0)$.

Usando la integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}F'(t)\,dt \\
&= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-st}F(t)\Big|_0^P + s\int_0^P e^{-st}F(t)\,dt\right\} \\
&= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-sP}F(P) - F(0) + s\int_0^P e^{-st}F(t)\,dt\right\} \\
&= s\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt - F(0) \\
&= s\,f(s) - F(0)
\end{aligned}$$

por el hecho de que $F(t)$ es de orden exponencial γ cuando $t\to\infty$, de manera que $\lim_{P\to\infty} e^{-sP}F(P) = 0$ para

Para los casos en que $F(t)$ no es continua en $t = 0$, véase el problema 68.

14. Demostrar el *teorema 1-9.* Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - s\,F(0) - F'(0)$.

Por el problema 13,

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\,g(s) - G(0)$$

Sea $G(t) = F'(t)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F''(t)\} &= s\,\mathcal{L}\{F'(t)\} - F'(0) \\
&= s\,[s\,\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0)] - F'(0) \\
&= s^2\mathcal{L}\{F(t)\} - s\,F(0) - F'(0) \\
&= s^2 f(s) - s\,F(0) - F'(0)
\end{aligned}$$

La generalización a derivadas de orden superior puede demostrarse haciendo uso de la inducción matemática [véase el problema 65].

15. Haciendo uso del *teorema 1-6,* deducir las siguientes transformadas de Laplace:
(*a*) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$, (*c*) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$.

Bajo las condiciones dadas, el *teorema 1-6* establece que

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0) \qquad (1)$$

(*a*) Sea $F(t) = 1$. Entonces $F'(t) = 0$, y (*1*) será

$$\mathcal{L}\{0\} = 0 = s\,\mathcal{L}\{1\} - 1 \qquad \text{o} \qquad \mathcal{L}\{1\} = 1/s \tag{2}$$

(*b*) Sea $F(t) = t$. Entonces $F'(t) = 1$, $F(0) = 0$ y (*1*) será, haciendo uso de la parte (*a*),

$$\mathcal{L}\{1\} = 1/s = s\,\mathcal{L}\{t\} - 0 \qquad \text{o} \qquad \mathcal{L}\{t\} = 1/s^2 \tag{3}$$

Mediante la inducción matemática se puede demostrar que $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$ para cualquier entero positivo n.

(*c*) Sea $F(t) = e^{at}$. Entonces $F'(t) = ae^{at}$, $F(0) = 1$ y (*1*) será entonces

$$\mathcal{L}\{ae^{at}\} = s\,\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1, \text{ es decir, } a\,\mathcal{L}\{e^{at}\} = s\,\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1 \quad \text{o sea que} \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$$

16. Usando el *teorema 1-9* demostrar que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$.

Sea $F(t) = \operatorname{sen} at$. Entonces $F'(t) = a\cos at$, $F''(t) = -a^2 \operatorname{sen} at$, $F(0) = 0$, $F'(0) = a$. Entonces del resultado

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{F(t)\} - s\,F(0) - F'(0)$$

se tiene que

$$\mathcal{L}\{-a^2 \operatorname{sen} at\} = s^2\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} - s(0) - a$$

es decir,

$$-a^2\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = s^2\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} - a$$

o sea que

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

TRANSFORMADAS DE LAPLACE EN INTEGRALES

17. Demostrar el *teorema 1-11:* Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = f(s)/s$.

Sea $G(t) = \int_0^t F(u)\,du$. Entonces $G'(t) = F(t)$ y $G(0) = 0$. Tomando la transformada de Laplace a ambos lados se obtiene

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\,\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

Así que

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s} \qquad \text{o} \qquad \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

18. Hallar $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du\right\}$.

Del ejemplo que sigue al *teorema 1-13* se tiene que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

Y, por el problema 17,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

MULTIPLICACION POR POTENCIAS DE t

19. Demostrar el *teorema 1-12:*

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tenemos
$$f(s) \quad = \quad \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

Entonces por la regla de Leibnitz para diferenciación bajo el signo integral,

$x(t) \rightarrow y(t)$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

$y(t) = t\,x(t)$

$x_1 \rightarrow y_1 = t\,x_1$

$$\frac{df}{ds} \quad = \quad f'(s) \quad = \quad \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \quad = \quad \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)\, dt$$

$$= \quad \int_0^\infty -te^{-st} F(t)\, dt$$

$$= \quad -\int_0^\infty e^{-st}\{t\,F(t)\}\, dt$$

$$= \quad -\mathcal{L}\{t\,F(t)\}$$

Así que
$$\mathcal{L}\{t\,F(t)\} \quad = \quad -\frac{df}{ds} \quad = \quad -f'(s) \tag{1}$$
lo cual demuestra el teorema para $n = 1$.

Para establecer el teorema en forma general usamos la *inducción matemática.* Supongamos que el teorema es cierto para $n = k$, es decir, supongamos que

$$\int_0^\infty e^{-st}\{t^k F(t)\}\, dt \quad = \quad (-1)^k f^{(k)}(s) \tag{2}$$

Entonces
$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\{t^k F(t)\}\, dt \quad = \quad (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

o usando la regla de Leibnitz,
$$-\int_0^\infty e^{-st}\{t^{k+1} F(t)\}\, dt \quad = \quad (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

es decir
$$\int_0^\infty e^{-st}\{t^{k+1} F(t)\}\, dt \quad = \quad (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(s) \tag{3}$$

Se deduce, entonces, que *si* (2) es cierta, es decir, si el teorema es cierto para $n = k$, entonces (3) es cierta, es decir, el teorema resulta válido para $n = k + 1$. Pero, por (1), el teorema es cierto para $n = 1$. Entonces es válido para $n = 1 + 1 = 2$, para $n = 2 + 1 = 3$, etc., así que es válido para todo valor entero positivo de n.

Para ser rigurosos, necesitamos demostrar que la regla de Leibnitz puede aplicarse aquí. Para tal efecto, véase el problema 166.

20. Hallar (a) $\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} at\}$, (b) $\mathcal{L}\{t^2 \cos at\}$.

(a) Como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$, por el problema 19 tenemos que

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} at\} \quad = \quad -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) \quad = \quad \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

Otro método.

Como $$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \frac{s}{s^2+a^2}$$

al diferenciar con respecto al parámetro a [usando la regla de Leibnitz] obtenemos

$$\frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\{-t\operatorname{sen} at\}\,dt = -\mathcal{L}\{t\operatorname{sen} at\}$$

$$= \frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = -\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

de donde

$$\mathcal{L}\{t\operatorname{sen} at\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

Nótese que el resultado es equivalente a $\dfrac{d}{da}\mathcal{L}\{\cos at\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{d}{da}\cos at\right\}$.

(*b*) Como $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, tenemos, por el problema 19,

$$\mathcal{L}\{t^2\cos at\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{2s^3-6a^2s}{(s^2+a^2)^3}$$

Usando el segundo método de la parte (*a*) podemos escribir

$$\mathcal{L}\{t^2\cos at\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{d^2}{da^2}(\cos at)\right\} = -\frac{d^2}{da^2}\mathcal{L}\{\cos at\}$$

que da el mismo resultado.

DIVISION POR t

21. Demostrar el *teorema 1-13:* Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $\mathcal{L}\left\{\dfrac{F(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty f(u)\,du.$

Sea $G(t) = \dfrac{F(t)}{t}$. Entonces $F(t) = t\,G(t)$. Tomando la transformada de Laplace a ambos lados y usando el problema 19, tenemos

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{G(t)\} \qquad \text{o} \qquad f(s) = -\frac{dg}{ds}$$

Ahora, integrando obtenemos

$$g(s) = -\int_\infty^s f(u)\,du = \int_s^\infty f(u)\,du \tag{1}$$

es decir,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du$$

Nótese que en (*1*) la "constante de integración" puede escogerse en tal forma que $\lim g(s) = 0$ [véase el *teorema 1-15*].

22. (*a*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty f(u)\,du$ suponiendo que las integrales convergen.

(*b*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

(*a*) Del problema 21 tenemos

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_s^\infty f(u)\,du$$

Entonces, pasando al límite cuando $s \to 0+$, y bajo la hipótesis de la convergencia de las integrales, se obtiene el resultado.

(*b*) Sea $F(t) = \operatorname{sen} t$ así que $f(s) = 1/(s^2+1)$ en la parte (*a*). Entonces

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt \quad = \quad \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} \quad = \quad \tan^{-1} u\Big|_0^\infty \quad = \quad \frac{\pi}{2}$$

FUNCIONES PERIODICAS

23. Demostrar el *teorema 1-14:* Si $F(t)$ tiene período $T > 0$ entonces

$$\mathcal{L}\{F(t)\} \quad = \quad \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st} F(t)\,dt}{1 - e^{-sT}}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} \quad &= \quad \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt \\
&= \quad \int_0^T e^{-st} F(t)\,dt \;+\; \int_T^{2T} e^{-st} F(t)\,dt \;+\; \int_{2T}^{3T} e^{-st} F(t)\,dt \;+\; \cdots
\end{aligned}$$

En la segunda integral, sea $t = u + T$; en la tercera integral sea $t = u + 2T$, etc. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} \quad &= \quad \int_0^T e^{-su} F(u)\,du \;+\; \int_0^T e^{-s(u+T)} F(u+T)\,du \;+\; \int_0^T e^{-s(u+2T)} F(u+2T)\,du \;+\; \cdots \\
&= \quad \int_0^T e^{-su} F(u)\,du \;+\; e^{-sT}\int_0^T e^{-su} F(u)\,du \;+\; e^{-2sT}\int_0^T e^{-su} F(u)\,du \;+\; \cdots \\
&= \quad (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots)\int_0^T e^{-su} F(u)\,du \\
&= \quad \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-su} F(u)\,du}{1 - e^{-sT}}
\end{aligned}$$

La periodicidad se utilizó cuando escribimos $F(u+T) = F(u)$, $F(u+2T) = F(u), \ldots$, y cuando usamos el hecho de que

$$1 \;+\; r \;+\; r^2 \;+\; r^3 \;+\; \cdots \quad = \quad \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1$$

24. (*a*) Hacer la gráfica de la función

$$F(t) \quad = \quad \begin{cases} \operatorname{sen} t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

extendida periódicamente con período 2π.

(*b*) Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

(*a*) La gráfica aparece en la Fig. 1-5.

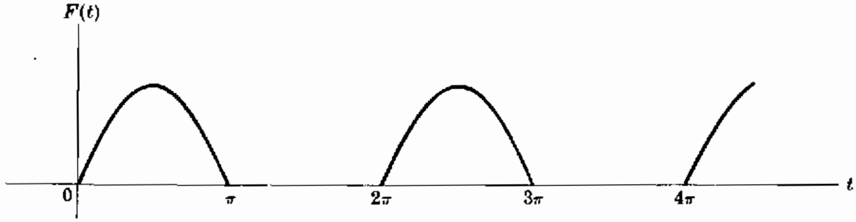


Fig. 1-5

(*b*) Como $T = 2\pi$, por el problema 23 tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}F(t)\,dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{e^{-st}(-s\operatorname{sen} t - \cos t)}{s^2+1}\right\}\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\} = \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}\end{aligned}$$

usando la integral (*1*) del problema 2.

La gráfica de la función $F(t)$ se llama *curva sinusoidal rectificada de semi-onda*

TEOREMAS DE LOS VALORES INICIAL Y FINAL

25. Demostrar el *teorema del valor inicial:* $\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} s\,f(s)$.

Por el problema 13,

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F'(t)\,dt = s\,f(s) - F(0) \tag{1}$$

Pero si $F'(t)$ es seccionalmente continua y de orden exponencial, tenemos

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}F'(t)\,dt = 0 \tag{2}$$

Entonces, tomando el límite cuando $s\to\infty$ en (*1*), y con la hipótesis de que $F(t)$ es continua en $t = 0$, encontramos que

$$0 = \lim_{s\to\infty} s\,f(s) - F(0) \qquad \text{o} \qquad \lim_{s\to\infty} s\,f(s) = F(0) = \lim_{t\to 0} F(t)$$

Si $F(t)$ no es continua en $t = 0$, el resultado es aún válido, pero tendremos que usar el *teorema 1-7.*

26. Demostrar el *teorema del valor final:* $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,f(s)$.

Por el problema 13,

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F'(t)\,dt = s\,f(s) - F(0)$$

El límite de la izquierda cuando $s\to 0$ es

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} e^{-st}F'(t)\,dt &= \int_0^{\infty} F'(t)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^{P} F'(t)\,dt \\ &= \lim_{P\to\infty}\{F(P) - F(0)\} = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(0)\end{aligned}$$

El límite de la derecha cuando $s\to 0$ es

$$\lim_{s\to 0} s\,f(s) - F(0)$$

Así,

$$\lim_{t\to\infty} F(t) - F(0) = \lim_{s\to 0} s\,f(s) - F(0)$$

o, como se esperaba,

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,f(s)$$

Si $F(t)$ no es continua, el resultado aún es válido, pero para ver esto debemos utilizar el *teorema 1-7.*

27. Ilustrar los problemas 25 y 26 para la función $F(t) = 3e^{-2t}$.

Tenemos $F(t) = 3e^{-2t}$, $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{3}{s+2}$.

Por el teorema del valor inicial (problema 25),

$$\lim_{t\to 0} 3e^{-2t} = \lim_{s\to\infty} \frac{3s}{s+2}$$

o sea $3 = 3$, lo cual ilustra el teorema.

Por el teorema del valor final (problema 26),

$$\lim_{t\to\infty} 3e^{-2t} = \lim_{s\to 0} \frac{3s}{s+2}$$

o sea $0 = 0$, lo cual ilustra el teorema.

LA FUNCION GAMMA

28. Demostrar (*a*) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$, $n > 0$; (*b*) $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$(a)\quad \Gamma(n+1) = \int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \lim_{P\to\infty} \int_0^P u^n e^{-u}\,du$$

$$= \lim_{P\to\infty} \left\{ (u^n)(-e^{-u})\Big|_0^P - \int_0^P (-e^{-u})(nu^{n-1})\,du \right\}$$

$$= \lim_{P\to\infty} \left\{ -P^n e^{-P} + n\int_0^P u^{n-1} e^{-u}\,du \right\}$$

$$= n\int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\,du = n\,\Gamma(n) \qquad \text{if } n > 0$$

$$(b)\quad \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u}\,du = \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-u}\,du = \lim_{P\to\infty} (1 - e^{-P}) = 1.$$

Haciendo $n = 1, 2, 3,$ en $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$. Entonces

$$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!, \quad \Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3\cdot 2! = 3!$$

En general, $\Gamma(n+1) = n!$ si n es un entero positivo.

29. Demostrar $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sea $I_P = \displaystyle\int_0^P e^{-x^2}\,dx = \int_0^P e^{-y^2}\,dy$ y sea $\lim\limits_{P\to\infty} I_P = I$, el valor de la integral. Entonces

$$I_P^2 = \left(\int_0^P e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^P e^{-y^2}\,dy\right)$$

$$= \int_0^P \int_0^P e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}_P} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

donde $\mathcal{R}_P$ es el cuadrado $OACE$ de lado P [véase la Fig. 1-6].

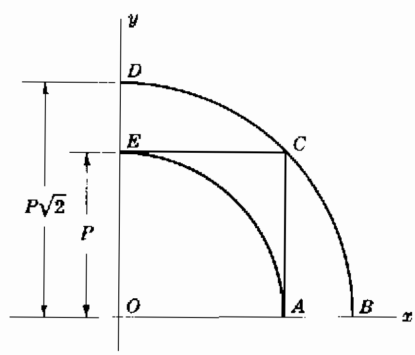


Fig. 1-6

Como el integrando es positivo, tenemos

$$\iint\limits_{\mathcal{R}_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \quad \leqq \quad I_P^2 \quad \leqq \quad \iint\limits_{\mathcal{R}_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \tag{1}$$

donde $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son las regiones del primer cuadrante comprendidas por las circunferencias de radios P y $P\sqrt{2}$ respectivamente.

Usando coordenadas polares (r, θ), de (1) tenemos que

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{P} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \quad \leqq \quad I_P^2 \quad \leqq \quad \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{P\sqrt{2}} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \tag{2}$$

o bien

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-P^2}) \quad \leqq \quad I_P^2 \quad \leqq \quad \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2P^2}) \tag{3}$$

Pasando el límite cuando $P \to \infty$ en (3), encontramos que $\lim\limits_{P\to\infty} I_P^2 = I^2 = \pi/4$ y que $= \sqrt{\pi}/2$.

30. Demostrar: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}\,du$. Haciendo $u = v^2$, y utilizando el problema 29, esta integral se convierte en

$$2\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv \quad = \quad 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \quad = \quad \sqrt{\pi}$$

31. Demostrar: $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ si $n > -1$, $s > 0$.

$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}\,t^n\,dt$. Haciendo $st = u$, y suponiendo $s > 0$, se transforma en

$$\mathcal{L}\{t^n\} \quad = \quad \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^n d\left(\frac{u}{s}\right) \quad = \quad \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du \quad = \quad \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

32. Demostrar: $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi/s}$, $s > 0$.

Sea $n = -1/2$ en el problema 31. Entonces

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} \quad = \quad \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} \quad = \quad \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Nótese que a pesar de que $F(t) = t^{-1/2}$ no satisface las condiciones de suficiencia del *teorema 1-1*, la transformada de Laplace existe. La función satisface las condiciones del teorema que se enuncia en el problema 145.

33. Suponiendo que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ vale para todo n, hallar:

(*a*) $\Gamma(-\frac{1}{2})$, (*b*) $\Gamma(-\frac{3}{2})$, (*c*) $\Gamma(-\frac{5}{2})$, (*d*) $\Gamma(0)$, (*e*) $\Gamma(-1)$, (*f*) $\Gamma(-2)$.

(*a*) Haciendo $n = -\frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})$. Entonces $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.

(*b*) Haciendo $n = -\frac{3}{2}$, $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}\Gamma(-\frac{3}{2})$. Entonces $\Gamma(-\frac{3}{2}) = -\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}) = (2)(\frac{2}{3})\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ por la parte (*a*).

(*c*) Haciendo $n = -\frac{5}{2}$, $\Gamma(-\frac{3}{2}) = -\frac{5}{2}\Gamma(-\frac{5}{2})$. Entonces $\Gamma(-\frac{5}{2}) = -\frac{2}{5}\Gamma(-\frac{3}{2}) = -(2)(\frac{2}{3})(\frac{2}{5})\sqrt{\pi} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$ por la parte (*b*).

(*d*) Haciendo $n = 0$, $\Gamma(1) = 0 \cdot \Gamma(0)$, se sigue que $\Gamma(0)$ debe ser infinito, ya que $\Gamma(1) = 1$.

(*e*) Haciendo $n = -1$, $\Gamma(0) = -1\,\Gamma(-1)$, se sigue que $\Gamma(-1)$ debe ser infinito.

(*f*) Haciendo $n = -2$, $\Gamma(-1) = -2\,\Gamma(-2)$, se sigue que $\Gamma(-2)$ debe ser infinito.

En general si p es cero o cualquier entero positivo, $\Gamma(-p)$ es infinito y, por el problema 170,

$$\Gamma(-p-\tfrac{1}{2}) \quad = \quad (-1)^{p+1}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\cdots\left(\frac{2}{2p+1}\right)\sqrt{\pi}$$

FUNCIONES DE BESSEL

34. (*a*) Hallar $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$ donde $J_0(t)$ es la función de Bessel de orden cero.

(*b*) Usando el resultado de (*a*), hallar $\mathcal{L}\{J_0(at)\}$.

(*a*) ***Método 1,*** *usando series.* Haciendo $n = 0$ en la ecuación (23), encontramos que

$$J_0(t) \quad = \quad 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2\,4^2} - \frac{t^6}{2^2\,4^2\,6^2} + \cdots$$

Entonces
$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} \quad = \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{2^2}\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{2^2\,4^2}\frac{4!}{s^5} - \frac{1}{2^2\,4^2\,6^2}\frac{6!}{s^7} + \cdots$$

$$= \quad \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{s^4}\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{s^6}\right) + \cdots\right\}$$

$$= \quad \frac{1}{s}\left\{\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}\right\} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

usando el teorema del binomio [véase el problema 172].

Método 2, *usando ecuaciones diferenciales.* La función $J_0(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$t\,J_0''(t) + J_0'(t) + t\,J_0(t) \quad = \quad 0 \tag{1}$$

[véase la propiedad 5 cuando $n = 0$]. Tomando la transformada de Laplace a ambos lados en (*1*), usando los *teoremas 1-6* y *1-9* y el *teorema 1-12*, junto con el hecho de que $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$, $y = \mathcal{L}\{J_0(t)\}$, tenemos

$$-\frac{d}{ds}\{s^2y - s(1) - 0\} + \{sy - 1\} - \frac{dy}{ds} \quad = \quad 0$$

de donde
$$\frac{dy}{ds} \quad = \quad -\frac{sy}{s^2+1}$$

Así,
$$\frac{dy}{y} \quad = \quad -\frac{s\,ds}{s^2+1}$$

e integrando,
$$y \quad = \quad \frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

Ahora, $\lim\limits_{s\to\infty} s\,y(s) = \dfrac{cs}{\sqrt{s^2+1}} = c$ y $\lim\limits_{t\to 0} J_0(t) = 1$. De manera que, por el teorema de valor inicial tenemos $c = 1$, así que $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = 1/\sqrt{s^2+1}$.

Para otro método, véase el problema 165.

(*b*) Por el problema 11,

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} \quad = \quad \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{(s/a)^2+1}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

35. Hallar $\mathcal{L}\{J_1(t)\}$, donde $J_1(t)$ es la función de Bessel de orden uno.

De la propiedad 3 para las funciones de Bessel tenemos que $J_0'(t) = -J_1(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J_1(t)\} &= -\mathcal{L}\{J_0'(t)\} = -[s\,\mathcal{L}\{J_0(t)\} - 1] \\ &= 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}} \end{aligned}$$

Pueden usarse también los métodos de series infinitas y de ecuaciones diferenciales [véase el problema 178].

INTEGRALES DE LAS FUNCIONES SENO, COSENO Y EXPONENCIAL

36. Demostrar $\mathcal{L}\{Is(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$.

Método 1. Sea $F(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$. Entonces $F(0) = 0$ y $F'(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ o $tF'(t) = \operatorname{sen} t$.

Tomando la transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{tF'(t)\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} \qquad \text{o} \qquad -\frac{d}{ds}\{s\,f(s) - F(0)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

es decir,
$$\frac{d}{ds}\{s\,f(s)\} = \frac{-1}{s^2+1}$$

Integrando,
$$s\,f(s) = -\tan^{-1} s + c$$

Por el teorema del valor inicial, $\lim_{s\to\infty} s\,f(s) = \lim_{t\to 0} F(t) = F(0) = 0$ de modo que $c = \pi/2$. Así,

$$s\,f(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1}\frac{1}{s} \qquad \text{o} \qquad f(s) = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

Método 2. Véase el problema 18.

Método 3. Usando series infinitas, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du &= \int_0^t \frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots\right) du \\ &= t - \frac{t^3}{3\cdot 3!} + \frac{t^5}{5\cdot 5!} - \frac{t^7}{7\cdot 7!} + \cdots \end{aligned}$$

Entonces
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\right\} &= \mathcal{L}\left\{t - \frac{t^3}{3\cdot 3!} + \frac{t^5}{5\cdot 5!} - \frac{t^7}{7\cdot 7!} + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{s^4} + \frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{s^6} - \frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{7!}{s^8} + \cdots \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3s^4} + \frac{1}{5s^6} - \frac{1}{7s^8} + \cdots \\ &= \frac{1}{s}\left\{\frac{(1/s)}{1} - \frac{(1/s)^3}{3} + \frac{(1/s)^5}{5} - \frac{(1/s)^7}{7} + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s} \end{aligned}$$

usando la serie $\tan^{-1} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots,\ |x| < 1$.

Método 4. Haciendo $u = tv$,

$$\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du \quad = \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} tv}{v}\,dv$$

Entonces
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du\right\} \quad = \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} tv}{v}\,dv\right\}$$

$$= \quad \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} tv}{v}\,dv\right\}\,dt$$

$$= \quad \int_0^1 \frac{1}{v}\left\{\int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} tv\,dt\right\}\,dv$$

$$= \quad \int_0^1 \frac{\mathcal{L}\{\operatorname{sen} tv\}}{v}\,dv \quad = \quad \int_0^1 \frac{dv}{s^2+v^2}$$

$$= \quad \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{v}{s}\Big|_0^1 \quad = \quad \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

donde hemos supuesto que se puede variar el orden de integración.

37. **Demostrar** $\mathcal{L}\{\,\mathrm{Ic}\,(t)\} \quad = \quad \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du\right\} \quad = \quad \dfrac{\ln(s^2+1)}{2s}$.

Empleamos el mismo principio del método 1 en el problema 36. Sean $F(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$ así que $F'(t) = -\frac{\cos t}{t}$ y $tF'(t) = -\cos t$. Tomando la transformada de Laplace tenemos

$$-\frac{d}{ds}\{s\,f(s) - F(0)\} \quad = \quad \frac{-s}{s^2+1} \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{ds}\{s\,f(s)\} \quad = \quad \frac{s}{s^2+1}$$

Entonces, integrando
$$s\,f(s) \quad = \quad \tfrac{1}{2}\ln(s^2+1) \; + \; c$$

Por el teorema del valor final, $\lim_{s\to 0} s\,f(s) \; = \; \lim_{t\to\infty} F(t) \; = \; 0$ de modo que $c = 0$. Así

$$s\,f(s) \;=\; \tfrac{1}{2}\ln(s^2+1) \qquad \text{o} \qquad f(s) \;=\; \frac{\ln(s^2+1)}{2s}$$

También podemos usar el método 4 del problema 36 [véase el problema 153].

38. **Demostrar** $\mathcal{L}\{\,\mathrm{Ie}\,(t)\} \quad = \quad \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du\right\} \quad = \quad \dfrac{\ln(s+1)}{s}$.

Sea $F(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du$. Entonces $t\,F'(t) = -e^{-t}$. Tomando la transformada de Laplace encontramos

$$-\frac{d}{ds}\{s\,f(s) - F(0)\} \;=\; \frac{-1}{s+1} \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{ds}\{s\,f(s)\} \;=\; \frac{1}{s+1}$$

Integrando,
$$s\,f(s) \quad = \quad \ln(s+1) \; + \; c$$

Aplicando el teorema del valor final como en el problema 37, encontramos que $c = 0$, así que

$$f(s) \quad = \quad \frac{\ln(s+1)}{s}$$

Para otro método similar al método 4, problema 36, véase el problema 153.

FUNCION DE ERROR

39. Demostrar $\mathcal{L}\{\text{fer}\sqrt{t}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du\right\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$.

Usando series infinitas tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\left(1 - u^2 + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \cdots\right) du\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t^{5/2}}{5\cdot 2!} - \frac{t^{7/2}}{7\cdot 3!} + \cdots\right)\right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5\cdot 2!\, s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7\cdot 3!\, s^{9/2}} + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{s^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^{5/2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{s^{7/2}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{s^{9/2}} + \cdots \\
&= \frac{1}{s^{3/2}}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{s^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{s^3} + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{s^{3/2}}\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{-1/2} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}
\end{aligned}$$

por el teorema del binomio [véase el problema 172].

Para otro método, véase el problema 175 (a).

FUNCIONES DE IMPULSO. FUNCION DELTA DE DIRAC

40. Demostrar que $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$ donde $\mathcal{U}(t-a)$ es la función escalonada unitaria de Heaviside.

Tenemos $\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^a e^{-st}(0)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}(1)\,dt \\
&= \lim_{P\to\infty}\int_a^P e^{-st}\,dt = \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^P \\
&= \lim_{P\to\infty}\frac{e^{-as} - e^{-sP}}{s} = \frac{e^{-as}}{s}
\end{aligned}$$

Otro método.

Como $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, por el problema 9, tenemos $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}/s$.

41. Hallar $\mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\}$, donde $F_\epsilon(t)$ es la función definida por (30).

Tenemos $F_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leqq t \leqq \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F_\epsilon(t)\,dt \\
&= \int_0^\epsilon e^{-st}(1/\epsilon)\,dt + \int_\epsilon^\infty e^{-st}(0)\,dt \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon e^{-st}\,dt = \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{\epsilon s}
\end{aligned}$$

42. (*a*) Demostrar que $\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\} = 1$ en el problema 41.

(*b*) ¿Es el resultado en (*a*) el mismo que $\mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(t)\right\}$? Explicar.

(*a*) Esto es inmediato ya que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1 - (1 - s\epsilon + s^2\epsilon^2/2! - \cdots)}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(1 - \frac{s\epsilon}{2!} + \cdots\right) = 1$$

También puede deducirse usando la regla de L'Hospital.

(*b*) Matemáticamente hablando, $\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(t)$ no existe, de modo que $\mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(t)\right\}$ no está definido. No obstante, es conveniente considerar que $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(t)$ es tal que $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. Llamaremos a $\delta(t)$ la *función delta de Dirac* o *la función de impulso*.

43. Demostrar que $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$, donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

Esto se concluye del problema 9 y del hecho que $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

44. Indicar cuáles de las siguientes funciones son nulas.

(*a*) $F(t) = \begin{cases} 1 & t = 1 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$, (*b*) $F(t) = \begin{cases} 1 & 1 \leqq t \leqq 2 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$, (*c*) $F(t) = \delta(t)$.

(*a*) $F(t)$ es una función nula puesto que $\int_0^t F(u)\,du = 0$ para todo $t > 0$.

(*b*) Si $t < 1$, tenemos $\int_0^t F(u)\,du = 0$.

Si $1 \leqq t \leqq 2$, tenemos $\int_0^t F(u)\,du = \int_1^t (1)\,du = t - 1$.

Si $t > 2$, tenemos $\int_0^t F(u)\,du = \int_1^2 (1)\,du = 1$.

Como $\int_0^t F(u)\,du \neq 0$ para todo $t > 0$, $F(t)$ no es uua función nula.

(*c*) Como $\int_0^t \delta(u)\,du = 1$ para todo $t > 0$, $\delta(t)$ no es una función uula.

EVALUACION DE INTEGRALES

45. Calcular (*a*) $\int_0^\infty t\,e^{-2t} \cos t\,dt$, (*b*) $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\,dt$.

(*a*) Por el problema 19,

$$\mathcal{L}\{t \cos t\} = \int_0^\infty t\,e^{-st} \cos t\,dt$$

$$= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

Entonces haciendo $s = 2$, obtenemos que $\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt = \frac{3}{25}$.

(b) Si $F(t) = e^{-t} - e^{-3t}$, entonces $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+3}$. Así, por el problema 21,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right\} = \int_s^\infty \left\{\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+3}\right\} du$$

o bien

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right) dt = \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

Pasando al límite cuando $s \to 0+$, encontramos que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\,dt = \ln 3$.

46. Demostrar que **(a)** $\displaystyle\int_0^\infty J_0(t)\,dt = 1$, **(b)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\operatorname{fer}\sqrt{t}\,dt = \sqrt{2}/2$.

(a) Por el problema 34,

$$\int_0^\infty e^{-st}J_0(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Entonces, haciendo que $s \to 0+$, obtenemos $\displaystyle\int_0^\infty J_0(t)\,dt = 1$.

(b) Por el problema 39,

$$\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{fer}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

Entonces, haciendo que $s \to 1$, obtenemos $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\operatorname{fer}\sqrt{t}\,dt = \sqrt{2}/2$.

PROBLEMAS VARIOS

47. Demostrar el *teorema 1-1.*

Para cualquier número entero positivo N, tenemos

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^N e^{-st}F(t)\,dt + \int_N^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

Como $F(t)$ es seccionalmente continua en cada intervalo finito $0 \leqq t \leqq N$, la primera integral del lado derecho existe, puesto que $F(t)$ es de orden exponencial γ para $t > N$. Para ver esto es suficiente observar que en tal caso

$$\begin{aligned}\left|\int_N^\infty e^{-st}F(t)\,dt\right| &\leqq \int_N^\infty |e^{-st}F(t)|\,dt \\ &\leqq \int_0^\infty e^{-st}|F(t)|\,dt \\ &\leqq \int_0^\infty e^{-st}Me^{\gamma t}\,dt = \frac{M}{s-\gamma}\end{aligned}$$

Así, la transformada de Laplace existe para $s > \gamma$.

48. Hallar $\mathcal{L}\{\text{sen}\sqrt{t}\}$.

Método 1, *usando series.*

$$\text{sen}\sqrt{t} = \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{t})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{t})^7}{7!} + \cdots = t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3!} + \frac{t^{5/2}}{5!} - \frac{t^{7/2}}{7!} + \cdots$$

Entonces la transformada de Laplace es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{sen}\sqrt{t}\} &= \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3!\,s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5!\,s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7!\,s^{9/2}} + \cdots \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2^2 s}\right) + \frac{(1/2^2 s)^2}{2!} - \frac{(1/2^2 s)^3}{3!} + \cdots\right\} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}\,e^{-1/2^2 s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}\,e^{-1/4s}\end{aligned}$$

Método 2, *usando ecuaciones diferenciales.*

Sea $Y(t) = \text{sen}\sqrt{t}$. Entonces, derivando dos veces encontramos

$$4tY'' + 2Y' + Y = 0$$

Tomando la transformada de Laplace, si hacemos $y = \mathcal{L}\{Y(t)\}$

tendremos
$$-4\frac{d}{ds}\{s^2 y - s\,Y(0) - Y'(0)\} + 2\{s\,y - Y(0)\} + y = 0$$

o sea
$$4\,s^2 y' + (6\,s - 1)y = 0$$

Resolviéndola,
$$y = \frac{c}{s^{3/2}}\,e^{-1/4s}$$

Para valores de t convenientemente pequeños, tenemos que $\text{sen}\sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ y que $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}$. Para grandes valores de s, $y \sim c/s^{3/2}$. Al comparar deducimos que $c = \sqrt{\pi}/2$. Así,

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}\,e^{-1/4s}$$

49. Hallar $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$.

Sea $F(t) = \text{sen}\sqrt{t}$. Entonces $F'(t) = \dfrac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$, $F(0) = 0$. Así que, por el problema 48,

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = s\,f(s) - F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{1/2}}\,e^{-1/4s}$$

de donde
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}\,e^{-1/4s}$$

También puede usarse el método de las series [véase el problema 175(*b*)].

50. Demostrar que
$$\mathcal{L}\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}$$

donde $\gamma = 0{,}5772156\ldots$ es la *constante de Euler.*

Tenemos que
$$\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1}\,e^{-u}\,du$$

Derivando con respecto a r encontramos

$$\Gamma'(r) = \int_0^\infty u^{r-1} e^{-u} \ln u \, du$$

de donde

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-u} \ln u \, du$$

Haciendo $u = st$, $s > 0$, se transforma en

$$\Gamma'(1) = s \int_0^\infty e^{-st} (\ln s + \ln t) \, dt$$

Entonces

$$\mathcal{L}\{\ln t\} = \int_0^\infty e^{-st} \ln t \, dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \ln s \int_0^\infty e^{-st} \, dt$$

$$= \frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}$$

Otro método. Tenemos para $k > -1$,

$$\int_0^\infty e^{-st} t^k \, dt = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$$

Derivando con respecto a k,

$$\int_0^\infty e^{-st} t^k \ln t \, dt = \frac{\Gamma'(k+1) - \Gamma(k+1) \ln s}{s^{k+1}}$$

Haciendo $k = 0$ tenemos, como lo esperábamos, que

$$\int_0^\infty e^{-st} \ln t \, dt = \mathcal{L}\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}$$

Problemas propuestos

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCIONES ELEMENTALES

51. Hallar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones. En cada caso especificar los valores de s para los cuales la transformada de Laplace existe.

(a) $2e^{4t}$	*Resp.* (a)	$2/(s-4)$,	$s > 4$
(b) $3e^{-2t}$	(b)	$3/(s+2)$,	$s > -2$
(c) $5t - 3$	(c)	$(5-3s)/s^2$,	$s > 0$
(d) $2t^2 - e^{-t}$	(d)	$(4+4s-s^3)/s^3(s+1)$,	$s > 0$
(e) $3 \cos 5t$	(e)	$3s/(s^2+25)$,	$s > 0$
(f) $10 \operatorname{sen} 6t$	(f)	$60/(s^2+36)$,	$s > 0$
(g) $6 \operatorname{sen} 2t - 5 \cos 2t$	(g)	$(12-5s)/(s^2+4)$,	$s > 0$
(h) $(t^2+1)^2$	(h)	$(s^4+4s^2+24)/s^5$,	$s > 0$
(i) $(\operatorname{sen} t - \cos t)^2$	(i)	$(s^2-2s+4)/s(s^2+4)$,	$s > 0$
(j) $3 \cosh 5t - 4 \operatorname{senh} 5t$	(j)	$(3s-20)/(s^2-25)$,	$s > 5$

52. Calcular (*a*) $\mathcal{L}\{(5e^{2t}-3)^2\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{4\cos^2 2t\}$.

Resp. (*a*) $\dfrac{25}{s-4} - \dfrac{30}{s-2} + \dfrac{9}{s}$, $s > 4$ (*b*) $\dfrac{2}{s} + \dfrac{2s}{s^2+16}$, $s > 0$

53. Hallar $\mathcal{L}\{\cosh^2 4t\}$. *Resp.* $\dfrac{s^2-32}{s(s^2-64)}$

54. Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$ si (*a*) $F(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ 4 & t > 2 \end{cases}$, (*b*) $F(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leqq t \leqq 5 \\ 1 & t > 5 \end{cases}$

Resp. (*a*) $4e^{-2s}/s$ (*b*) $\dfrac{2}{s^2}(1-e^{-5s}) - \dfrac{10}{s}e^{-5s}$

55. Demostrar que $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

56. Investigar la existencia de la transformada de Laplace para cada una de las siguientes funciones.

(*a*) $1/(t+1)$, (*b*) e^{t^2-t}, (*c*) $\cos t^2$ *Resp.* (*a*) existe, (*b*) no existe, (*c*) existe.

PROPIEDADES DE LINEALIDAD, TRASLACION Y CAMBIO DE ESCALA

57. Hallar $\mathcal{L}\{3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2\,\text{sen}\,5t + 3\cos 2t\}$.

Resp. $\dfrac{72}{s^5} - \dfrac{12}{s^4} + \dfrac{4}{s+3} - \dfrac{10}{s^2+25} + \dfrac{3s}{s^2+4}$

58. Calcular

(*a*) $\mathcal{L}\{t^3e^{-3t}\}$	*Resp.* (*a*) $6/(s+3)^4$
(*b*) $\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\}$	(*b*) $(s+1)/(s^2+2s+5)$
(*c*) $\mathcal{L}\{2e^{3t}\,\text{sen}\,4t\}$	(*c*) $8/(s^2-6s+25)$
(*d*) $\mathcal{L}\{(t+2)^2e^t\}$	(*d*) $(4s^2-4s+2)/(s-1)^3$
(*e*) $\mathcal{L}\{e^{2t}(3\,\text{sen}\,4t - 4\cos 4t)\}$	(*e*) $(20-4s)/(s^2-4s+20)$
(*f*) $\mathcal{L}\{e^{-4t}\cosh 2t\}$	(*f*) $(s+4)/(s^2+8s+12)$
(*g*) $\mathcal{L}\{e^{-t}(3\,\text{senh}\,2t - 5\cosh 2t)\}$	(*g*) $(1-5s)/(s^2+2s-3)$

59. Hallar (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-t}\,\text{sen}^2 t\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{(1+te^{-t})^3\}$.

Resp. (*a*) $\dfrac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$ (*b*) $\dfrac{1}{s} + \dfrac{3}{(s+1)^2} + \dfrac{6}{(s+2)^3} + \dfrac{6}{(s+3)^4}$

60. Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$ si $F(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & t > 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$. *Resp.* $2e^{-s}/s^3$

61. Si $F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)$ tienen como transformada de Laplace $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s)$ respectivamente y si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, demostrar que

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t) + \cdots + c_nF_n(t)\} = c_1f_1(s) + c_2f_2(s) + \cdots + c_nf_n(s)$$

62. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{s^2 - s + 1}{(2s+1)^2(s-1)}$, hallar $\mathcal{L}\{F(2t)\}$. *Resp.* $(s^2 - 2s + 4)/4(s+1)^2(s-2)$

63. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{e^{-1/s}}{s}$, hallar $\mathcal{L}\{e^{-t}F(3t)\}$. *Resp.* $\dfrac{e^{-3/(s+1)}}{s+1}$

64. Si $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, demostrar que para $r > 0$,

$$\mathcal{L}\{r^t F(at)\} = \frac{1}{s - \ln r} f\left(\frac{s - \ln r}{a}\right)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE DERIVADAS

65. (*a*) Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, demostrar que

$$\mathcal{L}\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - s F'(0) - F''(0)$$

estableciendo las condiciones apropiadas sobre $F(t)$.

(*b*) Generalizar el resultado de (*a*) y demostrarlo mediante la inducción matemática.

66. Dada $F(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leqq t \leqq 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$. (*a*) Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$. (*b*) Hallar $\mathcal{L}\{F'(t)\}$. (*c*) ¿Es válido el resultado $\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0)$ en este caso? Explicar.

Resp. (*a*) $\dfrac{2}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s^2}$, (*b*) $\dfrac{2}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s}$

67. (*a*) Si $F(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t \leqq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$, hallar $\mathcal{L}\{F''(t)\}$.

(*b*) ¿Es válido el resultado $\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{F(t)\} - s\,F(0) - F'(0)$ para este caso? Explicar.

Resp. (*a*) $2(1 - e^{-s})/s$

68. Demostrar (*a*) El *teorema 1-7*; (*b*) El *teorema 1-8*.

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE INTEGRALES

69. Verificar directamente que $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t (u^2 - u + e^{-u})\,du\right\} = \dfrac{1}{s}\,\mathcal{L}\{t^2 - t + e^{-t}\}$.

70. Si $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, demostrar que $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} F(u)\,du\right\} = \dfrac{f(s)}{s^2}$.

$\left[\text{A veces la doble integral se expresa abreviadamente por } \displaystyle\int_0^t \int_0^t F(t)\,dt^2.\right]$

71. Generalizar el resultado del problema 70.

72. Demostrar que $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u}\,du\right\} = \dfrac{1}{s}\ln\left(1 + \dfrac{1}{s}\right)$.

73. Demostrar que $\displaystyle\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} \frac{e^{-t}\operatorname{sen} u}{u}\,du\,dt = \frac{\pi}{4}$.

MULTIPLICACION POR POTENCIAS DE t

74. Demostrar que (a) $\mathcal{L}\{t \cos at\} = \dfrac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

(b) $\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} at\} = \dfrac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$

75. Hallar $\mathcal{L}\{t\,(3 \operatorname{sen} 2t - 2 \cos 2t)\}$. *Resp.* $\dfrac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2 + 4)^2}$

76. Demostrar que $\mathcal{L}\{t^2 \operatorname{sen} t\} = \dfrac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3}$.

77. Calcular (a) $\mathcal{L}\{t \cosh 3t\}$, (b) $\mathcal{L}\{t \operatorname{senh} 2t\}$. *Resp.* (a) $(s^2 + 9)/(s^2 - 9)^2$, (b) $4s/(s^2 - 4)^2$

78. Hallar (a) $\mathcal{L}\{t^2 \cos t\}$, (b) $\mathcal{L}\{(t^2 - 3t + 2) \operatorname{sen} 3t\}$.

Resp. (a) $(2s^3 - 6s)/(s^2 + 1)^3$, (b) $\dfrac{6s^4 - 18s^3 + 126s^2 - 162s + 432}{(s^2 + 9)^3}$

79. Hallar $\mathcal{L}\{t^3 \cos t\}$. *Resp.* $\dfrac{6s^4 - 36s^2 + 6}{(s^2 + 1)^4}$

80. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty t\, e^{-3t} \operatorname{sen} t\, dt = \frac{3}{50}$.

DIVISION POR t

81. Demostrar que $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\left(\dfrac{s + b}{s + a}\right)$.

82. Demostrar que $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{s^2 + b^2}{s^2 + a^2}\right)$.

83. Hallar $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{senh} t}{t}\right\}$. *Resp.* $\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{s + 1}{s - 1}\right)$

84. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\, dt = \ln 2$.

[*Sugerencia.* Usar el problema 81].

85. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\, dt$. *Resp.* $\ln(3/2)$

86. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

FUNCIONES PERIODICAS

87. Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$ donde $F(t)$ es la función periódica que se muestra en la Fig. 1-7.

Resp. $\dfrac{1}{s} \tanh \dfrac{s}{2}$

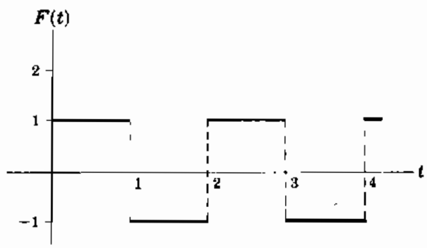


Fig. 1-7

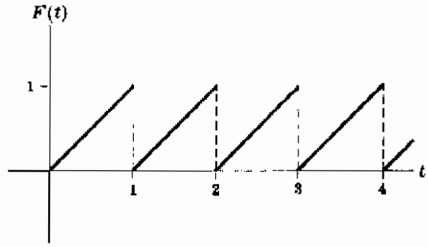


Fig. 1-8

88. Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$ donde $F(t)$ es la función periódica que se muestra en la Fig. 1-8.

Resp. $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$

89. Sea $F(t) = \begin{cases} 3t & 0 < t < 2 \\ 6 & 2 < t < 4 \end{cases}$ donde $F(t)$ tiene periodo 4 (*a*) Hacer el gráfico de $F(t)$. (*b*) Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

Resp. (*b*) $\dfrac{3 - 3e^{-2s} - 6se^{-4s}}{s^2(1-e^{-4s})}$

90. Si $F(t) = t^2$, $0 < t < 2$ y $F(t+2) = F(t)$, hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

Resp. $\dfrac{2 - 2e^{-2s} - 4se^{-2s} - 4s^2e^{-2s}}{s^3(1-e^{-2s})}$

91. Hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$ donde $F(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$ y $F(t+2) = F(t)$ para $t > 0$.

Resp. $\dfrac{1 - e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-2s})}$

92. (*a*) Muestre que la función $F(t)$ cuyo gráfico es la onda triangular que se muestra en la Fig. 1-9 tiene como transformada de Laplace $\dfrac{1}{s^2}\tanh\dfrac{s}{2}$.

(*b*) ¿Cómo se puede obtener el resultado de (*a*) del problema 87? Explicar.

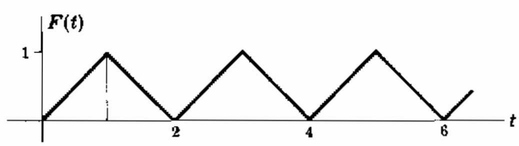


Fig. 1-9

TEOREMAS DE LOS VALORES INICIAL Y FINAL

93. Verificar el teorema del valor inicial para las funciones (*a*) $3 - 2\cos t$, (*b*) $(2t+3)^2$, (*c*) $t + \operatorname{sen} 3t$.

94. Verificar el teorema del valor final para las funciones (*a*) $1 + e^{-t}(\operatorname{sen} t + \cos t)$, (*b*) t^3e^{-2t}

95. Discutir la aplicabilidad del teorema del valor final para la función $\cos t$

96. Si $F(t) \sim ct^p$ cuando $t \to 0$ donde $p > -1$, probar que $f(s) \sim c\,\Gamma(p+1)/s^{p+1}$ cuando $s \to \infty$.

97. Si $F(t) \sim ct^p$ cuando $t \to \infty$ donde $p > -1$, probar que $f(s) \sim c\,\Gamma(p+1)/s^{p+1}$ cuando $s \to \infty$.

FUNCION GAMMA

98. Calcular (*a*) $\Gamma(5)$, (*b*) $\dfrac{\Gamma(3)\,\Gamma(4)}{\Gamma(7)}$, (*c*) $\Gamma(5/2)$, (*d*) $\dfrac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(4)}{\Gamma(11/2)}$.

Resp. (*a*) 24, (*b*) 1/60, (*c*) $3\sqrt{\pi}/4$, (*d*) 32/315

99. Hallar (*a*) $\mathcal{L}\{t^{1/2}+t^{-1/2}\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t^{-1/3}\}$, (*c*) $\mathcal{L}\{(1+\sqrt{t})^4\}$.

Resp. (*a*) $(2s+1)\sqrt{\pi}/2s^{3/2}$, (*b*) $\Gamma(2/3)/s^{2/3}$, (*c*) $(s^2+2\sqrt{\pi}\,s^{3/2}+6s+3\sqrt{\pi}\,s^{1/2}+2)/s^3$

100. Hallar (*a*) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t^{7/2}\,e^{3t}\}$.

Resp. (*a*) $\sqrt{\pi/(s+2)}$, (*b*) $105\sqrt{\pi}/16(s-3)^{9/2}$

FUNCIONES DE BESSEL

101. Demostrar que $\mathcal{L}\{e^{-at}\,J_0(bt)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2-2as+a^2+b^2}}$.

102. Demostrar que $\mathcal{L}\{t\,J_0(at)\} = \dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$.

103. Hallar (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-3t}\,J_0(4t)\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\,J_0(2t)\}$. *Resp.* (*a*) $\dfrac{1}{\sqrt{s^2+6s+25}}$, (*b*) $\dfrac{s}{(s^2+4)^{3/2}}$

104. Demostrar que (*a*) $J_0'(t) = -J_1(t)$, (*b*) $\dfrac{d}{dt}\{t^n\,J_n(t)\} = t^n\,J_{n-1}(t)$.

105. Si $I_0(t) = J_0(it)$, demostrar que $\mathcal{L}\{I_0(at)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$, $a > 0$.

106. Hallar $\mathcal{L}\{t\,J_0(t)\,e^{-t}\}$. *Resp.* $(s-1)/(s^2-2s+2)^{3/2}$

107. Demostrar que (*a*) $\displaystyle\int_0^\infty J_0(t)\,dt = 1$, (*b*) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,J_0(t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

108. Hallar la transformada de Laplace de $\dfrac{d^2}{dt^2}\{e^{2t}\,J_0(2t)\}$. *Resp.* $\dfrac{s^2}{\sqrt{s^2-4s+8}} - s - 2$

109. Demostrar que $\mathcal{L}\{t\,J_1(t)\} = \dfrac{1}{(s^2+1)^{3/2}}$.

110. Demostrar que $\mathcal{L}\{J_0(a\sqrt{t})\} = \dfrac{e^{-a^2/4s}}{s}$.

111. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty t\,e^{-3t}\,J_0(4t)\,dt$. *Resp.* 3/125

112. Demostrar que $\mathcal{L}\{J_n(t)\} = \dfrac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$ y obtener $\mathcal{L}\{J_n(at)\}$.

INTEGRALES DE LAS FUNCIONES SENO, COSENO Y EXPONENCIAL

113. Calcular (*a*) $\mathcal{L}\{e^{2t}\,\mathrm{Is}\,(t)\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\,\mathrm{Is}\,(t)\}$.

Resp. (*a*) $\tan^{-1}(s-2)/(s-2)$, (*b*) $\dfrac{\tan^{-1}s}{s^2} - \dfrac{1}{s(s^2+1)}$

114. Demostrar que $\mathcal{L}\{t^2 \text{ Ic } (t)\} = \dfrac{\ln(s^2+1)}{s^3} - \dfrac{3s^2+1}{s(s^2+1)^2}$.

115. Hallar (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-3t} \text{ Ie } (t)\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t \text{ Ie } (t)\}$.

Resp. (*a*) $\dfrac{\ln(s+4)}{s+3}$, (*b*) $\dfrac{\ln(s+1)}{s^2} - \dfrac{1}{s(s+1)}$

116. Hallar (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-t} \text{ Is } (2t)\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{te^{-2t} \text{ Ie } (3t)\}$.

Resp. (*a*) $\dfrac{\tan^{-1}(s+1)/2}{s+1}$, (*b*) $\dfrac{1}{(s+2)^2}\ln\left(\dfrac{s+5}{3}\right) - \dfrac{1}{(s+2)(s+5)}$

FUNCION DE ERROR

117. Calcular (*a*) $\mathcal{L}\{e^{3t} \text{ fer } \sqrt{t}\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t \text{ fer } (2\sqrt{t})\}$.

Resp. (*a*) $\dfrac{1}{(s-3)\sqrt{s-2}}$, (*b*) $\dfrac{3s+8}{s^2(s+4)^{3/2}}$

118. Demostrar que $\mathcal{L}\{\text{ fce } \sqrt{t}\} = \dfrac{1}{\sqrt{s+1}\,\{\sqrt{s+1}+1\}}$.

119. Hallar $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \text{fer } \sqrt{u}\, du\right\}$. *Resp.* $1/s^2\sqrt{s+1}$

FUNCIONES: ESCALONADA UNITARIA, DE IMPULSO Y DELTA DE DIRAC

120. (*a*) Demostrar que, en términos de la función escalonada unitaria de Heaviside, la función

$$F(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$

puede expresarse como $e^{-t}\{1 - \mathcal{U}(t-3)\}$. (*b*) Usando $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}/s$ hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

Resp. (*b*) $\dfrac{1 - e^{-3(s+1)}}{s+1}$

121. Demostrar que $F(t) = \begin{cases} F_1(t) & 0 < t < a \\ F_2(t) & t > a \end{cases}$ puede escribirse como

$$F(t) = F_1(t) + \{F_2(t) - F_1(t)\}\,\mathcal{U}(t-a)$$

122. Si $F(t) = F_1(t)$ para $0 < t < a_1$, $F_2(t)$ para $a_1 < t < a_2$, ..., $F_{n-1}(t)$ para $a_{n-2} < t < a_{n-1}$, y $F_n(t)$ para $t > a_{n-1}$, demostrar que

$$F(t) = F_1(t) + \{F_2(t) - F_1(t)\}\,\mathcal{U}(t-a_1) + \cdots + \{F_n(t) - F_{n-1}(t)\,\mathcal{U}(t-a_{n-1})$$

123. Expresar en términos de la función escalonada unitaria de Heaviside

(*a*) $F(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < 2 \\ 4t & t > 2 \end{cases}$ (*b*) $F(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & 0 < t < \pi \\ \operatorname{sen} 2t & \pi < t < 2\pi \\ \operatorname{sen} 3t & t > 2\pi \end{cases}$

Resp. (*a*) $t^2 + (4t - t^2)\,\mathcal{U}(t-2)$, (*b*) $\operatorname{sen} t + (\operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t)\,\mathcal{U}(t-\pi) + (\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} 2t)\,\mathcal{U}(t-2\pi)$

124. Demostrar que $\mathcal{L}\{t^2\,\mathcal{U}(t-2)\} = \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{2e^{-2s}}{s^3}(1+2s+2s^2)$, $s > 0$.

125. Calcular (*a*) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2t\, \delta(t - \pi/3)\, dt$, (*b*) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\, \mathcal{U}(t-2)\, dt$. *Resp.* (*a*) $-1/2$, (*b*) e^{-2}

126. (*a*) Si $\delta'(t - a)$ denota la derivada formal de la función delta, demostrar que

$$\int_0^{\infty} F(t)\, \delta'(t-a)\, dt \quad = \quad -F'(a)$$

(*b*) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-4t}\, \delta'(t-2)\, dt$.
Resp. (*b*) $4e^{-8}$

127. Sea $G_\epsilon(t) = 1/\epsilon$ para $0 \leqq t < \epsilon$, 0 para $\epsilon \leqq t < 2\epsilon$, $-1/\epsilon$ para $2\epsilon \leqq t < 3\epsilon$, y 0 para $t \leqq 3\epsilon$.
(*a*) Hallar $\mathcal{L}\{G_\epsilon(t)\}$. (*b*) Hallar $\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{L}\{G_\epsilon(t)\}$. (*c*) ¿Es $\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{L}\{G_\epsilon(t)\} = \mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon \to 0} G_\epsilon(t)\right\}$? (*d*) Discutir geométricamente los resultados de (*a*) y (*b*).

128. Generalizar el problema 127 definiendo una función $G_\epsilon(t)$ en términos de ϵ y n de tal forma que $\lim_{\epsilon \to 0} G_\epsilon(t) = s^n$ donde $n = 2, 3, 4$.

EVALUACION DE INTEGRALES

129. Calcular $\int_0^{\infty} t^3 e^{-t} \operatorname{sen} t\, dt$. *Resp.* 0

130. Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$.

131. Probar que (*a*) $\int_0^{\infty} J_n(t)\, dt = 1$, (*b*) $\int_0^{\infty} t\, J_n(t)\, dt = 1$.

132. Demostrar que $\int_0^{\infty} u\, e^{-u^2} J_0(au)\, du = \frac{1}{2} e^{-a^2/4}$.

133. Demostrar que $\int_0^{\infty} t\, e^{-t}\ \operatorname{Ie}(t)\, dt = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

134. Demostrar que $\int_0^{\infty} u\, e^{-u^2} \operatorname{fer} u\, du = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

PROBLEMAS VARIOS

135. Si $F(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$, demostrar que $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$.

136. Si $F(t) = \begin{cases} \cos t & 0 < t < \pi \\ \operatorname{sen} t & t > \pi \end{cases}$, hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$. *Resp.* $\frac{s + (s-1)e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

137. Demostrar que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^3 t\} = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$.

138. Establecer las fórmulas (*a*) 16, (*b*) 17, (*c*) 20 y (*d*) 28 de la tabla de la página 246.

139. Hallar (*a*) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}^3 2t\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t^3 \cos 4t\}$.

Resp. (*a*) $\dfrac{48}{(s^2-36)(s^2-4)}$, (*b*) $\dfrac{6s^4-576s^2+1536}{(s^2+16)^4}$

140. Si $F(t) = 5 \operatorname{sen} 3(t-\pi/4)$ para $t > \pi/4$ y 0 para $t < \pi/4$, hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$. *Resp.* $e^{-\pi s/4}/(s^2+9)$

141. Si $\mathcal{L}\{t\,F(t)\} = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$, hallar $\mathcal{L}\{e^{-t}F(2t)\}$.

142. Hallar (*a*) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh} 2t \cos 2t\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{\cosh 2t \cos 2t\}$.
Resp. (*a*) $2(s^2-8)/(s^4+64)$, (*b*) $s^3/(s^4+64)$

143. Sea $F(t) = \begin{cases} t+n & 2n \leqq t < 2n+1 \\ n-t & 2n+1 \leqq t < 2n+2 \end{cases}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Demostrar que

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{s^2}\sum_{n=0}^{\infty}\{(3ns+1)\,s^{-2ns} - 2[(2n+1)s+1]\,e^{-(2n+1)s} + [(n+2)s+1]\,e^{-(2n+2)s}\}$$

144. (*a*) Demostrar que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^5 t\} = \dfrac{120}{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+16)}$.

(*b*) Usando los resultados de la parte (*a*) y el problema 137, ¿puede usted llegar a un resultado correspondiente para $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^{2n-1} t\}$ donde n es cualquier entero positivo? Justifique sus conjeturas.

145. Suponga que $F(t)$ es no acotada cuando $t \to 0$. Demostrar que $\mathcal{L}\{F(t)\}$ existe si se satisfacen las siguientes condiciones:

(*a*) $F(t)$ es seccionalmente continua en cualquier intervalo $N_1 \leqq t \leqq N$ donde $N_1 > 0$,

(*b*) $\lim_{t\to 0} t^n F(t) = 0$ para cualquier constante n tal que $0 < n < 1$,

(*c*) $F(t)$ es de orden exponencial γ para $t > N$.

146. Demostrar que (*a*) $\mathcal{L}\{J_0(t)\operatorname{sen} t\} = \dfrac{1}{\sqrt{s}\,\sqrt[4]{s^2+4}}\operatorname{sen}\{\tfrac{1}{2}\tan^{-1}(2/s)\}$

(*b*) $\mathcal{L}\{J_0(t)\cos t\} = \dfrac{1}{\sqrt{s}\,\sqrt[4]{s^2+4}}\cos\{\tfrac{1}{2}\tan^{-1}(2/s)\}$

147. Sea $F(t) = \begin{cases} t\,G(t) & t > 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$. Demostrar que $\mathcal{L}\{F(t)\} = -\dfrac{d}{ds}[e^{-s}\,\mathcal{L}\{G(t+1)\}]$.

148. Si $\mathcal{L}\{F''(t)\} = \tan^{-1}(1/s)$, $F(0) = 2$ y $F'(0) = -1$, hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

Resp. $\dfrac{2s-1+\tan^{-1}1/s}{s^2}$

149. Demostrar que $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}F(\beta t)\} = \dfrac{1}{\beta}f\left(\dfrac{s-\alpha}{\beta}\right)$ donde α y β son constantes y $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$.

150. Demuestre que la transformada de Laplace de e^{e^t} no existe, mientras que la transformada de Laplace de e^{-e^t} sí existe.

151. (*a*) Demostrar que $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\right\} = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{s^2+4}{s^2}\right)$.

(*b*) Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt$.

Resp. (*b*) $\frac{1}{4}\ln 5$

152. (*a*) Hallar $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1-J_0(t)}{t}\right\}$. (*b*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\{1-J_0(t)\}}{t}\,dt = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$.

153. Desarrollar los problemas 37 y 38 usando el método 4 del problema 36.

154. Supóngase que $\mathcal{L}\{F(t)\}$ existe para $s = a$ donde a es real. Demostrar que existe también para todo $s > a$.

155. Hallar la transformada de Laplace de la función periódica $F(t)$ que se muestra en la Fig. 1-10.

Resp. $\dfrac{1-e^{-as}-as\,e^{-as}}{s^2(1-e^{-as})}\tan\theta_0$

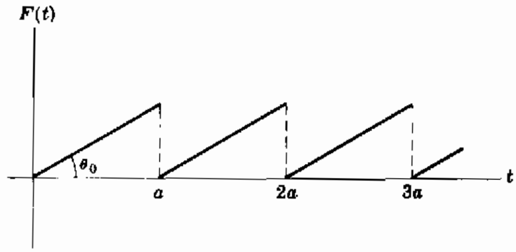


Fig. 1-10

156. Demostrar que

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(4n-2)!}{(2n-1)!\,s^{2n+1}}$$

157. Demostrar que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^6 t\} = \dfrac{6!}{s(s^2-4)(s^2+16)(s^2+36)}$ y generalizar [véase el problema 144].

158. Hallar $\mathcal{L}\{t\,e^{-2t}J_0(t\sqrt{2})\}$. *Resp.* $\dfrac{s+2}{(s^2+4s+6)^{3/2}}$

159. Hallar $\mathcal{L}\{t\,\mathcal{U}(t-1) + t^2\,\delta(t-1)\}$. *Resp.* $e^{-s}(s^2+s+1)/s^2$

160. Hallar $\mathcal{L}\{\cos t \ln t\ \delta(t-\pi)\}$. *Resp.* $-e^{-\pi s}\ln\pi$

161. Sean $F(t)$ y $G(t)$ seccionalmente continuas en todo intervalo finito y de orden exponencial cuando $t\to\infty$. Demostrar que existe $\mathcal{L}\{F(t)\,G(t)\}$.

162. Los *polinomios de Laguerre* $L_n(t)$ se definen por

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\{t^n e^{-t}\} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(*a*) Hallar $L_0(t), L_1(t), \ldots, L_4(t)$. (*b*) Hallar $\mathcal{L}\{L_n(t)\}$.

163. (*a*) Sean a, b, α, β y λ constantes. Demostrar que

$$\mathcal{L}\{at^{-\alpha} + bt^{-\beta}\} = \lambda\{as^{-\alpha} + bs^{-\beta}\}$$

si y sólo si $\alpha+\beta = 1$ y $\lambda = \pm\sqrt{\pi}\csc\alpha\pi$.

(*b*) Se dice que una función es su propia transformada de Laplace cuando $\mathcal{L}\{F(t)\} = F(s)$. ¿La función $F(t) = at^{-\alpha} + bt^{-\beta}$ podrá ser su propia transformada de Laplace? Explicar.

164. Si $F(t)$ y $G(t)$ poseen transformadas de Laplace, ¿es cierto que $F(t)\,G(t)$ también posee transformada de Laplace? Justificar su conclusión.

165. Usando el resultado $J_0(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t \operatorname{sen} \theta)\, d\theta$ demostrar que $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

166. Demostrar que, dentro de restricciones convenientes, la regla de Leibnitz puede aplicarse al problema 19.

167. (*a*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right) dt = \frac{\pi}{2} - s\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) + 2\tan^{-1} s.$

(*b*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$

168. Sea $F(t) = 0$ si t es irracional y $F(t) = 1$ si t es racional. (*a*) Probar que $\mathcal{L}\{F(t)\}$ existe y es igual a cero. (*b*) ¿Es esta función nula? Explicar.

169. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 J_0(t)\, dt = -1.$

170. Demostrar que para cualquier entero positivo p,

$$\Gamma(-p-\tfrac{1}{2}) = (-1)^{p+1}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\cdots\left(\frac{2}{2p+1}\right)\sqrt{\pi}$$

171. Comprobar las fórmulas (*a*) 55, (*b*) 61, (*c*) 64, (*d*) 65 y (*e*) 81 en la tabla del apéndice B.

172. Utilizando el teorema del binomio, demostrar que para todo $|x| < 1$,

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

y comprobar así las sumas de las series infinitas en los problemas 34 y 39.

173. Usando series infinitas, hallar la transformada de Laplace de (*a*) $\operatorname{sen} t$, (*b*) $\cos t$, (*c*) e^{at}, (*d*) $\cos\sqrt{t}$.

174. Demostrar que $\mathcal{L}\{\operatorname{fer}(t)\} = \dfrac{e^{s^2/4}}{s}\operatorname{fce}(s/2)$ y, de esta manera, hallar $\mathcal{L}\{\operatorname{fer}(at)\}$.

175. (*a*) Hallar $\mathcal{L}\{\operatorname{fer}\sqrt{t}\}$ usando el método de las ecuaciones diferenciales.
(*b*) Hallar $\mathcal{L}\{\cos\sqrt{t}/\sqrt{t}\}$ usando series infinitas.

176. Demostrar que (*a*) $\displaystyle\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{tu})\cos u\, du = \operatorname{sen} t,$

(*b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{tu})\operatorname{sen} u\, du = \cos t.$

177. Demostrar que $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{tu})\, J_0(u)\, du \;=\; J_0(t)$.

178. Usando (*a*) series infinitas y (*b*) ecuaciones diferenciales, hallar $\mathcal{L}\{J_1(t)\}$. Véase el problema 35.

179. Si $s > 0$ y $n > 1$, demostrar que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\right\} \;=\; \Gamma(n)\left\{\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \frac{1}{(s+2)^n} + \cdots\right\}$$

180. Probar que si $n > 1$,

$$\zeta(n) \;=\; \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t - 1}\,dt \;=\; \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

La función $\zeta(n)$ se llama *función zeta de Riemann.*

181. Si $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, demostrar que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}\,du\right\} \;=\; \frac{f(\ln s)}{s \ln s}$$

182. Si $L_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, son los polinomios de Laguerre [véase el problema 162], demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} \;=\; e\, J_0(2\sqrt{t})$$

183. Sea $J(a,t) = \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos au\, du$. (*a*) Demostrar que $\dfrac{\partial J}{\partial a} = -\dfrac{a}{2t}J$ donde $J(0,t) = \sqrt{\pi}/2\sqrt{t}$. (*b*) Resolviendo la ecuación diferencial de la parte (*a*) demostrar que

$$J(a,t) \;=\; \int_0^\infty e^{-u^2 t}\cos au\, du \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}\, e^{-a^2/4t}$$

184. Usando el problema 183 hallar $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$ [véase el problema 49].

185. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{2}\,t}\,\operatorname{senh} t\, \operatorname{sen} t}{t}\,dt \;=\; \frac{\pi}{8}$.

Capítulo 2

Transformada inversa de Laplace

DEFINICION DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Si la transformada de Laplace de una función $F(t)$ es $f(s)$, es decir, si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $F(t)$ se llama una *transformada inversa de Laplace* de $f(s)$ y se expresa por $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$, donde $\mathcal{L}^{-1}$ se llama el *operador transformada inversa de Laplace.*

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \dfrac{1}{s+3}$ se puede escribir

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

UNICIDAD DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE. TEOREMA DE LERCH

Como la transformada de Laplace de una función nula $\mathcal{N}(t)$ es cero [véase el Cap. 1], es claro que si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces $\mathcal{L}\{F(t) + \mathcal{N}(t)\} = f(s)$. De esto se deduce que puede haber dos funciones diferentes con la misma transformada de Laplace.

Ejemplo. Las dos funciones diferentes $F_1(t) = e^{-3t}$ y $F_2(t) = \begin{cases} 0 & t = 1 \\ e^{-3t} & \text{de otra manera} \end{cases}$ tienen la misma transformada de Laplace, es decir $1/(s+3)$.

Si consideramos las funciones nulas, vemos que la transformada inversa de Laplace no es única. Sin embargo, es única cuando trabajamos con funciones no nulas [las funciones nulas generalmente carecen de interés físico]. Este resultado se establece en el

Teorema 2-1. *Teorema de Lerch.* Si consideramos solamente las funciones $F(t)$ que son seccionalmente continuas en cada intervalo $0 \leqq t \leqq N$ y de orden exponencial para $t > N$, entonces la transformada inversa de Laplace de $f(s)$, es decir $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, es única. Se aceptará siempre esa unicidad a menos que se establezca claramente lo contrario.

ALGUNAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Los resultados siguientes corresponden a fórmulas de la página 1.

Tabla de transformadas inversas de Laplace

	$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{t^n}{n!}$
4.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\operatorname{sen} at}{a}$
6.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
7.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\operatorname{senh} at}{a}$
8.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

En la lista que sigue se enuncian algunas propiedades importantes de la transformada inversa de Laplace. Nótese la analogía entre las propiedades 1-8 y las propiedades correspondientes en el Cap. 1.

1. Propiedad de linealidad.

Teorema 2-2. Si c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y $f_1(s)$ y $f_2(s)$ son las transformadas de Laplace de $F_1(t)$ y $F_2(t)$ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} &= c_1\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} \qquad (1)\\ &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\end{aligned}$$

Este resultado se puede extender fácilmente al caso de más de dos funciones.

Ejemplo.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}\\ &\quad + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}\\ &= 4e^{2t} - 3\cos 4t + \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2t\end{aligned}$$

Debido a esta propiedad podemos decir que $\mathcal{L}^{-1}$ es un *operador lineal* o que tiene *propiedad de linealidad.*

2. Primera propiedad de translación.

Teorema 2-3. Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t) \qquad (2)$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\} = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} 2t$$

3. Segunda propiedad de translación.

Teorema 2-4. Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases} \tag{3}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\} = \begin{cases} \operatorname{sen}(t-\pi/3) & \text{si } t>\pi/3 \\ 0 & \text{si } t<\pi/3 \end{cases}$$

4. Propiedad del cambio de escala.

Teorema 2-5. Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{t}{k}\right) \tag{4}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\} = \frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2} = \frac{1}{2}\cos 2t$$

lo cual puede comprobarse directamente.

5. Transformada inversa de Laplace de las derivadas.

Teorema 2-6. Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}f(s)\right\} = (-1)^n t^n F(t) \tag{5}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$ y $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) = \dfrac{-2s}{(s^2+1)^2}$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\} = -t\operatorname{sen} t \qquad \text{o} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$$

6. Transformada inversa de Laplace de las integrales.

Teorema 2-7. Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\,du\right\} = \frac{F(t)}{t} \tag{6}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}\right\} = 1-e^{-t}$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

7. Multiplicación por s^n.

Teorema 2-8. Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $F(0) = 0$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\,f(s)\} \quad = \quad F'(t) \tag{7}$$

Así que, multiplicar por s produce el efecto de *derivar a* $F(t)$.

Si $F(0) \neq 0$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\,f(s) - F(0)\} \quad = \quad F'(t) \tag{8}$$

o

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\,f(s)\} \quad = \quad F'(t) + F(0)\,\delta(t) \tag{9}$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac o la función de impulso unitario.

Ejemplo. Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \quad = \quad \frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) \quad = \quad \cos t$$

Esto se puede generalizar para $\mathcal{L}^{-1}\{s^n f(s)\}$, cuando $n = 2, 3, 4, \ldots$.

8. División por s.

Teorema 2-9. Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} \quad = \quad \int_0^t F(u)\,du \tag{10}$$

De manera que la división por s (o multiplicación por $1/s$) produce el efecto de *integrar* $F(t)$ entre 0 y t.

Ejemplo. Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\} = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} \quad = \quad \int_0^t \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\,du \quad = \quad \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

Esto se puede generalizar para $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)/s^n\}$, cuando $n = 2, 3, 4, \ldots$ [véase el problema 70].

9. Propiedad de convolución.

Teorema 2-10. Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\,g(s)\} \quad = \quad \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du \quad = \quad F * G \tag{11}$$

$F * G$ se llama la convolución de F y G, y este teorema se llama el *teorema de convolución* o *propiedad de convolución*.

Del problema 21 se deduce que $F * G = G * F$.

Ejemplo. Puesto que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\} = e^t$ y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$, tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} \quad = \quad \int_0^t e^u\, e^{2(t-u)}\,du \quad = \quad e^{2t} - e^t$$

METODOS PARA HALLAR LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Existen varios métodos para determinar transformadas inversas de Laplace, algunos de los cuales se indican en la lista que aparece a continuación. Comparar con la página 6.

1. **Método de las fracciones parciales.** Cualquier función racional $P(s)/Q(s)$, donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios en los cuales el grado de $P(s)$ es menor que el de $Q(s)$, puede escribirse como una suma de funciones racionales [llamadas *fracciones parciales*] de la forma $\dfrac{A}{(as+b)^r}$, $\dfrac{As+B}{(as^2+bs+c)^r}$ donde $r = 1, 2, 3, \ldots$ Al hallar las transformadas inversas de Laplace de las dos fracciones parciales, podemos hallar $\mathcal{L}^{-1}\{P(s)/Q(s)\}$.

   Ejemplo 1. $$\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{2s+1}$$

   Ejemplo 2. $$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}$$

   Las constantes A, B, C, etc. pueden hallarse expresando convenientemente las fracciones e igualando los coeficientes de las potencias iguales de s a ambos lados de la ecuación resultante, o bien, utilizando métodos especiales [véanse los problemas 24-28]. Uno de estos métodos hace uso de la *fórmula del desarrollo de Heaviside* que aparece a continuación:

2. **Método de las series.** Si $f(s)$ tiene un desarrollo en serie de potencias de los recíprocos de s dado por
$$f(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \frac{a_3}{s^4} + \cdots \tag{12}$$
   entonces, dentro de algunas condiciones, podemos invertir término a término para llegar a
$$F(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \cdots \tag{13}$$
   Véase el problema 40. Se pueden usar desarrollos en serie de forma diferente al de *(12)*. Véase el problema 41.

3. **Método de las ecuaciones diferenciales.** Véase el problema 41.

4. **Derivación con respecto a un parámetro.** Véanse los problemas 13 y 38.

5. **Distintos métodos que utilizan los teoremas anteriores.**

6. **Uso de tablas.** (Véase el apéndice B.)

7. **Fórmula de inversión compleja.** Esta fórmula nos da un poderoso método para hallar transformadas inversas de Laplace haciendo uso de la teoría de funciones de variable compleja que se considera en el capítulo 6.

FORMULA DEL DESARROLLO DE HEAVISIDE

Sean $P(s)$ y $Q(s)$ polinomios en los cuales $P(s)$ es de grado menor que $Q(s)$ y $Q(s)$ tiene n ceros diferentes α_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} \tag{14}$$

Esta fórmula se llama el *teorema* o *fórmula del desarrollo de Heaviside*. Véanse los problemas 29-31.

Esta fórmula es susceptible de generalización [véanse los problemas 105 y 111].

LA FUNCION BETA

Si $m > 0$, $n > 0$, la *función beta* se define por

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du \tag{15}$$

Podemos demostrar las propiedades siguientes [véanse los problemas 32 y 33]:

1. $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)}$

EVALUACION DE INTEGRALES

La transformada de Laplace se utiliza frecuentemente para calcular integrales definidas. Véanse, por ejemplo, los problemas 35-37.

Problemas resueltos

TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

1. Demostrar que

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n}{n!}$, $n = 0,1,2,3,\ldots$, donde $0! = 1$,

(*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\} = \dfrac{\operatorname{sen} at}{a}$, (*d*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$, (*e*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-a^2}\right\} = \dfrac{\operatorname{senh} at}{a}$,

(*f*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$.

(*a*) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$. Entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$.

(*b*) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{t^n}{n!}\right\} = \dfrac{1}{n!}\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{s^{n+1}}$. Entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n}{n!}$ para $n = 0,1,2,3,\ldots$.

(*c*) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{sen} at}{a}\right\} = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a}{s^2+a^2} = \dfrac{1}{s^2+a^2}$. Entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\} = \dfrac{\operatorname{sen} at}{a}$.

(*d*) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$. Entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$.

(e) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{senh} at}{a}\right\} = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a}{s^2-a^2} = \dfrac{1}{s^2-a^2}$. Entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-a^2}\right\} = \dfrac{\operatorname{senh} at}{a}$.

(f) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$. Entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$.

2. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n}{\Gamma(n+1)}$ para $n > -1$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\right\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\cdot\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{1}{s^{n+1}}, \qquad n > -1$$

por el problema 31.

Entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n}{\Gamma(n+1)}$, $n > -1$. Nótese que si $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, entonces $(n+1) = n!$ y el resultado es equivalente al del problema 1(b).

3. Hallar la transformada inversa de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+9}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-16}\right\}$ (g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{3/2}}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s-2}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-3}\right\}$

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+9}\right\} = \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{3}$ [Problema 1(c)]

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s-2}\right\} = 4e^{2t}$ [Problema 1(a)]

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4}\right\} = \dfrac{t^3}{3!} = \dfrac{t^3}{6}$ [Problema 1(b) o 2]

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2}\right\} = \cos\sqrt{2}\,t$ [Problema 1(d)]

(e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s}{s^2-16}\right\} = 6\cosh 4t$ [Problema 1(f)]

(f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-3}\right\} = \dfrac{\operatorname{senh}\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}$ [Problema 1(e)]

(g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{3/2}}\right\} = \dfrac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} = \dfrac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \dfrac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$ [Problema 2]

PROPIEDADES DE LINEALIDAD, TRANSLACION Y CAMBIO DE ESCALA

4. Demostrar la *linealidad* de la transformada inversa de Laplace [*teorema 2-2*].

Por el problema 5, tenemos

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1f_1(s) + c_2f_2(s)$$

Entonces
$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\}$$

Este resultado se puede generalizar fácilmente [véase el problema 52].

5. Hallar (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s+4}{s^3} - \dfrac{2s-18}{s^2+9} + \dfrac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{2s-3} - \dfrac{3+4s}{9s^2-16} + \dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$.

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s+4}{s^3} - \dfrac{2s-18}{s^2+9} + \dfrac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{2s}{s^2+9} + \frac{18}{s^2+9} + \frac{24}{s^4} - \frac{30}{s^{7/2}}\right\}$$

$$= 5t + 4(t^2/2!) - 2\cos 3t + 18(\tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3t) + 24(t^3/3!) - 30\{t^{5/2}/\Gamma(7/2)\}$$

$$= 5t + 2t^2 - 2\cos 3t + 6\operatorname{sen} 3t + 4t^3 - 16t^{5/2}/\sqrt{\pi}$$

Puesto que $\Gamma(7/2) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$.

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{2s-3} - \dfrac{3+4s}{9s^2-16} + \dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-3/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2-16/9}\right) - \frac{4}{9}\left(\frac{s}{s^2-16/9}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+9/16}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{s}{s^2+9/16}\right)\right\}$$

$$= 3e^{3t/2} - \tfrac{1}{4}\operatorname{senh} 4t/3 - \tfrac{4}{9}\cosh 4t/3 + \tfrac{2}{3}\operatorname{sen} 3t/4 - \tfrac{3}{8}\cos 3t/4$$

6. Demostrar la *primera propiedad de translación*. Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

Por el problema 7 de la página 13 tenemos que $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$. Entonces
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

Otro método. Como $f(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$, tenémos
$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at}F(t)\}\,dt = \mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}$$

Entonces
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

7. Calcular lo siguiente:

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$ (*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$ (*d*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}$

(*a*)
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16}\right\}$$

$$= 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2+16}\right\}$$

$$= 6e^{2t}\cos 4t + 2e^{2t}\operatorname{sen} 4t = 2e^{2t}(3\cos 4t + \operatorname{sen} 4t)$$

(*b*)
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{(s+4)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2}\right\}$$
$$= 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} - 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$$
$$= 4\,e^{-4t} - 4t\,e^{-4t} = 4\,e^{-4t}(1-t)$$

(*c*)
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-1)^2-4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\right\}$$
$$= 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2-4}\right\} + 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2-4}\right\}$$
$$= 3\,e^t\cosh 2t + 5\,e^t \operatorname{senh} 2t = e^t(3\cosh 2t + 5\operatorname{senh} 2t)$$
$$= 4\,e^{3t} - e^{-t}$$

Hay otro método en el problema 24.

(*d*)
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3/2)^{1/2}}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-3t/2}\,\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,t^{-1/2}\,e^{-3t/2}$$

8. Demostrar la *segunda propiedad de translación:*

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t)$ donde

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Método 1. Por el problema 9 de la página 14 tenemos que $\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$. Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t)$$

Método 2. Como $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$, tenemos

$$e^{-as}f(s) = \int_0^\infty e^{-as}e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(t+a)}F(t)\,dt$$
$$= \int_a^\infty e^{-su}F(u-a)\,du \qquad [\text{haciendo } t+a=u]$$
$$= \int_0^a e^{-st}(0)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}F(t-a)\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt$$

de donde se concluye el resultado.

Obsérvese que $G(t)$ puede expresarse en términos de la función escalonada unitaria de Heaviside como $F(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)$.

9. Calcular

$$(a)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}, \quad (b)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25}\right\}, \quad (c)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}, \quad (d)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}.$$

(*a*) Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\} = e^{2t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^3 e^{2t}}{3!} = \frac{1}{6}\,t^3 e^{2t}$, del problema 8 tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)} & t > 5 \\ 0 & t < 5 \end{cases}$$

$$= \tfrac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)}\,\mathcal{U}(t-5)$$

(*b*) Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+25}\right\} = \cos 5t$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25}\right\} = \begin{cases} \cos 5(t-4\pi/5) & t > 4\pi/5 \\ 0 & t < 4\pi/5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cos 5t & t > 4\pi/5 \\ 0 & t < 4\pi/5 \end{cases}$$

$$= \cos 5t\ \mathcal{U}(t-4\pi/5)$$

(*c*) Tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}/2}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{3}\,t}{2}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$$

Luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \mathrm{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right\} & t > \pi \\ 0 & t < \pi \end{cases}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right\}\mathcal{U}(t-\pi)$$

(*d*) Tenemos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^{5/2}}\right\} = e^{-4t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\}$

$$= e^{-4t}\,\frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{4t^{3/2}e^{-4t}}{3\sqrt{\pi}}$$

Luego
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\} = e^4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{4e^4\,(t-3)^{3/2}\,e^{-4(t-3)}}{3\sqrt{\pi}} & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{4\,(t-3)^{3/2}\,e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}} & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$$
$$= \frac{4\,(t-3)^{3/2}\,e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}}\,\mathcal{U}(t-3)$$

10. Demostrar la *propiedad del cambio de escala:* Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(t/k)$$

Método 1. Mediante el problema 11, al remplazar a a por $1/k$ tendremos que $\mathcal{L}\{F(t/k)\} = k\,f(ks)$. Entonces
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(t/k)$$

Método 2. Como $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$, tenemos
$$f(ks) = \int_0^\infty e^{-kst}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-su}F(u/k)\,d(u/k) \qquad [\text{haciendo } u = kt]$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-su}F(u/k)\,du = \frac{1}{k}\mathcal{L}\{F(t/k)\}$$

Entonces $\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(t/k)$.

11. Si $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$, hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}\right\}$ donde $a>0$.

Al sustituir s por ks en el problema 10 tendremos
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/ks}}{(ks)^{1/2}}\right\} = \frac{1}{k}\,\frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi(t/k)}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi t}}$$
o
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/ks}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi t}}$$
Entonces, haciendo $k = 1/a$,
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LAS DERIVADAS E INTEGRALES

12. Demostrar el *teorema 2-6:* $\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Como $\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$ [véase el problema 19], tenemos
$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$$

13. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$.

Tenemos que $\quad \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$. $\quad$ Así. $\quad \frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)$.

Entonces, como $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\operatorname{sen} at}{a}$, por el problema 12 tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}t\left(\frac{\operatorname{sen} at}{a}\right) = \frac{t \operatorname{sen} at}{2a}$$

Otro método. Derivando con respecto al parámetro a obtenemos

$$\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}$$

Luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

o bien

$$\frac{d}{da}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = -2a\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

es decir

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2a}\frac{d}{da}(\cos at) = -\frac{1}{2a}(-t \operatorname{sen} at) = \frac{t \operatorname{sen} at}{2a}$$

14. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$.

Sea $f(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right) = \mathcal{L}\{F(t)\}$. Entonces $f'(s) = \frac{-2}{s(s^2+1)} = -2\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\}$.

De manera que $\mathcal{L}^{-1}\{f'(s)\} = -2(1-\cos t) = -t\,F(t)$, $\quad F(t) = \frac{2(1-\cos t)}{t}$.

MULTIPLICACION Y DIVISION POR POTENCIAS DE s

15. Demostrar el *teorema 2-9:* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du$.

Sea $G(t) = \int_0^t F(u)\,du$. Entonces $G'(t) = F(t)$, $G(0) = 0$. Luego

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\,\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

de manera que $\quad \mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s} \quad$ o $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = G(t) = \int_0^t F(u)\,du$

Comparar con el problema 17.

16. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^2}\right\} = \displaystyle\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$.

Sea $G(t) = \displaystyle\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$. Entonces $G'(t) = \displaystyle\int_0^t F(u)\,du$ y $G''(t) = F(t)$. Como $G(0) = G'(0)$

$$\mathcal{L}\{G''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{G(t)\} - s\,G(0) - G'(0) = s^2\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

Así que $\qquad \mathcal{L}\{G(t)\} = \dfrac{f(s)}{s^2} \qquad$ o $\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^2}\right\} = G(t) = \displaystyle\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$

Este resultado se puede expresar como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^2}\right\} = \displaystyle\int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^2$.

En general,
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)\,dt^n$$

17. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$.

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$, aplicando repetidamente el resultado del problema 15,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \operatorname{sen} u\,du = 1 - \cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1-\cos u)\,du = t - \operatorname{sen} t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (u-\operatorname{sen} u)\,du = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1$$

Comprobación: $\mathcal{L}\left\{\dfrac{t^2}{2}+\cos t - 1\right\} = \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{s^2+1+s^4-s^2(s^2+1)}{s^3(s^2+1)} = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$

18. Dado que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \dfrac{1}{2}t\operatorname{sen} t$, hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$.

Método 1. Por el *teorema 2-9* (problema 15), tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} &= \int_0^t \tfrac{1}{2}u\operatorname{sen} u\,du\\ &= (\tfrac{1}{2}u)(-\cos u) - (\tfrac{1}{2})(-\operatorname{sen} u)\Big|_0^t\\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)\end{aligned}$$

Método 2. Del *teorema 2-8* tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{s\cdot\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1-1}{(s^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}\\ &= \frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}t\operatorname{sen} t\} = \tfrac{1}{2}(t\cos t + \operatorname{sen} t)\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} - \tfrac{1}{2}(t\cos t + \operatorname{sen} t) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$

19. Encuentre $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$.

Usando el problema 14,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\} = \int_0^t \frac{2(1-\cos u)}{u}\,du = 2\int_0^t \frac{1-\cos u}{u}\,du$$

TEOREMA DE LA CONVOLUCION

20. Demostrar el *teorema de la convolución:* Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du = F * G$$

Método 1. El resultado requerido estará demostrado si logramos probar que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\} = f(s)\,g(s) \tag{1}$$

donde $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, $g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$. Para demostrar esto observemos que el miembro izquierdo de *(1)* es

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\left\{\int_{u=0}^{t} F(u)\,G(t-u)\,du\right\}dt$$

$$= \int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} e^{-st}F(u)\,G(t-u)\,du\,dt = \lim_{M\to\infty} s_M$$

donde

$$s_M = \int_{t=0}^{M}\int_{u=0}^{t} e^{-st}F(u)\,G(t-u)\,du\,dt \tag{2}$$

La región del plano tu sobre la cual se efectúa la integración (2) aparece sombreada en la Fig. 2-1.

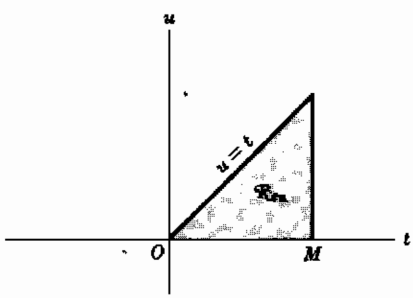


Fig. 2-1

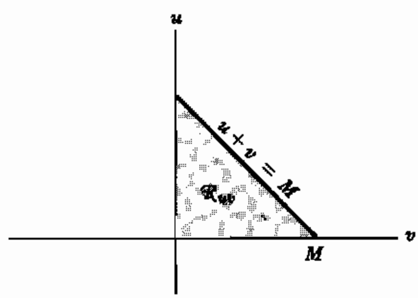


Fig. 2-2

Haciendo $t-u=v$ o $t=u+v$, la región sombreada $\mathcal{R}_{tu}$ del plano tu se transforma en la región $\mathcal{R}_{uv}$ del plano uv que aparece sombreada en la Fig. 2-2. Ahora, por un teorema de transformación de integrales múltiples, tenemos que

$$s_M = \iint_{\mathcal{R}_{tu}} e^{-st}F(u)\,G(t-u)\,du\,dt = \iint_{\mathcal{R}_{uv}} e^{-s(u+v)}F(u)\,G(v)\left|\frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv \tag{3}$$

donde el *Jacobiano* de la transformación es

$$J \;=\; \frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} \;=\; \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u} & \dfrac{\partial u}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial t}{\partial u} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 1$$

De manera que el miembro izquierdo de (*3*) es

$$s_M \;=\; \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv \tag{4}$$

Ahora definimos una nueva función

$$K(u,v) \;=\; \begin{cases} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v) & \text{si } u+v \leqq M \\ 0 & \text{si } u+v > M \end{cases} \tag{5}$$

Esta función está definida sobre todo el cuadrado de la Fig. 2-3, pero, como se indica en la fórmula (*5*), vale cero en la parte no sombreada de dicho cuadrado. En términos de esta nueva función (*4*) puede expresarse como

$$s_M \;=\; \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M} K(u,v)\, du\, dv$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{M\to\infty} s_M &= \int_0^\infty \int_0^\infty K(u,v)\, du\, dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv \\ &= \left\{\int_0^\infty e^{-su} F(u)\, du\right\} \left\{\int_0^\infty e^{-sv} G(v)\, dv\right\} \\ &= f(s)\, g(s) \end{aligned}$$

lo cual establece el teorema.

A $\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du = F*G$ la llamamos la *convolución* de F y G. En el problema 85 se da un método directo para establecer el teorema de la convolución.

21. Demostrar que $F*G = G*F$.

Al hacer $t-u=v$ o $u=t-v$, tenemos que

$$\begin{aligned} F*G &= \int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du \;=\; \int_0^t F(t-v)\, G(v)\, dv \\ &= \int_0^t G(v)\, F(t-v)\, dv \;=\; G*F \end{aligned}$$

Esto prueba que la convolución de F y G obedece a la ley *conmutativa* del álgebra; también obedece a las leyes *asociativa* y *distributiva* [véanse los problemas 80 y 81].

22. Haciendo uso del teorema de convolución, calcular

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$.

(a) Podemos escribir $\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}$. Entonces como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$ y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\operatorname{sen} at}{a}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} &= \int_0^t \cos au\cdot\frac{\operatorname{sen} a(t-u)}{a}\,du \\
&= \frac{1}{a}\int_0^t (\cos au)(\operatorname{sen} at\cos au - \cos at\operatorname{sen} au)\,du \\
&= \frac{1}{a}\operatorname{sen} at\int_0^t \cos^2 au\,du - \frac{1}{a}\cos at\int_0^t \operatorname{sen} au\cos au\,du \\
&= \frac{1}{a}\operatorname{sen} at\int_0^t\left(\frac{1+\cos 2au}{2}\right)du - \frac{1}{a}\cos at\int_0^t \frac{\operatorname{sen} 2au}{2}\,du \\
&= \frac{1}{a}\operatorname{sen} at\left(\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2at}{4a}\right) - \frac{1}{a}\cos at\left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right) \\
&= \frac{1}{a}\operatorname{sen} at\left(\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} at\cos at}{2a}\right) - \frac{1}{a}\cos at\left(\frac{\operatorname{sen}^2 at}{2a}\right) \\
&= \frac{t\operatorname{sen} at}{2a}
\end{aligned}$$

Comparar con el problema 13.

(b) Tenemos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}$. Entonces, por el teorema de convolución,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} &= \int_0^t (ue^{-u})(t-u)\,du \\
&= \int_0^t (ut-u^2)\,e^{-u}\,du \\
&= (ut-u^2)(-e^{-u}) - (t-2u)(e^{-u}) + (-2)(-e^{-u})\Big|_0^t \\
&= te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2
\end{aligned}$$

Comprobación: $\mathcal{L}\{te^{-t}+2e^{-t}+t-2\} = \frac{1}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}$

$$= \frac{s^2+2s^2(s+1)+(s+1)^2-2s(s+1)^2}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$$

23. Demostrar que $\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv = \int_0^t (t-u)\,F(u)\,du$.

Por el teorema de convolución, si $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, tenemos que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u)\,F(u)\,du\right\} \quad = \quad \mathcal{L}\{t\}\,\mathcal{L}\{F(t)\} \quad = \quad \frac{f(s)}{s^2}$$

Entonces, por el problema 16,

$$\int_0^t (t-u)\,F(u)\,du \quad = \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} \quad = \quad \int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv$$

El resultado puede expresarse como

$$\int_0^t \int_0^t F(t)\,dt^2 \quad = \quad \int_0^t (t-u)\,F(u)\,du$$

En general, se puede demostrar que [véanse los problemas 83 y 84]

$$\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t F(t)\,dt^n \quad = \quad \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,F(u)\,du$$

FRACCIONES PARCIALES

24. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$.

Método 1.

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} \quad = \quad \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} \quad = \quad \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} \tag{1}$$

Multiplicando por $(s-3)(s+1)$ obtenemos

$$3s + 7 \quad = \quad A(s+1) + B(s-3) \quad = \quad (A+B)s + A - 3B$$

Igualando los coeficientes, $A + B = 3$ y $A - 3B = 7$; entonces $A = 4$, $B = -1$,

$$\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} \quad = \quad \frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\right\} \quad = \quad 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$
$$= \quad 4e^{3t} - e^{-t}$$

Método 2. Se multiplica a ambos lados de (*1*) por $(s-3)$ y se hace que $s \to 3$. Entonces

$$\lim_{s\to 3}\frac{3s+7}{s+1} \quad = \quad A + \lim_{s\to 3}\frac{B(s-3)}{s+1} \qquad \text{o} \qquad A = 4$$

Análogamente, si multiplicamos a ambos lados de (*1*) por $s+1$ y se hace que $S \to -1$, obtendremos

$$\lim_{s\to -1}\frac{3s+7}{s-3} \quad = \quad \lim_{s\to -1}\frac{A(s+1)}{s-3} + B \qquad \text{o} \qquad B = -1$$

Usando estos valores obtenemos el mismo resultado que por el método 1. Ver también el problema 7(*c*).

25. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$.

Tenemos que

$$\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \quad = \quad \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3} \tag{1}$$

Ahora utilizamos el procedimiento del método 2, problema 24.

Multiplicamos los dos miembros de (1) por $s+1$ y hacemos que $s \to -1$; entonces

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{2s^2-4}{(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{6}$$

Multiplicamos los dos miembros de (1) por $s-2$ y hacemos que $s \to 2$; entonces

$$B = \lim_{s \to 2} \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-3)} = -\frac{4}{3}$$

Multiplicamos los dos miembros de (1) por $s-3$ y hacemos que $s \to 3$; entonces

$$C = \lim_{s \to 3} \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)} = \frac{7}{2}$$

De manera que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/6}{s+1} + \frac{-4/3}{s-2} + \frac{7/2}{s-3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

También puede usarse el procedimiento del método 1, problema 24. Sin embargo, se observará que este último método es menos tedioso. Se recomienda su utilización cuando el denominador tenga *factores lineales distintos*.

26. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$.

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{s-2} \qquad (1)$$

Para encontrar A y B puede utilizarse un procedimiento análogo al del problema 25.

Se multiplican los dos miembros de (1) por $s+1$ y se hace que $s \to -1$; entonces

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{5s^2-15s-11}{(s-2)^3} = \frac{-1}{3}$$

Se multiplican los dos miembros de (1) por $(s-2)^3$ y se hace que $s \to 2$; entonces

$$B = \lim_{s \to 2} \frac{5s^2-15s-11}{s+1} = -7$$

Este método no permite determinar ni C ni D. Sin embargo, como conocemos A y B, de (1) tenemos que

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{-1/3}{s+1} + \frac{-7}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{s-2} \qquad (2)$$

Para determinar C y D podemos darle dos valores a s, por ejemplo $s=0$ y $s=1$, de donde encontramos que

$$\frac{11}{8} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{8} + \frac{C}{4} - \frac{D}{2}, \qquad \frac{21}{2} = -\frac{1}{6} + 7 + C - D$$

es decir, $3C-6D=10$ y $3C-3D=11$, de donde $C=4$, $D=1/3$. Así

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+1} + \frac{-7}{(s-2)^3} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{1/3}{s-2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t} + 4te^{2t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

Otro método. Multiplicando por s los dos miembros de (2) y haciendo que $s \to \infty$, encontramos que $0 = -\frac{1}{8} + D$, lo cual da $D = \frac{1}{8}$. Podemos encontrar C, haciendo $s = 0$.

Se puede usar este método cuando hay *factores lineales repetidos.*

27. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$.

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \tag{1}$$

Multiplicando a ambos lados por $s-1$, y haciendo que $s \to 1$ tenemos que $A = \lim_{s\to 1} \dfrac{3s+1}{s^2+1} = 2$ y

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \tag{2}$$

Para determinar B y C le damos a s los valores 0 y 2, por ejemplo; entonces

$$-1 = -2 + C, \qquad \frac{7}{5} = 2 + \frac{2B+C}{5}$$

de donde $C = 1$ y $B = -2$. Tenemos, entonces, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}\right\} \\
&= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\
&= 2e^t - 2\cos t + \operatorname{sen} t
\end{aligned}$$

Otro método. Se multiplica a ambos lados de (2) por s y al hacer que $s \to \infty$, se encontrará de una vez que $B = -2$.

28. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$.

Método 1.

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5} \tag{1}$$

Multiplicando por $(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)$,

$$\begin{aligned}
s^2 + 2s + 3 &= (As+B)(s^2+2s+5) + (Cs+D)(s^2+2s+2) \\
&= (A+C)s^3 + (2A+B+2C+D)s^2 + (5A+2B+2C+2D)s + 5B + 2D
\end{aligned}$$

Entonces $A + C = 0$, $2A + B + 2C + D = 1$, $5A + 2B + 2C + 2D = 2$, $5B + 2D = 3$. Al resolver esto obtenemos $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$, $D = \frac{2}{3}$. Así

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^2+2s+2} + \frac{2/3}{s^2+2s+5}\right\} \\
&= \tfrac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} + \tfrac{2}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= \tfrac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} t + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t \\
&= \tfrac{1}{3}e^{-t}(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)
\end{aligned}$$

Método 2. Haciendo $s = 0$ en (*1*): $\quad \dfrac{3}{10} = \dfrac{B}{2} + \dfrac{D}{5}$

Multiplicando (*1*) por s y haciendo que $s \to \infty$: $0 = A + C$

$$\text{Haciendo } s = 1: \quad \frac{3}{20} = \frac{A+B}{5} + \frac{C+D}{8}$$

$$\text{Haciendo } s = -1: \quad \frac{1}{2} = -A + B + \frac{D-C}{4}$$

Resolviendo, $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$, $D = \frac{2}{3}$, como en el método 1.

Esto ilustra el caso de los *factores cuadráticos no repetidos.*

Método 3. Como $s^2 + 2s + 2 = 0$ para $s = -1 \pm i$, podemos escribir

$$s^2 + 2s + 2 = (s+1-i)(s+1+i)$$

Similarmente
$$s^2 + 2s + 5 = (s+1-2i)(s+1+2i)$$

Entonces

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{s^2+2s+3}{(s+1-i)(s+1+i)(s+1-2i)(s+1+2i)}$$

$$= \frac{A}{s+1-i} + \frac{B}{s+1+i} + \frac{C}{s+1-2i} + \frac{D}{s+1+2i}$$

Resolviendo para A, B, C, D, encontramos que $A = 1/6i$, $B = -1/6i$, $C = 1/6i$, $D = -1/6i$. De modo que la transformada inversa de Laplace buscada es

$$\frac{e^{-(1-i)t}}{6i} - \frac{e^{-(1+i)t}}{6i} + \frac{e^{-(1-2i)t}}{6i} - \frac{e^{-(1+2i)t}}{6i} = \tfrac{1}{3}e^{-t}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) + \tfrac{1}{3}e^{-t}\left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} t + \tfrac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-t}(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)$$

Esto muestra el caso de que los factores cuadráticos no repetidos pueden reducirse a factores lineales no repetidos usando números complejos.

FORMULA DEL DESARROLLO DE HEAVISIDE

29. Demostrar la fórmula del desarrollo de Heaviside (*14*).

Como $Q(s)$ es un polinomio con n ceros diferentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, de acuerdo con el método de las fracciones parciales podemos escribir

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_k}{s-\alpha_k} + \cdots + \frac{A_n}{s-\alpha_n} \tag{1}$$

Multiplicando a ambos lados por $s - \alpha_k$ y haciendo que $s \to \alpha_k$, aplicando la regla de L'Hospital encontramos que

$$A_k = \lim_{s\to\alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k) = \lim_{s\to\alpha_k} P(s)\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\}$$

$$= \lim_{s\to\alpha_k} P(s) \lim_{s\to\alpha_k}\left(\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right) = P(\alpha_k)\lim_{s\to\alpha_k}\frac{1}{Q'(s)} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

Entonces (*1*) puede escribirse

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}\frac{1}{s-\alpha_1} + \cdots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\frac{1}{s-\alpha_k} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}\frac{1}{s-\alpha_n}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace encontramos, tal como se esperaba, que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t} + \cdots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}e^{\alpha_n t} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$$

30. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$.

Tenemos que $P(s) = 2s^2 - 4$, $Q(s) = (s+1)(s-2)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6$, $Q'(s) = 3s^2 - 8s + 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$. Entonces, por el problema 29, la inversa es

$$\frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t} + \frac{P(2)}{Q'(2)}e^{2t} + \frac{P(3)}{Q'(3)}e^{3t} = \frac{-2}{12}e^{-t} + \frac{4}{-3}e^{2t} + \frac{14}{4}e^{3t} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

Comparar con el problema 25.

31. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$.

Tenemos que $P(s) = 3s + 1$, $Q(s) = (s-1)(s^2+1) = s^3 - s^2 + s - 1$, $Q'(s) = 3s^2 - 2s + 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\alpha_3 = -i$ puesto que $s^2 + 1 = (s-i)(s+i)$. Entonces por la fórmula del desarrollo de Heaviside la inversa requerida es

$$\begin{aligned}
&\frac{P(1)}{Q'(1)}e^{t} + \frac{P(i)}{Q'(i)}e^{it} + \frac{P(-i)}{Q'(-i)}e^{-it} \qquad (1)\\
&= \frac{4}{2}e^{t} + \frac{3i+1}{-2-2i}e^{it} + \frac{-3i+1}{-2+2i}e^{-it}\\
&= 2e^{t} + (-1-\tfrac{1}{2}i)(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t) + (-1+\tfrac{1}{2}i)(\cos t - i\,\mathrm{sen}\,t)\\
&= 2e^{t} - \cos t + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t - \cos t + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t\\
&= 2e^{t} - 2\cos t + \mathrm{sen}\,t
\end{aligned}$$

Comparar con el problema 27.

Nótese que se puede ahorrar algún trabajo si se tiene en cuenta que los dos últimos términos de (1) son conjugados complejos el uno del otro.

FUNCION BETA

32. Demostrar que $B(m,n) = \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ donde $m > 0$, $n > 0$.

Consideremos

$$G(t) = \int_0^t x^{m-1}(t-x)^{n-1}\,dx$$

Así, por el teorema de la convolución tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{G(t)\} &= \mathcal{L}\{t^{m-1}\}\,\mathcal{L}\{t^{n-1}\}\\
&= \frac{\Gamma(m)}{s^m}\cdot\frac{\Gamma(n)}{s^n} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{s^{m+n}}
\end{aligned}$$

De manera que

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{s^{m+n}}\right\} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,t^{m+n-1}$$

o sea

$$\int_0^t x^{m-1}(t-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,t^{m+n-1}$$

Haciendo $t = 1$ obtenemos el resultado buscado.

33. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)}$.

Del problema 32 tenemos

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Haciendo $x = \operatorname{sen}^2\theta$, se transforma en

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

de aquí se obtiene el resultado requerido.

34. Calcular (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta\cos^6\theta\, d\theta$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^4\theta\, d\theta$, (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$.

(a) En el problema 33 hagamos $2m - 1 = 4$, $2n - 1 = 6$. Entonces $m = 5/2$, $n = 7/2$ y tendremos

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta\cos^6\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(7/2)}{2\,\Gamma(6)} = \frac{(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}\cdot(5/2)(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}}{2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{3\pi}{512}$$

(b) Por la simetría de $\cos\theta$ alrededor de $\theta = \pi/2$, tenemos que

$$\int_0^{\pi}\cos^4\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\, d\theta$$

Entonces, haciendo $2m - 1 = 0$ y $2n - 1 = 4$, es decir $m = 1/2$ y $n = 5/2$ en el problema 33, encontramos que

$$2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\, d\theta = 2\left[\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(5/2)}{2\,\Gamma(3)}\right]$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{\pi}\cdot(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}}{2\cdot 2\cdot 1}\right] = \frac{3\pi}{8}$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{-1/2}\theta\cos^{1/2}\theta\, d\theta$

Haciendo $2m - 1 = -1/2$ y $2n - 1 = 1/2$, o sea $m = 1/4$ y $n = 3/4$ en el problema 33, encontramos que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4)}{2\,\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

usando el resultado $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \pi/(\operatorname{sen} p\pi)$, $0 < p < 1$.

EVALUACION DE INTEGRALES

35. Calcular $\displaystyle\int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du$.

Sea $G(t) = \displaystyle\int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du$. Entonces, por el teorema de convolución,

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\{J_0(t)\}\,\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

Luego $$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$$

de manera que $$G(t) = \int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du = \operatorname{sen} t$$

36. Demostrar que $\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$.

Sea $G(t) = \int_0^\infty \cos tx^2\,dx$. Entonces, tomando la transformada de Laplace encontramos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,dt \int_0^\infty \cos tx^2\,dx \\ &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-st}\cos tx^2\,dt \\ &= \int_0^\infty \mathcal{L}\{\cos tx^2\}\,dx \quad = \quad \int_0^\infty \frac{s}{s^2+x^4}\,dx\end{aligned}$$

Haciendo $x^2 = s\tan\theta$ o $x = \sqrt{s}\sqrt{\tan\theta}$, la integral se convierte en la del problema 34(c),

$$\frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^{-1/2}\,d\theta \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{s}}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right) \quad = \quad \frac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt{s}}$$

Invirtiendo encontramos que

$$G(t) \quad = \quad \int_0^\infty \cos tx^2\,dx \quad = \quad \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad = \quad \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\right) \quad = \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{4}t^{-1/2}$$

Haciendo $t = 1$ encontramos el resultado esperado,

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx \quad = \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

PROBLEMAS VARIOS

37. Demostrar que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Consideremos $G(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}dx$. Tomando su transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{G(t)\} \quad = \quad \int_0^\infty \frac{dx}{s+x^2} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{s}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{s}}\Bigg|_0^\infty \quad = \quad \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

invirtiendo,

$$G(t) \quad = \quad \int_0^\infty e^{-tx^2}dx \quad = \quad \frac{\pi}{2}\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,t^{-1/2}$$

y el resultado esperado aparece al hacer $t = 1$.

Otro método.

Haciendo $x^2 = u$ o sea $x = \sqrt{u}$, la integral se convierte en

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}\,du \quad = \quad \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

Al hacer $m = n = \frac{1}{2}$ en el problema 32 tendremos

$$\begin{aligned}\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 &= \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\,dx \quad = \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2}} \quad = \quad \operatorname{sen}^{-1}(1-2x)\Big|_0^1 \quad = \quad \pi\end{aligned}$$

Así $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ de manera que la integral requerida vale $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Véase también el problema 29.

38. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\}$.

Por el problema 34, tenemos que $\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$. Entonces, derivando con respecto a a encontramos que

$$\frac{d}{da}\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{d}{da}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\} \qquad \text{o} \qquad \mathcal{L}\left[\frac{d}{da}\{J_0(at)\}\right] = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

es decir que
$$\mathcal{L}\{t\,J_0'(at)\} = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

De manera que
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{t}{a}J_0'(at) = \frac{t\,J_1(at)}{a}$$
puesto que $J_0'(u) = -J_1(u)$.

39. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+2s+5)^{3/2}}\right\}$.

La inversa requerida puede escribirse como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+1)^2+4]^{3/2}}\right\} = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)^{3/2}}\right\} = \frac{te^{-t}}{2}J_1(2t)$$
haciendo uso del problema 38.

40. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-1/s}}{s}\right\}$.

Utilizando series infinitas, encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}e^{-1/s} &= \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!\,s^2} - \frac{1}{3!\,s^3} + \cdots\right\}\\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2!\,s^3} - \frac{1}{3!\,s^4} + \cdots\end{aligned}$$

Invirtiendo término a término,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}e^{-1/s}\right\} &= 1 - t + \frac{t^2}{(2!)^2} - \frac{t^3}{(3!)^2} + \cdots\\ &= 1 - t + \frac{t^2}{1^2\,2^2} - \frac{t^3}{1^2\,2^2\,3^2} + \cdots\\ &= 1 - \frac{(2t^{1/2})^2}{2^2} + \frac{(2t^{1/2})^4}{2^2\,4^2} - \frac{(2t^{1/2})^6}{2^2\,4^2\,6^2} + \cdots\\ &= J_0(2\sqrt{t})\end{aligned}$$

41. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\}$.

Sea $y = e^{-\sqrt{s}}$; entonces $y' = -\dfrac{e^{-\sqrt{s}}}{2s^{1/2}}$, $y'' = \dfrac{e^{-\sqrt{s}}}{4s} + \dfrac{e^{-\sqrt{s}}}{4s^{3/2}}$.

$$4s\,y'' + 2y' - y = 0 \tag{1}$$

Ahora, $y'' = \mathcal{L}\{t^2Y\}$ de modo que $sy'' = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}[t^2Y]\right\} = \mathcal{L}\{t^2Y' + 2tY\}$. Por otra parte $y' = \mathcal{L}\{-tY\}$. Así, (1) puede escribirse como

$$4\,\mathcal{L}\{t^2Y' + 2tY\} - 2\,\mathcal{L}\{tY\} - \mathcal{L}\{Y\} = 0 \qquad \text{o} \qquad 4t^2Y' + (6t-1)Y = 0$$

lo cual puede expresarse en la forma

$$\frac{dY}{Y} + \left(\frac{6t-1}{4t^2}\right)dt = 0 \qquad \text{o} \qquad \ln Y + \frac{3}{2}\ln t + \frac{1}{4t} = c_1$$

es decir
$$Y = \frac{c}{t^{3/2}}\,e^{-1/4t}$$

Ahora $tY = \frac{c}{t^{1/2}}\,e^{-1/4t}$. Así

$$\mathcal{L}\{tY\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{Y\} = -\frac{d}{ds}(e^{-\sqrt{s}}) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}$$

Para grandes valores de t, $tY \sim \frac{c}{t^{1/2}}$ y $\mathcal{L}\{tY\} \sim \frac{c\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}$. Para s pequeña, $\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} \sim \frac{1}{2s^{1/2}}$. Entonces, por el teorema del valor final, $c\sqrt{\pi} = 1/2$ o $c = 1/2\sqrt{\pi}$. Se concluye que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\,e^{-1/4t}$$

Otro método. Usando series infinitas, tenemos formalmente que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - s^{1/2} + \frac{s}{2!} - \frac{s^{3/2}}{3!} + \frac{s^2}{4!} - \frac{s^{5/2}}{5!} + \cdots\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}\{s^{1/2}\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{2!}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{3/2}}{3!}\right\} + \cdots \qquad (1)\end{aligned}$$

Usando los resultados del problema 170, [véase también el problema 33] encontramos que, para todo valor de p entero positivo o cero,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{s^{p+1/2}\} &= \frac{t^{-p-3/2}}{\Gamma(-p-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{2p+1}{2}\right)t^{-p-3/2} \qquad (2)\end{aligned}$$

en tanto que $\mathcal{L}^{-1}\{s^p\} = 0$. Entonces, de (1) y (2) concluimus que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} &= \frac{t^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\frac{t^{-5/2}}{3!\,\sqrt{\pi}} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\frac{t^{-7/2}}{5!\,\sqrt{\pi}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2^2t}\right) + \frac{(1/2^2t)^2}{2!} - \frac{(1/2^2t)^3}{3!} + \cdots\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\,e^{-1/4t}\end{aligned}$$

42. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\}$.

Por los problemas 41 y 15 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\} &= \int_0^t \left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,u^{3/2}}\,e^{-1/4u}\right\}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{1/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2}\,dv \qquad (\text{haciendo } u = 1/4v^2) \\ &= \operatorname{fce}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\end{aligned}$$

43. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\}$.

En el problema 42 usamos la propiedad de cambio de escala (4) en el caso $k = x^2$. Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{x^2 s}}}{x^2 s}\right\} = \frac{1}{x^2} \text{ fce } \left(\frac{1}{2\sqrt{t/x^2}}\right)$$

de donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\} = \text{fce } \left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

Nótese que esta es la fórmula 87 de la tabla de la pág. 250.

44. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\right\}$.

Como $\frac{1}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+9}\right)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)} &= \frac{1}{9}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2} - \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{9}\left\{\left(2s+10+\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}\right) - \left(2s+10+\frac{-10s-50}{s^2+9}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{9}\left\{\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}+\frac{10s}{s^2+9}+\frac{50}{s^2+9}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\right\} &= \frac{1}{9}\left(8 + 40t + 10\cos 3t + \frac{50}{3}\operatorname{sen} 3t\right) \\
&= \frac{1}{27}(24 + 120t + 30\cos 3t + 50 \operatorname{sen} 3t)
\end{aligned}$$

También podemos usar el método de las fracciones parciales.

45. Demostrar que $J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{itw}(1-w^2)^{-1/2}\,dw$.

Tenemos [véase el problema 34. Cap. 1]

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Ahora

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{s+i}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-i}}$$

Usando el hecho de que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+a}}\right\} = \frac{t^{-1/2}e^{-at}}{\sqrt{\pi}}$, por el teorema de convolución tenemos que,

$$\begin{aligned}
J_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+i}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-i}}\right\} \\
&= \int_0^t \frac{u^{-1/2}e^{-iu}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(t-u)^{-1/2}e^{i(t-u)}}{\sqrt{\pi}}\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^t e^{i(t-2u)}\,u^{-1/2}(t-u)^{-1/2}\,du
\end{aligned}$$

haciendo $u = tv$, se transforma en

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{it(1-2v)}\, v^{-1/2}(1-v)^{-1/2}\, dv$$

Si hacemos $1 - 2v = w$,

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 e^{itw}(1-w^2)^{-1/2}\, dw$$

46. Demostrar que $J_0(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\, d\theta$.

Sea $w = \cos\theta$ en el resultado del problema 45. Entonces

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{it\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\, d\theta + \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(t\cos\theta)\, d\theta$$

Igualando las partes real e imaginarias o demostrando directamente que la última integral es nula, encontramos, como se esperaba, que

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\, d\theta$$

Otro método.

Sea $G(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\, d\theta = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(t\cos\theta)\, d\theta$. Entonces, tomando transformadas de Laplace,

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{s}{s^2+\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{s\sec^2\theta}{s^2\tan^2\theta + s^2 + 1}\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\tan^{-1}\left(\frac{s\tan\theta}{\sqrt{s^2+1}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

De manera que $G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = J_0(t)$, como se esperaba.

Problemas propuestos

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

47. Determinar

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s+4}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8s}{s^2+16}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-12}{s^2+8}\right\}$ (g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\}$ (i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{12}{4-3s}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{2s-5}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^2+4}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-5}{s^2-9}\right\}$ (h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{7/2}}\right\}$ (j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^{4/3}}\right\}$

Resp. (a) $3e^{-4t}$ (e) $3\cos 2\sqrt{2}\,t - 3\sqrt{2}\operatorname{sen} 2\sqrt{2}\,t$ (i) $-4e^{4t/3}$

(b) $\frac{1}{2}e^{5t/2}$ (f) $2\cosh 3t - \frac{5}{3}\operatorname{senh} 3t$ (j) $(t^{-2/3} + 3t^{1/3})/\Gamma(\frac{1}{3})$

(c) $8\cos 4t$ (g) $t^4/24$

(d) $3\operatorname{sen} 2t$ (h) $8t^{5/2}/15\sqrt{\pi}$

48. Hallar (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\dfrac{\sqrt{s}-1}{s}\right)^2\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+1}{s(s+1)}\right\}$.

Resp. (*a*) $1 + t - 4t^{1/2}/\sqrt{\pi}$ (*b*) $1 + e^{-t}$

49. Hallar (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-8}{4s^2+25}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s+10}{9s^2-16}\right\}$.

Resp. (*a*) $\frac{3}{4}\cos 5t/2 - \frac{4}{5}\operatorname{sen} 5t/2$ (*b*) $\frac{5}{9}\cosh 4t/3 + \frac{5}{6}\operatorname{senh} 4t/3$

50. (*a*) Demostrar que las funciones $F(t) = \begin{cases} t & t \neq 3 \\ 5 & t = 3 \end{cases}$ y $G(t)$ tienen las misma transformada de Laplace.

(*b*) Discutir el significado de (*a*) en lo relacionado con la unicidad de la transformada inversa de Laplace.

51. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-8}{s^2+4} - \dfrac{4s-24}{s^2-16}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{s^{5/2}} - \dfrac{7}{3s+2}\right\}$.

Resp. (*a*) $3\cos 2t - 4\operatorname{sen} 2t - 4\cosh 4t + 6\operatorname{senh} 4t$

(*b*) $6t^{1/2}/\sqrt{\pi} - 8t^{3/2}/3\sqrt{\pi} - \frac{7}{3}e^{-2t/3}$

52. (*a*) Si $F_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\}$, $F_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\}$, $F_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_3(s)\}$, y c_1, c_2, c_3 son constantes arbitrarias, demostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) + c_3 f_3(s)\} = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) + c_3 F_3(t)$$

establecer las restricciones. (*b*) Generalizar el resultado de la parte (*a*) a n funciones.

53. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3(s^2-1)^2}{2s^5} + \dfrac{4s-18}{9-s^2} + \dfrac{(s+1)(2-s^{1/2})}{s^{5/2}}\right\}$.

Resp. $\frac{1}{2} - t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{16}t^4 + 4t^{1/2}/\sqrt{\pi} + 8t^{3/2}/3\sqrt{\pi} - 4\cosh 3t + 6\operatorname{senh} 3t$

54. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^5}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^{5/2}}\right\}$.

Resp. (*a*) $\dfrac{e^{-t}}{24}(4t^3 - t^4)$, (*b*) $\dfrac{2t^{1/2}(3-2t)}{3\sqrt{\pi}}$

55. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-14}{s^2-4s+8}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8s+20}{s^2-12s+32}\right\}$.

Resp. (*a*) $e^{2t}(3\cos 2t - 4\operatorname{sen} 2t)$, (*b*) $2e^{6t}(4\cosh 2t + 7\operatorname{senh} 2t) = 11e^{8t} - 3e^{4t}$

56. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{4s^2+12s+9}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s-2}{3s^2+4s+8}\right\}$.

Resp. (*a*) $\frac{3}{4}e^{-3t/2} - \frac{5}{8}t\,e^{-3t/2}$, (*b*) $\dfrac{e^{-2t/3}}{15}(25\cos 2\sqrt{5}\,t/3 - 24\sqrt{5}\operatorname{sen} 2\sqrt{5}\,t/3)$

57. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{8s-27}}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s^2-4s+20}}\right\}$.

Resp. (*a*) $t^{-2/3}e^{27t/8}/2\,\Gamma(\frac{1}{3})$, (*b*) $e^{2t}J_0(4t)$

58. Calcular (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\}$, (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{\sqrt{s+1}}\right\}$.

Resp. (a) $\begin{cases} t-2 & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$ o $(t-2)\,\mathcal{U}(t-2)$. (b) $\begin{cases} 4 \operatorname{sen} 2(t-3) & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$ o $4 \operatorname{sen} 2(t-3)\,\mathcal{U}(t-3)$.

(c) $\begin{cases} (t-1)^{-1/2}/\sqrt{\pi} & t>1 \\ 0 & t<1 \end{cases}$ o $(t-1)^{-1/2}\,\mathcal{U}(t-1)/\sqrt{\pi}$.

59. Calcular (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s^2-2s+5}\right\}$.

Resp. (a) $\begin{cases} 2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)} & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$ o $\{2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)}\}\,\mathcal{U}(t-2)$

(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}e^{(t-3)} \operatorname{sen} 2(t-3) & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$ o $\frac{1}{2}e^{(t-3)} \operatorname{sen} 2(t-3)\,\mathcal{U}(t-3)$

60. Si $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = f(s)$ y $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt = f(ps+q)$, donde p y q son constantes, hallar una relación entre $F(t)$ y $G(t)$. *Resp.* $G(t) = e^{-qt/p}F(t/p)/p$

61. Si $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \operatorname{fer}\sqrt{t}$, hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}\right\}$, $a>0$. *Resp.* $\operatorname{fer}\sqrt{at}/\sqrt{a}$

62. Si $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = J_n(t)$, hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$. *Resp.* $a^n J_n(at)$

63. Hallar (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{\sqrt{s^2+9}}\right\}$.

Resp. (a) $e^t \operatorname{fer}\sqrt{t}$, (b) $\begin{cases} J_0(3t-6) & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$ o $J_0(3t-6)\,\mathcal{U}(t-2)$

TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE DE DERIVADAS E INTEGRALES

64. Haciendo uso del *teorema 2-6*, calcular

(a) $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^3\}$ dado que $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)\} = e^{at}$,

(b) $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2-a^2)^2\}$ dado que $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2-a^2)\} = (\operatorname{senh} at)/a$.

65. Usando el hecho que $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ hallar $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^n\}$ donde $n = 2, 3, 4, \ldots$ Calcular también $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^n\}$.

66. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$. *Resp.* $\frac{1}{2}te^{-t}\operatorname{sen} t$

67. Calcular (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s+2}{s+1}\right)\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s+2}{s+1}\right)\right\}$.

Resp. (a) $(e^{-t}-e^{-2t})/t$, (b) $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}\,du$

68. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(2/s^2)\}$. *Resp.* $2 \operatorname{sen} t \operatorname{senh} t/t$

69. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right\}$. *Resp.* $\int_0^t \frac{\cos au - \cos bu}{u}\,du$

MULTIPLICACION Y DIVISION POR POTENCIAS DE s

70. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^3}\right\} = \int_0^t \int_0^v \int_0^w F(u)\,du\,dv\,dw.$

Esta integral puede expresarse como $\int_0^t \int_0^t \int_0^t F(t)\,dt^3$? Explicar.

71. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s+1)}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2(s+3)}\right\}$, (*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^3}\right\}$.

Resp. (*a*) $1 - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t}$, (*b*) $\frac{2}{3}t + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t}$, (*c*) $1 - e^{-t}(1 + t + \frac{1}{2}t^2)$

72. Hallar (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+4}}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$.

Resp. (*a*) $\frac{1}{2}$ fer $(2\sqrt{t})$, (*b*) $\int_0^t J_0(au)\,du$

73. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^5(s+2)}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)^5(s+1)}\right\}$ y discutir la relación entre estas dos transformadas inversas.

Resp. (*a*) $\frac{e^t}{72}\left(t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{9}t + \frac{8}{27}\right) - \frac{e^{-2t}}{243}$

(*b*) $e^{2t}\left(\frac{t^4}{36} + \frac{t^3}{54} - \frac{t^2}{54} + \frac{t}{81} - \frac{1}{243}\right) + \frac{e^{-t}}{243}$

74. Si $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$, demostrar que

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\{s\,f'(s)\} = -t\,F'(t) - F(t)$

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\{s\,f''(s)\} = t^2\,F'(t) + 2t\,F(t)$

(*c*) $\mathcal{L}^{-1}\{s^2 f''(s)\} = t^2 F''(t) + 4t\,F'(t) + 2\,F(t)$

75. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\{s^2 f'(s) + F(0)\} = -t\,F''(t) - 2\,F'(t)$.

TEOREMA DE CONVOLUCION

76. Utilizando el teorema de convolución calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\}$.

Resp. (*a*) $\frac{1}{4}(e^t - e^{-3t})$, (*b*) $\frac{1}{16}(e^{2t} - e^{-2t} - 4te^{-2t})$

77. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$. *Resp.* $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t + e^{-t})$

78. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$. *Resp.* $\frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$

79. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$.

Resp. (*a*) $\frac{1}{8}\{(3 - t^2)\operatorname{sen} t - 3t\cos t\}$, (*b*) $\frac{1}{64}t(\operatorname{sen} 2t - 2t\cos 2t)$

80. Demostrar que $F*\{G*H\} = \{F*G\}*H$, es decir, la *asociatividad* de la convolución.

81. Demostrar que (*a*) $F*\{G+H\} = F*G + F*H$, (*b*) $\{F+G\}*H = F*H + G*H$

82. Demostrar que $1*1*1*\cdots*1$ (n unos) $= t^{n-1}/(n-1)!$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

83. Demostrar que $\displaystyle\int_0^t\int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^3 = \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!}F(u)\,du.$

84. Demostrar que $\displaystyle\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)\,dt^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}F(u)\,du.$

85. Demostrar directamente el teorema de convolución probando que

$$\begin{aligned} f(s)\,g(s) &= \left\{\int_0^\infty e^{-su}F(u)\,du\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-sv}G(v)\,dv\right\} \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}F(u)\,G(v)\,du\,dv \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\}dt\,. \end{aligned}$$

86. Mediante el teorema de convolución probar que

$$\int_0^t \operatorname{sen} u \cos(t-u)\,du = \tfrac{1}{2}t \operatorname{sen} t$$

87. Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{e^{(a-b)u}}{\sqrt{u(t-u)}}\,du = e^{(a-b)t/2}\,I_0\{\tfrac{1}{2}(a-b)t\}.$

FRACCIONES PARCIALES

88. Haciendo uso de las fracciones parciales calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^3-s}\right\}$.

Resp. (*a*) $5e^{3t} - 2e^{-2t}$, (*b*) $1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$

89. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$.

Resp. (*a*) $\frac{1}{2}e^{-t/2} - \frac{1}{3}e^{-2t/3}$, (*b*) $5e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t/2} + 2e^{-t}$

90. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64}\right\}$.

Resp (*a*) $3e^{-4t} - 3\cos 3t$, (*b*) $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t + \cos 2t - \operatorname{sen} 2t$

91. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$. *Resp.* $\frac{1}{5}e^{-t}(4\cos t - 3\operatorname{sen} t) - \frac{4}{5}e^{-3t}$

92. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s^3-3s^2-40s+36}{(s^2-4)^2}\right\}$.

Resp. (*a*) $\frac{1}{2}(2t-1)e^t + \frac{3}{2}e^{-t}$, (*b*) $(5t+3)e^{-2t} - 2te^{2t}$

93. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$.

Resp. $\frac{3}{50}e^{3t} - \frac{1}{25}e^{-2t} - \frac{1}{50}e^{-t}\cos 2t + \frac{9}{25}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$

94. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \operatorname{senh} t$

95. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t\cos t - te^{-t}$

96. Haciendo uso de las fracciones parciales, desarrollar (*a*) el problema 44, (*b*) el problema 71, (*c*) el problema 73, (*d*) el problema 76, (*e*) el problema 77.

97. ¿Los problemas 79 (*a*) y 79 (*b*) pueden ser resueltos por fracciones parciales? Explicar.

FORMULA DEL DESARROLLO DE HEAVISIDE

98. Usando la fórmula del desarrollo de Heaviside hallar (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\}$.
Resp. (*a*) $3e^{-2t} - e^{3t}$, (*b*) $5e^{2t} - 3e^{-t} - 2e^{-3t}$

99. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$. *Resp.* $\frac{1}{2}e^{t} - e^{2t} + \frac{5}{2}e^{3t}$

100. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+5}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$. *Resp.* $2e^{-t} + 3\operatorname{sen} t - 2\cos t$

101. Mediante la fórmula de Heaviside resolver (*a*) el problema 76(*a*), (*b*) el problema 77, (*c*) el problema 88, (*d*) el problema 89, (*e*) el problema 90.

102. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$. Comparar con el problema 91.

103. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$. Comparar con el problema 93.

104. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$. Comparar con el problema 94.

105. Supongamos que $f(s) = P(s)/Q(s)$ donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios como en el problema 29, pero que, en este caso $Q(s) = 0$ tiene una raíz a de multiplicidad m en tanto que las restantes raíces $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son todas distintas entre sí.

(*a*) Demostrar que

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s-a)^m} + \frac{A_2}{(s-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{s-a} + \frac{B_1}{s-b_1} + \frac{B_2}{s-b_2} + \cdots + \frac{B_n}{s-b_n}$$

(*b*) Demostrar que $A_k = \lim_{s\to a} \dfrac{1}{(k-1)!}\dfrac{d^k}{ds^k}\{(s-a)^m f(s)\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

(*c*) Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{at}\left\{\dfrac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \dfrac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + A_m\right\} + B_1 e^{b_1 t} + \cdots + B_n e^{b_n t}$.

106. Haciendo uso del problema 105 calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)^2}\right\}$.

Resp. (*a*) $(3t-2)e^t + 4e^{-3t}$, (*b*) $t(e^{-t}-e^{-2t})$

107. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{11s^3-47s^2+56s+4}{(s-2)^3(s+2)}\right\}$. *Resp.* $(2t^2-t+5)e^{2t} + 6e^{-2t}$

108. Haciendo uso del problema 105 resolver (*a*) el problema 26, (*b*) el problema 44, (*c*) el problema 71, (*d*) el problema 73, (*e*) el problema 76(*b*).

109. ¿Se puede utilizar el método del problema 105 para resolver los problemas 79(*a*), y 79(*b*)? Explicar.

110. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$ usando el problema 105. Comparar con el problema 95.

111. Deducir una fórmula del desarrollo de Heaviside que sea aplicable al caso de factores cuadráticos repetidos.

112. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s^4+5s^3+6s^2+8s+2}{(s-1)(s^2+2s+2)^2}\right\}$ usando el método desarrollado en el problema 111.

Resp. $e^t + e^{-t}\{(3-2t)\cos t - 3\,\mathrm{sen}\,t\}$

FUNCION BETA

113. Calcular (*a*) $\displaystyle\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^2\,dx$, (*b*) $\displaystyle\int_0^4 x^3(4-x)^{-1/2}\,dx$, (*c*) $\displaystyle\int_0^2 y^4\sqrt{4-y^2}\,dy$

Resp. (*a*) 16/315, (*b*) 4096/35, (*c*) 2π

114. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/4$.

115. Calcular (*a*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,d\theta$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\theta\cos^4\theta\,d\theta$, (*c*) $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^4\theta\cos^4\theta\,d\theta$.

Resp. (*a*) $5\pi/32$, (*b*) $\pi/32$, (*c*) $3\pi/128$

116. Demostrar que

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^p\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^p\theta\,d\theta = \begin{cases} (a)\ \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(p-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots p}\dfrac{\pi}{2} & \text{si } p \text{ es entero positivo par.} \\ (b)\ \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(p-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots p} & \text{si } p \text{ es entero positivo impar.} \end{cases}$$

117. Dado que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,p\pi}$, demostrar que $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\mathrm{sen}\,p\pi}$ donde $0 < p < 1$.

[*Sugerencia*, haga $x/(1+x) = y$.]

118. Usando el problema 117 demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

119. Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

EVALUACION DE INTEGRALES

120. Demostrar que $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$.

121. Calcular $\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$. *Resp.* $\pi/2$

122. Demostrar que $\int_0^\infty x \cos x^3\, dx = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}\,\Gamma(1/3)}$.

123. Demostrar que si $0 < p < 1$, (a) $\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^p}\, dx = \dfrac{\pi}{2\,\Gamma(p)\,\operatorname{sen}(p\pi/2)}$

(b) $\int_0^\infty \dfrac{\cos x}{x^p}\, dx = \dfrac{\pi}{2\,\Gamma(p)\cos(p\pi/2)}$.

124. Usando los resultados del problema 123, comprobar los resultados de los problemas 120, 121 y 122.

125. (a) Demostrar que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$ converge.

(b) Si $t > 0$, ¿es $\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty x^2 e^{-tx^2}\, dx\right\} = \int_0^\infty \mathcal{L}\{x^2 e^{-tx^2}\}\, dx$?

(c) ¿El método del problema 37 puede usarse para calcular la integral de la parte (a)? Explicar.

126. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3+1}\right\}$. *Resp.* $\dfrac{1}{3}\left\{e^{-t} - e^{t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$

PROBLEMAS VARIOS

127. Calcular $\int_0^t J_0(u)\, J_1(t-u)\, du$. *Resp.* $J_0(t) - \cos t$

128. Demostrar que $\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q\, dx = (b-a)^{p+q+1} B(p+1, q+1)$ donde $p > -1$, $q > -1$ y $b > a$.

[*Sugerencia*, haga $x - a = (b-a)y$.]

129. Calcular (a) $\int_2^4 \dfrac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$, (b) $\int_1^5 \sqrt[4]{(5-x)(x-1)}\, dx$. *Resp.* (a) π, (b) $\dfrac{2\{\Gamma(1/4)\}^2}{3\sqrt{\pi}}$

130. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}$. *Resp.* $\{1-\cos(t-1)\}\,\mathcal{U}(t-1) - \{1-\cos(t-2)\}\,\mathcal{U}(t-2)$

131. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \dfrac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$.

132. Demostrar que $\int_0^t J_0(u)\operatorname{sen}(t-u)\, du = \frac{1}{2}t\, J_1(t)$.

133. (*a*) Demostrar que la función $f(s) = \dfrac{1-e^{-2\pi s}}{s}$ es cero para infinitos valores complejos de s. ¿Cuáles son estos valores? (*b*) Hallar la transformada inversa de Laplace de $f(s)$.

Resp. (*a*) $s = \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \ldots$ (*b*) $F(t) = \begin{cases} 1 & t > 2\pi \\ 0 & 0 < t < 2\pi \end{cases}$ o $F(t) = \mathcal{U}(t-2\pi)$

134. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s+\sqrt{s^2+1}}{2s}\right)\right\}$. *Resp.* $\dfrac{1-J_0(t)}{t}$

135. Demostrar que $\displaystyle\int_0^2 u(8-u^3)^{1/3}\,du = \frac{16\sqrt{3}\,\pi}{27}$.

136. Sea $F(t) = t^2$ para todos los valores irracionales de t, y $F(t) = t$ para todos los valores racionales de t. (*a*) Demostrar que $\mathcal{L}\{F(t)\} = 2/s^3$, $s > 0$. (*b*) Discutir el significado del resultado de la parte (*a*) en relación con la unicidad de la transformada inversa de Laplace.

137. Muestre cómo el método de las series puede usarse para calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+1)\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1+1/s)\}$, (*c*) $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(1/s)\}$.

138. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-3s-2\sqrt{s}}\}$. *Resp.* $\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-3)^3}}\, e^{-1/(t-3)}\, \mathcal{U}(t-3)$

139. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{u \operatorname{sen} tu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-t}, \quad t > 0.$

140. Si $F(t) = t^{-1/2}$, $t > 0$ y $G(t) = \begin{cases} t^{-1/2} & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$, demostrar que

$$F(t) * G(t) = \begin{cases} \pi & 0 < t < 1 \\ \pi - 2\tan^{-1}\sqrt{t-1} & t > 1 \end{cases}$$

141. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{s+1}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+1}+\sqrt{s}}\right\} = \dfrac{e^{-t/2}\, I_1(t/2)}{t}$.

142. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{s}}{s-1}\right\}$. *Resp.* $t^{-1/2}/\sqrt{\pi} + e^t \operatorname{fer} \sqrt{t}$

143. Demostrar que (*a*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t \operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(t/2)\,J_0(t/2)$

(*b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t\cos^2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\cos(t/2)\,J_0(t/2)$.

144. Supóngase que $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ tiene período $T > 0$. Demostrar que

$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)(1-e^{-sT})\} = F(t)$ si $0 < t < T$ y cero si $t > T$.

145. (*a*) Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3+1}\right\} = \dfrac{t^2}{2!} - \dfrac{t^5}{5!} + \dfrac{t^8}{8!} - \dfrac{t^{11}}{11!} + \cdots$.

(*b*) Discutir la relación del resultado en (*a*) y el del problema 127.

146. ¿El desarrollo de Heaviside puede aplicarse a la función $f(s) = 1/(s \cosh s)$? Explicar.

147. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty J_0(x^2)\, dx = 1/4\sqrt{\pi}$.

148. Demostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\operatorname{sen}\frac{1}{s}\right\} = t - \frac{t^3}{(3!)^2} + \frac{t^5}{(5!)^2} - \frac{t^7}{(7!)^2} + \cdots$$

$$= \frac{i}{2}\{J_0(2e^{\pi i/4}\sqrt{t}) - J_0(2e^{-\pi i/4}\sqrt{t})\}$$

149. Demostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cos\frac{1}{s}\right\} = 1 - \frac{t^2}{(2!)^2} + \frac{t^4}{(4!)^2} - \frac{t^6}{(6!)^2} + \cdots$$

150. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{1+\sqrt{s}}\right\}$. *Resp.* $t^{-1/2}/\sqrt{\pi} - e^t \operatorname{fce}(\sqrt{t})$

151. Demostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+e^{-s}}\right\} = \sum_{n=0}^{[t]} \frac{(-1)^n (t-n)^n}{n!}$$

donde $[t]$ denota el mayor entero menor o igual a t.

152. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s} J_0\left(\dfrac{2}{\sqrt{s}}\right)\right\} = 1 - \dfrac{t}{(1!)^3} + \dfrac{t^2}{(2!)^3} - \dfrac{t^3}{(3!)^3} + \cdots$

Capítulo 3

Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

La transformada de Laplace presenta gran utilidad para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Supongamos, por ejemplo, que queremos resolver la ecuacióu diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha\frac{dY}{dt} + \beta Y = F(t) \quad \text{o sea} \quad Y'' + \alpha Y' + \beta Y = F(t) \tag{1}$$

donde α y β son constantes sometidas a ciertas condiciones *iniciales* o condiciones de *frontera*

$$Y(0) = A, \qquad Y'(0) = B \tag{2}$$

donde A y B son constantes dadas. Tomando la transformada de Laplace a cada lado de (*1*) y usando (*2*), obtenemos una ecuación algebraica para determinar $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$. La solución requerida se obtiene al calcular la transformada inversa de Laplace de $y(s)$. Este método se puede extender fácilmente a ecuaciones diferenciales de orden superior. Véanse los problemas 1-8.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES VARIABLES

La transformada de Laplace puede utilizarse también para resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyos coeficientes son variables. Una ecuación especial en la cual el método resulta particularmente útil es aquella en la cual cada uno de sus términos es de la forma

$$t^m\, Y^{(n)}(t) \tag{3}$$

cuya transformada de Laplace es

$$(-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\mathcal{L}\{Y^{(n)}(t)\} \tag{4}$$

Véanse los *teoremas 1-10* de la página 4 y *1-12* de la página 5.

Para los detalles de la solución véanse los problemas 9-11.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS SIMULTANEAS

La transformada de Laplace puede usarse también para resolver dos o más ecuaciones diferenciales simultáneas. El procedimiento es esencialmente el mismo que el descrito anteriormente. Véanse los problemas 12 y 13.

APLICACIONES A LA MECANICA

Supongamos que una masa m está adherida a un resorte flexible fijado a un punto O, y la cual tiene la libertad de desplazarse sobre un plano PQ sin rozamiento [véase la Fig. 3-1]. Si $X(t)$, o X simplemente, denota el desplazamiento instantáneo de m, en el tiempo t, desde su posición de *equilibrio* o de *reposo*, entonces actuará sobre m una fuerza recuperadora $-kX$, donde k es una constante que depende del resorte, llamada la *constante del resorte*. Esto se deduce de la *ley de Hooke* la cual establece experimentalmente que la fuerza recuperadora que actúa sobre un resorte es proporcional al alargamiento o extensión del resorte desde su posición de equilibrio. De acuerdo con la ley newtoniana que establece que la fuerza neta que actúa sobre m es igual a la masa por la aceleración, la ecuación del movimiento es

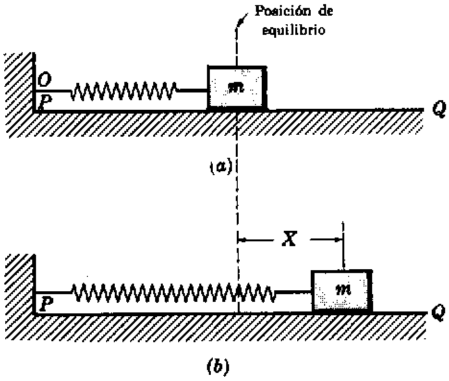


Fig. 3-1

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX \qquad \text{o} \qquad mX'' + kX = 0 \tag{5}$$

Si, adicionalmente, existe una *fuerza amortiguadora* proporcional a la velocidad instantánea de m, la ecuación del movimiento es

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta\frac{dX}{dt} \qquad \text{o} \qquad mX'' + \beta X' + kX = 0 \tag{6}$$

donde la constante de proporcionalidad β se llama la *constante de amortiguación*.

Puede haber otra modificación cuando actúa sobre m una fuerza externa dada $\mathcal{F}(t)$ que depende del tiempo. En tal caso la ecuación del movimiento será

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta\frac{dX}{dt} + \mathcal{F}(t) \qquad \text{o} \qquad mX'' + \beta X' + kx = \mathcal{F}(t) \tag{7}$$

El desplazamiento $X(t)$ puede conocerse utilizando la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones (5), (6), o (7) bajo las correspondientes condiciones físicas iniciales. Véanse los problemas 14, 15, 27 y 28.

APLICACIONES A LOS CIRCUITOS ELECTRICOS

Un circuito eléctrico simple (Fig. 3-2) consta de los siguientes *elementos de circuito* conectados en serie con un *interruptor* o *llave* K:

1. Un *generador* o *batería* que produce una fuerza *electromotriz* o f.e.m. E (voltios).
2. Una resistencia R (ohmios).
3. Un *inductor* que tiene una inductancia L (henrys).
4. Un *condensador* con capacitancia C (faradios).

Los elementos de un circuito se representan simbólicamente como en la Fig. 3-2.

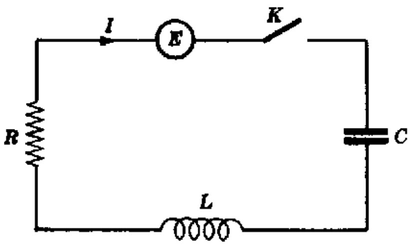


Fig. 3-2

Cuando se baja el interruptor o llave K, en tal forma que el circuito queda cerrado, fluirá una carga Q(culombios) a las placas del condensador. La razón de tiempo de la carga del flujo, dada por $\frac{dQ}{dt} = I$, se llama la *corriente* y se mide en amperios cuando t se mide en segundos.

En la práctica puede haber circuitos eléctricos más complicados, como el que se muestra en la Fig. 3-3.

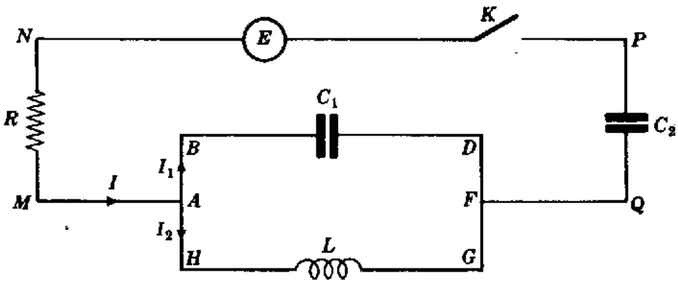


Fig. 3-3

Un problema importante es el determinar las cargas de los condensadores y las corrientes en función del tiempo. Para hacer esto definimos la *caída de potencial* o *caída de voltaje* a través de un elemento del circuito.

(a) Caída de voltaje a través de una resistencia $= RI = R\,\frac{dQ}{dt}$

(b) Caída de voltaje a través de un inductor $= L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2Q}{dt^2}$

(c) Caída de voltaje a través de un condensador $= \frac{Q}{C}$

(d) Caída de voltaje a través de un generador = —Subida de voltaje = $-E$

Las ecuaciones diferenciales se pueden encontrar utilizando las siguientes leyes de Kirchhoff.

Leyes de Kirchhoff

1. La suma algebraica de las corrientes que fluyen a través de un punto de unión [por ejemplo A en la Fig. 3-3] es igual a cero.

2. La suma algebraica de las caídas de potencial, o caídas de voltaje, alrededor de cualquier malla cerrada [tales como $ABDFGHA$ o $ABDFQPNMA$ de la Fig. 3-3] es igual a cero.

La aplicación de estas leyes en el circuito de la Fig. 3-2 es particularmente fácil (en realidad, la primera ley no es necesaria en este caso). Encontramos que la ecuación para determinar Q es

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E \qquad (8)$$

Al aplicar las leyes al circuito de la Fig. 3-3, aparecen dos ecuaciones simultáneas [véase el problema 17].

Nótese la analogía entre las ecuaciones (*7*) y (*8*). Parece que la *masa* m corresponde a la *inductancia* L, el *desplazamiento* X corresponde a la *carga* Q, el *factor de amortiguación* β a la *resistencia* R, la *constante del resorte* k al recíproco de la capacitancia $1/C$, y la fuerza $\mathcal{F}$ a la *fuerza electromotriz* E. En la práctica estas analogías son de gran utilidad.

APLICACIONES A LAS VIGAS

Supongamos que una viga cuyos extremos están $x = 0$ y $x = l$ coincide con el eje x (Fig. 3-4). Supongamos que hay una carga vertical $W(x)$ por unidad de longitud que actúa transversalmente sobre la viga. Entonces el eje de la viga tiene una deflexión transversal $Y(x)$ en el punto x, la cual satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \qquad 0 < x < l \qquad (9)$$

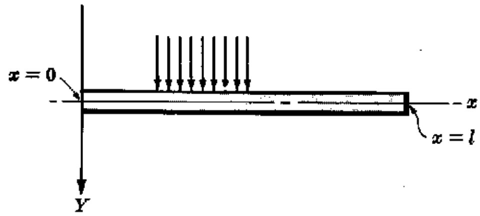


Fig. 3-4

Esta deflexión transversal se llama a veces la *curva de deflexión* o *curva elástica*. La cantidad EI se llama la *rigidez de la flexión* de la viga y la supondremos constante. [Realmente E es el módulo de elasticidad de Young para esta viga e I es el momento de inercia de una sección recta de la viga con relación al eje]. Las cantidades $EIY''(x)$ y $EIY'''(x)$ se llaman, respectivamente, el *momento flector* y el *esfuerzo secante* en x. Nótese que en el eje Y se elige como positivo el sentido hacia abajo, de tal manera que las deflexiones son positivas hacia abajo.

Las condiciones de frontera asociadas a la ecuación diferencial (*9*) dependen de la manera como esté apoyada la viga. Las más comunes son:

1. **Empotrada:** $Y = Y' = 0$

2. **Articulada:** $Y = Y'' = 0$

3. **Apoyo simple:** $Y'' = Y''' = 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

La transformada de Laplace es también de utilidad para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales parciales sujetas a ciertas condiciones de frontera; frecuentemente nos referiremos a ellos con el nombre de *problemas de frontera;* en este capítulo trataremos algunos problemas sencillos [véanse los problemas 22, 26 y 31]. En el capítulo 8 se hará una discusión más completa de los problemas de frontera, ya que en este punto tendremos la ventaja adicional de conocer la fórmula de inversión compleja vista en el capítulo 6.

Problemas resueltos

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

1. Resolver $Y'' + Y = t,\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = -2.$

Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial y utilizando las condiciones dadas, tendremos

$$\mathcal{L}\{Y''\} + \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{t\}, \qquad s^2y - sY(0) - Y'(0) + y = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2y - s + 2 + y = \frac{1}{s^2}$$

Entonces
$$y = \mathcal{L}\{Y\} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

y
$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right\} = t + \cos t - 3\operatorname{sen} t$$

Comprobación: $Y = t + \cos t - 3 \operatorname{sen} t$, $Y' = 1 - \operatorname{sen} t - 3\cos t$, $Y'' = -\cos t + 3\operatorname{sen} t$. Entonces $Y'' + Y = t$, $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -2$, luego la función encontrada es la solución requerida.

Existe otro método, usando la integral de la convolución, en el problema 7; en tal caso se hace $a = 1$, $F(t) = t$.

2. Resolver $Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t},\ Y(0) = -3,\ Y'(0) = 5.$

Tenemos que
$$\mathcal{L}\{Y''\} - 3\mathcal{L}\{Y'\} + 2\mathcal{L}\{Y\} = 4\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} - 3\{sy - Y(0)\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$\{s^2y + 3s - 5\} - 3\{sy + 3\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$y = \frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)} + \frac{14-3s}{s^2-3s+2}$$

$$= \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

de manera que
$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}\right\} = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{3t}$$

se puede comprobar que ésta es la solución.

3. Resolver $Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t}\operatorname{sen} t,\ Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1.$

Tenemos que $\mathcal{L}\{Y''\} + 2\mathcal{L}\{Y'\} + 5\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{sen} t\}$

$$\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + 2\{sy - Y(0)\} + 5y = \frac{1}{(s+1)^2+1} = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$\{s^2y - s(0) - 1\} + 2\{sy - 0\} + 5y = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$(s^2+2s+5)y - 1 = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$y = \frac{1}{s^2+2s+5} + \frac{1}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$= \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

Entonces (por el problema 28, Pág. 60)

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t}(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)$$

4. Resolver $Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2e^t,\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = 0,\ Y''(0) = -2.$

Tenemos que $\mathcal{L}\{Y'''\} - 3\mathcal{L}\{Y''\} + 3\mathcal{L}\{Y'\} - \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{t^2e^t\}$

$$\{s^3y - s^2Y(0) - sY'(0) - Y''(0)\} - 3\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + 3\{sy - Y(0)\} - y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Así,

$$(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)y - s^2 + 3s - 1 = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$y = \frac{s^2-3s+1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$= \frac{s^2-2s+1-s}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$= \frac{(s-1)^2-(s-1)-1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

finalmente

$$Y = e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60}$$

5. Hallar la solución general de la ecuación diferencial del problema 4.

En este caso las condiciones iniciales son arbitrarias. Si suponemos que $Y(0) = A$, $Y'(0) = B$, $Y''(0) = C$, encontramos, como en el problema 4, que

$$(s^3y - As^2 - Bs - C) - 3(s^2y - As - B) + 3(sy - A) - y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

o sea que

$$y = \frac{As^2 + (B-3A)s + 3A - 3B + C}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

Como A, B y C son arbitrarias, también lo es el polinomio del numerador del miembro derecho de la igualdad. De esta manera podemos escribir

$$y \;=\; \frac{c_1}{(s-1)^3} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{c_3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

y trasponer términos para encontrar la solución general requerida

$$y \;=\; \frac{c_1 t^2}{2} e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t + \frac{t^5 e^t}{60}$$

$$=\; c_4 t^2 + c_5 t e^t + c_6 e^t + \frac{t^5 e^t}{60}$$

donde las c_k son constantes arbitrarias.

Se notará que una vez obtenida la solución general, es más fácil encontrar la solución particular ya que nos evitamos la dificultad de determinar las constantes del desarrollo en fracciones parciales.

6. Resolver $Y'' + 9Y = \cos 2t$ si $Y(0) = 1$, $Y(\pi/2) = -1$.

Como $Y'(0)$ es desconocida, sea $Y'(0) = c$. Entonces

$$\mathcal{L}\{Y''\} + 9\mathcal{L}\{Y\} \;=\; \mathcal{L}\{\cos 2t\}$$

$$s^2 y - s\,Y(0) - Y'(0) + 9y \;=\; \frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^2+9)y - s - c \;=\; \frac{s}{s^2+4}$$

y

$$y \;=\; \frac{s+c}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

$$=\; \frac{s}{s^2+9} + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)} - \frac{s}{5(s^2+9)}$$

$$=\; \frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)}$$

De manera que

$$Y \;=\; \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{c}{3}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$$

Para determinar c, nótese que $Y(\pi/2) = -1$ de modo que $-1 = -c/3 - 1/5$ o sea $c = 12/5$. Entonces

$$Y \;=\; \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{4}{5}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$$

7. Resolver $Y'' + a^2 Y = F(t)$, $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -2$.

Tenemos que

$$\mathcal{L}\{Y''\} + a^2\mathcal{L}\{Y\} \;=\; \mathcal{L}\{F(t)\} \;=\; f(s)$$

$$s^2 y - s\,Y(0) - Y'(0) + a^2 y \;=\; f(s)$$

$$s^2 y - s + 2 + a^2 y \;=\; f(s)$$

de manera que

$$y \;=\; \frac{s-2}{s^2+a^2} + \frac{f(s)}{s^2+a^2}$$

Entonces, usando el teorema de la convolución,

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2+a^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2+a^2}\right\}$$

$$= \cos at - \frac{2\operatorname{sen} at}{a} + F(t) * \frac{\operatorname{sen} at}{a}$$

$$= \cos at - \frac{2\operatorname{sen} at}{a} + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\operatorname{sen} a(t-u)\,du$$

Nótese que en este caso realmente la transformación de Laplace de $F(t)$ no aparece en la solución final.

8. Hallar la solución general de $Y'' - a^2Y = F(t)$.

Sea $Y(0) = c_1$, $Y'(0) = c_2$. Tomando la transformada de Laplace, encontramos que

$$s^2y - sc_1 - c_2 - a^2y = f(s)$$

o sea
$$y = \frac{sc_1 + c_2}{s^2 - a^2} + \frac{f(s)}{s^2 - a^2}$$

De manera que
$$Y = c_1\cosh at + \frac{c_2}{a}\operatorname{senh} at + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\operatorname{senh} a(t-u)\,du$$

$$= A\cosh at + B\operatorname{senh} at + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\operatorname{senh} a(t-u)\,du$$

que es la solución general requerida.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES VARIABLES

9. Resolver $tY'' + Y' + 4tY = 0$, $Y(0) = 3$, $Y'(0) = 0$.

Tenemos que
$$\mathcal{L}\{tY''\} + \mathcal{L}\{Y'\} + \mathcal{L}\{4tY\} = 0$$

o sea
$$-\frac{d}{ds}\{s^2y - s\,Y(0) - Y'(0)\} + \{sy - Y(0)\} - 4\frac{dy}{ds} = 0$$

es decir,
$$(s^2+4)\frac{dy}{ds} + sy = 0$$

Entonces
$$\frac{dy}{y} + \frac{s\,ds}{s^2+4} = 0$$

integrando
$$\ln y + \tfrac{1}{2}\ln(s^2+4) = c_1 \quad \text{o} \quad y = \frac{c}{\sqrt{s^2+4}}$$

Invirtiendo los términos
$$Y = c\,J_0(2t)$$

Para determinar c obsérvese que $Y(0) = c\,J_0 = c = 3$. De manera que

$$Y = 3\,J_0(2t)$$

10. Resolver $tY'' + 2Y' + tY = 0, \; Y(0+) = 1, \; Y(\pi) = 0.$

Sea $Y'(0+) = c$. Tomando la transformada de Laplace en cada término

$$-\frac{d}{ds}\{s^2 y - sY(0+) - Y'(0+)\} + 2\{sy - Y(0+)\} - \frac{d}{ds}y = 0$$

o sea $$-s^2 y' - 2sy + 1 + 2sy - 2 - y' = 0$$

es decir, $$-(s^2+1)y' - 1 = 0 \quad \text{o} \quad y' = \frac{-1}{s^2+1}$$

Integrando, $$y = -\tan^{-1} s + A$$

Como $y \to 0$ cuando $s \to \infty$, debemos tener que $A = \pi/2$. Así,

$$y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

Por el ejemplo siguiente al *teorema 1-13*, Pág. 5,

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

que satisface $Y(\pi) = 0$ y es, entonces, la solución buscada.

11. Resolver $Y'' - tY' + Y = 1, \; Y(0) = 1, \; Y'(0) = 2.$

Tenemos que $$\mathcal{L}\{Y''\} - \mathcal{L}\{tY'\} + \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

es decir, $$s^2 y - sY(0) - Y'(0) + \frac{d}{ds}\{sy - Y(0)\} + y = \frac{1}{s}$$

o sea, $$s^2 y - s - 2 + sy' + y + y = \frac{1}{s}$$

Entonces $$sy' + (s^2+2)y = s + 2 + \frac{1}{s}$$

o sea $$\frac{dy}{ds} + \left(s + \frac{2}{s}\right)y = 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$$

Un factor integrante es $e^{\int (s + \frac{2}{s})\,ds} = e^{\frac{1}{2}s^2 + 2\ln s} = s^2 e^{\frac{1}{2}s^2}$. Entonces

$$\frac{d}{ds}\{s^2 e^{\frac{1}{2}s^2} y\} = \left(1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) s^2 e^{\frac{1}{2}s^2}$$

integrando,
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{2}s^2} \int \left(1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) s^2 e^{\frac{1}{2}s^2}\, ds \\ &= \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{2}s^2} \int (s^2 + 2s + 1)\, e^{\frac{1}{2}s^2}\, ds \\ &= \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{2}s^2} [se^{\frac{1}{2}s^2} + 2e^{\frac{1}{2}s^2} + c] \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{-\frac{1}{2}s^2} \end{aligned}$$

Para determinar c téngase en cuenta que, por el desarrollo en serie,

$$y = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2}(1 - \tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{8}s^4 - \cdots)$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{c+2}{s^2} - c(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}s^2 + \cdots)$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\{s^k\} = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, al invertir obtenemos,

$$Y = 1 + (c+2)t$$

Pero $Y'(0) = 2$ de tal suerte que $c = 0$ y así llegamos a la solución buscada

$$Y = 1 + 2t$$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS SIMULTANEAS

12. Resolver $\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 2X - 3Y \\ \dfrac{dY}{dt} = Y - 2X \end{cases}$ con las condiciones $X(0) = 8$, $Y(0) = 3$.

Tomando la transformada de Laplace tenemos que si $\mathcal{L}\{X\} = x$, $\mathcal{L}\{Y\} = y$, entonces,

$$sx - 8 = 2x - 3y \quad \text{o sea} \quad (1) \quad (s-2)x + 3y = 8$$

$$sy - 3 = y - 2x \quad \text{o sea} \quad (2) \quad 2x + (s-1)y = 3$$

Resolviendo (1) y (2) simultáneamente,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

Entonces

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\{y\} = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

13. Resolver $\begin{cases} X'' + Y' + 3X = 15e^{-t} \\ Y'' - 4X' + 3Y = 15 \operatorname{sen} 2t \end{cases}$ con las condiciones $X(0) = 35$, $X'(0) = -48$, $Y(0) = 27$, $Y'(0) = -55$.

Tomando la transformada de Laplace, tendremos que

$$s^2x - s(35) - (-48) + sy - 27 + 3x = \frac{15}{s+1}$$

$$s^2y - s(27) - (-55) - 4\{sx - 35\} + 3y = \frac{30}{s^2+4}$$

o sea
$$(s^2+3)x + sy = 35s - 21 + \frac{15}{s+1} \qquad (1)$$
$$-4sx + (s^2+3)y = 27s - 195 + \frac{30}{s^2+4} \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) simultáneamente,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} & s \\ 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} & s^2+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{35s^3 - 48s^2 + 300s - 63}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{15(s^2+3)}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} - \frac{30s}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$= \frac{30s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s^2+3 & 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} \\ -4s & 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{27s^3 - 55s^2 - 3s - 585}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{60s}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{30(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$= \frac{30s}{s^2+9} - \frac{60}{s^2+1} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}$$

Entonces
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 30\cos t - 15\,\text{sen}\,3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t$$
$$Y = \mathcal{L}^{-1}\{y\} = 30\cos 3t - 60\,\text{sen}\,t - 3e^{-t} + \text{sen}\,2t$$

APLICACIONES A LA MECANICA

14. Una partícula P de 2 gramos de masa se mueve sobre el eje X y es atraída hacia el origen con una fuerza numéricamente igual a $8X$. Si está inicialmente en reposo en $X = 10$, hallar su posición en cualquier tiempo posterior suponiendo que (a) no actúan otras fuerzas, (b) actúa una fuerza amortiguadora igual a 8 veces su velocidad instantánea.

(a) Escojamos la dirección positiva hacia la derecha [véase la Fig. 3-5]. Cuando $X > 0$, la fuerza neta es hacia la izquierda (es decir, es negativa) y estará dada por $-8X$. Cuando $X < 0$ la fuerza neta es hacia la derecha (es decir, positiva) y estará dada por $-8X$. Entonces, en cualquier caso la fuerza neta es $-8X$. Por la ley de Newton,

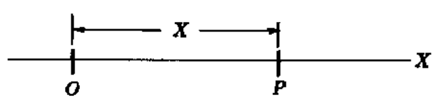


Fig. 3-5

$$(\text{Masa}) \cdot (\text{Aceleración}) = \text{Fuerza neta}$$
$$2 \cdot \frac{d^2X}{dt^2} = -8X$$

o sea
$$\frac{d^2X}{dt^2} + 4X = 0 \qquad (1)$$

Las condiciones iniciales son:

Tomando la transformada de Laplace de (*1*), usando las condiciones (*2*) y (*3*) tenemos que, si $x = \mathcal{L}\{X\}$,

$$s^2x - 10s + 4x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{10s}{s^2+4}$$

Entonces $$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t$$

En la Fig. 3-6 se muestra la gráfica del movimiento. La *amplitud* (máximo desplazamiento desde 0) es 10. El *período* (tiempo para completar un ciclo) es π. La *frecuencia* (número de ciclos por segundo) es $1/\pi$.

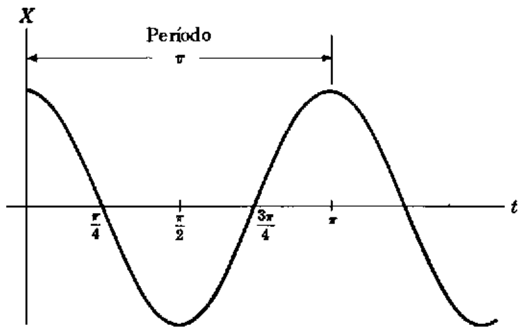


Fig. 3-6

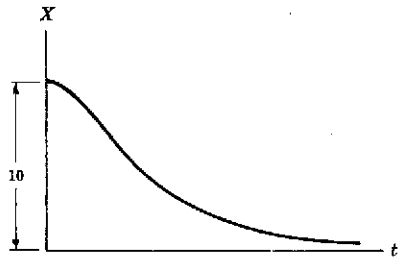


Fig. 3-7

(*b*) Cuando $X > 0$ y $dX/dt > 0$, P está a la derecha y se mueve hacia la derecha. Entonces la fuerza amortiguadora está dirigida hacia la izquierda (es decir, es negativa) y su valor es $-8dX/dt$. Análogamente, cuando $X < 0$ y $dX/dt < 0$, P está a la izquierda y se mueve hacia la izquierda de tal suerte que la fuerza amortiguadora está dirigida hacia la derecha (es decir, es positiva) y está dada también por $-8dX/dt$. La fuerza amortiguadora es también $-8dX/dt$ para los casos $X > 0$, $dX/dt < 0$, y $X < 0$, $dX/dt > 0$. Entonces

(Masa) (Aceleración) = Fuerza Neta

o sea $$2\frac{d^2X}{dt^2} = -8X - 8\frac{dX}{dt}$$

es decir, $$\frac{d^2X}{dt^2} + 4\frac{dX}{dt} + 4X = 0 \qquad (4)$$

bajo las condiciones iniciales (*5*) $X(0) = 10$, (*6*) $X'(0) = 0$.

Tomando la transformada de Laplace de (*4*) y utilizando las condiciones (*5*) y (*6*), tenemos

$$s^2x - 10s + 4(sx - 10) + 4x = 0$$

o sea $$x = \frac{10s+40}{s^2+4s+4}$$

Entonces $$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+40}{(s+2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10(s+2)+20}{(s+2)^2}\right\}$$

$$= 10\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 20\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

$$= 10e^{-2t} + 20te^{-2t} = 10e^{-2t}(1+2t)$$

El gráfico de X contra t se muestra en la figura 3-7. Nótese que el movimiento es *no oscilante*. La partícula se aproxima a O pero nunca llega a alcanzarlo.

15. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje X y es atraída hacia el origen O con una fuerza numéricamente igual a kx, $k > 0$. También actúa una fuerza amortiguadora igual a $\beta dX/dt$, $\beta > 0$. Discutir el movimiento; considerar todos los casos, suponiendo que $X(0) = X_0$, $X'(0) = V_0$.

La ecuación del movimiento es
$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta\frac{dX}{dt}$$

o sea
$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\alpha\frac{dX}{dt} + \omega^2 X = 0 \tag{1}$$

donde $\alpha = \beta/2m$, $\omega^2 = k/m$.

Al usar las condiciones iniciales, la transformada de Laplace de (1) da

$$s^2x - X_0 s - V_0 + 2\alpha(sx - X_0) + \omega^2 x = 0$$

o sea
$$x = \frac{sX_0 + (V_0 + 2\alpha X_0)}{s^2 + 2\alpha s + \omega^2}$$
$$= \frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}$$

Caso 1, $\omega^2 - \alpha^2 > 0$.

En este caso
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = X_0 e^{-\alpha t}\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t + \frac{(V_0 + \alpha X_0)}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t$$

El movimiento se llama oscilatorio amortiguado [véase la Fig. 3-8]. La partícula oscila alrededor de O, y la magnitud de cada oscilación va haciéndose menor cada vez. El período de la oscilación está dado por $2\pi/\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$, y la frecuencia por $\sqrt{\omega^2-\alpha^2}/2\pi$. La cantidad $\omega/2\pi$ (correspondiente al caso $\alpha = 0$, es decir, sin amortiguación) se llama la *frecuencia natural*.

Caso 2, $\omega^2 - \alpha^2 = 0$.

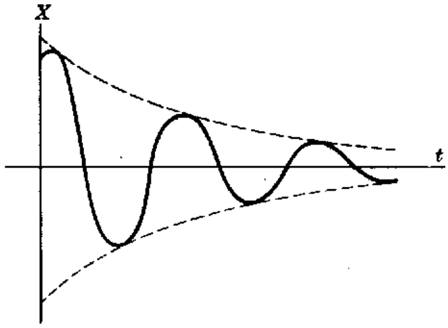
En este caso
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X_0}{s+\alpha} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2}\right\}$$
$$= X_0 e^{-\alpha t} + (V_0 + \alpha X_0)t\,e^{-\alpha t}$$

Aquí la partícula no oscila indefinidamente alrededor de O sino que se aproxima gradualmente a O sin llegar a alcanzarlo. Este tipo de movimiento se llama *movimiento críticamente amortiguado*, puesto que cualquier disminución de la constante de amortiguación β producirá oscilaciones [véase la Fig. 3-9].

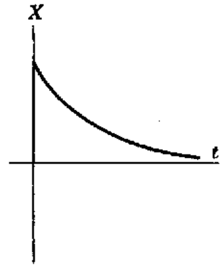
Caso 3, $\omega^2 - \alpha^2 < 0$.

En este caso
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2-\omega^2)}\right\}$$
$$= X_0\cosh\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t + \frac{V_0 + \alpha X_0}{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}}\operatorname{senh}\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t$$

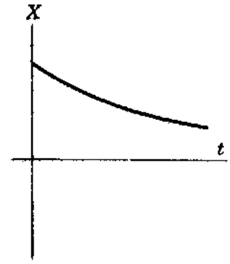
El movimiento se llama *sobre-amortiguado* y es no oscilatorio. La gráfica es semejante a la del movimiento críticamente amortiguado [véase la Fig. 3-10].



Movimiento oscilatorio amortiguado
Fig. 3-8



Movimiento críticamente amortiguado
Fig. 3-9



Movimiento sobre-amortiguado
Fig. 3-10

APLICACIONES A LOS CIRCUITOS ELECTRICOS

16. Un inductor de 2 henrys, una resistencia de 16 ohmios y un condensador de 0,02 faradios se conectan en serie con una f.e.m. de E voltios. En $t = 0$ tanto la carga del condensador como la corriente del circuito valen cero. Encontrar la carga y la corriente en cualquier tiempo $t > 0$ si (*a*) $E = 300$ (voltios), (*b*) $E = 100 \text{ sen } 3t$ (voltios).

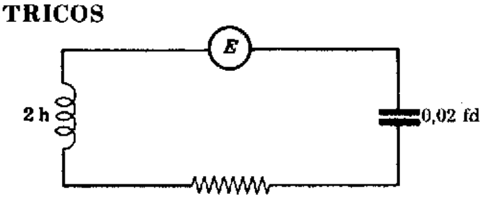


Fig. 3-11

$Q''L + Q'R + \frac{1}{C} Q = V$

Sean Q e I respectivamente la carga y corriente instantáoeas en el tiempo t. Por las leyes de Kirchhoff tenemos

$$2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0{,}02} = E \tag{1}$$

y como $I = dQ/dt$,

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + 50Q = E \tag{2}$$

bajo las condiciones iniciales $Q(0) = 0$, $I(0) = Q'(0) = 0$.

(*a*) Si $E = 300$, entonces (2) será

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 150$$

Entonces, tomando la transformada de Laplace encontramos que

$$\{s^2q - s\,Q(0) - Q'(0)\} + 8\{sq - Q(0)\} + 25q = \frac{150}{s}$$

o

$$q = \frac{150}{s(s^2 + 8s + 25)} = \frac{6}{s} - \frac{6s + 48}{s^2 + 8s + 25}$$

$$= \frac{6}{s} - \frac{6(s + 4) + 24}{(s + 4)^2 + 9}$$

$$= \frac{6}{s} - \frac{6(s + 4)}{(s + 4)^2 + 9} - \frac{24}{(s + 4)^2 + 9}$$

Entonces

$$Q = 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\text{ sen } 3t$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = 50e^{-4t}\text{ sen } 3t$$

(*b*) Si $E = 100 \operatorname{sen} 3t$, entonces (2) es en este caso

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50 \operatorname{sen} 3t$$

Tomando la transformada de Laplace encontramos que

$$(s^2 + 8s + 25)q = \frac{150}{s^2+9}$$

y

$$q = \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$

$$= \frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9}$$

Así que

$$Q = \frac{25}{26}\operatorname{sen} 3t - \frac{75}{52}\operatorname{sen} 3t + \frac{25}{26}e^{-4t}\operatorname{sen} 3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos 3t$$

$$= \frac{25}{52}(2 \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t + 2\operatorname{sen} 3t)$$

y entonces

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17\operatorname{sen} 3t + 6\cos 3t)$$

Para grandes valores de t, los términos de Q o de I en que aparece e^{-4t} son despreciables y se llaman los *términos transitorios* o la *parte transitoria* de la solución. Los otros términos se llaman los *términos permanentes* o la *parte permanente* de la solución.

17. Dada la malla eléctrica de la Fig. 3-12, determinar las corrientes de las diferentes ramas, si las corrientes iniciales valen cero.

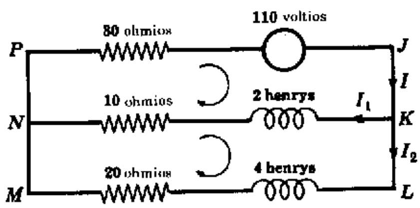


Fig. 3-12

La segunda ley de Kirchhoff [véase la Pág. 80] establece que la suma algebraica de las caídas de voltaje o potencial alrededor de cualquier malla cerrada es cero. Vamos a recorrer las mallas *KLMNK* y *JKNPJ* en el sentido de las agujas del reloj, tal como se muestra en la figura. Al recorrer estas mallas debemos considerar como positivas las caídas de voltaje, cuando el recorrido es en un sentido opuesto al de la corriente. Una subida del voltaje se considera como una caída de voltaje con signo opuesto.

Sea I la corriente en *NPJK*. En el nudo K esta corriente se divide I_1 e I_2 en tal forma que $I = I_1 + I_2$. Esto es equivalente a la primera ley de Kirchhoff [véase la Pág. 80].

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a las mallas *KLMNK* y *JKNPJ* tenemos, respectivamente,

$$\left.\begin{aligned} -10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} + 4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 &= 0 \\ 30I - 110 + 2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} -5I_1 - \frac{dI_1}{dt} + 2\frac{dI_2}{dt} + 10I_2 &= 0 \\ \frac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 &= 55 \end{aligned}\right\}$$

bajo las condiciones $I_1(0) = I_2(0) = 0$.

Tomando la transformada de Laplace del sistema y utilizando las condiciones iniciales encontramos que

$$-5i_1 - \{si_1 - I_1(0)\} + 2\{si_2 - I_2(0)\} + 10i_2 = 0$$
$$\{si_1 - I_1(0)\} + 20i_1 + 15i_2 = 55/s$$

o sea

$$(s+5)i_1 - (2s+10)i_2 = 0$$
$$(s+20)i_1 + 15i_2 = 55/s$$

Por la primera ecuación, $i_1 = 2i_2$, de modo que la segunda ecuación da

$$(2s+55)i_2 = \frac{55}{s} \qquad \text{o} \qquad i_2 = \frac{55}{s(2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$$

Entonces

$$I_2 = 1 - e^{-55t/2}$$
$$I_1 = 2I_2 = 2 - 2e^{-55t/2}$$
$$I = I_1 + I_2 = 3 - 3e^{-55t/2}$$

APLICACIONES A LAS VIGAS

18. Una viga fija en sus extremos $x = 0$ y $x = l$ (Fig. 3-13) soporta una carga uniforme W_0 por unidad de longitud. Hallar la deflexión en cualquier punto.

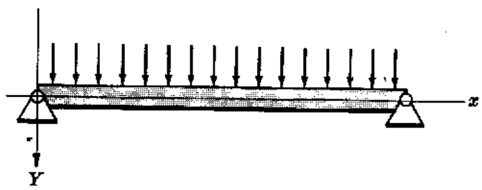


Fig. 3-13

La ecuación diferencial y las condiciones de frontera son

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W_0}{EI} \qquad 0 < x < l \qquad (1)$$

$$Y(0) = 0,\ Y''(0) = 0,\ Y(l) = 0,\ Y''(l) = 0 \quad (2)$$

Tomando la transformada de Laplace en los dos miembros de (1) tenemos que, si $y = y(s) = \mathcal{L}\{Y(x)\}$,

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EIs} \qquad (3)$$

Empleando en (2) las dos primeras condiciones y las condiciones desconocidas $Y'(0) = c_1$, $Y'''(0) = c_2$, encontramos que

$$y = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EIs^5}$$

Invirtiendo términos

$$Y(x) = c_1x + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI}\frac{x^4}{4!} = c_1x + \frac{c_2x^3}{6} + \frac{W_0x^4}{24EI}$$

De las dos últimas condiciones de (2) obtenemos

$$c_1 = \frac{W_0l^3}{24EI}, \qquad c_2 = -\frac{W_0l}{2EI}$$

Así, la deflexión buscada es

$$Y(x) = \frac{W_0}{24EI}(l^3x - 2lx^3 + x^4) = \frac{W_0}{24EI}x(l-x)(l^2+lx-x^2)$$

19. Una *viga voladiza* [Fig. 3-14] asegurada en el extremo $x = 0$ y libre en el extremo $x = l$, soporta una carga $W(x)$ por unidad de longitud dada por

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & 0 < x < l/2 \\ 0 & l/2 < x < l \end{cases}$$

Hallar su deflexión.

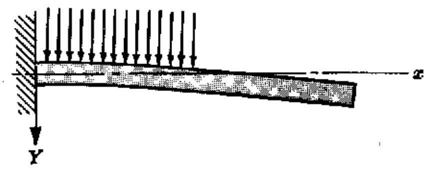


Fig. 3-14

La ecuación diferencial y las condiciones de frontera son

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \qquad 0 < x < l \tag{1}$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y''(l) = 0, \quad Y'''(l) = 0 \tag{2}$$

Para poder aplicar las transformadas de Laplace, extendemos la definición de $W(x)$ de la siguiente manera:

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & 0 < x < l/2 \\ 0 & x > l/2 \end{cases} \tag{3}$$

En términos de la función unitaria de Heaviside W puede expresarse como

$$W(x) = W_0\{\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x - l/2)\} \tag{4}$$

Tomando las transformadas de Laplace de (1) tenemos que, si $y = y(s) = \mathcal{L}\{Y(x)\}$, entonces

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EI}\left\{\frac{1 - e^{-sl/2}}{s}\right\}$$

De las dos primeras condiciones de la fórmula (2) y de las condiciones desconocidas $Y''(0) = c_1$, $Y'''(0) = c_2$ encontramos que

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EIs^5}\{1 - e^{-sl/2}\}$$

Invirtiendo los términos obtenemos

$$Y(x) = \frac{c_1x^2}{2!} + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI}\frac{x^4}{4!} - \frac{W_0}{EI}\frac{(x - l/2)^4}{4!}\mathcal{U}(x - l/2)$$

Lo cual es equivalente a

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{c_1x^2}{2!} + \dfrac{1}{6}c_2x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 & 0 < x < l/2 \\ \dfrac{c_1x^2}{2!} + \dfrac{1}{6}c_2x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 - \dfrac{W_0}{24EI}(x - l/2)^4 & x > l/2 \end{cases}$$

Al utilizar las condiciones $Y''(l) = 0$, $Y'''(l) = 0$ encontramos que

$$c_1 = \frac{W_0l^2}{8EI}, \qquad c_2 = -\frac{W_0l}{2EI}$$

De manera que la deflexión requerida es

$$Y(x) = \frac{W_0l^2}{16EI}x^2 - \frac{W_0l}{12EI}x^3 + \frac{W_0}{24EI}x^4 - \frac{W_0}{24EI}(x - l/2)^4\mathcal{U}(x - l/2)$$

o sea

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{W_0l^2}{16EI}x^2 - \dfrac{W_0l}{12EI}x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 & 0 < x < l/2 \\ \dfrac{W_0l^2}{16EI}x^2 - \dfrac{W_0l}{12EI}x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 - \dfrac{W_0}{24EI}(x - l/2)^4 & l/2 < x < l \end{cases}$$

20. Una viga tiene una carga concentrada P_0 que actúa en el punto $x = a$. Demostrar que este tipo de carga puede representarse por $W(x) = P_0\,\delta(x - a)$ donde δ es la función delta de Dirac o función de impulso.

Considérese una carga uniforme W_0 por unidad de longitud sobre la parte de la viga comprendida entre a y $a + \epsilon$ [Fig. 3-15]. Entonces la carga total sobre esta parte de viga es

$$W_0[a + \epsilon - a] = W_0\epsilon$$

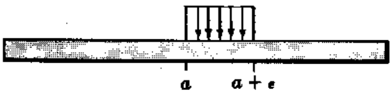


Fig. 3-15

Como esta carga total es igual a P_0, tendremos que

$$W(x) = \begin{cases} P_0/\epsilon & a < x < a + \epsilon \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

Pero, como ya se ha establecido, la representación del límite cuando $\epsilon \to 0$ está dada por

$$W(x) = P_0\,\delta(x - a)$$

De esta manera el resultado queda demostrado.

21. Una viga tiene empotrados sus extremos en $x = 0$ y $x = l$ [Fig. 3-16]. En el punto $x = l/3$ actúa, verticalmente hacia abajo, una carga concentrada P_0. Hallar la deflexión resultante.

Por el problema 20, la carga concentrada en $x = l/3$ puede representarse por $P_0\,\delta(x - l/3)$ donde δ es la función delta de Dirac o función de impulso. Entonces, la ecuación diferencial de la deflexión y sus correspondientes condiciones de frontera serán:

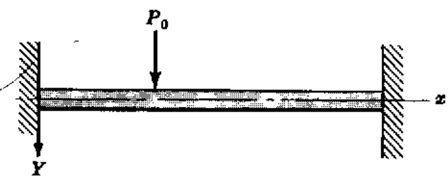


Fig. 3-16

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{P_0}{EI}\,\delta(x - l/3) \tag{1}$$

$$Y(0) = 0, \qquad Y'(0) = 0, \qquad Y(l) = 0, \qquad Y'(l) = 0 \tag{2}$$

Tomando transformadas de Laplace, si $y = \mathcal{L}\{Y(x)\}$ tendremos que,

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{P_0}{EI}e^{-ls/3} \tag{3}$$

Si llamamos $Y''(0) = c_1$ y a $Y'''(0) = c_2$, al usar las dos primeras condiciones de (2) encontramos que

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{P_0}{EI}\frac{e^{-ls/3}}{s^4} \tag{4}$$

Al invertir obtendremos

$$Y(x) = \frac{c_1x^2}{2!} + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{P_0}{EI}\frac{(x - l/3)^3}{3!}\,\mathcal{U}(x - l/3) \tag{5}$$

que equivale a,

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{6}c_2x^3 & 0 < x < l/3 \\ \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{6}c_2x^3 + \frac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3 & l/3 < x < l \end{cases}$$

De las dos últimas condiciones de (2) hallamos

$$c_1 = \frac{4P_0l}{27EI}, \qquad c_2 = \frac{-20P_0}{27EI}$$

Entonces la deflexión requerida es

$$Y(x) = \frac{2P_0 lx^2}{27EI} - \frac{10P_0 x^3}{81EI} + \frac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3 \, \mathcal{U}(x - l/3)$$

o sea

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2P_0 x^2(3l - 5x)}{81EI} & 0 < x < l/3 \\[2ex] \dfrac{2P_0 x^2(3l - 5x)}{81EI} + \dfrac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3 & l/3 < x < l \end{cases}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

22. Dada cierta función $U(x, t)$ definida para $a \leqq x \leqq b$ y $t > 0$, hallar

$$(a) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt, \qquad (b) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial x}\,dt$$

suponiendo que $U = U(x, t)$ satisface las restricciones apropiadas.

(*a*) Integrando por partes, tendremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt \\ &= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-st}\,U(x,t)\Big|_0^P + s\int_0^P e^{-st}\,U(x,t)\,dt\right\} \\ &= s\int_0^\infty e^{-st}\,U(x,t)\,dt - U(x,0) \\ &= s\,u(x,s) - U(x,0) = s\,u - U(x,0) \end{aligned}$$

donde $u = u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$.

Hemos supuesto que $U(x,t)$ satisface las restricciones del *teorema 1-1*, Pág. 2, cuando la consideramos como función de t.

(*b*) Al utilizar la regla de diferenciación bajo el signo integral de Leibnitz, tendremos que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial x}\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}\,U\,dt = \frac{du}{dx}$$

23. En referencia al problema 22, demostrar que

$$(a) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = s^2 u(x,s) - s\,U(x,0) - U_t(x,0)$$

$$(b) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 u}{dx^2}$$

donde $U_t(x,0) = \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}$ y $u = u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$.

Sea $V = \partial U/\partial t$. Entonces, como en la parte (*a*) del problema 22, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\right\} &= s\,\mathcal{L}\{V\} - V(x,0) \\ &= s\,[s\,\mathcal{L}\{U\} - U(x,0)] - U_t(x,0) \\ &= s^2 u - s\,U(x,0) - U_t(x,0) \end{aligned}$$

Nótese la semejanza que hay entre los resultados de este problema y la parte (*a*) del problema 22 con los *teoremas 1-6* y *1-9* de la Pág. 4. Las extensiones son fácilmente realizables.

24. Encontrar la solución de

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\frac{\partial U}{\partial t} + U, \qquad U(x,0) = 6e^{-3x}$$

si U es acotada para $x > 0$, $t > 0$.

Tomando las transformadas de Laplace, con respecto a t, de las ecuaciones diferenciales parciales dadas, y usando el *teorema 22,* encontraremos

$$\frac{du}{dx} = 2\{su - U(x,0)\} + u$$

o sea

$$\frac{du}{dx} - (2s+1)u = -12e^{-3x} \tag{1}$$

por la condición de frontera dada. Obsérvese que la transformada de Laplace ha convertido una ecuación diferencial parcial en una ecuación diferencial ordinaria (*1*).

Para resolver (*1*) multiplicamos sus dos miembros por el factor integrante $e^{\int -(2s+1)\,dx} = e^{-(2s+1)x}$. Entonces (*1*) se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}\{u\, e^{-(2s+1)x}\} = -12\, e^{-(2s+4)x}$$

Integrando, obtenemos

$$u\, e^{-(2s+1)x} = \frac{6}{s+2}e^{-(2s+4)x} + c \quad \text{o sea} \quad u = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + c\, e^{(2s+1)x}$$

Ahora, como $U(x,t)$ es acotada para $x \to 0$, debemos tener que $u(x,s)$ debe ser acotada también cuando $x \to \infty$, de tal suerte que se debe tomar $c = 0$. Entonces

$$u = \frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

Así, tomando la transformada inversa encontramos que

$$U(x,t) = 6\, e^{-2t-3x}$$

La cual, como puede comprobarse fácilmente, es la solución buscada.

25. Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = 3 \operatorname{sen} 2\pi x$, $U(0,t) = 0$, $U(1,t) = 0$ donde $0 < x < 1$, $t > 0$.

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación diferencial parcial, y usando los problemas 22 y 23, encontramos que

$$su - U(x,0) = \frac{d^2u}{dx^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - su = -3 \operatorname{sen} 2\pi x \tag{1}$$

donde $u = u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$. La solución general de (*1*) es

$$u = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} + \frac{3}{s+4\pi^2} \operatorname{sen} 2\pi x \tag{2}$$

Tomando la transformada de Laplace de aquellas condiciones de frontera en que aparece t, tendremos

$$\mathcal{L}\{U(0,t)\} = u(0,s) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}\{U(1,t)\} = u(1,s) = 0 \tag{3}$$

Utilizando la primera condición $[u(0, s) = 0]$ de (3) en (2) tendremos

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{4}$$

Utilizando la segunda condición $[u(1, s) = 0]$ de (3) en (2) tendremos

$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \tag{5}$$

De (4) y (5) encontramos que $c_1 = 0$, y $c_2 = 0$ de manera que (2) será

$$u = \frac{3}{s + 4\pi^2} \operatorname{sen} 2\pi x \tag{6}$$

de la cual, calculando la inversa, obtenemos

$$U(x, t) = 3\, e^{-4\pi^2 t} \operatorname{sen} 2\pi x \tag{7}$$

Este problema tiene una interesante interpretación física. Si consideramos un sólido comprendido entre los planos $x = 0$ y $x = 1$ extendidos indefinidamente, la fórmula

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

es la *ecuación de condición de calor* de este sólido, donde $U = U(x, t)$ es la *temperatura* en cualquier plano x y en cualquier tiempo t y k es una constante de *difusión* que depende del material del sólido. Las condiciones de frontera $U(0, t) = 0$ y $U(1, t) = 0$ indican que las temperaturas se mantienen a cero en $x = 0$ y $x = 1$, en tanto que $U(x, 0) = 3 \operatorname{sen} 2\pi x$ representa la temperatura inicial en cualquier parte cuando $0 < x < 1$. El resultado (7) será entonces la temperatura en cualquier parte del sólido en cualquier tiempo $t > 0$. En el capítulo 8 se ilustran más aplicaciones.

26. Hallar la solución acotada de $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $x > 0$, $t > 0$ y tal que $U(0, t) = 1$, $U(x, 0) = 0$.

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación diferencial parcial y la condición $U(0, t)$ encontramos, respectivamente, que

$$su - U(x, 0) = \frac{d^2 u}{dx^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - su = 0 \tag{1}$$

y

$$u(0, s) = \frac{1}{s} \tag{2}$$

De (1) obtenemos que $u = u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x}$. Como $U(x, t)$ debe ser acotada cuando $x \to \infty$, entonces $u(x, s) = \mathcal{L}\{U(x, t)\}$ deberá serlo también cuando $x \to \infty$. Entonces, al suponer que $\sqrt{s} > c_1$, c_1 será necesariamente cero, de tal manera que,

$$u(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} \tag{3}$$

De (2) y (3) obtenemos que $c_2 = 1/s$ de manera que

$$u(x, s) = \frac{e^{-\sqrt{s}\,x}}{s}$$

Utilizando el problema 43, Pág. 67, obtenemos

$$U(x, t) = \operatorname{fcer}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-v^2}\, dv$$

En términos físicos, esto representaría la temperatura en cualquier punto de un sólido "semi-infinito" $x > 0$ cuya cara $x = 0$ se mantiene a temperatura unitaria y cuya temperatura inicial es cero [véase el problema 25].

PROBLEMAS VARIOS

27. Supongamos que en el problema 14, Pág. 88, actúa sobre la partícula una fuerza $\mathcal{F}(t)$ y que no hay fuerza amortiguadora. (*a*) Hallar la posición de la partícula en cualquier tiempo si $\mathcal{F}(t) = F_0 \cos \omega t$. (*b*) Discutir el significado físico de los resultados.

(*a*) Si se tiene en cuenta la fuerza externa $\mathcal{F}(t)$, la ecuación del movimiento es

$$2\frac{d^2X}{dt^2} = -8X + \mathcal{F}(t) \tag{1}$$

o sea

$$2X'' + 8X = \mathcal{F}(t) \tag{2}$$

Como antes, las condiciones iniciales son

$$X(0) = 10, \qquad X'(0) = 0 \tag{3}$$

Si $\mathcal{F}(t) = F_0 \cos \omega t$, (2) toma la forma

$$2X'' + 8X = F_0 \cos \omega t \tag{4}$$

Tomando la transformada de Laplace y usando las condiciones (3), si hacemos $x = \mathcal{L}\{X\}$ encontramos que,

$$2\{s^2x - s(10) - 0\} + 8x = \frac{F_0 s}{s^2+\omega^2}$$

Entonces, si $\omega^2 \neq 4$,

$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{(F_0/2)s}{(s^2+4)(s^2+\omega^2)} \tag{5}$$

o sea

$$\frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0}{2(\omega^2-4)}\left\{\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} \tag{6}$$

de manera que

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t + \frac{F_0}{2(\omega^2-4)}(\cos 2t - \cos \omega t) \tag{7}$$

Si $\omega^2 = 4$, (5) será de la forma

$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{(F_0/2)s}{(s^2+4)^2} \tag{8}$$

y usando el problema 13, Pág. 53, obtendremos que

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t + \frac{F_0}{8} t \operatorname{sen} 2t \tag{9}$$

(*b*) Si $\omega^2 = 4$ o bien $\omega = 2$, es decir, si la frecuencia de la fuerza externa aplicada es igual a la frecuencia natural del sistema, podemos observar en la fórmula (9) que las oscilaciones alrededor del punto de equilibrio crecen indefinidamente. Este fenómeno se llama la *resonancia* y la frecuencia correspondiente a $\omega = 2$ se llama la *frecuencia resonante*. En tal caso, si hay una partícula sujeta al resorte, el resorte se romperá.

28. Desarrollar el problema 27, ahora en los casos (*a*) $\mathcal{F}(t) = F_0\,\mathcal{U}(t-a)$, (*b*) $\mathcal{F}(t) = F_0\,\delta(t)$.

(*a*) En este caso la ecuación del movimiento es [ecuación (2) del problema 27]

$$2X'' + 8X = F_0\,\mathcal{U}(t-a)$$

donde $X(0) = 10$, $X'(0) = 0$. Tomando transformadas de Laplace obtenemos que

$$2(s^2x - 10s) + 8x = \frac{F_0 e^{-as}}{s}$$

y $$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0 e^{-as}}{2s(s^2+4)}$$

$$= \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0 e^{-as}}{8}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right\}$$

entonces $$\begin{cases} 10\cos 2t + \frac{1}{8}F_0\{1-\cos 2(t-a)\} & \text{si } t > a \\ 10\cos 2t & \text{si } t < a \end{cases}$$

Luego el desplazamiento de la partícula es el mismo que el del problema 27 hasta el tiempo $t = a$, después del cual cambia.

(*b*) En este caso la ecuación del movimiento es

$$2X'' + 8X = F_0\,\delta(t), \qquad X(0) = 10, \quad X'(0) = 0$$

Tomando la transformada de Laplace encontramos

$$2(s^2x - 10s) + 8x = F_0$$

o sea $$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0}{2(s^2+4)}$$

De manera que $$X = 10\cos 2t + \tfrac{1}{4}F_0 \operatorname{sen} 2t \tag{1}$$

Físicamente hablando, aplicar la fuerza externa $F_0\,\delta(t)$ es equivalente a aplicar una fuerza muy grande durante un tiempo muy corto, y no volver a aplicar fuerza alguna en ningún otro instante. El efecto es el de producir un desplazamiento de mayor amplitud que el del problema 14. Esto puede verse si escribimos (*1*) en la forma

$$X = \sqrt{100 + F_0^2/16}\,\cos(2t - \phi) \tag{2}$$

donde $$\cos\phi = \frac{10}{\sqrt{100+F_0^2/16}}, \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{F_0/4}{\sqrt{100+F_0^2/16}}$$

o sea, $\tan\phi = F_0/40$, de modo que la amplitud es $\sqrt{100 + F_0^2/16}$.

29. Sea $Y = Y_1(t)$ una solución de la ecuación

$$Y''(t) + P(t)\,Y'(t) + Q(t)\,Y(t) = 0$$

Hallar la solución general de $Y''(t) + P(t)\,Y'(t) + Q(t)\,Y(t) = R(t)$.

La ecuación diferencial de la cual buscamos su solución general está dada por

$$Y'' + PY' + QY = R \tag{1}$$

Como $Y = Y_1$ es una solución de esta ecuación con el miembro derecho igual a cero, tenemos que

$$Y_1'' + PY_1' + QY_1 = 0 \tag{2}$$

Multiplicando la ecuación (*1*) por Y_1, la (2) por Y y restando, obtenemos

$$Y_1Y'' - YY_1'' + P(Y_1Y' - YY_1') = RY_1 \tag{3}$$

lo cual puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}(Y_1Y' - YY_1') + P(Y_1Y' - YY_1') = RY_1 \tag{4}$$

Un factor integrante de esta ecuación es

$$e^{\int P\,dt}$$

Al multiplicar a (4) por este factor lo podremos expresar como

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{\int P\,dt}(Y_1 Y' - YY_1')\right\} \quad = \quad RY_1 e^{\int P\,dt} \tag{5}$$

Entonces, integrando

$$e^{\int P\,dt}(Y_1 Y' - YY_1') \quad = \quad \int RY_1 e^{\int P\,dt}\,dt \; + \; c_1 \tag{6}$$

o sea

$$YY_1' \quad = \quad e^{-\int P\,dt}\int RY_1 e^{\int P\,dt}\,dt \; + \; c_1 e^{-\int P\,dt} \tag{7}$$

donde c_1 es una constante de integración.

Dividiendo los dos miembros de (7) por Y_1^2, podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Y_1}\right) \quad = \quad \frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2}\int RY_1 e^{\int P\,dt}\,dt \; + \; c_1\frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2} \tag{8}$$

Integrando los dos miembros de (8) y multiplicando por Y_1 encontramos que, si c_2 es una constante de integración,

$$Y \quad = \quad c_1 Y_1 \int \frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2}\,dt \; + \; c_2 Y_1 \; + \; Y_1 \int \left\{\frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2}\int RY_1 e^{\int P\,dt}\,dt\right\}dt \tag{9}$$

Esta es la solución general buscada. Para otro método véase el problema 103.

30. Hallar la solución general de (*a*) $tY'' + 2Y' + tY = 0$, (*b*) $tY'' + 2Y' + tY = \csc t$.

(*a*) De acuerdo con el problema 10, una solución particular de la ecuación diferencial dada es

$$Y_1(t) \quad = \quad \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

Como dicha ecuación diferencial puede escribirse en la forma (1) del problema 29, en este caso con

$$P \; = \; 2/t, \quad Q \; = \; 1, \quad R \; = \; 0,$$

de la ecuación (9) del problema 29 puede observarse que la solución general es

$$\begin{aligned} Y \quad &= \quad c_1\frac{\operatorname{sen} t}{t}\int\frac{e^{-\int (2/t)\,dt}}{\operatorname{sen}^2 t/t^2}\,dt \; + \; c_2\frac{\operatorname{sen} t}{t} \\ &= \quad c_1\frac{\operatorname{sen} t}{t}\int \csc^2 t\,dt \; + \; c_2\frac{\operatorname{sen} t}{t} \\ &= \quad c_1\frac{\operatorname{sen} t}{t}(-\cot t) \; + \; c_2\frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad = \quad \frac{A\cos t + B\operatorname{sen} t}{t} \end{aligned}$$

donde hemos escrito $c_1 = -A$, $c_2 = B$ como constantes arbitrarias.

(*b*) Aquí usamos la ecuación (9) del problema 29, en este caso con

$$P \; = \; 2/t, \quad Q \; = \; 1, \quad R \; = \; (\csc t)/t$$

y encontramos que

$$Y \quad = \quad \frac{A\cos t + B\operatorname{sen} t}{t} \; - \; \cos t \; + \; \frac{\operatorname{sen} t \ln \operatorname{sen} t}{t}$$

31. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + Y = 16x + 20\,\text{sen}\,x$$

bajo las condiciones

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = 16\pi, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad Y(x,0) = 16x + 12\,\text{sen}\,2x - 8\,\text{sen}\,3x$$

Tomando la transformada de Laplace encontramos que

$$s^2 y - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) - 4\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \frac{16x}{s} + \frac{20\,\text{sen}\,x}{s} \tag{1}$$

o sea, utilizando las condiciones dadas, que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{4}(s^2+1)y = \frac{-4(s^2+1)x}{s} - \frac{5\,\text{sen}\,x}{s} - 3s\,\text{sen}\,2x + 2s\,\text{sen}\,3x \tag{2}$$

$$y(0,s) = 0, \qquad y(\pi,s) = \frac{16\pi}{s} \tag{3}$$

Una solución particular de (2) es de la forma

$$y_p = ax + b\,\text{sen}\,x + c\,\text{sen}\,2x + d\,\text{sen}\,3x \tag{4}$$

Sustituyendo e igualando coeficientes de términos semejantes encontramos la solución particular

$$y_p = \frac{16x}{s} + \frac{20\,\text{sen}\,x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\,\text{sen}\,2x}{s^2+17} - \frac{8s\,\text{sen}\,3x}{s^2+37} \tag{5}$$

La solución general de la ecuación (2) cuyo miembro derecho ha sido remplazado por cero [es decir, la *solución complementaria*] es

$$y_c = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} \tag{6}$$

De manera que la solución general de (2) es

$$y = y_p + y_c \tag{7}$$

Usando las condiciones (3) en (7) encontramos que

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,\pi} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,\pi} = 0$$

De donde $c_1 = c_2 = 0$. Así

$$y = \frac{16x}{s} + \frac{20\,\text{sen}\,x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\,\text{sen}\,2x}{s^2+17} - \frac{8s\,\text{sen}\,3x}{s^2+37}$$

Entonces tomando la transformada inversa de Laplace encontramos la solución buscada

$$Y(x,t) = 16x + 4\,\text{sen}\,x\,(1 - \cos\sqrt{5}\,t) + 12\,\text{sen}\,2x\cos\sqrt{17}\,t - 8\,\text{sen}\,3x\cos\sqrt{37}\,t$$

Problemas propuestos

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Resolver cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes usando transformadas de Laplace y verificar las soluciones.

32. $Y''(t) + 4Y(t) = 9t$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 7$. *Resp.* $Y(t) = 3t + 2\,\text{sen}\,2t$

33. $Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t}$, $Y(0) = 6$, $Y'(0) = -1$.
Resp. $Y(t) = 3e^t - 2e^{2t} + 2t + 3 + 2e^{-t}$

34. $Y''(t) - 4Y'(t) + 5Y(t) = 125t^2, \quad Y(0) = Y'(0) = 0.$

Resp. $Y(t) = 25t^2 + 40t + 22 + 2e^{2t}(2 \operatorname{sen} t - 11 \cos t)$

35. $Y''(t) + Y(t) = 8 \cos t, \quad Y(0) = 1, \; Y'(0) = -1.$

Resp. $Y(t) = \cos t - 4 \operatorname{sen} t + 4t \cos t$

36. $Y'''(t) - Y(t) = e^t, \quad Y(0) = 0, \; Y'(0) = 0, \; Y''(0) = 0.$

Resp. $Y(t) = \frac{1}{3}te^t + \frac{1}{18}e^{-\frac{1}{2}t}\left\{9 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}t\right\} - \frac{1}{2}e^t$

37. $Y^{iv}(t) + 2Y''(t) + Y(t) = \operatorname{sen} t, \quad Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = Y'''(0) = 0.$

Resp. $Y(t) = \frac{1}{8}\{(3 - t^2) \operatorname{sen} t - 3t \cos t\}$

38. Hallar la solución general de la ecuación diferencial de:

(a) problema 2, Pág. 82. (b) problema 3, Pág. 83. (c) problema 6, Pág. 84.

Resp. (a) $Y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 4te^{2t}$ (c) $Y = c_1 \operatorname{sen} 3t + c_2 \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$

(b) $Y = e^{-t}(c_1 \operatorname{sen} 2t + c_2 \cos 2t) + \frac{1}{3}e^{-t} \operatorname{sen} t$

39. Resolver $Y''(t) + 9Y(t) = 18t$ si $Y(0) = 0, \; Y(\pi/2) = 0.$ *Resp.* $Y(t) = 2t + \pi \operatorname{sen} 3t$

40. Resolver $Y^{iv}(t) - 16Y(t) = 30 \operatorname{sen} t$ si $Y(0) = 0, \; Y'(0) = 2, \; Y''(\pi) = 0, \; Y'''(\pi) = -18.$

Resp. $Y = 2(\operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t)$

41. Resolver $Y'' - 4Y' + 3Y = F(t)$ si $Y(0) = 1, \; Y'(0) = 0.$

Resp. $Y = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}\int_0^t (e^{3u} - e^u) F(t-u)\, du$

42. Resolver la ecuación diferencial

$$Y'' + 4Y = F(t), \quad Y(0) = 0, \; Y'(0) = 1$$

donde $F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}.$

Resp. $Y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}\{\cos(2t - 2) - \cos 2t\}$ para $t > 1$

y $Y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$ para $t > 1$

43. Resolver el problema 42 si: (a) $F(t) = \mathcal{U}(t - 2)$, [función escalonada unitaria de Heaviside]; (b) $F(t) = \delta(t)$, [función delta de Dirac]; (c) $F(t) = \delta(t - 2)$.

Resp. (a) $Y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$ si $t < 2$, $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}\{1 - \cos(2t - 4)\}$ si $t > 2$

(b) $Y(t) = \operatorname{sen} 2t, \quad t > 0$

(c) $Y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$ si $t < 2$, $\frac{1}{2}\{\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen}(2t - 4)\}^2$ si $t > 2$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES VARIABLES

Resolver cada ecuación utilizando transformadas de Laplace y comprobar las soluciones.

44. $Y'' + tY' - Y = 0, \quad Y(0) = 0, \; Y'(0) = 1.$ *Resp.* $Y = t$

45. $tY'' + (1 - 2t)Y' - 2Y = 0, \quad Y(0) = 1, \; Y'(0) = 2.$ *Resp.* $Y = e^{2t}$

46. $tY'' + (t - 1)Y' - Y = 0, \quad Y(0) = 5, \; Y(\infty) = 0.$ *Resp.* $Y = 5e^{-t}$

47. Hallar la solución acotada de la ecuación

$$t^2Y'' + tY' + (t^2 - 1)Y = 0$$

con la hipótesis $Y(1) = 2$. *Resp.* $2J\ (t)/J\ (1)$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS SIMULTANEAS

48. Resolver $\begin{cases} Y' + 2Z' = t \\ Y'' - Z = e^{-t} \end{cases}$ con las condiciones $Y(0) = 3,\ Y'(0) = -2,\ Z(0) = 0.$

Resp. $Y = 2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\cos t, \quad Z = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t$

49. Resolver $\begin{cases} Y' - Z' - 2Y + 2Z = \operatorname{sen} t \\ Y'' + 2Z' + Y = 0 \end{cases}$ si $Y(0) = Y'(0) = Z(0) = 0.$

Resp. $Y = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{4}{45}e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}te^{-t}, \quad Z = \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{-t}$

50. Resolver $\begin{cases} X' + 2Y'' = e^{-t} \\ X' + 2X - Y = 1 \end{cases}$ si $X(0) = Y(0) = Y'(0) = 0.$

Resp. $X = 1 + e^{-t} - e^{-at} - e^{-bt},\ Y = 1 + e^{-t} - be^{-at} - ae^{-bt}$ donde $a = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}),\ b = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$

51. Resolver el problema 49 con las condiciones $Y(0) = 0,\ Y'(\pi) = 1,\ Z(0) = 0.$

52. Resolver $\begin{cases} tY + Z + tZ' = (t-1)e^{-t} \\ Y' - Z = e^{-t} \end{cases}$ dado que $Y(0) = 1,\ Z(0) = -1.$

Resp. $Y = J_0(t),\ Z = -J_1(t) - e^{-t}$

53. Resolver $\begin{cases} -3Y'' + 3Z'' = te^{-t} - 3\cos t \\ tY'' - Z' = \operatorname{sen} t \end{cases}$ dado que $Y(0) = -1,\ Y'(0) = 2,\ Z(0) = 4,\ Z''(0) = 0.$

Resp. $Y = \frac{2}{3}t^2 + \frac{5}{3}t - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-t}, \quad Z = \frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} + \cos t$

54. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones del problema 49.

Resp. $Y = c_1 + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t}$

$Z = 1 - c_2 \operatorname{sen} t - c_3 \cos t - \frac{1}{2}e^{-t}$

APLICACIONES A LA MECANICA

55. En referencia a la Fig. 3-1, Pág. 79, supóngase que sobre una masa m está actuando una fuerza $\mathcal{F}(t)$, $t > 0$ y que no hay fuerzas amortiguadoras.

(*a*) Demostrar que si la masa parte del reposo a una distancia $X = a$ del punto de equilibrio ($X = 0$), entonces se puede determinar el desplazamiento X en cualquier tiempo $t > 0$ de la ecuación del movimiento

$$mX'' + kX = \mathcal{F}(t), \quad X(0) = a, \quad X'(0) = 0$$

donde las tildes denotan derivadas con respecto a t.

(*b*) Hallar X en cualquier tiempo si $\mathcal{F}(t) = F_0$ (constante) para $t > 0$.

(*c*) Hallar X en cualquier tiempo $\mathcal{F}(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ donde $\alpha > 0$.

Resp. (*b*) $X = a + \dfrac{F_0}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)$

(*c*) $X = a + \dfrac{F_0}{m\alpha^2 + k}\left(e^{-\alpha t} - \cos\sqrt{k/m}\,t\right) + \dfrac{\alpha F_0\sqrt{m/k}}{m\alpha^2 + k}\operatorname{sen}\sqrt{k/m}\,t$

56. Desarrollar el problema 55 si $\mathcal{F}(t) = F_0 \operatorname{sen}\omega t$, considerando los dos siguientes casos: (*a*) $\omega \neq \sqrt{k/m}$, (*b*) $\omega = \sqrt{k/m}$. Discutir el significado físico en cada caso.

57. Una partícula se mueve sobre una recta en tal forma que su desplazamiento X desde un punto fijo O, está dado en cualquier tiempo t por

$$X''(t) + 4X(t) + 5X(t) = 80 \operatorname{sen} 5t$$

(*a*) Si cuando $t = 0$ la partícula está en el reposo en $X = 0$, hallar su desplazamiento en cualquier tiempo $t > 0$.

(*b*) Hallar la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento después de un largo tiempo.

(*c*) En el resultado de (*a*) ¿cuál es el término transitorio y cuál es el término permanente?

(*d*) ¿Es este movimiento sobreamortiguado, críticamente amortiguado o es oscilatorio amortiguado?

Resp. (*a*) $X(t) = 2e^{-2t}(\cos t + 7 \operatorname{sen} t) - 2(\operatorname{sen} 5t + \cos 5t)$

(*b*) Amplitud $= 2\sqrt{2}$, período $= 2\pi/5$, frecuencia $= 5/2\pi$

(*c*) Término transitorio $2e^{-2t}(\cos t + 7 \operatorname{sen} t)$; término permanente $-2(\operatorname{sen} 5t + \cos 5t)$

(*d*) Es oscilatorio amortiguado.

58. Supóngase que, en $t = 0$, la masa m de la Fig. 3-1, Pág. 79, está en reposo en su posición de equilibrio $X = 0$. Supóngase además que súbitamente se le aplica una fuerza que le comunica una velocidad instantánea V_0 dirigida hacia la derecha, fuerza que luego se quita. Demostrar que el desplazamiento de la masa de su posición de equilibrio es en cualquier tiempo $t > 0$,

(*a*)
$$V_0\sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

si no hay fuerza amortiguadora

(*b*)
$$\frac{V_0}{\alpha} e^{-\beta t/2m} \quad \text{donde} \quad \gamma = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

si hay una fuerza amortiguadora de magnitud $\beta X'(t)$, donde $\beta < 2\sqrt{km}$.

59. Desarrollar el problema 55 si: (*a*) $\mathcal{F}(t) = F_0\mathcal{U}(t - T)$, [función escalonada unitaria de Heaviside] (*b*) $\mathcal{F}(t) = F_0\,\delta(t - T)$ [función delta de Dirac]. Discutir el significado físico en cada caso.

Resp. (*a*) $X = aF_0 \cos\sqrt{k/m}\,t$ si $t < T$ y

$X = aF_0 \cos\sqrt{k/m}\,t + (F_0/k)\{1 - \cos\sqrt{k/m}\,(t - T)\}$ si $t > T$

(*b*) $X = aF_0 \cos\sqrt{k/m}\,t$ si $t < T$ y

$X = aF_0 \cos\sqrt{k/m}\,t + (F_0/\sqrt{km}) \operatorname{sen}\sqrt{k/m}\,(t - T)$ si $t > T$

60. Supóngase que, en $t = 0$, la masa m de la Fig. 3-1, Pág. 79, está en reposo en su punto de equilibrio y que se le aplica una fuerza $F_0\,\delta(t)$. Hallar el desplazamiento en cualquier tiempo $t > 0$ si (*a*) el sistema no es amortiguado, (*b*) el sistema es críticamente amortiguado. Discutir el significado físico en cada caso.

Resp. (*a*) $\dfrac{F_0}{\sqrt{km}} \operatorname{sen}\sqrt{k/m}\,t$, (*b*) $\dfrac{F_0}{m} t\, e^{-\beta t/2m}$

61. Desde la superficie de la Tierra se lanza hacia arriba una bola de masa m con una velocidad V_0. Demostrar que alcanza una altura máxima igual a $V_0^2/2g$ donde g es la aceleración debida a la gravedad.

62. Una masa m se mueve sobre el eje x bajo la influencia de una fuerza que es proporcional a su rapidez instantánea y de dirección opuesta a la dirección del movimiento. Suponiendo que cuando $t = 0$ la partícula está localizada en $X = a$ moviéndose hacia la derecha con una velocidad V_0, hallar la posición en la cual la masa está en reposo.

63. Una masa se mueve sobre el plano xy en tal forma que su posición (x, y) en cualquier tiempo está dada por

$$X'' + k_1^2 Y = 0, \qquad Y'' + k_2^2 X = 0$$

Si en el tiempo $t = 0$ la partícula sale del reposo en (a, b), hallar su posición en cualquier tiempo $t > 0$.

Resp. $$X = \left(\frac{ak_2 + bk_1}{2k_2}\right)\cos\sqrt{k_1k_2}\,t + \left(\frac{ak_2 - bk_1}{2k_2}\right)\cosh\sqrt{k_1k_2}\,t$$

$$Y = \left(\frac{ak_2 + bk_1}{2k_1}\right)\cos\sqrt{k_1k_2}\,t - \left(\frac{ak_2 - bk_1}{2k_1}\right)\cosh\sqrt{k_1k_2}\,t$$

APLICACIONES A LOS CIRCUITOS ELECTRICOS

64. Se conectan en serie una resistencia de R ohmios y un condensador de C faradios con un generador de E voltios [véase la Fig. 3-17]. En $t = 0$ la carga del condensador es cero. Hallar la carga y la corriente en cualquier tiempo $t > 0$ si: (*a*) $E = E_0$, constante. (*b*) $E = E_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$.

Resp. (*a*) $Q = CE_0(1 - e^{-t/RC})$, $\quad I = (E_0/R)e^{-t/RC}$

$$(b)\quad Q = \frac{CE_0}{1-\alpha RC}(e^{-\alpha t} - e^{-t/RC}),$$

$$I = \frac{CE_0}{1-\alpha RC}\left(\frac{e^{-t/RC}}{RC} - \alpha e^{-\alpha t}\right) \quad \text{si } \alpha \neq 1/RC$$

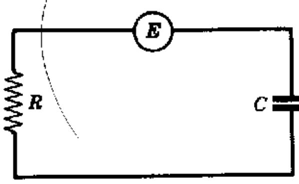


Fig. 3-17

65. Desarrolar el problema 64 en el caso en que $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$ y la carga del condensador sea Q_0.

Resp. $$Q = \left\{Q_0 + \frac{\omega E_0}{R(\omega^2 + 1/R^2C^2)}\right\}e^{-t/RC} - \frac{E_0}{R}\left\{\frac{\omega \cos \omega t - (1/RC)\operatorname{sen}\omega t}{\omega^2 + 1/R^2C^2}\right\}, \quad I = dQ/dt$$

66. Un inductor de L henrys y un condensador de C faradios están conectados en serie con un generador de E voltios. En $t = 0$ la carga del condensador y la corriente del circuito son nulas. Hallar la carga del condensador en cualquier tiempo $t > 0$ si: (*a*) $E = E_0$ constante; (*b*) $E = E_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$.

Resp. (*a*) $Q = CE_0\{1 - \cos(t/\sqrt{LC})\}$

$$(b)\quad Q = \frac{E_0}{L(\alpha^2 + 1/LC)}\{e^{-\alpha t} - \cos(t/\sqrt{LC})\} + \frac{\alpha E_0\sqrt{C/L}}{\alpha^2 + 1/LC}\operatorname{sen}(t/\sqrt{LC})$$

67. Desarrollar el problema 66 en el caso $E = E_0 \operatorname{sen}\omega t$, discutiendo los casos (*a*) $\omega \neq 1/\sqrt{LC}$ y (*b*) $\omega = 1/\sqrt{LC}$, explicando el significado físico.

68. Desarrollar el problema 66 si $E(t)$ es (*a*) $E_0\,\mathcal{U}(t-a)$ donde $\mathcal{U}(t-a)$ es la función unitaria escalonada de Heaviside, (*b*) $E_0\,\delta(t)$ donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

Resp. (*a*) $Q = 0$ si $t < a$, y $\quad CE_0\left\{1 - \cos\left(\frac{t-a}{LC}\right)\right\}$ si $t > a$

$$(b)\quad Q = E_0\sqrt{C/L}\operatorname{sen}(t/\sqrt{LC})$$

69. Un inductor de 3 henrys está en serie con una resistencia de 30 ohmios y una f.e.m. de 150 voltios. Suponiendo que en $t = 0$ la corriente es cero, hallar la corriente en cualquier tiempo $t > 0$. *Resp.* $I = 5(1 - e^{-10t})$.

70. Resolver el problema 69 si la f.e.m. es 150 sen $20t$. *Resp.* $I = \operatorname{sen} 20t - 2\cos 20t + 2e^{-10t}$

71. Hallar la carga del condensador y la corriente del circuito [Fig. 3-18] en cualquier tiempo después de cerrada la llave en $t = 0$. Supóngase que L, R, C, y E son constantes y que la carga y la corriente valen cero cuando $t = 0$. Tratar todos los casos.

72. (*a*) Desarrollar el problema 71 si $E = E_0 \operatorname{sen}\omega t$.

(*b*) Demostrar que hay resonancia si $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{2L^2}}$.

(*c*) Discutir el caso $R = 0$.

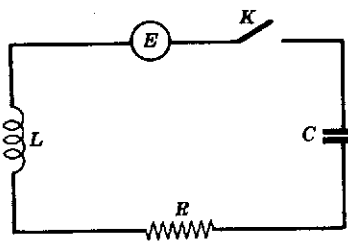


Fig. 3-18

73. Un circuito eléctrico consta de un inductor de L henrys en serie con un condensador de C faradios. En $t = 0$ se aplica una f.e.m. dada por

$$E(t) = \begin{cases} E_0 t/T_0 & 0 < t < T_0 \\ 0 & t > T_0 \end{cases}$$

Suponiendo que la corriente y la carga del condensador son nulas en $t = 0$, hallar la carga en cualquier tiempo $t > 0$.

Resp. $$Q = \frac{CE_0}{T_0}\{t - \sqrt{LC}\,\text{sen}(t/\sqrt{LC})\} \quad \text{si } 0 < t < T_0 \quad \text{y}$$

$$Q = \frac{CE_0}{T_0}\left\{T_0 \cos\left(\frac{t-T_0}{\sqrt{LC}}\right) + \sqrt{LC}\,\text{sen}\left(\frac{t-T_0}{\sqrt{LC}}\right) - \sqrt{LC}\,\text{sen}\frac{t}{\sqrt{LC}}\right\} \quad \text{si } t > T$$

74. En el circuito eléctrico de la Fig. 3-19 tenemos que:

$E = 500 \text{ sen } t$

$R_1 = 10$ ohmios

$R_2 = 10$ ohmios

$L = 1$ henry

$C = 0{,}01$ faradio

Si la carga del condensador y las corrientes I_1 e I_2 son nulas en $t = 0$, hallar la carga del condensador en cualquier tiempo $t > 0$.

Resp. $Q = \text{sen } 10t - 2\cos 10t + e^{-10t}(\text{sen } 10t + 2\cos 10t)$

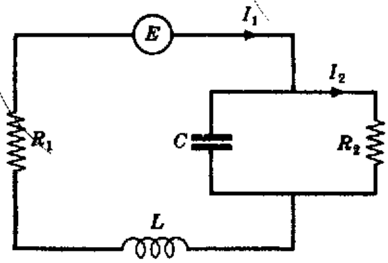


Fig. 3-19

APLICACIONES A LAS VIGAS

75. Una viga sostenida en sus extremos $x = 0$ y $x = l$ soporta una carga uniforme W_0 por unidad de longitud. Demostrar que la deflexión en cualquier punto es $Y(x) = \dfrac{W_0 x^2(l-x)^2}{24EI}$

76. Desarrollar el problema 75 si la viga está empotrada en el extremo $x = 0$ y articulada en el extremo $x = l$.

77. Una viga en voladizo, empotrada en $x = 0$ y libre en $x = l$, soporta una carga uniforme W por unidad de longitud. Demostrar que la deflexión es $Y(x) = \dfrac{W_0 x^2}{24EI}(x^2 - 4lx + 6l^2)$.

78. Una viga cuyos extremos están articulados en $x = 0$ y $x = l$ tiene una carga dada por

$$W(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l/3 \\ W_0 & l/3 < x < l \end{cases}$$

Hallar la deflexión.

79. Una viga en voladizo, empotrada en $x = 0$ y libre en $x = l$, soporta una carga concentrada P_0 en $x = l$. Demostrar que la deflexión está dada por $Y(x) = \dfrac{P_0 x^2}{6EI}(3l - x)$.

80. Desarrollar el problema 79 en el caso en que la carga esté en $x = l/2$.

81. Una viga tiene sus extremos articulados en $x = 0$ y $x = l$. Si en $x = l/2$ actúa verticalmente hacia abajo una carga concentrada P_0, demostrar que la deflexión es

$$Y(x) = \frac{P_0 x}{48EI}(3l^2 - 4x^2) \qquad 0 < x < l/2$$

Para $l/2 < x < l$, la deflexión se obtiene por simetría o remplazando x por $l - x$.

82. Desarrollar el problema 81 para el caso en que la viga esté empotrada en sus extremos.

83. Una viga tiene sus extremos articulados en $x = 0$ y $x = l$. En el punto $x = l/3$ actúa verticalmente hacia abajo una carga concentrada P_0. Demostrar que la deflexión está dada por

$$Y(x) = \frac{P_0 x(5l^2 - 9x^2)}{81EI} + \frac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3\,\mathcal{U}(x - l/3)$$

84. Una viga tiene sus extremos articulados en $x = 0$ y $x = l$. La viga soporta una carga uniforme W_0 por unidad de longitud y tiene, además, una carga concentrada P_0 que actúa en $x = l/2$. (*a*) Hallar su deflexión. (*b*) Discutir la forma en que puede obtenerse la solución de (*a*) a partir de los problemas 18 y 81. Explicar.

85. Una viga cuyos extremos están empotrados en $x = 0$ y $x = l$ soporta una carga $W(x)$ por unidad de longitud dada por

$$W(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l/2 \\ W_0 x & l/2 < x < l \end{cases}$$

y además una carga concentrada en $x = l/3$. Hallar su deflexión.

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

86. Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, t) = 0$, $U(5, t) = 0$, $U(x, 0) = 10 \operatorname{sen} 4\pi x$.

Resp. $U(x, t) = 10\, e^{-32\pi^2 t} \operatorname{sen} 4\pi x$

87. Resolver el problema 86 si $U(x, 0) = 10 \operatorname{sen} 4\pi x - 5 \operatorname{sen} 6\pi x$.

Resp. $U(x, t) = 10\, e^{-32\pi^2 t} \operatorname{sen} 4\pi x - 5\, e^{-72\pi^2 t} \operatorname{sen} 6\pi x$

88. Resolver $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y(0, t) = 0$, $Y(2, t) = 0$, $Y(x, 0) = 20 \operatorname{sen} 2\pi x - 10 \operatorname{sen} 5\pi x$.

Resp. $Y(x, t) = 20 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 6\pi t - 10 \operatorname{sen} 5\pi x \cos 15\pi t$

89. Interpretar físicamente (*a*) el problema 86, (*b*) el problema 87, (*c*) el problema 88.

90. Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_x(0, t) = 0$, $U(\pi/2, t) = 0$ si:

(*a*) $U(x, 0) = 30 \cos 5x$, (*b*) $U(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x$.

Resp. (*a*) $30\, e^{-75t} \cos 5x$, (*b*) $U(x, t) = 20\, e^{-27t} \cos 3x - 5\, e^{-243t} \cos 9x$

91. Hacer una interpretación física del problema 90.

92. (*a*) Hallar la solución de $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4U$, $U(0, t) = 0$, $U(\pi, t) = 0$, $U(x, 0) = 6 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen} 2x$.

(*b*) Dar una posible interpretación física de la solución.

Resp (*a*) $U(x, t) = 6\, e^{-5t} \operatorname{sen} x - 4\, e^{-8t} \operatorname{sen} 2x$

93. Resolver $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y_x(0, t) = 0$, $Y(3, t) = 0$, $Y(x, 0) = 0$, $Y_t(x, 0) = 12 \cos \pi x + 16 \cos 3\pi x - 8 \cos 5\pi x$.

Resp. $Y(x, t) = 12 \cos \pi x \operatorname{sen} 4\pi t + 16 \cos 3\pi x \operatorname{sen} 12\pi t - 8 \cos 5\pi x \operatorname{sen} 20\pi t$

94. Dar la solución acotada $Y(x, t)$, $0 < x < 1$, $t > 0$ del problema de contorno

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 1 - e^{-t}, \qquad Y(x, 0) = x$$

Resp. $Y(x, t) = x + 1 - e^{-t}$

95. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0$$

sujeta a las condiciones

$$Y(0, t) = 10 \operatorname{sen} 2t, \quad Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} Y(x, t) = 0$$

PROBLEMAS VARIOS

96. Mostrar que la solución de la ecuación diferencial

$$Y''(t) - k^2 Y(t) = F(t)$$

sometida a que $Y(0) = a$ y que $Y'(0) = b$, es:

$$Y(t) = a \cosh kt + (b/k) \operatorname{senh} kt + \frac{1}{k}\int_0^t F(u) \operatorname{senh} k(t-u)\, du$$

97. Resolver $Y^{iv}(t) + Y'''(t) = 2 \operatorname{sen} t$, $Y(0) = Y'(0) = 0$, $Y''(0) = 1$, $Y'''(0) = -2$.

Resp. $Y = \frac{1}{2}t^2 - 2 + e^{-t} + \operatorname{sen} t + \cos t$

98. Hallar la solución general de la ecuación diferencial del problema 45.

Resp. $Y(t) = c_1 e^{2t} \int^t \frac{e^{-2t}}{t} dt + c_2 e^{2t}$

99. Hallar la solución de la ecuación

$$tY'' - (t+2)Y' + 3Y = t - 1$$

la cual tiene transformada de Laplace y es tal que $Y(0) = 0$.

100. ¿Cuál es la solución general de la ecuación diferencial del problema 99?

101. (*a*) Usando transformadas de Laplace demostrar que la solución de

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + k^2Y = A \cos \omega t, \qquad Y(0) = \alpha,\ Y'(0) = \beta$$

es $Y(t) = \dfrac{A(\cos \omega t - \cos kt)}{\omega^2 - k^2} + \alpha \cos kt + (\beta/k) \operatorname{sen} kt.$

(*b*) Dar una interpretación física a la parte (*a*) del problema.

102. Resolver para X: $\begin{cases} X' + Y' = Y + Z \\ Y' + Z' = X + Z \\ X' + Z' = X + Y \end{cases}$ si $X(0) = 2$, $Y(0) = -3$, $Z(0) = 1$.

Resp. $X = \frac{2}{3}e^{-t/2}\{3 \cos(\sqrt{3}\, t/2) - 2\sqrt{3} \operatorname{sen}(\sqrt{3}\, t/2)\}$

103. Desarrollar el problema 29 haciendo $Y = VY_1$, donde V es una nueva variable dependiente.

104. Es posible aplicar el método de las transformadas de Laplace para encontrar la solución general de

$$Y'' + Y = \sec t$$

Explicar.

105. (*a*) Hallar la solución acotada de

$$(t-1)Y'' + (5-4t)Y' - 4Y = 0$$

tal que $Y(0) = 0$. (*b*) ¿Cuál es la solución de (*a*)?

Resp. (*a*) $Y = 3e^{4t}$, (*b*) $Y = c_1 e^{4t} \int^t \frac{e^{-4t}}{t-1} dt + c_2 e^{4t}$

106. (*a*) Demostrar que $$I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$$

satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dI}{dt} - I = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}, \qquad I(0) = \pi/2$$

(*b*) Resolviendo la ecuación diferencial de (*a*), demostrar que

$$I(t) = \frac{\pi}{2} e^t \text{ fcer } \sqrt{t}$$

107. Sobre una partícula que se mueve en una recta (el eje x) actúa una fuerza de repulsión que es proporcional a su distancia instantánea de un punto fijo O de la recta. Si se coloca la partícula a una distancia a de O y se le comunica una velocidad de magnitud V_0 dirigida hacia O, encontrar la mínima distancia a que puede aproximarse a O.

108. Si la bola del problema 61 encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea, demostrar que la máxima altura que puede alcanzar es

$$\frac{m}{k^2}(kV_0 + mg - kg) - \frac{m^2 g}{k^2}$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

109. En el circuito de la Fig. 3-18, Pág. 106, supóngase que la f.e.m. E es una función de t y que L, R, y C son constantes. En el instante $t = 0$ en que se cierra la llave K, supóngase que la carga Q del condensador y la corriente I valen cero. Demostrar que si $R^2 < 4L/C$, entonces la corriente en cualquier tiempo $t > 0$ estará dada por

$$I(t) = \frac{1}{L}\int_0^t E(t-u)\, e^{-Ru/2L}\left(\cos \alpha u - \frac{R}{2L\alpha}\,\text{sen}\,\alpha u\right) du$$

donde $\alpha = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$.

110. Desarrollar el problema 109 si (*a*) $R^2 = 4L/C$, (*b*) $R^2 > 4L/C$.

111. Presentar analogías mecánicas con: (*a*) el problema 64, (*b*) el problema 66, (*c*) el problema 71.

112. Dar una analogía eléctrica con (*a*) el problema 55, (*b*) el problema 57.

113. Dar una analogía mecánica con el problema 74 en la cual aparezcan masas conectadas por resortes.

114. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x bajo la influencia de una fuerza $\mathcal{F}(t)$, tal como se indica en la Fig. 3-20. Si la partícula parte del reposo en $t = 0$, determinar su posición y su velocidad en cualquier tiempo $t > 0$.

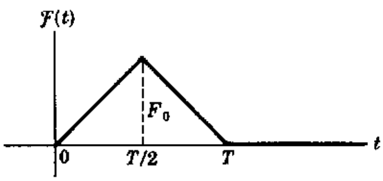


Fig. 3-20

115. Una viga empotrada en $x = 0$ y $x = l$ soporta una carga concentrada P_0 en el punto $x = a$, donde $0 < a < l$. Mostrar que la deflexión es

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{P_0 x^2 (l-a)^2}{6EIl^3}\{3al - (2a+l)x\} & 0 < x < a \\[2ex] \dfrac{P_0 x^2 (l-a)^2}{6EIl^3}\{3al - (2a+l)x\} + \dfrac{P_0 (x-a)^3}{6EI} & a < x < l \end{cases}$$

116. Desarrollar el problema 115 en el caso en que la viga esté empotrada en $x = 0$ y libre en $x = l$.

Resp. $$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{P_0 x^2}{6EI}(3a - x) & 0 < x < a \\[2ex] \dfrac{P_0 a^2}{6EI}(3x - a) & a < x < l \end{cases}$$

117. Una viga que está articulada en $x = 0$ y $x = l$ soporta cargas concentradas P_0 en $x = l/3$ y $x = 2l/3$. Hallar la deflexión.

118. Si una viga que soporta una carga $W(x)$ por unidad de longitud reposa sobre un soporte elástico, la ecuación diferencial de su deflexión es,

$$EI\frac{d^4Y}{dx^4} + kY = W(x)$$

donde k se llama la *constante elástica del soporte*. Supóngase que dicha viga, empotrada en sus extremos $x = 0$ y $x = l$, soporta una carga uniforme W_0 por unidad de longitud. Demostrar que el momento flector en $x = 0$ está dado por

$$\frac{W_0}{2a}\left(\frac{\operatorname{senh} al - \operatorname{sen} al}{\operatorname{senh} al + \operatorname{sen} al}\right)$$

donde $a = \sqrt[4]{k/4EI}$.

119. Dos circuitos eléctricos, llamados *primario* y *secundario*, están acoplados inductivamente como se muestra en la Fig. 3-21.

(*a*) Si M es la inductancia mutua, demostrar que las corrientes I_1 e I_2 están dadas por

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + R_1I_1 + M\frac{dI_2}{dt} = E$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + R_2I_2 + M\frac{dI_1}{dt} = 0$$

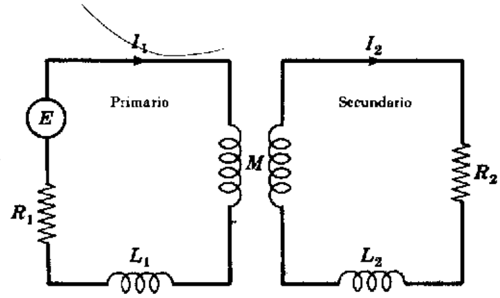


Fig. 3-21

(*b*) Si las corrientes I_1 e I_2 de los circuitos son nulas en el tiempo $t = 0$, demostrar que para cualquier tiempo $t > 0$ estarán dadas por

$$I_1 = \frac{EL_2}{L_1L_2 - M^2}\left(\frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) + \frac{ER_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\frac{e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1} - \frac{e^{\alpha_2 t}}{\alpha_2}\right) + \frac{E}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{EM}{L_1L_2 - M^2}\left(\frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)$$

donde α_1 y α_2 son las raíces de la ecuación

$$(L_1L_2 - M^2)\alpha^2 + (L_1R_2 + L_2R_1)\alpha + R_1R_2 = 0$$

120. Discutir el problema 119 en el caso $L_1L_2 = M^2$.

Capítulo 4

Aplicaciones a las ecuaciones integrales y de diferencias

ECUACIONES INTEGRALES

Ecuación integral es aquella que tiene la forma

$$Y(t) \quad = \quad F(t) \; + \; \int_a^b K(u,t)\, Y(u)\, du \tag{1}$$

donde $F(t)$ y $K(u, t)$ son conocidas, a y b son constantes dadas o funciones de t, y la función $Y(t)$ que aparece bajo el signo integral es la que se trata de determinar.

La función $K(u, t)$ se llama el *núcleo* de la ecuación integral. Si a, b, son constantes, la ecuación se llama *ecuación integral de Fredholm*. Si a es constante y $b = t$, se llama *ecuación integral de Volterra*.

Es posible transformar una ecuación diferencial lineal en una ecuación integral. Véanse los problemas 1-3 y 25.

ECUACIONES INTEGRALES DE TIPO CONVOLUTORIO

Una ecuación integral de singular importancia por sus aplicaciones es

$$Y(t) \quad = \quad F(t) \; + \; \int_0^t K(t-u)\, Y(u)\, du \tag{2}$$

Esta ecuación es de *tipo convolutorio* y puede escribirse como

$$Y(t) \quad = \quad F(t) \; + \; K(t) * Y(t)$$

Tomando la transformada de Laplace a ambos lados y suponiendo que existen $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ y $\mathcal{L}\{K(t)\} = k(s)$, encontramos que

$$y(s) \quad = \quad f(s) + k(s)\, y(s) \qquad \text{o} \qquad y(s) \; = \; \frac{f(s)}{1 - k(s)}$$

La solución requerida puede encontrarse tomando inversas. Véanse los problemas 5 y 6.

ECUACION INTEGRAL DE ABEL. PROBLEMA DE TAUTOCRONA

Una importante ecuación integral de tipo convultorio es la *ecuación integral de Abel.*

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^\alpha}\,du = G(t) \tag{3}$$

donde $G(t)$ es dada y α es una constante tal que $0 < \alpha < 1$.

Una de las aplicaciones de la ecuación integral de Abel es la de determinar la forma que debe tener un alambre sin rozamiento, en un plano vertical, para que una cuenta ensartada a él llegue a su punto más bajo en el mismo tiempo T independientemente del sitio del alambre en el cual se coloca la cuenta. Este problema se llama el problema de la *tautócrona* y, como se mostrará más adelante, la forma del alambre es la de una cicloide [véanse los problemas 7-9].

ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES

Ecuación integro-diferencial es aquella en la cual se presentan derivadas de la función incógnita $Y(t)$. Por ejemplo

$$Y''(t) = Y(t) + \operatorname{sen} t + \int_0^t \cos(t-u)\,Y(u)\,du \tag{4}$$

es una ecuación integro-diferencial. La solución de dichas ecuaciones, sometidas a condiciones iniciales dadas, frecuentemente puede obtenerse mediante transformadas de Laplace [véase el problema 10].

ECUACIONES DE DIFERENCIAS

Una ecuación que relaciona la función $Y(t)$ con una o más funciones $Y(t-\alpha)$, donde α es una constante, se llama una *ecuación de diferencias.*

Ejemplo. $Y(t) - 4\,Y(t-1) + 3\,Y(t-2) = t$ es una ecuación de diferencias.

En múltiples aplicaciones se puede formular una ecuación de diferencias de la cual pretendemos que la función incógnita $Y(t)$ resulte sometida a ciertas condiciones prescritas. La determinación de esta función, es decir la solución de la ecuación de diferencias, frecuentemente puede hacerse mediante el uso de la transformada de Laplace. Véase el problema 11.

Ciertas ecuaciones de diferencias en las cuales están relacionados los términos de la sucesión a_0, a_1, a_2, por ejemplo $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ donde $a_0 = 0$, y $a_1 = 1$, pueden resolverse mediante transformadas de Laplace. Véanse los problemas 18, 19 y 24.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE DIFERENCIAS

Una *ecuación diferencial de diferencias* es una ecuación de diferencias en la cual se presentan derivadas de la función $Y(t)$. Por ejemplo,

$$Y'(t) = Y(t-1) + 2t \tag{5}$$

es una ecuación diferencial de diferencias. Véase el problema 12.

Es posible encontrar también ecuaciones integro-diferenciales de diferencias, las cuales son ecuaciones diferenciales de diferencias en las cuales la función incógnita aparece bajo el signo integral.

Problemas resueltos

ECUACIONES INTEGRALES

1. Transformar la ecuación

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4\operatorname{sen} t, \qquad Y(0) = 1, \qquad Y'(0) = -2$$

en una ecuación integral.

Método 1.

Sea $Y''(t) = V(t)$. Usando el problema 23, Pág. 57, y las condiciones $Y'(0) = 2$ y $Y(0) = 1$,

$$Y'(t) = \int_0^t V(u)\,du - 2, \qquad Y(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du - 2t + 1$$

Así, la ecuación diferencial se convierte en

$$V(t) - 3\int_0^t V(u)\,du + 6 + 2\int_0^t (t-u)\,V(u)\,du - 4t + 2 = 4\operatorname{sen} t$$

de la cual obtenemos

$$V(t) = 4\operatorname{sen} t + 4t - 8 + \int_0^t \{3 - 2(t-u)\}\,V(u)\,du$$

Método 2.

Integrando los dos miembros de la ecuación diferencial obtenemos

$$\int_0^t \{Y''(u) - 3Y'(u) + 2Y(u)\}\,du = \int_0^t 4\operatorname{sen} u\,du$$

o sea

$$Y'(t) - Y'(0) - 3Y(t) + 3Y(0) + 2\int_0^t Y(u)\,du = 4 - 4\cos t$$

Utilizando las condiciones $Y'(0) = -2$ y $Y(0) = 1$,

$$Y'(t) - 3Y(t) + 2\int_0^t Y(u)\,du = -1 - 4\cos t$$

Integrando nuevamente de 0 a t obtenemos

$$Y(t) - Y(0) - 3\int_0^t Y(u)\,du + 2\int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du = -t - 4\operatorname{sen} t$$

o sea

$$Y(t) + \int_0^t \{2(t-u) - 3\}\,Y(u)\,du = 1 - t - 4\operatorname{sen} t$$

2. Convertir la ecuación diferencial

$$Y''(t) + (1-t)\,Y'(t) + e^{-t}\,Y(t) = t^3 - 5t, \qquad Y(0) = -3, \qquad Y'(0) = 4$$

en una ecuación integral.

Método 1.

Haciendo $Y''(t) = V(t)$ y usando $Y'(0) = 4$, $Y(0) = -3$ tenemos, como en el problema 1, método 1, que

$$Y'(t) = \int_0^t V(u)\,du + 4, \qquad Y(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + 4t - 3$$

Así, la ecuación diferencial se convierte en

$$V(t) + (1-t)\int_0^t V(u)\,du + 4(1-t) + e^{-t}\int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + 4t\,e^{-t} - 3e^{-t} = t^3 - 5t$$

que puede escribirse

$$V(t) = t^3 - t - 4 + 3e^{-t} - 4t\,e^{-t} + \int_0^t \{t - 1 - e^{-t}(t-u)\}\,V(u)\,du$$

Método 2.

Siguiendo el método 2 del problema, al integrar los dos miembros de la ecuación diferencial obtenemos

$$\int_0^t Y''(u)\,du + \int_0^t (1-u)\,Y'(u)\,du + \int_0^t e^{-u}\,Y(u)\,du = \int_0^t (u^3 - 5u)\,du$$

Integrando por partes la segunda integral encontramos que

$$Y'(t) - Y'(0) + \left\{(1-u)\,Y(u)\Big|_0^t + \int_0^t Y(u)\,du\right\} + \int_0^t e^{-u}\,Y(u)\,du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

es decir,

$$Y'(t) - Y'(0) + (1-t)\,Y(t) - Y(0) + \int_0^t Y(u)\,du + \int_0^t e^{-u}\,Y(u)\,du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

o sea $$Y'(t) + (1-t)\,Y(t) + \int_0^t Y(u)\,du + \int_0^t e^{-u}\,Y(u)\,du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2} + 1$$

Otra integración de 0 a t nos da

$$Y(t) - Y(0) + \int_0^t (1-u)\,Y(u)\,du + \int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du + \int_0^t (t-u)\,e^{-u}\,Y(u)\,du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t$$

lo cual puede escribirse como

$$Y(t) + \int_0^t \{1 + t - 2u + (t-u)\,e^{-u}\}\,Y(u)\,du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t - 3$$

3. Expresar como una ecuación integral la ecuación diferencial

$$Y^{\text{iv}}(t) - 4Y'''(t) + 6Y''(t) - 4Y'(t) + Y(t) = 3\cos 2t$$

bajo las condiciones $\quad Y(0) = -1,\ Y'(0) = 4,\ Y''(0) = 0,\ Y'''(0) = 2.$

Método 1.

Sea $Y^{\text{iv}}(t) = V(t)$. Entonces, como en los problemas 1 y 2,

$$Y'''(t) = \int_0^t V(u)\,du + 2, \qquad Y''(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + 2t$$

$$Y'(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!}\,V(u)\,du + t^2 + 4, \qquad Y(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^3}{3!}\,V(u)\,du + \frac{t^3}{3} + 4t - 1$$

Sustituyendo la ecuación diferencial dada, ésta se transforma en

$$V(t) \quad = \quad 25 \;-\; 16t \;+\; 4t^2 \;-\; \tfrac{1}{3}t^3 \;+\; 3\cos 2t \;+\; \int_0^t \{4 - 6(t-u) + 2(t-u)^2 - \tfrac{1}{6}(t-u)^3\}\, V(u)\, du$$

Método 2.

Integrando sucesivamente de 0 a t, como en los segundos métodos de los problemas 1 y 2, obtenemos la ecuación integral

$$Y(t) \;-\int_0^t \{4 - 6(t-u) + 2(t-u)^2 - \tfrac{1}{6}(t-u)^3\}\, Y(u)\, du \quad = \quad -\frac{19}{16} \;+\; 8t \;-\; \frac{85t^2}{8} \;+\; 5t^3 \;+\; \frac{3}{16}\cos 2t$$

Tanto esta ecuación integral como las obtenidas en los problemas 1 y 2 son *ecuaciones de Volterra*; los límites de integración son 0 y t. En general, este tipo de ecuación integral proviene de ecuaciones diferenciales lineales en las cuales las condiciones se establecen sobre un solo punto. El problema 25 es ejemplo de una *ecuación integral de Fredholm* que proviene de ecuaciones diferenciales lineales en las cuales se dan condiciones sobre dos puntos.

4. Convertir la ecuación integral

$$Y(t) \quad = \quad 3t \;-\; 4 \;-\; 2\,\mathrm{sen}\, t \;+\; \int_0^t \{(t-u)^2 - 3(t-u) + 2\}\, Y(u)\, du$$

en una ecuación diferencial.

Mediante la regla de Leibnitz,

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} K(u,t)\, du \quad = \quad \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K}{\partial t}\, du \;+\; K\{b(t),t\}\frac{db}{dt} \;-\; K\{a(t),t\}\frac{da}{dt} \tag{1}$$

Al derivar los dos miembros de la ecuación integral dada,

$$Y'(t) \quad = \quad 3 \;-\; 2\cos t \;+\; \int_0^t 2(t-u)\, Y(u)\, du \;-\; 3\int_0^t Y(u)\, du \;+\; 2Y(t) \tag{2}$$

Una nueva derivación da,

$$Y''(t) \quad = \quad 2\,\mathrm{sen}\, t \;+\; 2\int_0^t Y(u)\, du \;-\; 3Y(t) \;+\; 2Y'(t) \tag{3}$$

y una última derivación produce la ecuación diferencial requerida

$$Y'''(t) \quad = \quad 2\cos t \;+\; 2\,Y(t) \;-\; 3\,Y'(t) \;+\; 2\,Y''(t) \tag{4}$$

o

$$Y''' \;-\; 2Y'' \;+\; 3Y' \;-\; 2Y \quad = \quad 2\cos t$$

Al hacer $t = 0$ en la ecuación diferencial dada y en las ecuaciones (2) y (3), obtenemos las condiciones iniciales

$$Y(0) \;=\; -4, \quad Y'(0) \;=\; -7, \quad Y''(0) \;=\; -2$$

Nótese que las condiciones iniciales están contenidas en la ecuación integral.

Es posible convertir cualquier ecuación diferencial lineal en una ecuación integral. Sin embargo, no toda ecuación integral puede convertirse en una ecuación diferencial, por ejemplo,

$$Y(t) \quad = \quad \cos t \;+\; \int_0^t \ln(u+t)\, Y(u)\, du$$

ECUACIONES INTEGRALES DE TIPO CONVOLUTORIO

5. Resolver la ecuación integral $Y(t) = t^2 + \int_0^t Y(u) \operatorname{sen}(t-u)\,du$.

La ecuación integral puede expresarse en la forma

$$Y(t) = t^2 + Y(t) * \operatorname{sen} t$$

Tomando la transformada de Laplace y usando el teorema de la convolución encontramos que, si $y = \mathcal{L}\{Y\}$,

$$y = \frac{2}{s^3} + \frac{y}{s^2+1}$$

resolviendo, $$y = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

de manera que $$Y = 2\left(\frac{t^2}{2!}\right) + 2\left(\frac{t^4}{4!}\right) = t^2 + \frac{1}{12}t^4$$

Esto puede comprobarse mediante sustitución directa en la ecuación integral.

6. Resolver la ecuación integral $\int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du = 16 \operatorname{sen} 4t$.

Esta ecuación puede escribirse en la forma

$$Y(t) * Y(t) = 16 \operatorname{sen} 4t$$

Tomando la transformada de Laplace obtenemos

$$\{y(s)\}^2 = \frac{64}{s^2+16} \qquad \text{o} \qquad y(s) = \frac{\pm 8}{\sqrt{s^2+16}}$$

Entonces $$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \pm 8 J_0(4t)$$

Tanto $Y(t) = 8J_0(4t)$ como $Y(t) = -8J_0(4t)$ son soluciones.

ECUACION INTEGRAL DE ABEL. PROBLEMA DE LA TAUTOCRONA

7. Resolver $\int_0^t \frac{Y(u)}{\sqrt{t-u}}\,du = 1 + t + t^2$.

La ecuación puede expresarse como

$$Y(t) * t^{-1/2} = 1 + t + t^2$$

Tomando la transformada de Laplace encontramos que

$$\mathcal{L}\{Y\}\,\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \mathcal{L}\{1+t+t^2\}$$

o $$\frac{y\,\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

y $$y = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left\{\frac{1}{s^{1/2}} + \frac{1}{s^{3/2}} + \frac{2}{s^{5/2}}\right\}$$

Invirtiendo,
$$Y = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left\{\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + \frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \frac{2t^{3/2}}{\Gamma(5/2)}\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}(t^{-1/2} + 2t^{1/2} + \tfrac{8}{3}t^{3/2}) = \frac{t^{-1/2}}{3\pi}(3 + 6t + 8t^2)$$

Esta ecuación integral es un caso particular de la *ecuación integral de Abel.*

8. Una cuenta está condicionada a moverse sobre un alambre sin rozamiento el cual está en un plano vertical. Si la partícula parte del reposo desde cualquier punto del alambre y cae por la influencia de la gravedad, encontrar el tiempo de descenso hasta el punto más bajo del alambre.

Supóngase que la cuenta tiene una masa m y parte del reposo desde el punto P de coordenadas (u, v), como se muestra en la Fig. 4-1. Sea Q, de coordenadas (x, y), un punto intermedio del alambre y supongamos que el origen O es el punto más bajo del alambre. Sea σ la longitud del arco OQ. Del principio de la conservación de energía tenemos:

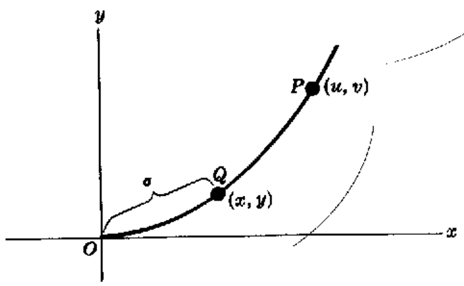


Fig. 4-1

Energía potencial en P + Energía cinética en P = Energía potencial en Q + Energía cinética en Q.
$$\tfrac{1}{2}mgv + 0 = \tfrac{1}{2}mgy + \tfrac{1}{2}m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$$

donde $d\sigma/dt$ es la rapidez instantánea de la partícula en Q. Entonces
$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2g(v-y)$$

utilizando el hecho de que σ decrece cuando t crece,
$$\frac{d\sigma}{dt} = -\sqrt{2g(v-y)} \tag{1}$$

El tiempo total empleado por la cuenta para ir desde P hasta O está dado por
$$T = \int_0^T dt = \int_v^0 \frac{-d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}} = \int_0^v \frac{d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}} \tag{2}$$

Cuando se da la forma de la curva, la longitud del arco puede expresarse en función de y y encontramos que
$$d\sigma = F(y)\,dy \tag{3}$$

De esta manera (2) se transforma en
$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^v \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{v-y}} \tag{4}$$

En general, T es función de v, es decir, del punto de partida.

9. Hallar la forma que debe tener el alambre del problema 8 para que el tiempo en alcanzar el punto más bajo sea constante, es decir, independiente del punto de partida.

En este caso tenemos que hallar $F(y)$ tal que
$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^v \frac{F(y)}{\sqrt{v-y}}\,dy \tag{1}$$

donde T es una constante. Esta ecuación integral de tipo convolutorio es un caso particular de la *ecuación integral de Abel* [véase la Pág. 113] y puede escribirse

$$\sqrt{2g}\,T \quad = \quad F(y) * y^{-1/2} \tag{2}$$

Tomando la transformada de Laplace y considerando que $\mathcal{L}\{F(y)\} = f(s)$, $\mathcal{L}\{y^{-1/2}\} = \Gamma(\frac{1}{2})/s^{1/2} = \sqrt{\pi}/s^{1/2}$, tenemos

$$\frac{\sqrt{2g}\,T}{s} \quad = \quad f(s)\,\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} \qquad \text{o} \qquad f(s) \quad = \quad \frac{T\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}\,s^{1/2}}$$

La transformada inversa de Laplace está dada por

$$F(y) \quad = \quad \frac{T\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}\right\} \quad = \quad \frac{T\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{y^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} \quad = \quad \frac{T\sqrt{2g}}{\pi}\,y^{-1/2}\,.$$

Como
$$\frac{d\sigma}{dy} \quad = \quad \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy} \quad = \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

tenemos que
$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad = \quad \frac{T\sqrt{2g}}{\pi}\,y^{-1/2} \tag{3}$$

Si hacemos
$$\sqrt{b} \;=\; \frac{T\sqrt{2g}}{\pi} \qquad \text{o} \qquad b \;=\; \frac{2gT^2}{\pi^2} \tag{4}$$

(3) se puede escribir como $1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = \dfrac{b}{y}$ o $\dfrac{dx}{dy} = \sqrt{\dfrac{b-y}{y}}$

puesto que la pendiente debe ser positiva. Al integrar deducimos que

$$x \quad = \quad \int \sqrt{\frac{b-y}{y}}\,dy \;+\; c \tag{5}$$

Haciendo $y = b\,\operatorname{sen}^2\theta$ esta fórmula puede escribirse

$$\begin{aligned} x \quad &= \quad \int \sqrt{\frac{b\cos^2\theta}{b\operatorname{sen}^2\theta}} \cdot 2b\,\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta \;+\; c \\ &= \quad 2b\int \cos^2\theta\,d\theta \;+\; c \quad = \quad b\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta \;+\; c \quad = \quad \frac{b}{2}(2\theta + \operatorname{sen} 2\theta) \;+\; c \end{aligned}$$

Así, las condiciones paramétricas de la curva requerida son

$$x \;=\; \frac{b}{2}(2\theta + \operatorname{sen} 2\theta) + c, \qquad y \;=\; b\operatorname{sen}^2\theta \;=\; \frac{b}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Como la curva debe pasar por el punto $x = 0$, $y = 0$, deducimos que $c = 0$. Entonces, haciendo

$$a = \frac{b}{2} = \frac{gT^2}{\pi^2} \qquad \text{y} \qquad \phi \;=\; 2\theta$$

las ecuaciones paramétricas son

$$x \;=\; a(\phi + \operatorname{sen}\phi), \qquad y \;=\; a(1 - \cos\phi)$$

Esta es la ecuación paramétrica de una cicloide [véase la Fig. 4-2]. Para una constante dada T, el alambre tiene la forma de la curva que se muestra en la figura. La cicloide es el lugar geométrico de un punto fijo de una circunferencia que rueda sobre una recta dada [véase el problema 44].

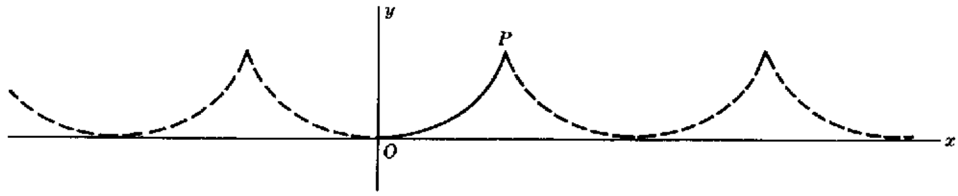


Fig. 4-2

ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES

10. Resolver $Y'(t) + 5\int_0^t \cos 2(t-u)\, Y(u)\, du = 10$ si $Y(0) = 2$.

Esta ecuación puede escribirse

$$Y'(t) + 5 \cos 2t * Y(t) = 10$$

Tomando la transformada de Laplace encontramos que

$$sy - Y(0) + \frac{5sy}{s^2+4} = \frac{10}{s}$$

o sea que
$$y = \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2+9)}$$

Entonces, por el problema 44, Pág. 67,

$$Y = \frac{1}{27}(24 + 120t + 30 \cos 3t + 50 \operatorname{sen} 3t)$$

Nótese que al integrar de 0 a t y al usar la condición $Y(0) = 2$, la ecuación integro-diferencial puede convertirse en la ecuación integral

$$Y(t) + 5\int_0^t (t-u) \cos 2(t-u)\, Y(u)\, du = 10t + 2$$

ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE DIFERENCIAS

11. Resolver $3Y(t) - 4Y(t-1) + Y(t-2) = t$ si $Y(t) = 0$ para $t < 0$.

Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros obtenemos

$$3\mathcal{L}\{Y(t)\} - 4\mathcal{L}\{Y(t-1)\} + \mathcal{L}\{Y(t-2)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \tag{1}$$

Ahora,
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y(t-1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, Y(t-1)\, dt \\
&= \int_{-1}^\infty e^{-s(u+1)}\, Y(u)\, du \qquad [\text{haciendo } t = u + 1] \\
&= e^{-s}\int_{-1}^0 e^{-su}\, Y(u)\, du + e^{-s}\int_0^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du \\
&= e^{-s} y
\end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y(t-2)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,Y(t-2)\,dt \\
&= \int_2^\infty e^{-s(u+2)}\,Y(u)\,du \qquad [\text{haciendo } t = u+2] \\
&= e^{-2s}\int_{-2}^{0} e^{-su}\,Y(u)\,du + e^{-2s}\int_0^\infty e^{-su}\,Y(u)\,du \\
&= e^{-2s}\,y
\end{aligned}$$

Como $Y(u) = 0$ cuando $u < 0$, tendremos que

$$\int_{1}^{0} e^{-su}\,Y(u)\,du = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-2}^{0} e^{-su}\,Y(u)\,du = 0$$

Entonces (1) se transforma en $\quad 3y - 4e^{-s}y + e^{-2s}y = \dfrac{1}{s^2}$

y, además,
$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{s^2(3-4e^{-s}+e^{-2s})} = \frac{1}{s^2(1-e^{-s})(3-e^{-s})} \\
&= \frac{1}{2s^2}\left\{\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3-e^{-s}}\right\} \\
&= \frac{1}{2s^2}\left\{\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3(1-e^{-s}/3)}\right\} \\
&= \frac{1}{2s^2}\left\{(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots) - \frac{1}{3}\left(1+\frac{e^{-s}}{3}+\frac{e^{-2s}}{3^2}+\frac{e^{-3s}}{3^3}+\cdots\right)\right\} \\
&= \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\frac{e^{-ns}}{s^2}
\end{aligned}$$

Entonces
$$Y = \frac{t}{3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{[t]}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)(t-n)$$

donde $[t]$ es el mayor entero menor o igual a t.

12. Resolver $Y'(t) + Y(t-1) = t^2$ si $Y(t) = 0$ para $t \leqq 0$.

Tomando la transformada de Laplace en los dos miembros obtenemos

$$\mathcal{L}\{Y'(t)\} + \mathcal{L}\{Y(t-1)\} = 2/s^3 \tag{1}$$

Ahora,
$$\mathcal{L}\{Y'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{Y\} - Y(0) = sy - 0 = sy$$

y
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y(t-1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,Y(t-1)\,dt \\
&= \int_1^\infty e^{-s(u+1)}\,Y(u)\,du \qquad [\text{haciendo } t = u+1] \\
&= e^{-s}\int_{-1}^{0} e^{-su}\,Y(u)\,du + e^{-s}\int_0^\infty e^{-su}\,Y(u)\,du \\
&= e^{-s}\,y
\end{aligned}$$

como $Y(u) = 0$ para $u \leqq 0$, tenemos que $\int_{-1}^{0} e^{-su}\, Y(u)\, du = 0$. Entonces *(1)* puede escribirse

$$sy + e^{-s}y = \frac{2}{s^3} \qquad \text{o} \qquad y = \frac{2}{s^3(s+e^{-s})}$$

Desarrollando en serie, tendremos que

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{s^3(s+e^{-s})} = \frac{2}{s^4(1+e^{-s}/s)} \\ &= \frac{2}{s^4}\left(1 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{2}{s^4} - \frac{2e^{-s}}{s^5} + \frac{2e^{-2s}}{s^6} - \frac{2e^{-3s}}{s^7} + \cdots \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}} \end{aligned}$$

Ahora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}\right\} = \begin{cases} \dfrac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} & t \geqq n \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Así, si $[t]$ denota el mayor entero menor o igual a t, encontramos que

$$Y(t) = 2\sum_{n=0}^{[t]} \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} \tag{2}$$

13. En el problema 12 hallar *(a)* $Y(4)$, *(b)* $Y(\pi)$.

(a) Como $[4] = 4$, tenemos que

$$Y(4) = 2\sum_{n=0}^{4} \frac{(4-n)^{n+3}}{(n+3)!} = 2\left\{\frac{4^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{1^6}{6!}\right\} = 28{,}62 (\text{aprox.})$$

(b) Como $[\pi] = 3$, tenemos que

$$Y(\pi) = 2\sum_{n=0}^{3} \frac{(\pi-n)^{n+3}}{(n+3)!} = 2\left\{\frac{\pi^3}{3!} + \frac{(\pi-1)^4}{4!} + \frac{(\pi-2)^5}{5!} + \frac{(\pi-3)^6}{6!}\right\} = 12{,}12 \ (\text{aprox.})$$

14. Si $F(t) = r^n$ para $n \leqq t < n+1$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, calcular $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt \\ &= \int_0^1 e^{-st} r^0\, dt + \int_1^2 e^{-st} r^1\, dt + \int_2^3 e^{-st} r^2\, dt + \cdots \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s} + r\left(\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\right) + r^2\left(\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}\right) + \cdots \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}(1 + re^{-s} + r^2e^{-2s} + \cdots) \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1-re^{-s}} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})} \end{aligned}$$

15. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$.

Por el problema 14 tenemos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = F(t) = r^n$ para $n \leqq t < n+1$.

Otro método.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})} &= \frac{1-e^{-s}}{s}\cdot\frac{1}{1-re^{-s}} \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}(1+re^{-s}+r^2e^{-2s}+\cdots) \\ &= \int_0^1 e^{-st}r^0\,dt + \int_1^2 e^{-st}r^1\,dt + \int_2^3 e^{-st}r^2\,dt + \cdots \\ &= \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt \end{aligned}$$

donde $F(t) = r^n$ para $n \leqq t < n+1$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

16. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$.

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces, por el *teorema 2-4*, Pág. 44,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}f(s)\} = \begin{cases} F(t-1) & t>1 \\ 0 & t<1 \end{cases}$$

Así, por el problema 15,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = F(t-1) = r^n \quad \text{para} \quad n \leqq t-1 < n+1,\ n = 0,1,2,3,\ldots$$

o, en forma equivalente

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = r^{n-1} \quad \text{para} \quad n \leqq t < n+1,\ n = 1,2,3,\ldots$$

17. Sea $Y(t) = a_n$ para $n \leqq t < n+1$ donde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Calcular (*a*) $\mathcal{L}\{Y(t+1)\}$ y (*b*) $\mathcal{L}\{Y(t+2)\}$ en función de $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$.

(*a*) Haciendo $t+1 = u$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{Y(t+1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,Y(t+1)\,dt = e^s\int_1^\infty e^{-su}\,Y(u)\,du \\ &= e^s\int_0^\infty e^{-su}\,Y(u)\,du - e^s\int_0^1 e^{-su}\,Y(u)\,du \\ &= e^s y(s) - e^s\int_0^1 e^{-su}a_0\,du = e^s y(s) - \frac{a_0\,e^s(1-e^{-s})}{s} \end{aligned}$$

usando el hecho de que $Y(t) = a_0$ para $0 \leqq t < 1$.

(*b*) Haciendo $t + 2 = u$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y(t+2)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, Y(t+2)\, dt \\
&= e^{2s}\int_2^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du \\
&= e^{2s}\left\{\int_0^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du - \int_0^1 e^{-su}\, Y(u)\, du - \int_1^2 e^{-su}\, Y(u)\, du\right\} \\
&= e^{2s}\, y(s) - e^{2s}\int_0^1 e^{-su}\, a_0\, du - e^{2s}\int_1^2 e^{-su}\, a_1\, du \\
&= e^{2s}\, y(s) - \frac{a_0\, e^{2s}(1-e^{-s})}{s} - \frac{a_1\, e^{2s}(e^{-s}-e^{-2s})}{s} \\
&= e^{2s}\, y(s) - \frac{e^{s}(1-e^{-s})(a_0 e^{s} + a_1)}{s}
\end{aligned}$$

usando el hecho de que $Y(t) = a_0$ para $0 \leqq t < 1$ y que $Y(t) = a_1$ para $1 \leqq t < 2$.

18. Supongamos que $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, denota la sucesión de términos constantes definidos en *forma recursiva* por la ecuación de diferencias

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

Hallar una fórmula para a_n, es decir, resolver la ecuación de diferencias para a_n.

Definamos la función

$$Y(t) = a_n, \qquad n \leqq t < n+1 \qquad \text{donde } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces la fórmula recursiva se transforma en

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) + 6Y(t) = 0 \tag{1}$$

Tomando la transformada de Laplace en (*1*) y usando los resultados del problema 17 en los casos $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ encontramos que

$$e^{2s}\, y(s) - \frac{e^{s}(1-e^{-s})}{s} - 5e^{s}\, y(s) + 6y(s) = 0$$

o sea

$$(e^{2s} - 5e^{s} + 6)\, y(s) = \frac{e^{s}(1-e^{-s})}{s}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
y(s) &= \frac{e^{s}(1-e^{-s})}{s(e^{2s}-5e^{s}+6)} = \frac{e^{s}(1-e^{-s})}{s}\left\{\frac{1}{(e^{s}-3)(e^{s}-2)}\right\} \\
&= \frac{e^{s}(1-e^{-s})}{s}\left\{\frac{1}{e^{s}-3} - \frac{1}{e^{s}-2}\right\} = \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}}\right\}
\end{aligned}$$

Al invertir, por el problema 15, encontramos que

$$a_n = 3^n - 2^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Comprobación: Si $a_n = 3^n - 2^n$, entonces $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Además,

$$\begin{aligned}
a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n &= (3^{n+2} - 2^{n+2}) - 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) + 6(3^n - 2^n) \\
&= 9\cdot 3^n - 4\cdot 2^n - 15\cdot 3^n + 10\cdot 2^n + 6\cdot 3^n - 6\cdot 2^n = 0
\end{aligned}$$

19. Resolver la ecuación de diferencias

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4^n, \qquad a_0 = 0, \ a_1 = 1$$

La única diferencia entre este problema y el 18 es la presencia del término 4^n en el miembro derecho. Escribimos la ecuación en la forma

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) + 6Y(t) = F(t) \tag{1}$$

donde $Y(t) = a_n$, $F(t) = 4^n$ para $n \leqq t < n+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Tomando la transformada de Laplace en los dos miembros de (1), si encontramos que $y(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\}$,

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s}{s}(1-e^{-s}) - 5e^s y(s) + 6y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-4e^{-s})}$$

Luego

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^s-2)(e^s-3)} + \frac{1-e^{-s}}{s(e^s-2)(e^s-3)(1-4e^{-s})} \\ &= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}\left\{\frac{1}{e^s-3} - \frac{1}{e^s-2}\right\} + \frac{e^s-1}{s(e^s-2)(e^s-3)(e^s-4)} \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}}\right\} + \frac{e^s-1}{s}\left\{\frac{1/2}{e^s-2} - \frac{1}{e^s-3} + \frac{1/2}{e^s-4}\right\} \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}}\right\} + \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1/2}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-3e^{-s}} + \frac{1/2}{1-4e^{-s}}\right\} \end{aligned}$$

Entonces invirtiendo y usando los resultados del problema 15 encontramos que

$$\begin{aligned} Y(t) = a_n &= 3^n - 2^n + \tfrac{1}{2}\cdot 2^n - 3^n + \tfrac{1}{2}\cdot 4^n \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 4^n - \tfrac{1}{2}\cdot 2^n = \tfrac{1}{2}(4^n - 2^n) \end{aligned} \tag{2}$$

20. Hallar a_5 en el problema 19.

Método 1. De la solución (2) del problema 19 tenemos:

$$a_5 = \tfrac{1}{2}(4^5 - 2^5) = 496$$

Método 2. De la ecuación diferencial dada en el problema 19 tenemos que, para $n = 0$,

$$a_2 - 5a_1 + 6a_0 = 1$$

como $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$$a_2 = 1 + 5a_1 - 6a_0 = 6$$

Si $n = 1$, $a_3 - 5a_2 + 6a_1 = 4$ de manera que

$$a_3 = 4 + 5a_2 - 6a_1 = 28$$

Si $n = 2$, $a_4 - 5a_3 + 6a_2 = 16$ o sea

$$a_4 = 16 + 5a_3 - 6a_2 = 16 + 5(28) - 6(6) = 120$$

Finalmente, si $n = 3$, $a_5 - 5a_4 + 6a_3 = 64$, de modo que

$$a_5 = 64 + 5a_4 - 6a_3 = 64 + 5(120) - 6(28) = 496$$

PROBLEMAS VARIOS

21. Resolver la ecuación integral

$$Y(t) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \int_0^t Y(u)\, Y(t-u)\, du$$

Esta ecuación se puede expresar en la forma

$$Y(t) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + Y(t) * Y(t)$$

Tomando la transformada de Laplace y usando el teorema de la convolución encontramos que

$$y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \{y(s)\}^2 \qquad \text{o} \qquad \{y(s)\}^2 - y(s) + \frac{1}{s^2+4} = 0$$

Resolviendo obtenemos

$$y(s) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{s^2+4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

Así,

$$y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}+s}{\sqrt{s^2+4}}\right) \tag{1}$$

y

$$y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right) \tag{2}$$

Mediante (2) hallamos la solución

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right)\right\} = J_1(2t) \tag{3}$$

El resultado (1) puede expresarse como

$$y(s) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}} - 2\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right)$$

De manera que una segunda solución será

$$Y(t) = \delta(t) - J_1(2t) \tag{4}$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

La solución (3) es continua y acotada para $t \geqq 0$.

22. Calcular $\mathcal{L}\{F(t)\}$ si $F(t) = n,\ n \leqq t < n+1,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \\
&= \int_0^1 e^{-st}(0)\, dt + \int_1^2 e^{-st}(1)\, dt + \int_2^3 e^{-st}(2)\, dt + \cdots \\
&= (1)\left(\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\right) + (2)\left(\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}\right) + (3)\left(\frac{e^{-3s}-e^{-4s}}{s}\right) + \cdots \\
&= \frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s}(1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + 4e^{-3s} + \cdots)
\end{aligned}$$

Ahora, como para $|x| < 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

al derivar tenemos que

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Si $x = e^{-s}$,

$$1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + \cdots = \frac{1}{(1-e^{-s})^2}$$

De manera que

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

23. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$ en los casos (*a*) $r \neq 1$, (*b*) $r = 1$.

(*a*) Por la fórmula del binomio,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})} &= \frac{e^{-s}}{s}(1 + re^{-s} + r^2e^{-2s} + \cdots) \\ &= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{re^{-2s}}{s} + \frac{r^2e^{-3s}}{s} + \cdots \\ &= \mathcal{U}(t-1) + r\,\mathcal{U}(t-2) + r^2\,\mathcal{U}(t-3) + \cdots \end{aligned}$$

Así

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = F(t) = \sum_{k=1}^{[t]} r^k \tag{1}$$

si $t \geqq 1$, y toma el valor 0 si $t < 1$.

Si $n \leqq t < n+1$, en el caso en que $r \neq 1$, (*1*) toma la forma

$$r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r(r^n - 1)}{r-1} \tag{2}$$

(*b*) Si $r = 1$ encontramos que $F(t) = n$, $n \leqq t < n+1$. Esto coincide con el problema 22.

24. Resolver la ecuación de diferencias

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 16n, \qquad a_0 = 6,\ a_1 = 2$$

La ecuación dada se puede escribir

$$Y(t+2) - 7Y(t+1) + 10Y(t) = F(t) \tag{1}$$

donde $Y(t) = a$, $F(t) = 16n$ para $n \leqq t < n+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Usando los problemas 17 y 22 encontramos que la transformada de Laplace de (*1*) es

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})(6e^s+2)}{s} - 7e^s y(s) + \frac{42e^s(1-e^{-s})}{s} + 10y(s) = \frac{16e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

$$\text{Entonces} \quad y(s) \;=\; \frac{e^s(1-e^{-s})(6e^s+2)}{s(e^s-5)(e^s-2)} - \frac{42e^s(1-e^{-s})}{s(e^s-5)(e^s-2)} + \frac{16e^{-s}}{s(1-e^{-s})(e^s-5)(e^s-2)}$$

$$= \; e^s\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{6e^s+2}{(e^s-5)(e^s-2)}\right\}$$

$$- \; 42\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{e^s}{(e^s-5)(e^s-2)}\right\}$$

$$+ \; \frac{16}{s}\left\{\frac{1}{(e^s-1)(e^s-5)(e^s-2)}\right\}$$

$$= \; e^s\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{32/3}{e^s-5} - \frac{14/3}{e^s-2}\right\}$$

$$- \; 42\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{5/3}{e^s-5} - \frac{2/3}{e^s-2}\right\}$$

$$+ \; \frac{1}{s}\left\{\frac{4}{e^s-1} + \frac{4/3}{e^s-5} - \frac{16/3}{e^s-2}\right\}$$

$$= \; \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{32/3}{1-5e^{-s}} - \frac{14/3}{1-2e^{-s}}\right\}$$

$$- \; \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{70e^{-s}}{1-5e^{-s}} - \frac{28e^{-s}}{1-2e^{-s}}\right\}$$

$$+ \; \frac{1}{s}\left\{\frac{4e^{-s}}{1-e^{-s}} + \frac{(4/3)e^{-s}}{1-5e^{-s}} - \frac{(16/3)e^{-s}}{1-2e^{-s}}\right\}$$

Ahora mediante los problemas 14 y 22 encontramos que para $n \geqq 1$ se tiene que

$$a_n \;=\; \frac{32}{3}\cdot 5^n - \frac{14}{3}\cdot 2^n - 70\cdot 5^{n-1} + 28\cdot 2^{n-1} + 4(n-1) + \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}(5^n-1) - \frac{16}{3}\cdot\frac{2}{1}(2^n-1)$$

$$= \; 4\cdot 2^n - 3\cdot 5^n + 4n + 5$$

25. Si λ es una constante, expresar la ecuación diferencial

$$Y''(t) + \lambda\, Y(t) \;=\; 0, \qquad Y(0)=0,\;\; Y(1)=0$$

como una ecuación integral.

Método 1.

Sea $Y''(t) = V(t)$; si $Y'(0) = c$ encontramos que

$$Y'(t) \;=\; \int_0^t V(u)\,du + c, \qquad Y(t) \;=\; \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + ct \tag{1}$$

Como $Y(1) = 0$, tendremos que

$$\int_0^1 (1-u)\,V(u)\,du + c \;=\; 0 \qquad \text{o} \qquad c \;=\; \int_0^1 (u-1)\,V(u)\,du$$

Mediante (*1*),

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t (t-u)\, V(u)\, du + \int_0^1 (tu-t)\, V(u)\, du \\ &= \int_0^t (t-u)\, V(u)\, du + \int_0^t (tu-t)\, V(u)\, du + \int_t^1 (tu-t)\, V(u)\, du \\ &= \int_0^t (t-1)\, u\, V(u)\, du + \int_t^1 (u-1)\, t\, V(u)\, du \end{aligned}$$

Lo cual puede exponerse $\quad Y(t) = \int_0^1 K(t,u)\, V(u)\, du$

donde $K(t,u) = \begin{cases} (t-1)\,u & u < t \\ (u-1)\,t & u > t \end{cases}$. [Nótese que $K(t,u) = K(u,t)$, es decir, que $K(t,u)$ es *simétrico*].

Así, la ecuación integral requerida es

$$V(t) + \lambda \int_0^1 K(t,u)\, V(u)\, du = 0$$

o sea

$$V(t) = -\lambda \int_0^1 K(t,u)\, V(u)\, du$$

Método 2.

Integrando los dos miembros de la ecuación diferencial dada, entre 0 y t, encontramos que

$$Y'(t) - Y'(0) + \lambda \int_0^t Y(u)\, du = 0$$

Otra integración entre 0 y t nos da

$$Y(t) - Y(0) - Y'(0)t + \lambda \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du = 0 \tag{1}$$

Como $Y(0) = 0$, (*1*) será

$$Y(t) = Y'(0)t - \lambda \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du \tag{2}$$

Haciendo $t = 1$ y usando el hecho de que $Y(1) = 0$, de (2) deducimos que

$$Y'(0) = \lambda \int_0^1 (1-u)\, Y(u)\, du$$

Así, (2) se transforma en

$$\begin{aligned} Y(t) &= \lambda \int_0^1 (t-tu)\, Y(u)\, du - \lambda \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du \\ &= \lambda \int_0^t (t-tu)\, Y(u)\, du + \lambda \int_t^1 (t-tu)\, Y(u)\, du - \lambda \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du \\ &= \lambda \int_0^t u(1-t)\, Y(u)\, du + \lambda \int_t^1 t(1-u)\, Y(u)\, du \\ &= -\lambda \int_0^1 K(t,u)\, Y(u)\, du \end{aligned}$$

donde $K(t,u) = \begin{cases} (t-1)\,u & u < t \\ (u-1)\,t & u > t \end{cases}$

Las ecuaciones integrales que hemos obtenido son ejemplos de la *ecuación integral de Fredholm* con núcleo simétrico.

Problemas propuestos

ECUACIONES INTEGRALES

Convertir cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales en una ecuación integral.

26. $Y''(t) + 2Y'(t) - 8Y(t) = 5t^2 - 3t, \quad Y(0) = -2, \ Y'(0) = 3.$

Resp. $V(t) + \int_0^t (2 - 8t + 8u)\, V(u)\, du = 5t^2 + 21t - 22, \quad V(t) = Y''(t)$

o $Y(t) + \int_0^t (2 - 8t + 8u)\, Y(u)\, du = -2 - t + 5t^4/12 - t^3$

27. $2Y''(t) - 3Y'(t) - 2Y(t) = 4e^{-t} + 2\cos t, \quad Y(0) = 4, \ Y'(0) = -1.$

Resp. $2V(t) + \int_0^t (2u - 2t - 3)\, V(u)\, du = 4e^{-t} + 2\cos t + 5 - 2t, \quad V(t) = Y''(t)$

o $2Y(t) + \int_0^t (2u - 2t - 3)\, Y(u)\, du = 6 - 10t + 4e^{-t} - 2\cos t$

28. $Y'''(t) + 8Y(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t + 2\cos t, \quad Y(0) = 0, \ Y'(0) = -1, \ Y''(0) = 2.$

Resp. $V(t) + 4\int_0^t (t-u)^2\, V(u)\, du = 3\,\mathrm{sen}\, t + 2\cos t - 4t^2 + 4t, \quad V(t) = Y'''(t)$

o $Y(t) + 4\int_0^t (t-u)^2\, Y(u)\, du = 5t^2/2 + t - 3 + 3\cos t - 2\,\mathrm{sen}\, t$

29. $Y''(t) + \cos t\, Y(t) = e^{-t}, \quad Y(0) = -2, \ Y'(0) = 0.$

Resp. $V(t) + \int_0^t (t-u)\cos t\, V(u)\, du = e^{-t} + 2\cos t, \quad V(t) = Y''(t)$

o $Y(t) + \int_0^t (t-u)\cos u\, Y(u)\, du = t - 3 + e^{-t}$

30. $Y''(t) - t\,Y'(t) + t^2\,Y(t) = 1 + t, \quad Y(0) = 4, \ Y'(0) = 2.$

Resp. $V(t) + \int_0^t (t^3 - t - ut^2)\, V(u)\, du = 1 + 3t - 4t^2 - 2t^3, \quad V(t) = Y''(t)$

o $Y(t) - \int_0^t (t - 2u + tu^2 - u^3)\, Y(u)\, du = t^2/2 + t^3/6 + 2t + 4$

31. $Y^{\text{iv}}(t) - 2t\,Y''(t) + (1 - t^2)\,Y(t) = 1 + 4t - 2t^2 + t^4, \quad Y(0) = 1, \ Y'(0) = 0, \ Y''(0) = -2, \ Y'''(0) = 0.$

Resp. $V(t) + \int_0^t \{\tfrac{1}{6}(t-u)^3(1-t^2) - 2t(t-u)\}\, V(u)\, du = 0, \quad V(t) = Y^{\text{iv}}(t)$

o $$Y(t) - \int_0^t \{2u(t-u) + 2(t-u)^2 + \tfrac{1}{6}(t-u)^3(1-u^2)\}\, Y(u)\, du = 1 - t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{180} + \frac{t^8}{1680}$$

Convertir cada una de las siguientes ecuaciones integrales en una ecuación diferencial con condiciones asociadas.

32. $Y(t) = 5\cos t + \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du$

Resp. $Y''(t) - Y(t) = -5\,\mathrm{sen}\, t, \quad Y(0) = 5, \ Y'(0) = 0$

33. $Y(t) \;=\; t^2 - 3t + 4 - 3\int_0^t (t-u)^2\, Y(u)\, du$

Resp. $Y'''(t) + 6\,Y(t) \;=\; 0, \quad Y(0) = 4,\; Y'(0) = -3,\; Y''(0) = 2$

34. $Y(t) + \int_0^t \{(t-u)^2 + 4(t-u) - 3\}\, Y(u)\, du \;=\; e^{-t}$

Resp. $Y'''(t) - 3\,Y''(t) + 4\,Y'(t) + 2\,Y(t) \;=\; -e^{-t},\; Y(0) = 1,\; Y'(0) = 2,\; Y''(0) = 3$

35. $Y(t) - \int_0^t (t-u) \sec t\, Y(u)\, du \;=\; t$

Resp. $Y''(t) - 2\tan t\, Y'(t) - (1 + \sec t)\, Y(t) \;=\; -t - 2\tan t, \qquad Y(0) = 0,\; Y'(0) = 1$

36. $Y(t) + \int_0^t (t^2 + 4t - ut - u - 2)\, Y(u)\, du \;=\; 0$

Resp. $Y'''(t) + (3t-2)\, Y''(t) + (t+10)\, Y'(t) + Y(t) \;=\; 0, \qquad Y(0) = 0,\; Y'(0) = 0,\; Y''(0) = 0$

ECUACIONES INTEGRALES DE TIPO CONVOLUTORIO

37. Resolver $Y(t) \;=\; t + 2\int_0^t \cos(t-u)\, Y(u)\, du$.

Resp. $Y(t) \;=\; t + 2 + 2(t-1)e^t$

38. (*a*) Demostrar que la ecuación integral

$$Y(t) \;=\; t + \tfrac{1}{6}\int_0^t (t-u)^3\, Y(u)\, du$$

tiene como solución $Y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t + \operatorname{senh} t)$.

(*b*) ¿La solución obtenida en (*a*) es única? Explicar.

39. Hallar la solución continua de la ecuación diferencial $\int_0^t Y(u)\, Y(t-u)\, du \;=\; 2\,Y(t) + t - 2$.

Resp. $Y(t) = 1$

40. Demostrar que la única solución de la ecuación integral $\int_0^t Y(u) \operatorname{sen}(t-u)\, du = Y(t)$ es la *trivial* $Y(t) = 0$.

41. Discutir las soluciones de la ecuación integral $\int_0^t Y(u)\, G(t-u)\, du \;=\; Y(t)$.

ECUACION INTEGRAL DE ABEL Y PROBLEMA DE LA TAUTOCRONA

42. Resolver la ecuación integral $\int_0^t \dfrac{Y(u)}{\sqrt{t-u}}\, du \;=\; \sqrt{t}$. *Resp.* $Y(t) = \frac{1}{2}$

43. Demostrar que la solución de la ecuación integral $\int_0^t \dfrac{Y(u)}{(t-u)^{1/3}}\, du \;=\; t(1+t)$ es $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\, t^{1/3}(3t+2)$.

44. Una circunferencia de radio a [Fig. 4-3] rueda sobre el eje x. Demostrar que un punto fijo O' de dicha circunferencia, originalmente en contacto con la recta en O, describe la cicloide

$$x = a(\phi - \operatorname{sen}\phi), \quad y = a(1 - \cos\phi)$$

que se muestra a trazos en la Fig. 4-3.

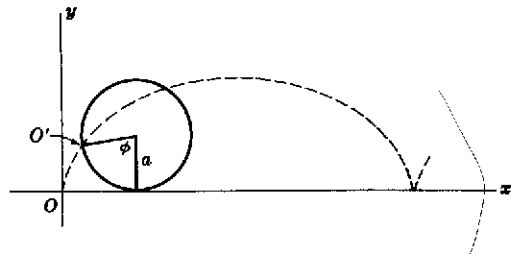


Fig. 4-3

45. Demostrar que la curva del problema de la tautócrona, Pág. 118, es una cicloide y discutir sus relaciones con la curva del problema 44.

46. Demostrar que el tiempo empleado por la cuenta de los problemas 8 y 9 para rodar desde el punto más alto P del alambre hasta el más bajo O [punto más bajo de la cicloide] es $\pi\sqrt{a/g}$.

47. Si $0 < \alpha < 1$, demostrar que la solución de $\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^\alpha}\, du = F(t)$, suponiendo que $F(0) = 0$, es

$$Y(t) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi} \int_0^t F'(u)\,(t-u)^{\alpha-1}\, du$$

48. Discutir las soluciones de la ecuación integral del problema 47 si $F(0) \neq 0$. Ilustrar sus observaciones considerando

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{1/2}}\, du = 1 + t$$

ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES

49. Resolver $\int_0^t Y(u)\cos(t-u)\, du = Y'(t)$ si $Y(0) = 1$.

Resp. $Y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$

50. Resolver $\int_0^t Y'(u)\, Y(t-u)\, du = 24t^3$ si $Y(0) = 0$.

Resp. $Y(t) = \pm 16t^{3/2}/\sqrt{\pi}$

51. (*a*) Demostrar que la ecuación integral del problema 49 puede expresarse como la ecuación integral

$$1 + \int_0^t (t-u)\, Y(u)\cos(t-u)\, du = Y(t)$$

(*b*) Resolver la ecuación integral de la parte (*a*).

52. Resolver $\int_0^t Y''(u)\, Y'(t-u)\, du = Y'(t) - Y(t)$ si $Y(0) = Y'(0) = 0$.

Resp. $Y(t) = 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE DIFERENCIAS

53. Resolver $Y(t) - 3Y(t-1) + 2Y(t-2) = 1$ si $Y(t) = 0,\ t < 0$.

Resp. $Y(t) = 2^{[t]+2} - [t] - 3$

54. Demostrar que la solución de $Y'(t) = 2Y(t-1) + t$ si $Y(t) = 0,\ t < 0$ es

$$Y(t) \quad = \quad \sum_{n=0}^{[t]} \frac{2^n(t-n)^{n+2}}{(n+2)!}$$

55. Resolver $Y''(t) - Y(t-1) = F(t)$ donde $Y(t) = 0,\ Y'(t) = 0$ para $t \leqq 0$ y

$$F(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t \leqq 0 \\ 2t & t > 0 \end{cases}$$

Resp. $Y(t) \;=\; 2\displaystyle\sum_{n=0}^{[t]} \frac{(t-n)^{2n+3}}{(2n+3)!}$

56. Resolver $3Y(t) - 5Y(t-1) + 2Y(t-2) = F(t)$ si $Y(t) = 0,\ t < 0$, y

$$F(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & t > 0 \end{cases}$$

Resp. $Y(t) \;=\; \displaystyle\sum_{n=0}^{[t]} \{1 - (\tfrac{2}{3})^{n+1}\}(t-n)^2$

57. Resolver las ecuaciones de diferencia

(*a*) $3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n \;=\; 0$ si $a_0 = 1,\ a_1 = 0.$

(*b*) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n \;=\; 0$ si $a_0 = 0,\ a_1 = 1.$

Resp. (*a*) $3(2/3)^n - 2$, (*b*) $\tfrac{1}{4}\{1 - (-3)^n\}$

58. Los *números de Fibonacci* se definen por la relación $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ donde $a_0 = 0,\ a_1 = 1$. (*a*) Calcular los primeros diez números de Fibonacci. (*b*) Hallar una fórmula para a_n.

Resp. (*a*) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 (*b*) $a_n \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

59. Resolver la ecuación $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n \;=\; 0$ donde $a_0 = 1,\ a_1 = 4.$ *Resp.* $a_n \;=\; 2^n(n+1)$

60. Resolver la ecuación $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n \;=\; 0$ donde $a_0 = 0,\ a_1 = 1.$

Resp. $a_n \;=\; \{(1+i)^n - (1-i)^n\}/2i$

61. (*a*) Resolver $a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n \;=\; 0$ si $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1.$ (*b*) Hallar a_{10}.

Resp. (*a*) $a_n \;=\; \tfrac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}$, (*b*) $a_{10} = 341$

62. (*a*) Mostrar cómo se puede obtener una solución de $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n \;=\; 0$ suponiendo que $a_n = r^n$ donde r es una constante desconocida. (*b*) Usando este método resolver los problemas 57-61.

PROBLEMAS VARIOS

63. Demostrar que la ecuación diferencial no lineal

$$Y''(t) \;+\; \{Y(t)\}^2 \;=\; t \operatorname{sen} t, \qquad Y(0) = 1,\ Y'(0) = -1$$

puede expresarse como la ecuación integral

$$Y(t) \;+\; \int_0^t (t-u)\,\{Y(u)\}^2\,du \;=\; 3 \;-\; t \;-\; 2\cos t \;-\; t \operatorname{sen} t$$

64. Resolver $\displaystyle\int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du \;=\; 2Y(t) + \tfrac{1}{6}t^3 - 2t.$

Resp. $Y(t) \;=\; t$ o $Y(t) \;=\; 2\delta(t) - t$

65. Expresar como ecuación integral a

Resp. $V(t) = 2\pi + 1 - 2t + 3\cos t - \operatorname{sen} t + \int_\pi^t (t-u)\,V(u)\,du$, donde $V(t) = Y''(t)$

66. Resolver $Y(t) = t + \int_0^t Y(u)\,J_1(t-u)\,du$.

Resp. $Y(t) = \frac{1}{2}(t^2+1)\int_0^t J_0(u)\,du + \frac{1}{2}t\,J_0(t) - \frac{1}{2}t^2 J_1(t)$

67. Encontrar una función $G(x)$ tal que $\int_0^x G(u)\,G(x-u)\,du = 8(\operatorname{sen} x - x\cos x)$.

Resp. $G(x) = \pm 4 \operatorname{sen} x$

68. Resolver $\int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du = t + 2Y(t)$.

Resp. $Y(t) = J_1(t) - \int_0^t J_0(u)\,du$ o $Y(t) = 2\,\delta(t) - J_1(t) + \int_0^t J_0(u)\,du$

69. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes, usando los métodos de la transformada de Laplace.

(*a*) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2n + 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

(*b*) $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 24n - 8$, $a_0 = 3$, $a_1 = -5$.

Resp. (*a*) $a_n = \frac{5}{2}\cdot 3^n - 5\cdot 2^n + n + \frac{5}{2}$ (*b*) $a_n = 2n^2 - 4n + 2 + (-5)^n$

70. Resolver (*a*) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = n + 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$.

(*b*) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = 2^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$.

Resp. (*a*) $a_n = \frac{1}{4}(3n-1)(-1)^n + \frac{1}{4}(n+1)$ (*b*) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\cdot 5^n - \frac{1}{3}\cdot 2^n$

71. Resolver $a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = n^2 + 2^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

Resp. $a_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{6}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{6}n\cdot 2^n - \frac{2}{9}\cdot 2^n - \frac{1}{9}(-1)^n$

72. (*a*) Mostrar cómo puede obtenerse una solución particular del problema 69 (*a*) suponiendo que $a_n = A - Bn$ donde A y B son constantes desconocidas. (*b*) Usando el resultado de la parte (*a*) y el método del problema 62, mostrar cómo puede obtenerse la solución del problema 69(*a*). (*c*) ¿Cómo pueden utilizarse los métodos indicados en las partes (*a*) y (*b*) para poder hallar soluciones de los problemas 69(*b*), 70(*a*) y 71?

73. Hallar todas las funciones continuas que satisfagan $\int_0^t u\,F(u)\cos(t-u)\,du = te^{-t} - \operatorname{sen} t$.

Resp. $F(t) = -2e^{-t}$

74. Demostrar que la ecuación diferencial no lineal

$$Y''(t) + 2Y'(t) = Y^3(t), \qquad Y(0) = 0,\ Y(1) = 0$$

puede expresarse mediante las ecuaciones integrales

$$Y(t) = \int_0^t (2t-2)\,Y(u)\,du + \int_t^1 2t\,Y(u)\,du + \int_0^1 K(t,u)\,Y^3(u)\,du$$

o
$$Y(t) = \int_0^t (2-2t)e^{2(u-t)}\,Y(u)\,du - \int_t^1 2te^{2(u-t)}\,Y(u)\,du + \int_0^1 e^{-2t}K(t,u)\,Y^3(u)\,du$$

donde
$$K(t,u) = \begin{cases} u(t-1) & u < t \\ t(u-1) & u > t \end{cases}.$$

75. Resolver para $Y(t)$: $8Y(t) - 12Y(t-1) + 4Y(t-2) = F(t)$ donde $Y(t) = 0$ para $t < 0$ y

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

Resp. $Y(t) = \frac{1}{8}e^{-t}\left\{1 + \sum_{n=0}^{[t]} (2 - 2^{-n})e^{n}\right\}$

76. Si

$$Y_n'(t) = \beta\{Y_{n-1}(t) - Y_n(t)\} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$Y_0'(t) = -\beta\, Y_0(t)$$

donde $Y_n(0) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $Y_0(0) = 1$ y β es una constante, hallar $Y_n(t)$.

Resp. $Y_n(t) = \dfrac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!}$

77. Desarrollar el problema 76 en el caso en que la primera ecuación se remplace por

$$Y_n'(t) = \beta_n\{Y_{n-1}(t) - Y_n(t)\} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, son constantes.

78. Demostrar directamente la propiedad tautocrónica de la cicloide.

79. El *problema de la baristócrona* consiste en hallar la forma que debe tener un alambre sin rozamiento, en un plano vertical, como se muestra en la figura 4-1 de la Pág. 118, para que una cuenta colocada en P ruede hasta O en el tiempo más corto posible. La solución de este problema es una cicloide como la de la figura 4-2 de la Pág. 120. Demostrar esta propiedad comparándola: (*a*) con una línea recta y (*b*) con una parábola que una los puntos O y P.

80. Hallar la forma que debe tener un alambre en un plano vertical para que una cuenta colocada en él, descienda al punto más bajo en un tiempo proporcional a la componente vertical de su distancia con el punto más bajo.

Resp. $x = a(1 - \cos^3\theta)$, $y = \frac{3}{2}a\,\mathrm{sen}^2\,\theta$

Capítulo 5

Teoría de variable compleja

SISTEMA DE NUMEROS COMPLEJOS

Debido a que no existe número real x alguno que satisfaga la ecuación polinomial $x^2 + 1 = 0$, es necesario considerar el sistema de los números complejos.

Se puede considerar que un número complejo tiene la forma $a + bi$ donde a y b son números reales llamados las *partes real* o *imaginaria*, e $i = \sqrt{-1}$ se llama la *unidad imaginaria*. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Podemos considerar al conjunto de los números reales como un subconjunto del conjunto de los números complejos, en el caso en que $b = 0$. El complejo $0 + 0i$ corresponde al real 0

El valor absoluto o módulo de $a + bi$ se define como $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. El *conjugado complejo* de $a + bi$ está definido por $a - bi$. El conjugado complejo del número complejo z se denota por $\bar{z}$ o por z^*.

Al desarrollar las operaciones entre números complejos podemos operar como en el álgebra de los números reales, remplazando a i^2 por -1 cada vez que aparezca. En lo números complejos no están definidas las desigualdades.

Desde el punto de vista axiomático es más ventajoso considerar que un número complejo es un par ordenado (a, b) de números reales donde a y b obedecen a ciertas reglas operacionales que, como se verá a su debido tiempo, son equivalentes a las que acabamos de enunciar. Por ejemplo, definimos $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ac + bc)$, $m(a, b) = (ma, mb)$, etc. Observamos que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ y lo asociamos con $a + bi$, donde i es el símbolo para $(0, 1)$.

FORMA POLAR DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Si se toman escalas reales sobre dos ejes mutuamente perpendiculares $X'OX$ y $Y'OY$ (los ejes x y y), como en la figura 5-1, podemos localizar cualquier punto del plano determinado por dichas rectas mediante parejas ordenadas (x, y) de números reales llamados las coordenadas de dichos puntos, los cuales se denotan por P, Q, R, S y T en la Fig. 5-1.

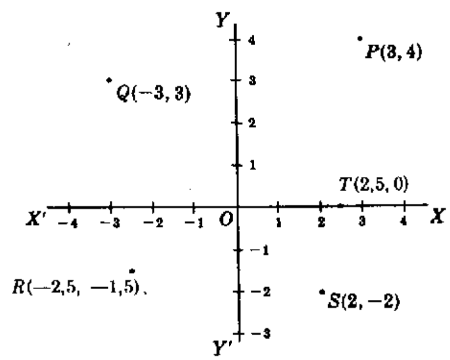


Fig. 5-1

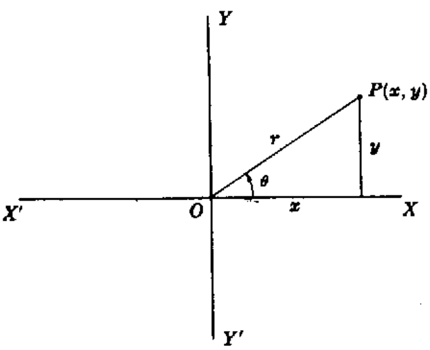


Fig. 5-2

Como un número complejo $x + iy$ puede considerarse como un par ordenado (x, y), podemos entonces representar tales números por puntos del plano xy que se llama *plano complejo* o *diagrama de Argand*. En la Fig. 5-2 vemos que

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{1}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ y el ángulo θ que forma la línea OP con la semirrecta positiva del eje x se llama la *amplitud* o el *argumento*. Se deduce que

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{2}$$

que se llama la *forma polar* del número complejo, r y θ se llaman las *coordenadas polares*. A veces es conveniente escribir cis θ en vez de $\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

OPERACIONES EN LA FORMA POLAR. TEOREMA DE DE MOIVRE

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$, se puede demostrar que

$$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\} \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\} \tag{4}$$

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta) \tag{5}$$

donde n es cualquier número real. La ecuación (5) se llama el *teorema de De Moivre*.

En términos de la *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

podemos escribir (3), (4) y (5) en las sugestivas formas

$$z_1z_2 = (r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{6}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{7}$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \tag{8}$$

RAICES DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Si n es un entero positivo, usando el teorema de De Moivre tenemos que

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\}^{1/n} \\ &= r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

o, en forma equivalente,

$$z^{1/n} = (re^{i\theta})^{1/n} = \{re^{i(\theta+2k\pi)}\}^{1/n} = r^{1/n}e^{i(\theta+2k\pi)/n} \tag{10}$$

de donde se deduce que hay n valores diferentes para $z^{1/n}$. Es posible extender este resultado al caso $z^{m/n}$.

FUNCIONES

Si a cada elemento z, variable, de un conjunto de complejos se le hace corresponder uno o varios valores de una variable w, se dice que w está *relacionado con la variable compleja* z, y escribimos $w = f(z)$.

Una relación es una *función* si a cada valor de z le corresponde solamente un valor de w; de otra manera se dice que la relación es *multívoca* o *plurívoca*. En general, podemos escribir $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde u y v son funciones reales de x y de y.

Ejemplo. $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$ de manera que $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Estas son llamadas respectivamente la parte real e imaginaria de $w = z^2$.

A menos que se especifique lo contrario, supondremos siempre que $f(z)$ es una función. Una relación multívoca puede considerarse como una colección de funciones.

LIMITES Y CONTINUIDAD

Las definiciones de límite y continuidad en las funciones de variable compleja son análogas a las de funciones de variable real. Se dice que l es el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - l| < \epsilon$ siempre que $0 < z - z_0| < \delta$.

Análogamente, se dice que $f(z)$ es *continua* en z_0 si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ cuando $|z - z_0| < \delta$. En otras palabras, $f(z)$ es continua en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

DERIVADAS

Si $f(z)$ es una función definida en alguna región del plano z, la derivada de $f(z)$ se denota por $f'(z)$ y se define como

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{11}$$

siempre y cuando exista el límite independientemente de la manera como $\Delta z \to 0$. Si existe el límite (*11*) en $z = z_0$ entonces, se dice, $f(z)$ es *derivable en* z_0. Si dicho límite existe para todo z tal que $|z - z_0| < \delta$ para algún $\delta > 0$, entonces $f(z)$ se llama *analítica* en z_0. Si el límite existe para todos los elementos z de una región $\mathcal{R}$, $f(z)$ se llama analítica en $\mathcal{R}$. Para que $f(z)$ sea analítica, debe ser una función continua; sin embargo, la recíproca no siempre es cierta.

Las funciones elementales de variable compleja se definen como extensiones naturales de las correspondientes de variable real. Cuando existe un desarrollo en serie para una función de variable real $f(x)$, podemos usar la serie como definición, simplemente remplazando a x por z.

Ejemplo 1. Definimos $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$, $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$, $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$. De estas dos relaciones se deduce que $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, y otras relaciones.

Ejemplo 2. Si a y b son números complejos, a^b se define como $e^{b \ln a}$. Como $e^{2k\pi i} = 1$, se deduce que $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$, y definimos $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$. Tenemos entonces que $\ln z$ es una relación multívoca y las varias funciones de las cuales se compone esta relación se llaman sus *ramificaciones*.

Las reglas de la derivación de las funciones de variable compleja son muy parecidas a las de variable real, por ejemplo: $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z$, etc.

ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

Una condición necesaria y suficiente para que $w = f(x) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica en una región $\mathcal{R}$ es que u y v satisfagan las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{12}$$

[Véase el problema 12.] Si las derivadas parciales de (*12*) son continuas en $\mathcal{R}$, las ecuaciones son condiciones suficientes para que $f(z)$ sea analítica en $\mathcal{R}$.

Si existen y son continuas las derivadas segundas de u y v con respecto a x y y, al derivar (*12*) encontramos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{13}$$

De manera que las partes real e imaginaria satisfacen la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace se llaman *funciones armónicas*.

INTEGRALES DE LINEA

Sean C una curva en el plano xy que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y, P y Q funciones de x y y. La integral

$$\int_C P\,dx + Q\,dy \qquad \text{o} \qquad \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy$$

se llama una *integral de línea* a lo largo de la curva C. Esto es una generalización de la integral del cálculo elemental a las curvas. Como en el caso del cálculo elemental, se pueden definir como el límite de una suma.

Dos importantes propiedades de las integrales de línea son:

1. $$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy = -\int_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)} P\,dx + Q\,dy$$

2. Si (x_3, y_3) es cualquier otro punto de C, entonces
$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_3,y_3)} P\,dx + Q\,dy + \int_{(x_3,y_3)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy$$

Si C es una *curva simple cerrada* (no se corta con ella misma en parte alguna) como en la Fig. 5-3, la integral de línea a lo largo de C, recorrida en el sentido positivo o contrario al reloj, se denota por

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

Para evaluación de integrales de línea, véase el problema 15.

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

Sea C una curva cerrada simple que encierra una región $\mathcal{R}$ [véase la Fig. 5-3]. Supongamos que P, Q y sus derivadas parciales primeras con respecto a x y y son continuas en $\mathcal{R}$ y C. Se tiene entonces que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

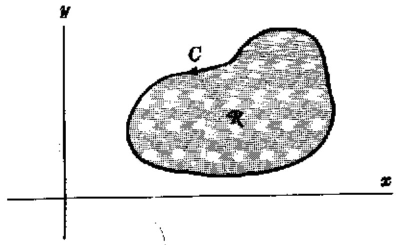


Fig. 5-3

este resultado se llama el *teorema de Green en el plano.*

INTEGRALES

Si $f(x)$ es una función definida y continua en una región $\mathcal{R}$, definimos la integral de $f(x)$ a lo largo de algún camino C en $\mathcal{R}$ desde un punto $z_1 = x_1 + iy_1$ hasta un punto $z_2 = x_2 + iy_2$ como

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u + iv)(dx + i\,dy) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} u\,dx - v\,dy + i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} v\,dx + u\,dy$$

Según esta definición, el concepto de integral de una función de variable compleja puede hacerse depender del de integral de línea. Una definición alternativa basada en el límite de una suma, como en el caso de las funciones de variable real se formulará oportunamente, y se demostrará su equivalencia con la anterior.

Las reglas de la integración compleja son análogas a la de la integración real; un importante resultado es el siguiente:

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq \int_C |f(z)|\,|dz| \leqq M\int_C ds = ML \qquad (14)$$

donde M es una cota superior de $|f(z)|$ en C, es decir, $|f(z)| \leqq M$, y L es la longitud del camino C.

TEOREMA DE CAUCHY

Sea C una curva cerrada simple. Si $f(z)$ es analítica en una región y en su contorno C, entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \qquad (15)$$

Este resultado se llama el *teorema de Cauchy.* [Véase el problema 19.]

Dicho de otra manera, (*15*) es equivalente a la afirmación: El valor de $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ es *independiente* del camino que une a z_1 con z_2. El valor de dichas integrales es $F(z_2) - F(z_1)$ donde $F'(z) = f(z)$.

Ejemplo. Como $f(z) = 2z$ es analítica en todas partes tenemos que, para cualquier curva cerrada C,

$$\oint_C 2z\,dz = 0$$

Además, $$\int_{2i}^{1+i} 2z\,dz = z^2\Big|_{2i}^{1+i} = (1+i)^2 - (2i)^2 = 2i + 4$$

FORMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C y a es un punto interior a C, entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{16}$$

donde C se recorre en el sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj).

Además, la n-ésima derivada de $f(z)$ en $z = a$ está dada por

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \tag{17}$$

Estas son las llamadas *fórmulas integrales de Cauchy*. Esta fórmula es notable ya que si se conocen los valores de $f(z)$ en un contorno C, se conocerán también dentro de la región acotada por C; además es posible calcular las diversas derivadas de $f(z)$ dentro de la región. Se deduce que si para una función de variable compleja existe su primera derivada, entonces existirán todas las derivadas de diferentes órdenes. Naturalmente, esto no es necesariamente cierto en las funciones de variable real.

SERIES DE TAYLOR

Sea $f(z)$ analítica en un círculo de centro en $z = a$. Entonces para todos los puntos z del círculo la representación de $f(z)$ en *serie de Taylor* está dada por

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots \tag{18}$$

[Véase el problema 29.]

PUNTOS SINGULARES

Punto singular de una función $f(z)$ es un valor de z en el cual $f(z)$ deja de ser analítica. Si $f(z)$ es analítica en todas las partes de alguna región, excepto en un punto interior $z = a$, a es una *singularidad aislada de* $f(z)$.

Ejemplo. Si $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)^2}$, entonces $z = 3$ es una singularidad aislada de $f(z)$.

POLOS

Si $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z-a)^n}$, $\phi(a) \neq 0$, donde $\phi(z)$ es analítica en una región que contiene a $z = a$ y si n es un entero positivo, entonces $f(z)$ tiene una singularidad aislada en $z = a$ el cual se llama *polo de orden n*. Si $n = 1$, el polo se llama *polo simple*; si $n = 2$ se llama *polo doble*, etc.

Ejemplo 1. $f(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2(z+1)}$ tiene dos singularidades: un polo de orden 2 o polo doble en $z = 3$ y un polo simple o de orden 1 en $z = -1$.

Ejemplo 2. $f(z) = \dfrac{3z-1}{z^2+4} = \dfrac{3z-1}{(z+2i)(z-2i)}$ tiene dos polos simples en $z = \pm 2i$.

Una función puede tener otros tipos de singularidades. Por ejemplo $f(z) = \sqrt{z}$ tiene un punto de *ramificación* en $z = 0$ [véase el problema 45]. La función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene una singularidad en $z = 0$. Sin embargo, como $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z}$ es finito, a esta singularidad la llamamos *singularidad evitable*.

SERIES DE LAURENT

Si $f(z)$ tiene un polo de orden n en $z = a$ y es analítica en cualquier otro punto de algún círculo de C de centro en a, entonces $(z-a)^n f(z)$ es analítica en todos los puntos de C y tiene serie de Taylor alrededor de $z = a$ de manera que

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \tag{19}$$

Esta se llama *serie de Laurent* para $f(z)$. La parte $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$ se llama *parte analítica,* en tanto que el resto, consistente de potencias de inversos de $z - a$ se llama la *parte principal.* Más generalmente diremos que las series $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k$ son series de Laurent en las cuales los términos con $k < 0$ constituyen la parte principal. Una función analítica en una región comprendida entre dos circunferencias concéntricas de centro en $z = a$ puede desarrollarse siempre en serie de Laurent [véase el problema 119].

De la serie de Laurent de una función $f(z)$ es posible definir varios tipos de singularidades. Por ejemplo, cuando la parte principal de una serie de Laurent tiene un número finito de términos y $a_{-n} \neq 0$ en tanto que $a_{-n-1}, a_{-n-2}, \ldots$ son todos nulos, entonces $z = a$ es un polo de orden n. Si la parte principal tiene infinitos términos, $z = a$ se llama una *singularidad esencial* o un polo de *orden infinito.*

Ejemplo. La función $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

RESIDUOS

Los coeficientes de (19) se pueden obtener de la manera acostumbrada escribiendo los coeficientes para la serie de Taylor correspondientes a $(z-a)^n f(z)$. En otros desarrollos el coeficiente a_{-1}, llamado *residuo* de $f(z)$ en el polo $z = a$, es de considerable importancia. Puede hallarse por la fórmula

$$a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \tag{20}$$

donde n es el orden del polo. Para polos simples, el cálculo del residuo es particularmente simple puesto que se reduce a

$$a_{-1} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) \tag{21}$$

TEOREMA DE LOS RESIDUOS

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ excepto en un polo de orden n en $z = a$ y si C es cualquier curva cerrada simple en $\mathcal{R}$ y contiene a $z = a$, entonces $f(z)$ tiene la forma (19). Integrando (19) y usando el hecho de que

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{si } n = 1 \end{cases} \tag{22}$$

[véase el problema 21], se deduce que

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1} \tag{23}$$

es decir, la integral de $f(z)$ alrededor de un camino cerrado que encierra un solo polo de $f(z)$ es $2\pi i$ por el residuo en el polo.

Más generalmente, tenemos el importante

Teorema. Si $f(z)$ es analítica dentro y en la frontera C de una región $\mathcal{R}$, excepto en un número finito de polos $a, b, c, \ldots$ dentro de $\mathcal{R}$ cuyos residuos son respectivamente a_{-1}, $b_{-1}, c_{-1}, \ldots$, entonces

$$\oint_C f(z)\,dz \quad = \quad 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots) \tag{24}$$

es decir, la integral de $f(z)$ es $2\pi i$ por la suma de los residuos de $f(z)$ en los polos encerrados por C. El teorema de Cauchy y las fórmulas integrales son casos especiales de este resultado que se llama el *teorema de los residuos.*

EVALUACION DE INTEGRALES DEFINIDAS

El cálculo de algunas integrales puede llevarse a cabo mediante el uso del teorema de los residuos cuando sean apropiados la función $f(z)$ y el camino o *contorno* C; la elección de este puede exigir mucho ingenio. Los siguientes tipos son los más comunes en la práctica.

1. $\displaystyle\int_0^\infty F(x)\,dx$, $F(x)$ es una función par.

   Considérese $\displaystyle\oint_C F(z)\,dz$ a lo largo de un contorno C que consiste de un segmento del eje x desde $-R$ hasta $+R$ y la semicircunferencia sobre el eje x que tenga el segmento como diámetro. Hágase $R \to \infty$. [Véanse los problemas 37 y 38.]

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} G(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,d\theta$, si G es una función racional de sen θ y cos θ.

   Sea $z = e^{i\theta}$. Entonces $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ y $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$ o $d\theta = dz/iz$. La integral dada es equivalente a $\displaystyle\oint_C F(z)\,dz$ donde C es la circunferencia unitaria con centro en el origen. [Véanse los problemas 39 y 40.]

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \operatorname{sen} mx\end{Bmatrix} dx$, si $F(x)$ es una función racional.

   Aquí consideramos $\displaystyle\oint_C F(z)e^{imz}\,dz$ donde C es un contorno del mismo tipo que el de la parte 1. [Véase el problema 42.]

4. Otras integrales en las cuales se escogen contornos particulares para cada caso. [Véanse los problemas 43, 46.]

Problemas resueltos

NUMEROS COMPLEJOS

1. Desarrollar las operaciones indicadas.

(a) $(4-2i)+(-6+5i) = 4-2i-6+5i = 4-6+(-2+5)i = -2+3i$

(b) $(-7+3i)-(2-4i) = -7+3i-2+4i = -9+7i$

(c) $(3-2i)(1+3i) = 3(1+3i)-2i(1+3i) = 3+9i-2i-6i^2 = 3+9i-2i+6 = 9+7i$

(d) $$\frac{-5+5i}{4-3i} = \frac{-5+5i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(-5+5i)(4+3i)}{16-9i^2} = \frac{-20-15i+20i+15i^2}{16+9}$$
$$= \frac{-35+5i}{25} = \frac{5(-7+i)}{25} = \frac{-7}{5}+\frac{1}{5}i$$

(e) $$\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i} = \frac{i-1+(i^2)(i)+(i^2)^2+(i^2)^2 i}{1+i} = \frac{i-1-i+1+i}{1+i}$$
$$= \frac{i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{i-i^2}{1-i^2} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

(f) $|3-4i|\,|4+3i| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2}\sqrt{(4)^2+(3)^2} = (5)(5) = 25$

(g) $$\left|\frac{1}{1+3i}-\frac{1}{1-3i}\right| = \left|\frac{1-3i}{1-9i^2}-\frac{1+3i}{1-9i^2}\right| = \left|\frac{-6i}{10}\right| = \sqrt{(0)^2+(-\tfrac{6}{10})^2} = \frac{3}{5}$$

2. Si z_1 y z_2 son complejos, demostrar que $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$

Sea $z_1 = x_1+iy_1,\ z_2 = x_2+iy_2$. Entonces

$$\begin{aligned}|z_1z_2| &= |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)|\\ &= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}\\ &= \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} = |x_1+iy_1|\,|x_2+iy_2| = |z_1|\,|z_2|\end{aligned}$$

3. Resolver $z^3-2z-4=0$.

Las raíces racionales posibles son $\pm1,\ \pm2,\ \pm4$. Comprobamos que $z=2$ es una raíz; entonces la ecuación dada puede escribirse como $(z-2)(z^2+2z+2)=0$. Las soluciones de la *ecuación cuadrática* $az^2+bz+c=0$ son $z = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; para $a=1,\ b=2,\ c=2$ esto da $z = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-2\pm2i}{2} = -1\pm i$.

El cunjunto de soluciones es $2,\ -1+i,\ -1-i$.

FORMA POLAR DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

4. Expresar en forma polar (a) $3+3i$, (b) $-1+\sqrt{3}i$, (c) -1, (d) $-2-2\sqrt{3}i$. [Véase la Fig. 5-4.]

(a) Amplitud $\theta = 45^\circ = \pi/4$ radianes. Módulo $r = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$. Entonces,

$$3+3i = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = 3\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\,\text{sen}\,\pi/4) = 3\sqrt{2}\,\text{cis}\,\pi/4 = 3\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}$$

(b) Amplitud $\theta = 120^\circ = 2\pi/3$ radianes. Módulo $r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Entonces

$$-1+\sqrt{3}i = 2(\cos 2\pi/3 + i\,\text{sen}\,2\pi/3) = 2\,\text{cis}\,2\pi/3 = 2e^{2\pi i/3}$$

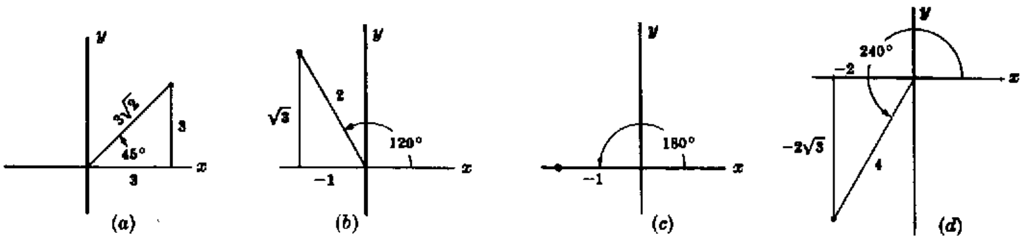


Fig. 5-4

(c) Amplitud $\theta = 180° = \pi$ radianes. Módulo $r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$. Entonces

$$-1 \quad = \quad 1(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) \quad = \quad \operatorname{cis}\pi \quad = \quad e^{\pi i}$$

(d) Amplitud $\theta = 240° = 4\pi/3$ radianes. Módulo $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$. Entonces

$$-2 - 2\sqrt{3} \quad = \quad 4(\cos 4\pi/3 + i \operatorname{sen} 4\pi/3) \quad = \quad 4 \operatorname{cis} 4\pi/3 \; = \; 4e^{4\pi i/3}$$

5. Calcular (*a*) $(-1 + \sqrt{3}\,i)^{10}$, (*b*) $(-1 + i)^{1/3}$.

(*a*) Por el problema 4(*b*) y el teorema de De Moivre,

$$\begin{aligned}(-1 + \sqrt{3}\,i)^{10} &= [2(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)]^{10} \;=\; 2^{10}(\cos 20\pi/3 + i \operatorname{sen} 20\pi/3)\\ &= 1024[\cos(2\pi/3 + 6\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi/3 + 6\pi)] \;=\; 1024(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)\\ &= 1024(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i) \;=\; -512 + 512\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

(*b*) $-1 + i \; = \; \sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) \; = \; \sqrt{2}\,[\cos(135° + k \cdot 360°) + i \operatorname{sen}(135° + k \cdot 360°)]$

Entonces

$$(-1+i)^{1/3} \;=\; (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{135° + k \cdot 360°}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{135° + k \cdot 360°}{3}\right)\right]$$

Los resultados para $k = 0, 1, 2$, son

$$\sqrt[6]{2}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°),$$

$$\sqrt[6]{2}\,(\cos 165° + i \operatorname{sen} 165°),$$

$$\sqrt[6]{2}\,(\cos 285° + i \operatorname{sen} 285°)$$

Los resultados para $k = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ son repeticiones de éstos. Estas raíces complejas se representan geométricamente en el plano complejo por los puntos P_1, P_2, P_3 de la circunferencia de la Fig. 5-5.

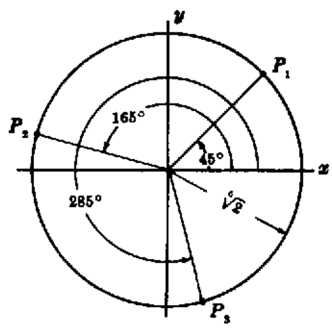


Fig. 5-5

6. Determinar el lugar geométrico de

(*a*) $|z-2| = 3$, (*b*) $|z-2| = |z+4|$, (*c*) $|z-3| + |z+3| = 10$.

(*a*) ***Método 1.*** $|z - 2| = |x + iy - 2| = |x - 2 + iy| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 3$ o sea $(x-2)^2 + y^2 = 9$, que es una circunferencia de radio 3 con centro en (2, 0).

Método 2. $|z - 2|$ es la distancia entre los números complejos $z = x + iy$ y $2 + 0i$. Si esta distancia es siempre 3, el lugar geométrico es la circunferencia de radio 3 con centro en $2 + 0i$ o (2, 0).

(*b*) ***Método 1.*** $|x+iy-2| = |x+iy+4|$ o $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{(x+4)^2+y^2}$. Elevando al cuadrado encontramos que $x = -1$, lo cual representa una línea recta.

Método 2. El lugar geométrico es tal que las distancias desde cualquiera de sus puntos a (2, 0) y a (−4, 0) son iguales. Entonces, dicho lugar geométrico es la perpendicular media del segmento que une a (2, 0) con (−4, 0), o sea $x = -1$.

(*c*) ***Método 1.*** El lugar geométrico está dado por $\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 10$ o $\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2+y^2}$. Elevando al cuadrado y simplificando, $25+3x = 5\sqrt{(x+3)^2+y^2}$. Nuevamente elevando al cuadrado y simplificaodo obtenemos $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16} = 1$, que es una elipse con semi-ejes mayor y menor de longitudes 5 y 4.

Método 2. El lugar geométrico buscado es tal que la suma de las distancias de cualquiera de sus puntos a (3, 0) y (−3, 0) es 10. Así, el lugar geométrico es una elipse cuyos focos son (−3, 0) y (3, 0) y cuyo eje mayor tiene longitud 10.

7. Determinar la región del plano z definida por

(*a*) $|z| < 1$.

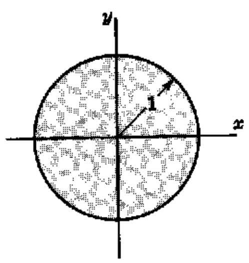
Es el interior de un círculo de radio 1. Véase la Fig. 5-6(*a*).

(*b*) $1 < |z+2i| \leq 2$.

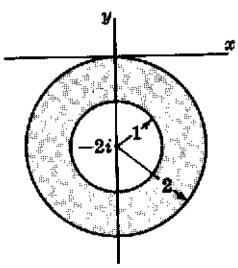
$|z+2i|$ es la distancia de z a $2i$, de tal manera que $|z+2i| = 1$ es una circunferencia de radio 2 y centro en $-2i$. Así, $1 < |z-zi| \leq 2$ representa la región *exterior* a $|z-2i| = 1$ pero *interior* o *sobre* $|z-2i| = 2$. Véase la Fig. 5-6(*b*).

(*c*) $\pi/3 \leq \arg z \leq \pi/2$.

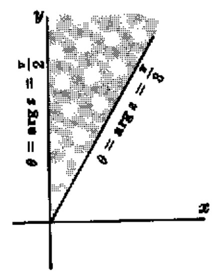
Obsérvese que si $z = re^{i\theta}$, entonces $\arg z = \theta$. La región buscada es la parte infinita del plano comprendida entre las rectas $\theta = \pi/3$ y $\theta = \pi/2$, incluidas dichas rectas. Véase la Fig. 5-6(*c*).



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Fig. 5-6

8. Expresar cada función en la forma $u(x,y)+iv(x,y)$, con u y v reales:

(*a*) z^3, (*b*) $1/(1-z)$, (*c*) e^{3z}, (*d*) $\ln z$.

(*a*) $w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3+3x^2(iy)+3x(iy)^2+(iy)^3 = x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3$

$$= x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$$

Entonces $u(x,y) = x^3-3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y-y^3$.

(*b*) $w = \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{1-(x+iy)} = \dfrac{1}{1-x-iy}\cdot\dfrac{1-x+iy}{1-x+iy} = \dfrac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}$

Entonces $u(x,y) = \dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}$

(c) $e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i \operatorname{sen} 3y)$ y $u = e^{3x}\cos 3y, \quad v = e^{3x}\operatorname{sen} 3y$

(d) $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\tan^{-1} y/x$ y

$$u = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \qquad v = \tan^{-1} y/x$$

Nótese que $\ln z$ es una relación multívoca (en este caso a un valor le corresponden infinitos) puesto que θ puede incrementarse en cualquier múltiplo de 2π. El *valor principal* del logaritmo se define como aquel en el cual $0 \leq \theta < 2\pi$ y se llama la *rama principal* de $\ln z$.

9. Demostrar que (a) $\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i\cos x \operatorname{senh} y$

(b) $\cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

Utilizando las fórmulas $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z, \quad e^{-iz} = \cos z - i\operatorname{sen} z,$ obtenemos

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

entonces

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)\}$$

$$= (\operatorname{sen} x)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + i(\cos x)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right) = \operatorname{sen} x\cosh y + i\cos x\operatorname{senh} y$$

Análogamente,

$$\cos z = \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{e^{ix-y}+e^{-ix+y}\} = \tfrac{1}{2}\{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)\}$$

$$= (\cos x)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) - i(\operatorname{sen} x)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right) = \cos x\cosh y - i\operatorname{sen} x\operatorname{senh} y$$

DERIVADAS. ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

10. Si $\bar{z}$ es el conjugado de z, demostrar que no existe $\dfrac{d}{dz}\bar{z}$ en ninguna parte.

Por definición $\dfrac{d}{dz}f(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ si dicho límite existe independientemente de la manera como $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tiende a cero. Entonces

$$\frac{d}{dz}\bar{z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\overline{x+iy+\Delta x+i\Delta y} - \overline{x+iy}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{x-iy+\Delta x - i\Delta y-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

Si $\Delta y = 0$, el límite es $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Si $\Delta x = 0$, el límite es $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$.

Estas dos formas de buscar límites muestran que el límite deseado depende de la manera como $\Delta z \to 0$, de tal suerte que la derivada no existe, es decir, que $\bar{z}$ en todas partes es *no analítica*.

11. (*a*) Si $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, hallar $\dfrac{dw}{dz}$. (*b*) Determinar en qué parte w es no analítica.

(*a*) ***Método 1.***

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)} - \dfrac{1+z}{1-z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$= \frac{2}{(1-z)^2} \text{ con } z \neq 1, \text{ independientemente de la manera como } \Delta z \to 0.$$

Método 2. Si $z \neq 1$ se pueden aplicar las reglas usuales de la derivación. Así, por la regla de la derivada de un cociente,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{(1-z)\dfrac{d}{dz}(1+z) - (1+z)\dfrac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2} = \frac{(1-z)(1)-(1+z)(-1)}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$$

(*b*) La función es analítica en todas partes excepto en $z = 1$, punto en el cual la derivada no existe; es decir, la función es no analítica en $z = 1$.

12. Demostrar que una condición necesaria para que $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ sea analítica en una región es que satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ en dicha región.

Como $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, tenemos que

$$f(z+\Delta z) = f[x+\Delta x + i(y+\Delta y)] = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i\,v(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

Entonces

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + i\{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)\}}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

Si $\Delta y = 0$, el límite requerido es

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x} + i\left\{\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Si $\Delta x = 0$, el límite requerido es

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\,\Delta y} + \left\{\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\right\} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Si existe la derivada, estos límites deben coincidir, esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

entonces se tendrá que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Recíprocamente, podemos demostrar que si las primeras derivadas parciales de u y v con respecto a x y y son continuas en una región, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann constituyen una condición suficiente para que $f(z)$ sea analítica allí.

13. (*a*) Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, demostrar que las familias de curvas paramétricas $u(x,y) = C_1$ y $v(x,y) = C_2$ son familias ortogonales. (*b*) Ilustrar este resultado con $f(z) = z^2$.

(*a*) Consideremos dos elementos particulares de estas familias $u(x,y) = u_0$, $v(x,y) = v_0$ que se intersectan en el punto (x_0, y_0).

Como $du = u_x\,dx + u_y\,dy = 0$, tenemos que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{u_x}{u_y}$.

Además, como $dv = v_x\,dx + v_y\,dy = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{v_x}{v_y}$.

Cuando calculamos en (x_0, y_0), esto representa respectivamente las pendientes de las dos curvas en su punto de intersección.

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, y el producto de las pendientes en el punto (x_0, y_0) es igual a

$$\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = -1$$

de tal suerte que dos elementos cualesquiera de las respectivas familias son ortogonales; así que las dos familias son ortogonales.

(*b*) Si $f(z) = z^2$ entonces $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Las gráficas de algunos elementos de $x^2 - y^2 = C_1$, $2xy = C_2$ se muestran en la Fig. 5-7.

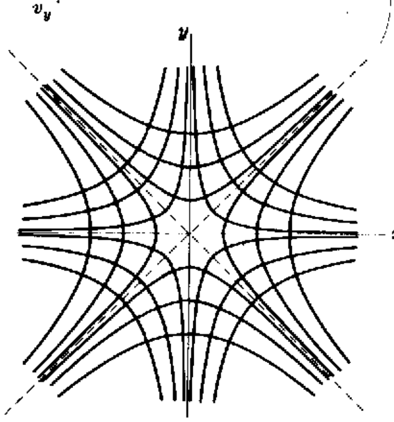


Fig. 5-7

14. En aerodinámica y mecánica de los fluidos las funciones ϕ y ψ en $f(z) = \phi + i\,\psi$, donde $f(z)$ es analítica, se llaman respectivamente el *potencial de velocidad* y la *función de flujo*. Si $\phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y$, (*a*) calcular ψ y (*b*) hallar $f(z)$.

(*a*) Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$. Entonces

$$(1)\quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2x + 4 \qquad (2)\quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 2y - 2$$

Método 1. Integrando (*1*), $\psi = 2xy + 4y + F(x)$.

Integrando (*2*), $\psi = 2xy - 2x + G(y)$.

Estas funciones son idénticas si $F(x) = -2x + c$, $G(y) = 4y + c$ donde c es una constante real. Así, $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$.

Método 2.

Integrando (*1*), $\psi = 2xy + 4y + F(x)$. Entonces, sustituyendo en (*2*), $2y + F'(x) = 2y - 2$ o sea $F'(x) = -2$ y $F(x) = -2x + c$. Entonces $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$.

(*b*) De (*a*),

$$\begin{aligned} f(z) = \phi + i\psi &= x^2 + 4x - y^2 + 2y + i(2xy + 4y - 2x + c) \\ &= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 4(x + iy) - 2i(x + iy) + ic \\ &= z^2 + 4z - 2iz + c_1 \end{aligned}$$

donde c_1 es una constante imaginaria pura.

Esto puede realizarse también al observar que $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ de manera que $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$. Al sustituir se obtiene el resultado; los términos que contienen $\bar{z}$ desaparecen.

INTEGRALES DE LINEA

15. Calcular $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2-y)\,dx + (y^2+x)\,dy$ a lo largo de: (*a*) El segmento rectilíneo que va de (0, 1) a (1, 2). (*b*) Los segmentos rectilíneos de (0, 1) a (1, 1) y de (1, 1) a (1, 2). (*c*) La parábola $x = t,\ y = t^2 + 1$.

(*a*) La ecuación del segmento que une (0, 1) con (1, 2) en el plano xy es $y = x + 1$. Entonces $dy = dx$ y la integral de línea será entonces

$$\int_{x=0}^{1} \{x^2-(x+1)\}\,dx + \{(x+1)^2+x\}\,dx \quad = \quad \int_0^1 (2x^2+2x)\,dx \quad = \quad 5/3$$

(*b*) A lo largo del segmento rectilíneo que va de (0, 1) a (1, 1), $y = 1$, $dy = 0$ y la integral de línea es

$$\int_{x=0}^{1} (x^2-1)\,dx + (1+x)(0) \quad = \quad \int_0^1 (x^2-1)\,dx \quad = \quad -2/3$$

A lo largo del segmento rectilíneo de (1, 1) a (1, 2), $x = 1$, $dx = 0$ y la integral de línea es

$$\int_{y=1}^{2} (1-y)(0) + (y^2+1)\,dy \quad = \quad \int_1^2 (y^2+1)\,dy \quad = \quad 10/3$$

El valor buscado es entonces $= -2/3 + 10/3 = 8/3$.

(*c*) Como $t = 0$ en (0, 1) y $t = 1$ en (1, 2), la integral de línea es

$$\int_{t=0}^{1} \{t^2-(t^2+1)\}\,dt + \{(t^2+1)^2+t\}\,2t\,dt \quad = \quad \int_0^1 (2t^5+4t^3+2t^2+2t-1)\,dt \quad = \quad 2$$

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

16. Demostrar el teorema de Green en el plano para el caso en que C sea una curva cerrada simple con la propiedad de que cualquier recta paralela a cualquiera de los ejes coordenados la corta a lo más en dos puntos.

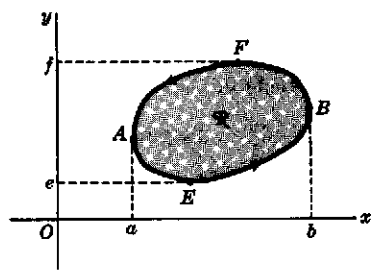


Fig. 5-8

Sean $y = Y_1(x)$ la ecuación de la curva AEB y $y = Y_2(x)$ la de AFB [véase la Fig. 5-8]. Si $\mathcal{R}$ es la región encerrada por C, tenemos

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \quad = \quad \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right] dx$$

$$= \quad \int_{x=a}^{b} P(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\,dx \quad = \quad \int_a^b [P(x,Y_2) - P(x,Y_1)]\,dx$$

$$= \quad -\int_a^b P(x,Y_1)\,dx - \int_b^a P(x,Y_2)\,dx \quad = \quad -\oint_C P\,dx$$

Entonces

$$(1) \qquad \oint_C P\,dx \quad = \quad -\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Análogamente sean $x = X_1(y)$ y $x = X_2(y)$ las ecuaciones de las curvas EAF y EBF respectivamente. Entonces

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=e}^{f}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right] dy = \int_e^f [Q(X_2,y) - Q(X_1,y)]\,dy$$

$$= \int_f^e Q(X_1,y)\,dy + \int_e^f Q(X_2,y)\,dy = \oint_C Q\,dy$$

Entonces (2) $\displaystyle\oint_C Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$

Sumando (1) y (2), $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$

La generalización a otras curvas cerradas simples puede hacerse fácilmente.

17. Comprobar el teorema de Green en el plano para

$$\oint_C (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$

donde C es la curva cerrada de la región comprendida por $y = x^2$ y $y^2 = x$.

Las curvas planas $y = x^2$ y $y^2 = x$ se intersectan en (0, 0) y en (1, 1). La dirección positiva para recorrer C es la que muestra la Fig. 5-9.

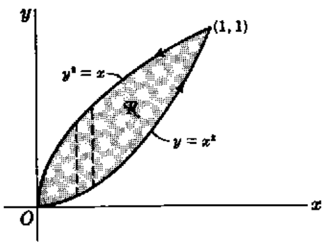


Fig. 5-9

A lo largo de $y = x^2$ la integral de línea es

$$\int_{x=0}^{1} \{(2x)(x^2) - x^2\}\,dx + \{x + (x^2)^2\}\,d(x^2) = \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\,dx = 7/6$$

A lo largo de $y^2 = x$ la integral de línea es igual a

$$\int_{y=1}^{0} \{2(y^2)(y) - (y^2)^2\}\,d(y^2) + \{y^2 + y^2\}\,dy = \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)\,dy = -17/15$$

La integral de línea buscada vale $= 7/6 - 17/15 = 1/30$.

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right\} dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} (1 - 2x)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y - 2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3)\,dx = 1/30$$

Luego queda comprobado el teorema de Green.

INTEGRALES, TEOREMA DE CAUCHY, FORMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

18. Calcular $\displaystyle\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz$

(a) a lo largo de la parábola $x = t$, $y = t^2$ donde $1 \leqq t \leqq 2$,

(b) a lo largo del segmento rectilíneo que une a $1 + i$ con $2 + 4i$,

(c) a lo largo de los segmentos desde $1 + i$ hasta $2 + i$ y luego de ahí a $2 + 4i$.

tenemos que

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x+iy)^2\,(dx+i\,dy) = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2-y^2+2ixy)(dx+i\,dy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2-y^2)\,dx - 2xy\,dy + i\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy$$

Método 1.

(*a*) Los puntos (1, 1) y (2, 4) corresponden a $t = 1$ y $t = 2$ respectivamente. Entonces las integrales de línea serán:

$$\int_{t=1}^{2} \{(t^2-t^4)\,dt - 2(t)(t^2)2t\,dt\} + i\int_{t=1}^{2} \{2(t)(t^2)\,dt + (t^2-t^4)(2t)\,dt\} = -\frac{86}{3} - 6i$$

(*b*) El segmento que une (1, 1) y (2, 4) tiene como ecuación $y-1 = \frac{4-1}{2-1}(x-1)$ o sea $y = 3x-2$. Encontramos entonces que

$$\int_{x=1}^{2} \{[x^2-(3x-2)^2]\,dx - 2x(3x-2)3\,dx\}$$

$$+ i\int_{x=1}^{2} \{2x(3x-2)\,dx + [x^2-(3x-2)^2]3\,dx\} = -\frac{86}{3} - 6i$$

(*c*) Desde $1+i$ hasta $2+i$ [o sea, de (1, 1) a (2, 1)], $y = 1$, $dy = 0$, y tendremos que

$$\int_{x=1}^{2} (x^2-1)\,dx + i\int_{x=1}^{2} 2x\,dx = \frac{4}{3} + 3i$$

De $2+i$ hasta $2+4i$ [de (2, 1) a (2, 4)], $x = 2$, $dx = 0$ y tendremos que

$$\int_{y=1}^{4} -4y\,dy + i\int_{y=1}^{4} (4-y^2)\,dy = -30 - 9i$$

Sumando, $\left(\frac{4}{3}+3i\right) + (-30-9i) = -\frac{86}{3} - 6i.$

Método 2.

Las integrales de línea son independientes del camino [véase el problema 19]; vimos así cómo coincidieron los valores de las partes (*a*), (*b*) y (*c*). En tal caso la integral puede calcularse directamente como en variable real, como sigue:

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{1+i}^{2+4i} = \frac{(2+4i)^3}{3} - \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{86}{3} - 6i$$

19. **(*a*) Demostrar el teorema de Cauchy: Si $f(z)$ es analítica dentro y en la frontera de una región encerrada por una curva cerrada simple C, entonces $\oint_C f(z)\,dz = 0$.**

(*b*) Bajo estas condiciones demostrar que $\int_{P_1}^{P_2} f(z)\,dz$ es independiente del camino que une P_1 y P_2.

(*a*) $$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u+iv)(dx+i\,dy) = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$$

Por el teorema de Green,

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad \oint_C v\,dx + u\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

donde $\mathcal{R}$ es la región acotada por C.

Como $f(z)$ es analítica, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ (problema 12), de tal manera que las integrales valen cero; entonces $\oint_C f(z)\,dz = 0$. Hemos supuesto en este proceso de derivación (lo mismo para las derivadas parciales) que las funciones son continuas.

(*b*) Consideremos dos caminos cualesquiera de P_1 a P_2 [véase la Fig. 5-10]. Por el teorema de Cauchy,

$$\int_{P_1AP_2BP_1} f(z)\,dz = 0$$

Entonces $\displaystyle\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz + \int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = 0$

o sea $\displaystyle\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz = -\int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = \int_{P_1BP_2} f(z)\,dz$

es decir, que integral a lo largo de P_1AP_2 (camino 1) = integral a lo largo de P_1BP_2 (camino 2), de tal suerte que la integral es independiente del camino que une a P_1 con P_2.

Esto explica el resultado del problema 18, ya que $f(z) = z^2$ es analítica.

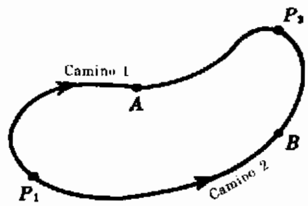


Fig. 5-10

20. Si $f(z)$ es analítica dentro y en la frontera de una región acotada por dos curvas cerradas C_1 y C_2 [véase la Fig. 5-11], demostrar que

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

Construyamos, como en la Fig. 5-11, un segmento AB (llamado *corte de cruce*) que conecta un punto en C_1 con uno de C_2 [véase la Fig. 5-11]. Por el teorema de Cauchy (problema 19),

$$\int_{AQPABRSTBA} f(z)\,dz = 0$$

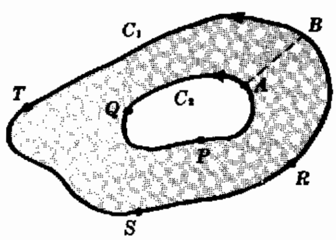


Fig. 5-11

puesto que $f(z)$ es analítica tanto en la región sombreada como en su frontera. Entonces

$$\int_{AQPA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{BRSTB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0 \qquad (1)$$

Pero $\displaystyle\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz$. Entonces, por (*1*)

$$\int_{AQPA} f(z)\,dz = -\int_{BRSTB} f(z)\,dz = \int_{BTSRB} f(z)\,dz$$

es decir,

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

Obsérvese que $f(z)$ no necesita ser analítica *dentro* de la curva C_2.

21. (*a*) Demostrar que $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$ donde C es una curva cerrada simple que encierra una región de la cual $z = a$ es un punto interior.

(*b*) ¿Cuál es el valor de la integral si $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$?

(*a*) Sea C_1 una circunferencia de radio y centro en $z = a$ [véase la Fig. 5-12]. Como $(z-a)^{-n}$ es analítica dentro y sobre la frontera de la región comprendida entre C y C_1, por el problema 20 tenemos que

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

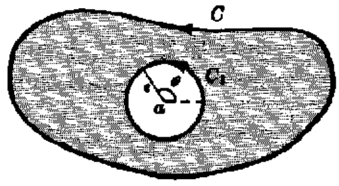


Fig. 5-12

Para calcular esta última integral nótese que sobre C_1 ocurre que $|z-a| = \epsilon$ o $z - a = \epsilon e^{i\theta}$ y $dz = i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta$. La integral será igual a

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}\,d\theta = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\bigg|_0^{2\pi} = 0 \qquad \text{Si } n \neq 1$$

Si $n = 1$, la integral será $i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$.

(*b*) Para $n = 0, -1, -2, \ldots$ el integrando es $1, (z-a), (z-a)^2, \ldots$ y es analítica dentro de toda la región acotada por C_1 incluyendo $z = a$. Entonces, por el teorema de Cauchy, la integral es cero.

22. Calcular $\oint_C \frac{dz}{z-3}$ donde C es (*a*) la circunferencia $|z| = 1$, (*b*) la circunferencia $|z+i| = 4$.

(*a*) Como $z = 3$ no es punto interior a $|z| = 1$, la integral es cero (problema 19).

(*b*) Como $z = 3$ es interior a $|z+i| = 4$, la integral es igual a $2\pi i$ (problema 21).

23. Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre la frontera de la región acotada por una curva cerrada simple C y a es cualquier punto dentro de la región, demostrar que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

De acuerdo con el problema 20 y la figura del problema 21 tenemos

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Haciendo $z - a = \epsilon e^{i\theta}$, la última integral se convierte en $i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta$. Pero, como $f(z)$ es analítica, entonces es continua. Así,

$$\lim_{\epsilon\to 0} i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta = i\int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\theta = 2\pi i\,f(a)$$

y el resultado es inmediato.

24. Calcular (*a*) $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz$, (*b*) $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$ donde C es la circunferencia $|z-1| = 3$.

(*a*) Como $z = \pi$ está adentro, $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = \cos\pi = -1$ haciendo $f(z) = \cos z$ y $a = \pi$ en el problema 23. Entonces $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = -2\pi i$.

(*b*)
$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = \oint_C e^z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \oint_C \frac{e^z}{z}\,dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1}\,dz$$
$$= 2\pi i e^0 - 2\pi i e^{-1} = 2\pi i(1 - e^{-1})$$

por el problema 23, ya que, $z = 0$ y $z = -1$ son puntos interiores.

25. Calcular $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$ donde C es una curva cerrada simple que encierra a $z = 1$.

Método 1. Por la fórmula integral de Cauchy, $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$.

Si $n = 2$ y $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$, entonces $f''(1) = 10$. Así

$$10 = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz \qquad \text{o} \qquad \oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = 10\pi i$$

Método 2. $5z^2 - 3z + 2 = 5(z-1)^2 + 7(z-1) + 4$. Entonces,

$$\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = \oint_C \frac{5(z-1)^2+7(z-1)+4}{(z-1)^3}\,dz$$

$$= 5\oint_C \frac{dz}{z-1} + 7\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2} + 4\oint_C \frac{dz}{(z-1)^3} = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0)$$

$$= 10\pi i$$

por el problema 21.

SERIES Y SINGULARIDADES

26. Determinar los valores de z para los cuales converge cada una de las series dadas.

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$. El n-ésimo término $= u_n = \frac{z^n}{n^2 2^n}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}}\cdot\frac{n^2 2^n}{z^n}\right| = \frac{|z|}{2}$$

Según el criterio de la razón tenemos que la serie converge si $|z| < 2$ y diverge si $|z| > 2$. Cuando $|z| = 2$ el criterio de la razón no se puede aplicar.

Sin embargo, la serie de los valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2 2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n^2 2^n}$ converge si $|z| = 2$ puesto que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

Así, la serie converge (absolutamente) para $|z| \leqq 2$, es decir, en todos los puntos del círculo y la circunferencia $|z| = 2$.

(*b*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$. Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-z^2}{2n(2n+1)}\right| = 0$$

Entonces la serie, que representa sen z, converge para todos los valores de z.

(*c*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n}$. Tenemos que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-i)^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(z-i)^n}\right| = \frac{|z-i|}{3}$

La serie converge si $|z-i| < 3$ y diverge si $|z-i| > 3$.

Si $|z-i| = 3$, entonces $z - i = 3e^{i\theta}$ y la serie se convierte en $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}$. Esta serie diverge ya que el término no tiende a cero cuando $n\to\infty$.

Así, la serie converge dentro del círculo pero no en la circunferencia $|z-i| = 3$.

27. Demostrar que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es absolutamente convergente para $|z| \leq \mathcal{R}$, entonces es uniformemente convergente para estos valores de z.

Las definiciones, teoremas y demostraciones de las series de números complejos son análogas a las series de números reales.

En particular, se dice que una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ es *absolutamente convergente* en una región $\mathcal{R}$, cuando $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$ converge en $\mathcal{R}$. Podemos demostrar también que si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$ es convergente en $\mathcal{R}$, entonces también lo es $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$, es decir, que una serie absolutamente convergente es convergente.

Además, una serie $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$ convergente a una función suma $S(z)$ en una región $\mathcal{R}$ se dice que es *uniformemente convergente en* $\mathcal{R}$ si para cualquier $\epsilon > 0$ se puede hallar un N tal que

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon \quad \text{para todo } n > N$$

donde N depende solamente de ϵ y no de la elección particular de z en $\mathcal{R}$, y donde

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z)$$

Un criterio importante para la convergencia uniforme es el siguiente: Si para todo z en $\mathcal{R}$ podemos encontrar constantes M_n tales que

$$|u_n(z)| \leq M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} M_n \quad \text{converge}$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformemente en $\mathcal{R}$. Este se llama el *criterio de Weierstrass*.

En este problema particular tenemos que

$$|a_n z^n| \leq |a_n| R^n = M_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Como por hipótesis $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, del criterio de Weierstrass se deduce que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente para $|z| \leq R$.

28. Localizar en el plano z todas las singularidades para cada función; si las hay, decir de qué tipo son.

(*a*) $\dfrac{z^2}{(z+1)^3}$. $\quad z = -1$ es un polo de orden 3.

(*b*) $\dfrac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$. $\quad z = 4$ es un polo de orden 2 (polo doble); $z = i$ y $z = 1 - 2i$ son polos de orden 1 (polos simples).

(*c*) $\dfrac{\operatorname{sen} mz}{z^2 + 2z + 2}$, $m \neq 0$. $\quad$ Como $z^2 + 2z + 2 = 0$ cuando $z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$, podemos escribir $z^2 + 2z + 2 = \{z - (-1+i)\}\{z - (-1-i)\} = (z+1-i)(z+1+i)$.

La función tiene dos polos simples: $z = -1 + i$ y $z = -1 - i$.

(*d*) $\dfrac{1 - \cos z}{z}$. $\quad z = 0$ parece ser una singularidad; sin embargo, como $\lim_{z \to 0} \dfrac{1 - \cos z}{z} = 0$, ésta es una singularidad evitable.

Otro método.

Como $\dfrac{1-\cos z}{z} = \dfrac{1}{z}\left\{1 - \left(1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \cdots\right)\right\} = \dfrac{z}{2!} - \dfrac{z^3}{4!} + \cdots$, vemos que $z = 0$ es una singularidad evitable.

(*e*) $e^{-1/(z-1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{2!\,(z-1)^4} - \cdots$.

Esta es una serie de Laurent en la cual la parte principal tiene un número infinito de términos no nulos. Entonces $z = 1$ es una *singularidad esencial.*

(*f*) e^z.

Esta función no tiene singularidad finita. Sin embargo, haciendo $z = 1/u$, obtenemos $e^{1/u}$ que tiene una singularidad esencial en $u = 0$. Concluimos que $z = \infty$ es una singularidad esencial de e^z.

En general, cuando queremos determinar la naturaleza de una posible singularidad de $f(z)$ en $z = \infty$, hacemos $z = 1/u$ y examinamos el comportamiento de la nueva función en $u = 0$.

29. Si $f(z)$ es analítica en el círculo y la circunferencia de radio R y centro en a, y si $a + h$ es cualquier punto dentro de C, probar el *teorema de Taylor:*

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots$$

Por la fórmula integral de Cauchy (problema 23), tenemos que

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z-a-h} \tag{1}$$

Dividiendo,

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{(z-a)\,[1-h/(z-a)]}$$

$$= \frac{1}{(z-a)}\left\{1 + \frac{h}{(z-a)} + \frac{h^2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{(z-a)^n} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^n\,(z-a-h)}\right\} \tag{2}$$

Sustituyendo (*2*) en (*1*) y usando las fórmulas integrales de Cauchy tenemos que

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} + \frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + R_n$$

$$= f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n$$

donde $$R_n = \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

Ahora si z está sobre C, $\left|\dfrac{f(z)}{z-a-h}\right| \leqq M$ y $|z-a| = R$, al utilizar la fórmula (*14*) de la pág. 140 y teniendo en cuenta que la longitud de C es $2\pi R$ obtenemos,

$$R_n \leqq \frac{|h|^{n+1}M}{2\pi R^{n+1}} \cdot 2\pi R$$

Cuando $n \to \infty$, $|R_n| \to 0$. Entonces $R_n \to 0$ y el resultado es inmediato.

Si $f(z)$ es analítica en una región anular $r_1 \leqq |z-a| \leqq r_2$, podemos generalizar la serie de Taylor a la serie de Laurent [véase el problema 119]. En algunos casos como el que muestra el problema 30, la serie de Laurent puede obtenerse mediante la conocida serie de Taylor.

30. Hallar la serie de Laurent alrededor de la singularidad indicada para cada una de las siguientes funciones. Identificar el tipo de singularidad y determinar la región de convergencia de cada serie.

(*a*) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$; $z=1$. Sea $z-1=u$. Entonces $z=1+u$ y

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{1+u}}{u^2} = e\cdot\frac{e^u}{u^2} = \frac{e}{u^2}\left\{1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\cdots\right\}$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\frac{e}{2!}+\frac{e(z-1)}{3!}+\frac{e(z-1)^2}{4!}+\cdots$$

$z=1$ en un *polo de orden 2* o *polo doble*.

La serie converge para todos los valores de $z \neq 1$.

(*b*) $z\cos\dfrac{1}{z}$; $z=0$.

$$z\cos\frac{1}{z} = z\left(1-\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}-\frac{1}{6!\,z^6}+\cdots\right) = z-\frac{1}{2!\,z}+\frac{1}{4!\,z^3}-\frac{1}{6!\,z^5}+\cdots$$

$z=0$ es una *singularidad esencial*.

La serie converge para todo $z \neq 0$.

(*c*) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z-\pi}$; $z=\pi$. Sea $z-\pi=u$. Entonces $z=u+\pi$ y

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z-\pi} = \frac{\operatorname{sen}(u+\pi)}{u} = -\frac{\operatorname{sen} u}{u} = -\frac{1}{u}\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$= -1+\frac{u^2}{3!}-\frac{u^4}{5!}+\cdots = -1+\frac{(z-\pi)^2}{3!}-\frac{(z-\pi)^4}{5!}+\cdots$$

$z=\pi$ es una *singularidad evitable*.

La serie converge para todos los valores de z.

(*d*) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z=-1$. Sea $z+1=u$. Entonces

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{u-1}{u}(1-u+u^2-u^3+u^4-\cdots)$$

$$= -\frac{1}{u}+2-2u+2u^2-2u^3+\cdots$$

$$= -\frac{1}{z+1}+2-2(z+1)+2(z+1)^2-\cdots$$

$z=-1$ es un *polo de orden 1* o *polo simple*.

La serie converge para todo z tal que $0<|z+1|<1$.

(*e*) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$; $z=0,-2$.

Caso 1. $z=0$. Usando el teorema del binomio,

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8z(1+z/2)^3} = \frac{1}{8z}\left\{1+(-3)\left(\frac{z}{2}\right)+\frac{(-3)(-4)}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{8z}-\frac{3}{16}+\frac{3}{16}z-\frac{5}{32}z^2+\cdots$$

$z=0$ es un *polo de orden 1* o *polo simple*.

La serie converge para $0<|z|<2$.

Caso 2. $z = -2$. Sea $z + 2 = u$. Entonces

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{(u-2)u^3} = \frac{1}{-2u^3(1-u/2)} = -\frac{1}{2u^3}\left\{1 + \frac{u}{2} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^3 + \left(\frac{u}{2}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$= -\frac{1}{2u^3} - \frac{1}{4u^2} - \frac{1}{8u} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}u - \cdots$$

$$= -\frac{1}{2(z+2)^3} - \frac{1}{4(z+2)^2} - \frac{1}{8(z+2)} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}(z+2) - \cdots$$

$z = -2$ es un *polo de orden 3.*

La serie converge para $0 < |z+2| < 2$.

RESIDUOS Y TEOREMA DE LOS RESIDUOS

31. Si $f(z)$ es analítica en todas partes, dentro y en la frontera de una región limitada por una curva cerrada simple C salvo en $z = a$, el cual es un polo de orden n tal que

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

donde $a_{-n} \neq 0$, demostrar que

(*a*) $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$

(*b*) $a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$.

(*a*) Usando el problema 21, al integrar tenemos que

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}\,dz + \cdots + \oint_C \frac{a_{-1}}{z-a}\,dz + \oint_C \{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots\}\,dz$$
$$= 2\pi i\, a_{-1}$$

Como el único término que permanece es a_{-1}, lo llamamos el *residuo* de $f(z)$ en el polo $z = a$.

(*b*) Al multiplicar por $(z-a)^n$ obtenemos la serie de Taylor.

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots$$

Tomando la $(n-1)$-ésima derivada a ambos lados y haciendo que $z \to a$, obtenemos

$$(n-1)!\,a_{-1} = \lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$$

de donde se concluye el resultado.

32. Determinar los residuos de cada función en los polos que se indican.

(*a*) $\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$; $z = 2, i, -i$. Estos son polos simples. Entonces:

El residuo en $z = 2$ es $\quad \lim_{z\to 2}(z-2)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right\} = \frac{4}{5}$.

El residuo en $z = i$ es $\quad \lim_{z\to i}(z-i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{i^2}{(i-2)(2i)} = \frac{1-2i}{10}$.

El residuo en $z = -i$ es $\quad \lim_{z\to -i}(z+i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{i^2}{(-i-2)(-2i)} = \frac{1+2i}{10}$.

(b) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$; $z = 0, -2$. $z = 0$ es un polo simple, $z = -2$ es un polo de orden 3. Entonces:

El residuo en $z = 0$ es $\lim\limits_{z\to 0} z \cdot \dfrac{1}{z(z+2)^3} = \dfrac{1}{8}$

El residuo en $z = -2$ es $\lim\limits_{z\to -2} \dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dz^2}\left\{(z+2)^3 \cdot \dfrac{1}{z(z+2)^3}\right\}$

$$= \lim_{z\to -2} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to -2}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^3}\right) = -\frac{1}{8}$$

Obsérvese que estos residuos pueden obtenerse también de los coeficientes de $1/z$ y $1/(z+2)$ en las respectivas series de Laurent [véase el problema 30(c)].

(c) $\dfrac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$; $z = 3$, es un polo de orden 2 o polo doble. Entonces:

El residuo es $\lim\limits_{z\to 3}\dfrac{d}{dz}\left\{(z-3)^2 \cdot \dfrac{ze^{zt}}{(z-3)^2}\right\} = \lim\limits_{z\to 3}\dfrac{d}{dz}(ze^{zt}) = \lim\limits_{z\to 3}(e^{zt} + zte^{zt})$

$$= e^{3t} + 3te^{3t}$$

(d) $z = 5\pi$, es un polo de orden 1. Entonces:

El residuo es $\lim\limits_{z\to 5\pi}(z-5\pi)\cdot\dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \left(\lim\limits_{z\to 5\pi}\dfrac{z-5\pi}{\operatorname{sen} z}\right)\left(\lim\limits_{z\to 5\pi}\cos z\right) = \left(\lim\limits_{z\to 5\pi}\dfrac{1}{\cos z}\right)(-1)$

$$= (-1)(-1) = 1$$

Aquí hemos aplicado la regla de L'Hospital que, como puede demostrarse, es válida en variable compleja.

33. Si $f(z)$ es analítica dentro y en la frontera de la región comprendida por una curva cerrada simple, excepto en algunos polos interiores $a, b, c, \ldots$, demostrar que

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\ i\ [\text{suma de los residuos de } f(z) \text{ en los polos } a, b, c, \text{ etc.}]$$

Véase la Fig. 5-13.

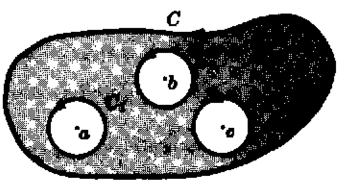


Fig. 5-13

Por un razonamiento similar al del problema 20 (es decir, mediante la construcción de cortes de cruce desde C hasta C_1, C_2, C_3, etc.), tenemos que

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots$$

Para el polo a,

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

Entonces en el problema 31, $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$.

Análogamente, para el polo b, $f(z) = \dfrac{b_{-n}}{(z-b)^n} + \cdots + \dfrac{b_{-1}}{(z-b)} + b_0 + b_1(z-b) + \cdots$

de manera que $$\oint_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i\, b_{-1}$$

Al continuar de esta manera vemos que

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + \cdots) = 2\pi i \text{ (suma de los residuos)}.$$

34. Calcular $\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z-1)(z+3)^2}$ donde C es dada por (*a*) $|z| = 3/2$, (*b*) $|z| = 10$.

El residuo en el polo simple $z = 1$ es $\lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \frac{e}{16}$

El residuo en el polo doble $z = -3$ es

$$\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left\{(z+3)^2\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \lim_{z\to -3}\frac{(z-1)e^z - e^z}{(z-1)^2} = \frac{-5e^{-3}}{16}$$

(*a*) Como $|z| = 3/2$ encierra solamente el polo $z = 1$,

$$\text{la integral requerida} = 2\pi i\left(\frac{e}{16}\right) = \frac{\pi i e}{8}$$

(*b*) Como $|z| = 10$ encierra los polos $z = 1$ y $z = -3$,

$$\text{la integral requerida} = 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\right) = \frac{\pi i(e - 5e^{-3})}{8}$$

EVALUACION DE INTEGRALES DEFINIDAS

35. Si $|f(z)| \leqq \frac{M}{R^k}$ para $z = Re^{i\theta}$, donde $k > 1$ y M son constantes, demostrar que $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ donde Γ es el arco semicircular de radio R que se muestra en la Fig. 5-14.

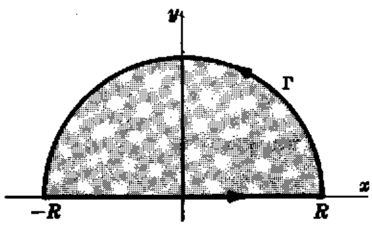


Fig. 5-14

Por el resultado (*14*) de la Pág. 140 tenemos que

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqq \int_\Gamma |f(z)|\,|dz| \leqq \frac{M}{R^k}\cdot\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

puesto que la longitud del arco $L = \pi R$. Entonces

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| = 0 \quad \text{de modo que} \quad \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

36. Demostrar que, si $z = Re^{i\theta}$, $|f(z)| \leqq \frac{M}{R^k}$, $k > 1$ si $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$.

Si $z = Re^{i\theta}$, $|f(z)| = \left|\frac{1}{1+R^4e^{4i\theta}}\right| \leqq \frac{1}{|R^4e^{4i\theta}|-1} = \frac{1}{R^4-1} \leqq \frac{2}{R^4}$ si R es suficientemente grande (digamos por ejemplo $R > 2$) para que $M = 2$, $k = 4$.

Obsérvese que se ha utilizado la desigualdad $|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ donde $z_1 = R^4e^{4i\theta}$ y $z_2 = 1$.

37. Calcular $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$.

Considere $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$, donde C es el contorno cerrado del problema 35 consistente del segmento rectilíneo de $-R$ a R y la semicircunferencia Γ, y el recorrido en el sentido positivo.

Como $z^4 + 1 = 0$ cuando $z = e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}$, estos son polos simples de $1/(z^4+1)$. Solamente los polos $e^{\pi i/4}$ y $e^{3\pi i/4}$ están dentro de la región. Usando la regla de L'Hospital,

$$\text{Residuo en } e^{\pi i/4} = \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \left\{(z - e^{\pi i/4})\frac{1}{z^4+1}\right\}$$

$$= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4}$$

$$\text{Residuo en } e^{3\pi i/4} = \lim_{z\to e^{3\pi i/4}} \left\{(z - e^{3\pi i/4})\frac{1}{z^4+1}\right\}$$

$$= \lim_{z\to e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4}$$

Así,
$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\{\tfrac{1}{4}e^{-3\pi i/4} + \tfrac{1}{4}e^{-9\pi i/4}\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

es decir,
$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

Tomando el límite cuando $R\to\infty$ en los dos miembros de (2) y usando los resultados del problema 36 tenemos que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$, la integral requerida vale $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

38. Demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}$.

Los polos de $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ encerrados por el contorno C del problema 35 son $z = i$ de orden 2 y $z = -1+i$ de orden 1.

El residuo en $z = i$ es $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{9i-12}{100}$

El residuo en $z = -1+i$ es $\displaystyle\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1-i)(z+1+i)} = \frac{3-4i}{25}$

Entonces
$$\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = 2\pi i\left\{\frac{9i-12}{100}+\frac{3-4i}{25}\right\} = \frac{7\pi}{50}$$

o
$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} + \int_{\Gamma} \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = \frac{7\pi}{50}$$

Tomando el límite cuando $R\to\infty$ y observando que la segunda integral tiende a cero por el problema 35, obtenemos el resultado requerido.

39. Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\,\mathrm{sen}\,\theta}$.

Sea $z = e^{i\theta}$. Entonces $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$ de manera que

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\,\mathrm{sen}\,\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{5+3\left(\dfrac{z-z^{-1}}{2i}\right)} = \oint_C \frac{2\,dz}{3z^2+10iz-3}$$

donde C es la circunferencia de radio unidad con centro en el origen, como se muestra en la Fig. 5-15.

Los polos de $\dfrac{2}{3z^2 + 10iz - 3}$ son los polos simples

$$z = \frac{-10i \pm \sqrt{-100 + 36}}{6} = \frac{-10i \pm 8i}{6} = -3i,\ -i/3.$$

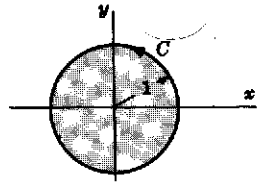


Fig. 5-15

Solamente $-i/3$ está en la región interior a C.

Residuo en $-i/3 \;=\; \lim\limits_{z \to -i/3} \left(z + \dfrac{i}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3z^2 + 10iz - 3}\right) \;=\; \lim\limits_{z \to -i/3} \dfrac{2}{6z + 10i} \;=\; \dfrac{1}{4i}$, por la regla de L'Hospital.

Entonces $\displaystyle\oint_C \frac{2\,dz}{3z^2 + 10iz - 3} = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$ es el valor requerido.

40. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{12}$.

Si $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$, $\cos 3\theta = \dfrac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} = \dfrac{z^3 + z^{-3}}{2}$, $dz = iz\,d\theta$.

Entonces $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,d\theta = \oint_C \frac{(z^3 + z^{-3})/2}{5 - 4\left(\dfrac{z + z^{-1}}{2}\right)}\,\frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)}\,dz$$

donde C es el contorno del problema 39.

El integrando tiene un polo de orden 3 en $z = 0$ y un polo simple $z = \frac{1}{2}$ en la región encerrada por C.

El residuo en $z = 0$ es $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3 \cdot \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)}\right\} = \frac{21}{8}$.

El residuo en $z = \frac{1}{2}$ es $\displaystyle\lim_{z \to 1/2} \left\{(z - \tfrac{1}{2}) \cdot \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)}\right\} = -\frac{65}{24}$.

Entonces $\displaystyle -\frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)}\,dz = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left\{\frac{21}{8} - \frac{65}{24}\right\} = \frac{\pi}{12}$ como se quería demostrar.

41. Si $|f(z)| \leq \dfrac{M}{R^k}$ para $z = Re^{i\theta}$, donde $k > 0$ y M son constantes, demostrar que

$$\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma e^{imz} f(z)\,dz = 0$$

donde Γ es el arco semicircular del contorno del problema 35 y m es una constante positiva.

Si $z = Re^{i\theta}$, $\displaystyle\int_\Gamma e^{imz} f(z)\,dz = \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\,d\theta$.

Entonces
$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\,d\theta\right| &\leq \int_0^\pi \left|e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\right| d\theta \\
&= \int_0^\pi \left|e^{imR\cos\theta - mR\,\mathrm{sen}\,\theta} f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\right| d\theta \\
&= \int_0^\pi e^{-mR\,\mathrm{sen}\,\theta}\,|f(Re^{i\theta})|\,R\,d\theta \\
&\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-mR\,\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta
\end{aligned}$$

Ahora, $\operatorname{sen}\theta \geqq 2\theta/\pi$ para $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ (véase el problema 3, Cap. 7). Entonces la última integral es menor o igual a

$$\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi}\,d\theta \quad = \quad \frac{\pi M}{mR^k}(1 - e^{-mR})$$

Cuando $R \to \infty$ esto se aproxima a cero puesto que m y k son positivos. Así queda probado el resultado requerido.

42. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}, \quad m > 0.$

Considérese $\displaystyle\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz$ donde C es el contorno del problema 35.

El integrando tiene poloa simples en $z = \pm i$ pero únicamente $z = i$ está encerrado por C.

El residuo en $z = i$ es $\displaystyle\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{e^{-m}}{2i}.$

Entonces
$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz \quad = \quad 2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) \quad = \quad \pi e^{-m}$$

o sea
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz \quad = \quad \pi e^{-m}$$

es decir
$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} mx}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz \quad = \quad \pi e^{-m}$$

de manera que
$$2\int_0^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz \quad = \quad \pi e^{-m}$$

Tomando el lim $R \to \infty$ y usando el problema 41 para demostrar que la integral a lo largo de Γ tiende a cero, obtenemos el resultado buscado.

43. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

El método del problema 42 nos lleva a considerar la integral de e^{iz}/z a lo largo del contorno del problema 35. Sin embargo, como $z = 0$ pertenece a la trayectoria de integración y como no se puede integrar sobre un camino que pase por una singularidad, debemos modificar dicho contorno para que no pase por $z = 0$ cambiándolo por el contorno C' o sea el $ABDEFGHJA$, que se muestra en la Fig. 5-16.

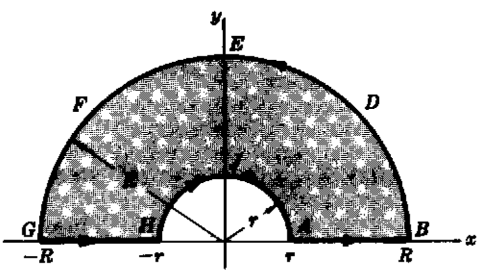


Fig. 5-16

Como $z = 0$ está por fuera de C', tenemos que

$$\int_{C'} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \quad = \quad 0$$

o
$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \quad = \quad 0$$

Remplazando x por $-x$ en la primera integral, al combinar ésta con la tercera, obtenemos

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \quad = \quad 0$$

o bien
$$2i\int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \quad = \quad -\int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

Hacemos que $r \to 0$ y $R \to \infty$. Por el problema 41, la segunda integral de la derecha tiende a cero y con la primera ocurre que

$$- \lim_{r \to 0} \int_{\pi}^{0} \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\, d\theta \quad = \quad - \lim_{r \to 0} \int_{\pi}^{0} ie^{ire^{i\theta}}\, d\theta \quad = \quad \pi i$$

puesto que podemos tomar límite bajo el signo integral.

Tenemos entonces que

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ r \to 0}} 2i \int_{r}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \;=\; \pi i \qquad \text{o} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

PROBLEMAS VARIOS

44. Consideremos una transformación del plano z (plano xy) en el plano w (plano uv) definida por $w = z^2$, consideremos también el triángulo del plano z cuyos vértices son $A(2, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$. (a) Demostrar que la *imagen* o *aplicación* de este triángulo es un triángulo curvilíneo del plano uv. (b) Hallar los ángulos de este triángulo curvilíneo y compararlos con los del triángulo original.

(a) Como $w = z^2$, tenemos que $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ son las ecuaciones de transformación; entonces el punto $A(2, 1)$ del plano xy se aplica en el punto $A'(3, 4)$ del plano uv (obsérvense las figuras). Análogamente, los puntos B y C se aplican en B' y C' respectivamente. Los segmentos rectilíneos AC, BC, AB, del triángulo ABC se aplican en los segmentos parabólicos $A'C'$, $B'C'$, $A'C'$ del triángulo curvilíneo $A'B'C'$ con las ecuaciones que hay escritas en las partes (a) y (b) de la Fig. 5-17.

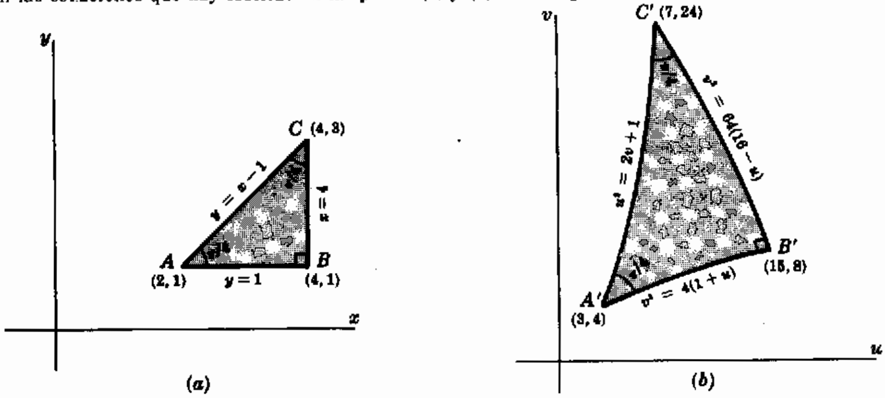


Fig. 5-17

(b) La pendiente de la tangente a la curva $v^2 = 4(1 + u)$ en $(3, 4)$ es $\quad m_1 = \left.\dfrac{dv}{du}\right|_{(3,4)} = \left.\dfrac{2}{v}\right|_{(3,4)} = \dfrac{1}{2}$.

La pendiente de la tangente a la curva $u^2 = 2v + 1$ en $(3, 4)$ es $\quad m_2 = \left.\dfrac{dv}{du}\right|_{(3,4)} = u = 3$.

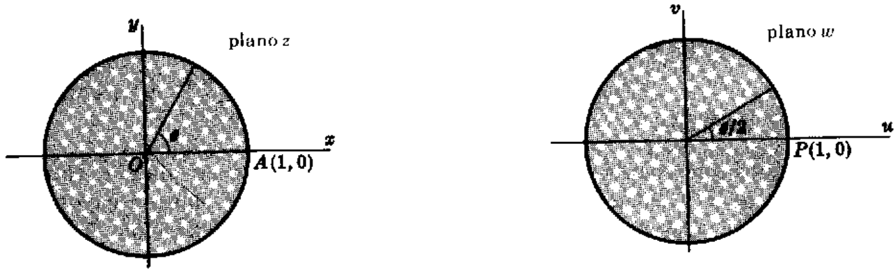
En A' el ángulo θ entre las dos curvas está dado por

$$\tan \theta \;=\; \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \;=\; \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + (3)(\frac{1}{2})} \;=\; 1, \qquad \text{y} \qquad \theta = \pi/4$$

Análogamente, podemos ver que el ángulo entre $A'C'$ y $B'C'$ es $\pi/4$, en tanto que el ángulo entre $A'B'$ y $B'C'$ es $\pi/2$. Resulta entonces que los ángulos del triángulo curvilíneo son iguales a los correspondientes del triángulo original. En general, si $w = f(z)$ es una transformación tal que $f(z)$ es analítica, el ángulo entre dos curvas del plano z que se intersectan en $z = z_0$ tiene la misma magnitud y sentido (orientación) que el ángulo entre las imágenes de las dos curvas, siempre que $f'(z_0) \neq 0$. Esta se llama la propiedad conforme de las funciones analíticas y por esta razón la transformación $w = f(z)$ se llama una *transformación conforme* o *aplicación conforme*.

45. Consideramos la transformación del plano z en el plano w definida por $w = \sqrt{z}$. Un punto se mueve sobre la circunferencia $|z| = 1$ en sentido positivo. Demostrar que cuando el punto ha regresado por primera vez a su posición de partida, su imagen aún no ha regresado, pero cuando ha llegado por segunda vez, su imagen regresa por primera vez a su posición de partida.

Sea $z = e^{i\theta}$. Entonces $w = \sqrt{z} = e^{i\theta/2}$. Supongamos que $\theta = 0$ corresponde a la posición de partida. Entonces $z = 1$ y $w = 1$ [correspondientes a A y P en las partes (a) y (b) de la Fig. 5-18].



(a) (b)

Fig. 5-18

Cuando se ha realizado una revolución completa en el plano z, $\theta = 2\pi$, $z = 1$, pero $w = e^{i\theta/2} = e^{i\pi} = -1$ de tal manera que el punto imagen no ha regresado aún a su punto de partida.

Sin embargo, después de dos revoluciones completas en el plano z, $\theta = 4\pi$, $z = 1$ y $w = e^{i\theta/2} = e^{2\pi i} = 1$ de tal suerte que por primera vez ha retornado a su punto de partida el punto imagen.

De lo anterior, se deduce que w no es una función sino una *relación a valor doble de* z, es decir, que dado z, hay dos valores para w. Si queremos considerarla como una función debemos restringir θ. Podemos escoger por ejemplo que $0 \leqq \theta < 2\pi$, aunque hay otras posibilidades. Esto representa una rama de la relación a doble valor $w = \sqrt{z}$. Si salimos de este intervalo encontramos una segunda rama, por ejemplo en $2\pi \leqq \theta < 4\pi$. El punto $z = 0$ alrededor del cual se efectúa la rotación se llama *punto de ramificación*. En forma equivalente podemos asegurar que $f(z) = \sqrt{z}$ es una función al imponerle la condición de que no corte el eje Ox que se llama una *recta de ramificación*.

46. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, $\quad 0 < p < 1$.

Consideremos $\displaystyle\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz$. Como $z = 0$ es un punto de ramificación, escogemos un contorno C como el de la Fig. 5-19 en el cual AB y GH en realidad coinciden con el eje x, pero se dibujan separados para lograr una mejor visualización.

El integrando tiene como polo a $z = -1$ que está encerrado por C.

El residuo en $z = -1 = e^{\pi i}$ es

$$\lim_{z\to -1} (z+1)\,\frac{z^{p-1}}{1+z} \;=\; (e^{\pi i})^{p-1} \;=\; e^{(p-1)\pi i}$$

Entonces $\displaystyle\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$

omitiendo el integrando escribimos

$$\int_{AB} + \int_{BDEFG} + \int_{GH} + \int_{HJA} = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

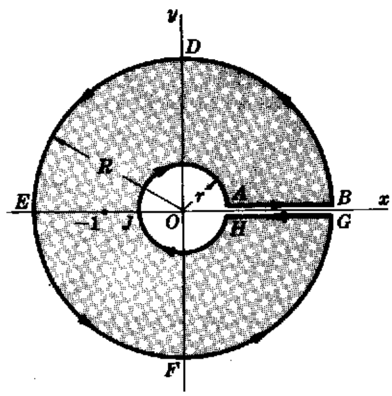


Fig. 5-19

Entonces tenemos que

$$\int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1}\, iRe^{i\theta}\, d\theta}{1+Re^{i\theta}} + \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}\,dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(re^{i\theta})^{p-1}\, ire^{i\theta}\, d\theta}{1+re^{i\theta}} = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

Aquí hemos utilizado $z = xe^{2\pi i}$ para la integral a lo largo de GH puesto que el argumento de z se incrementa en 2π al recorrer la circunferencia $BDEFG$.

Tomando el límite cuando $r \to 0$ y $R \to \infty$ y teniendo en cuenta que la segunda y la cuarta integrales tienden a cero, encontramos que

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_\infty^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)}\, x^{p-1}}{1+x}\,dx = 2\pi\, e^{(p-1)\pi i}$$

o sea

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

de manera que

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$$

Problemas propuestos

NUMEROS COMPLEJOS. FORMA POLAR

47. Efectuar las operaciones indicadas:

(*a*) $2(5-3i) - 3(-2+i) + 5(i-3)$ (*c*) $\dfrac{5}{3-4i} + \dfrac{10}{4+3i}$ (*e*) $\left|\dfrac{2-4i}{5+7i}\right|^2$

(*b*) $(3-2i)^3$ (*d*) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ (*f*) $\dfrac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$

Resp. (*a*) $1-4i$, (*b*) $-9-46i$, (*c*) $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$, (*d*) -1, (*e*) $\frac{10}{37}$, (*f*) $\frac{16}{5} - \frac{2}{5}i$

48. Si z_1 y z_2 son complejos, probar que (*a*) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, (*b*) $|z_1^2| = |z_1|^2$ y decir qué restricciones hay.

49. Demostrar que (*a*) $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$, (*b*) $|z_1 + z_2 + z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3|$, (*c*) $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$.

50. Hallar todas las soluciones de $2z^4 - 3z^3 - 7z^2 - 8z + 6 = 0$. *Resp.* $3, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

51. Sean P_1 y P_2 los puntos del diagrama de Argand que representan a z_1 y z_2 respectivamente. Construyamos las líneas OP_1 y OP_2, donde O es el origen. Demostrar que $z_1 + z_2$ está representado por el punto P_3, donde OP_3 es la diagonal del paralelogramo con lados OP_1 y OP_2. Esta se llama la *ley del paralelogramo* para la suma entre números complejos. Por ésta y otras propiedades los complejos se pueden considerar como *vectores* en dos dimenaiones.

52. Interpretar geométricamente las desigualdades del problema 49.

53. Expresar en forma polar (*a*) $3\sqrt{3} + 3i$, (*b*) $-2-2i$, (*c*) $1 - \sqrt{3}\,i$, (*d*) 5, (*e*) $-5i$.

Resp. (*a*) $6 \operatorname{cis} \pi/6$, (*b*) $2\sqrt{2} \operatorname{cis} 5\pi/4$, (*c*) $2 \operatorname{cis} 5\pi/3$, (*d*) $5 \operatorname{cis} 0$, (*e*) $5 \operatorname{cis} 3\pi/2$

54. Calcular (*a*) $[2(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)][5(\cos 110^\circ + i \operatorname{sen} 110^\circ)]$, (*b*) $\dfrac{12 \operatorname{cis} 16^\circ}{(3 \operatorname{cis} 44^\circ)(2 \operatorname{cis} 62^\circ)}$.

Resp. (*a*) $-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\,i$, (*b*) $-2i$

55. Determinar y representar gráficamente las raíces que se indican a continuación:

(*a*) $(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i)^{1/3}$, (*b*) $(-1)^{1/5}$, (*c*) $(\sqrt{3}-i)^{1/3}$, (*d*) $i^{1/4}$.

Resp. (*a*) $2 \operatorname{cis} 15°$, $2 \operatorname{cis} 135°$, $2 \operatorname{cis} 255°$

(*b*) $\operatorname{cis} 36°$, $\operatorname{cis} 108°$, $\operatorname{cis} 180° = -1$, $\operatorname{cis} 252°$, $\operatorname{cis} 324°$

(*c*) $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 110°$, $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 230°$, $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 350°$

(*d*) $\operatorname{cis} 22{,}5°$, $\operatorname{cis} 112{,}5°$, $\operatorname{cis} 202{,}5°$, $\operatorname{cis} 292{,}5°$

56. Si $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ y $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$, demostrar (*a*) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$, (*b*) $z_1/z_2 = (r_1/r_2) \operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$. Hacer las interpretaciones geométricas.

FUNCIONES, LIMITES Y CONTINUIDAD

57. Describir el lugar geométrico de (*a*) $|z+2-3i| = 5$, (*b*) $|z+2| = 2|z-1|$, (*c*) $|z+5|-|z-5| = 6$. Construir una figura en cada caso.

Resp. (*a*) Circunferencia $(x+2)^2+(y-3)^2 = 25$, centro $(-2, 3)$, radio 5.

(*b*) Circunferencia $(x-2)^2+y^2 = 4$, centro $(2, 0)$, radio 2.

(*c*) Rama de la hipérbola $x^2/9 - y^2/16 = 1$, donde $x \geqq 3$.

58. Determinar la región del plano z correspondiente a:

(*a*) $|z-2+i| \geqq 4$, (*b*) $|z| \leqq 3$, $0 \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{4}$, (*c*) $|z-3|+|z+3| < 10$.

Construir la figura en cada caso.

Resp. (*a*) Parte exterior y frontera del círculo $(x-2)^2+(y+1)^2 = 16$.

(*b*) Región del primer cuadrante acotada por $x^2-y^2 = 9$, el eje x y la recta $y = x$.

(*c*) Interior de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$

59. Expresar cada una de las siguientes funciones en la forma $u(x,y)+iv(x,y)$ donde u y v son reales.

(*a*) z^3+2iz, (*b*) $z/(3+z)$, (*c*) e^{z^2}, (*d*) $\ln(1+z)$.

Resp. (*a*) $u = x^3-3xy^2-2y$, $v = 3x^2y-y^3+2x$

(*b*) $u = \dfrac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v = \dfrac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$

(*c*) $u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v = e^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy$

(*d*) $u = \frac{1}{2}\ln\{(1+x)^2+y^2\}$, $v = \tan^{-1}\dfrac{y}{1+x}+2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

60. Utilizando las definiciones, demostrar que (*a*) $\lim\limits_{z\to z_0} z^2 = z_0^2$, (*b*) $f(z) = z^2$ es continua en $z = z_0$.

61. (*a*) Si $z = \omega$ es una raíz de $z^5 = 1$ distinta de 1, demostrar que la totalidad de las raíces son $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.

(*b*) Probar que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$.

(*c*) Generalizar los resultados de las partes (*a*) y (*b*) a la ecuación $z^n = 1$.

DERIVADAS. ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

62. (*a*) Si $w = f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, calcular $\dfrac{dw}{dz}$ directamente de la definición.

(*b*) ¿Para qué valores finitos de z $f(z)$ es no analítica?

Resp. (*a*) $1-1/z^2$, (*b*) $z = 0$

63. Considérese la función $w = z^4$. (*a*) Hallar las funciones reales u y v tales que $w = u+iv$. (*b*) Demostrar que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el plano finito. (*c*) Probar que u y v son funciones armónicas. (*d*) Calcular dw/dz. *Resp.* (*a*) $u = x^4-6x^2y^2+y^4$, $v = 4x^3y-4xy^3$ (*d*) $4z^3$

64. Demostrar que $f(z) = z|z|$ es no analítica en todas partes.

65. Demostrar que $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ es analítica en cualquier región que no contenga a $z = 2$.

66. Si la parte imaginaria de un función analítica es $2x(1-y)$, determinar (*a*) la parte real, (*b*) la función.
Resp. (*a*) $y^2 - x^2 - 2y + c$, (*b*) $2iz - z^2 + c$, donde c es real.

67. Construir una función analítica $f(z)$ tal que su parte real sea $e^{-x}(x\cos y + y \operatorname{sen} y)$ y que $f(0) = 1$.
Resp. $ze^{-z} + 1$

68. Demostrar que no puede haber función analítica cuya parte imaginaria sea $x^2 - 2y$.

69. Hallar $f(z)$ tal que $f'(z) = 4z - 3$ y $f(1+i) = -3i$. *Resp.* $f(z) = 2z^2 - 3z + 3 - 4i$

INTEGRALES DE LINEA

70. Calcular $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)\,dx + (y-x)\,dy$ a lo largo de (*a*) la parábola $y^2 = x$, (*b*) un segmento rectilíneo, (*c*) segmentos rectilíneos de $(1,1)$ a $(1,2)$ y luego a $(4,2)$, (*d*) la curva $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$.
Resp. (*a*) 34/3, (*b*) 11, (*c*) 14, (*d*) 32/3

71. Calcular $\displaystyle\oint (2x - y + 4)\,dx + (5y + 3x - 6)\,dy$ alrededor del triángulo de vértices $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,2)$ recorrido en la dirección positiva. *Resp.* 12

72. Calcular la integral de línea del ejemplo precedente, ahora alrededor de la circunferencia de radio 4 con centro en $(0,0)$. *Resp.* 64π

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO. INDEPENDENCIA DEL CAMINO

73. Comprobar el teorema en el plano en $\displaystyle\oint_C (x^2 - xy^3)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$ donde C es el cuadrado de vértices en $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, y $(0,2)$. *Resp.* Valor común = 8

74. (*a*) Sea C una curva cerrada simple que encierra una región de área A. Demostrar que si $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ son constantes, entonces

$$\oint_C (a_1x + a_2y + a_3)\,dx + (b_1x + b_2y + b_3)\,dy = (b_1 - a_2)A$$

(*b*) ¿Bajo qué condiciones vale cero la integral de la línea alrededor de cualquier camino C? *Resp.* (*b*) $a_2 = b_1$

75. Hallar el área encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
[*Sugerencia.* Las ecuaciones paramétricas son $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$.] *Resp.* $3\pi a^2/8$

76. Si $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, demostrar que $\frac{1}{2}\displaystyle\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int r^2\,d\theta$ e interpretar el resultado.

77. (*a*) Comprobar el teorema de Green en el plano para $\displaystyle\oint_C (x^3 - x^2y)\,dx + xy^2\,dy$, donde C es la frontera de la región encerrada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 16$.
(*b*) Calcular las integrales de línea de los problemas 71 y 72 mediante el teorema de Green.
Resp. (*a*) Valor común $= 120\pi$

78. Demostrar que $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)\,dx + (x^2 - 4xy^3)\,dy$ es independiente del camino que une a $(1,0)$ y $(2,1)$. (*b*) Calcular la integral de línea de la parte (*a*). *Resp.* (*b*) 5.

INTEGRALES, TEOREMA DE CAUCHY, FORMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

79. Calcular $\int_{1-2i}^{3+i} (2z+3)\,dz$:

(*a*) a lo largo del camino $x = 2t+1$, $y = 4t^2 - t - 2$ donde $0 \leqq t \leqq 1$.

(*b*) a lo largo del segmento que une $1-2i$ con $3+i$.

(*c*) a lo largo de los segmentos que van de $1-2i$ a $1+i$ y luego a $3+i$.

Resp. $17+19i$ en todos los casos

80. Calcular $\int_C (z^2 - z + 2)\,dz$, donde C es la mitad superior de la circunferencia $|z| = 1$ recorrida en sentido positivo. *Resp.* $-14/3$

81. Calcular $\oint_C \frac{z\,dz}{2z-5}$, donde C es la circunferencia (*a*) $|z| = 2$, (*b*) $|z-3| = 2$. *Resp.* (*a*) 0, (*b*) $5\pi i/2$

82. Calcular $\oint_C \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}\,dz$, donde C es: (*a*) el cuadrado de vértices en $-1-i$, $-1+i$, $-3+i$, $-3-i$; (*b*) la circunferencia $|z+i| = 3$, (*c*) la circunferencia $|z| = \sqrt{2}$. *Resp.* (*a*) $-8\pi i/3$ (*b*) $-2\pi i$ (*c*) $2\pi i/3$

83. Calcular (*a*) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{z-1}\,dz$, (*b*) $\oint_C \frac{e^z + z}{(z-1)^4}\,dz$ donde C es cualquier curva cerrada simple que encierra a $z = 1$. *Resp.* (*a*) $-2\pi i$ (*b*) $\pi i e/3$

84. Demostrar las fórmulas integrales de Cauchy.
[*Sugerencia.* Use la definición de derivada y aplique la inducción matemática.]

SERIES Y SINGULARIDADES

85. ¿Para qué valores de z converge cada serie?

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n!}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^n}{n+1}$, (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n!\,(z^2+2z+2)^{2n}$

Resp. (*a*) Para todo z (*b*) $|z-i| < 1$ (*c*) $z = -1 \pm i$

86. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ es: (*a*) Absolutamente convergente. (*b*) Uniformemente convergente para $|z| \leqq 1$.

87. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n}$ converge uniformemente dentro y sobre cualquier circunferencia de radio R tal que $|z+i| < R < 2$.

88. En cada una de las siguientes funciones localizar todas las singularidades finitas; si las hay, identificar de qué tipo son.

(*a*) $\frac{z-2}{(2z+1)^4}$, (*b*) $\frac{z}{(z-1)(z+2)^2}$, (*c*) $\frac{z^2+1}{z^2+2z+2}$, (*d*) $\cos\frac{1}{z}$, (*e*) $\frac{\operatorname{sen}(z-\pi/3)}{3z-\pi}$, (*f*) $\frac{\cos z}{(z^2+4)^2}$.

Resp. (*a*) $z = -\frac{1}{2}$, polo de orden 4.
(*b*) $z = 1$, polo simple, $z = -2$ polo doble.
(*c*) Polos simples $z = -1 \pm i$.
(*d*) $z = 0$ singularidad esencial.
(*e*) $z = \pi/3$ singularidad evitable.
(*f*) $z = \pm 2i$ polos dobles.

89. En cada una de las siguientes funciones hallar la serie de Laurent alrededor de la singularidad indicada e identificar, en cada caso, el tipo de singularidad. Decir cuál es la región de convergencia de cada serie.

(*a*) $\frac{\cos z}{z-\pi}$; $z = \pi$ (*b*) $z^2 e^{-1/z}$; $z = 0$ (*c*) $\frac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}$; $z = 1$

Resp. (*a*) $-\frac{1}{z-\pi} + \frac{z-\pi}{2!} - \frac{(z-\pi)^3}{4!} + \frac{(z-\pi)^5}{6!} - \cdots$, polo simple, todo $z \neq \pi$

(*b*) $z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} - \frac{1}{5!\,z^3} + \cdots$, singularidad esencial, todo $z \neq 0$

(*c*) $\frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{7}{16(z-1)} + \frac{9}{64} - \frac{9(z-1)}{256} + \cdots$, polo doble, $0 < |z-1| < 4$.

RESIDUOS — TEOREMA DE LOS RESIDUOS

90. En cada una de las siguientes funciones, determinar los residuos en sus polos

(*a*) $\dfrac{2z+3}{z^2-4}$, (*b*) $\dfrac{z-3}{z^3+5z^2}$, (*c*) $\dfrac{e^{zt}}{(z-2)^3}$, (*d*) $\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$.

Resp. (*a*) $z = 2;\ 7/4,\quad z = -2;\ 1/4$ (*c*) $z = 2;\quad t\ e$

(*b*) $z = 0;\ 8/25,\quad z = -5;\ -8/25$ (*d*) $z = i;\ 0,\ z = -i;\ 0$

91. Hallar el residuo de e^{zt} tan z en el polo simple $z = 3\pi/2$. *Resp.* $-e^{3\pi t/2}$

92. Calcular $\displaystyle\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z+1)(z+3)}$, donde C es una curva cerrada simple que encierra todos los polos del integrando.

Resp. $-8\pi i$

93. Si C es una curva cerrada simple que encierra a $z = \pm i$, demostrar que

$$\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz \quad = \quad \tfrac{1}{2}t \operatorname{sen} t$$

94. Si $f(z) = P(z)/Q(z)$ donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios tales que el grado de $P(z)$ es por lo menos dos menos que el de $Q(z)$, demostrar que $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz = 0$, donde C encierra todos los polos de $f(z)$.

CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Usando la integración de contornos verificar que:

95. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

96. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6+a^6} = \frac{2\pi}{3a^5},\quad a > 0$

97. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{32}$

98. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,dx = \frac{\pi}{3}$

99. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^4+a^4)^2} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}a^{-7},\quad a > 0$

100. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{\pi}{9}$

101. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

102. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

103. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{8}$

104. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$

105. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta\,d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2},\quad n = 0,1,2,3,\ldots,\quad 0 < a < 1$

106. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^3} = \frac{(2a^2+b^2)\pi}{(a^2-b^2)^{5/2}},\quad a > |b|$

107. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}2x}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi e^{-4}}{4}$

108. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi x}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi e^{-\pi}}{8}$

109. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}\pi x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{4}$

110. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}x}{x(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi(2e-3)}{4e}$

111. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

112. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3\pi}{8}$

113. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi}{2\cosh(\pi/2)}$. [*Sugerencia:* Considere $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{\cosh z}\,dz$, donde C es un rectángulo de vértices en $(-R, 0)$, $(R, 0)$, (R, π), $(-R, \pi)$. Luego haga que $R \to \infty$.]

PROBLEMAS VARIOS

114. Si $z = re^{i\theta}$ y $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, donde r y θ son coordenadas polares, demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

115. Si $w = f(z)$ donde $z = x + iy$, $w = u + iv$ y $f(z)$ es analítica, demostrar que el Jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2$$

116. Supongamos que $F(x, y)$ se convierte en $G(u, v)$ por la transformación $w = f(z)$. Demostrar que si $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, entonces en todos los puntos en que $f'(z) \neq 0$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2} = 0$.

117. Demostrar que mediante la *transformación bilineal* $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, donde $ad - bc \neq 0$, los círculos del plano z se transforman en círculos del plano w.

118. Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre la circunferencia $|z - a| = R$, demostrar la *desigualdad de Cauchy*,

$$|f^{(n)}(a)| \leqq \frac{n!\, M}{R^n}$$

donde $|f(z)| \leqq M$ dentro del círculo. [*Sugerencia.* Use las fórmulas integrales de Cauchy.]

119. Sean C_1 y C_2 circunferencias concéntricas de centro en a y radios r_1, r_2 respectivamente, donde $r_1 < r_2$. Si $a + h$ es cualquier punto de la región anular comprendida entre C_1 y C_2 y si $f(z)$ es analítica en esta región, demostrar el *teorema de Laurent*

$$f(a + h) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n h^n$$

donde
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z - a)^{n+1}}$$

C es una curva cerrada en la región anular y rodea a C_1.

[*Sugerencia.* Exprese $f(a+h) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{z - (a + h)} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)\, dz}{z - (a + h)}$ y desarrolle $\dfrac{1}{z - a - h}$ de dos maneras diferentes.]

120. Hallar un desarrollo en serie de Laurent para la función $f(z) = \dfrac{z}{(z + 1)(z + 2)}$ que converge para $1 < |z| < 2$ y diverge en cualquier otra parte.

[*Sugerencia.* Escriba $\dfrac{z}{(z + 1)(z + 2)} = \dfrac{-1}{z + 1} + \dfrac{2}{z + 2} = \dfrac{-1}{z(1 + 1/z)} + \dfrac{1}{1 + z/2}$.]

Resp. $\cdots - \dfrac{1}{z^5} + \dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z} + 1 - \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^3}{8} + \cdots$

Capítulo 6

Series e integrales de Fourier

SERIES DE FOURIER

Sea $F(x)$ una función que satisface las siguientes condiciones:

1. $F(x)$ está definida en el intervalo $c < x < c + 2l$.
2. $F(x)$ y $F'(x)$ son continuas seccionalmente en $c < x < c + 2l$.
3. $F(x + 2l) = F(x)$, es decir, $F(x)$ es periódica con período $2l$.

Entonces, en cada punto de continuidad se tiene que

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} [a_n \cos(w n t) + b_n \sin(\ldots$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (1)$$

donde

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w n t)\,dt$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(w n t)\,dt$

En un punto de discontinuidad el miembro izquierdo de (*1*) se remplaza por $\frac{1}{2}[F(x + 0) + F(x - 0)]$, es decir, el valor medio en la discontinuidad.

La serie (*1*) en la cual los coeficientes están dados por (*2*) se llama la *serie de Fourier* de $F(x)$. En muchos problemas se tiene que c vale 0 o $-l$. Si $l = \pi$, $F(x)$ tiene período 2π y (*1*) y (*2*) se pueden simplificar.

Las condiciones que acabamos de establecer se llaman las *condiciones de Dirichlet* y son condiciones suficientes (pero no necesarias) para la convergencia de series de Fourier.

FUNCIONES PARES E IMPARES

Se dice que una función $F(x)$ es impar cuando $F(-x) = -F(x)$. Así, x^3, $x^5 - 3x^3 + 2x$, sen x, tan $3x$ son funciones impares.

Se dice que una función $F(x)$ es par cuando $F(-x) = F(x)$. Así, x^4, $2x^6 - 4x^2 + 5$, cos x, $e^x + e^{-x}$ son funciones pares.

Las funciones que se muestran en las figuras 6-1 y 6-2 son impar y par respectivamente, en tanto que la de la Fig. 6-3 no es impar ni par.

En las series de Fourier correspondientes a funciones impares aparecen sólo los términos de la función seno. En las series de Fourier correspondientes a funciones pares aparecen sólo los términos del coseno (y posiblemente una constante que se puede considerar como un término del coseno).

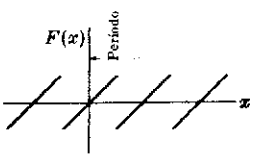


Fig. 6-1

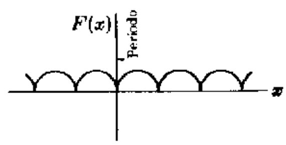


Fig. 6-2

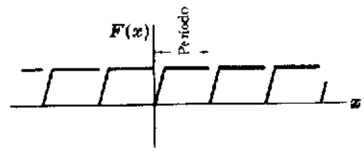


Fig. 6-3

SERIES DE FOURIER EN SENO O COSENO, DE SEMI-PERIODO

Una serie de Fourier en seno o coseno, de semi-período, es aquella en la cual se presentan términos del seno solamente o únicamente del coseno. Cuando se desea que una serie de semi-período corresponda a una función dada, la función generalmente está definida en el intervalo $(0,\ l)$ [que es la mitad del intervalo $(-l,\ l)$; de ahí el nombre de *semi-período*] y dicha función será, entonces, par o impar; así quedará perfectamente definida en cualquier otro semi-intervalo, por ejemplo en $(-l,\ 0)$. En este caso tenemos que

$$\left.\begin{aligned} a_n = 0, \quad b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l F(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \quad \text{para } \textit{series en seno de semi-período} \\ b_n = 0, \quad a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx \quad \text{para } \textit{series en coseno de semi-período} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

FORMA COMPLEJA DE UNA SERIE DE FOURIER

En notación compleja, la serie de Fourier (*1*) con coeficientes dados por (*2*) puede expresarse como

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\pi x/l} \tag{4}$$

$e^{+iwnt}\, dt$

al tomar $c = -l$,

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(x)\, e^{-in\pi x/l}\, dx \tag{5}$$

véase el problema 74.

$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-inwt}\, dt$

IDENTIDAD DE PARSEVAL EN LAS SERIES DE FOURIER

$G(t) = \sum C_n e^{inwt} + C_0 + \sum$

La *identidad de Parseval* establece que

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \{F(x)\}^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \tag{6}$$

donde a_n y b_n están determinadas por (*2*).

Una consecuencia importante es:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{-l}^{l} F(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \int_{-l}^{l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

que se conoce como el *teorema de Riemann*.

TRANSFORMADAS FINITAS DE FOURIER

La *transformada finita de seno de Fourier* de $F(x)$, $0 < x < l$ se define como

$$f_s(n) = \int_0^l F(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \tag{8}$$

donde n es un entero. La función $F(x)$ se llama la *inversa de la transformada finita de seno de Fourier* de $f_s(n)$ y está definida por

$$F(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

La transformada finita de coseno de Fourier de $F(x)$, $0 < x < l$ se define como

$$f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx \tag{10}$$

donde n es un entero. La función $F(x)$ se llama la *inversa de la transformada finita de coseno de Fourier* $f_c(n)$ y está dada por

$$F(x) = \frac{1}{l} f_c(0) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi x}{l} \tag{11}$$

Véanse los problemas 9-11.

Las transformadas de Fourier son útiles en la resolución de ecuaciones diferenciales [véase el problema 32].

INTEGRAL DE FOURIER

Supongamos que $F(x)$ satisface las siguientes condiciones:

1. $F(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en cada intervalo finito $-l \leqq x \leqq l$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\, dx$ converge, es decir, $F(x)$ es absolutamente integrable en $-\infty < x < \infty$.

Entonces, el *teorema de la integral de Fourier* establece que

$$F(x) = \int_0^{\infty} \{A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x\}\, d\lambda \tag{12}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos \lambda x\, dx \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \operatorname{sen} \lambda x\, dx \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Esto puede expresarse en forma equivalente como

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(x-u)\, du\, d\lambda \tag{14}$$

El resultado (*12*) es válido si x es un punto de continuidad de $F(x)$. Si x es un punto de discontinuidad, dehemos remplazar a $F(x)$ por $\frac{1}{2}\{F(x+0) + F(x-0)\}$ como en el caso de las series de Fourier. Tal como sucede con las series de Fourier, las condiciones anteriores son suficientes pero no necesarias.

La semejanza de (*12*) y (*13*) con los correspondientes resultados (*1*) y (*2*) para series de Fourier es aparente. El miembro derecho de (*12*) se conoce como el *desarrollo de la integral de Fourier* de $F(x)$ o simplemente como la *integral de Fourier.*

FORMA COMPLEJA DE LAS INTEGRALES DE FOURIER

La integral de Fourier (*12*) de coeficientes (*13*) puede expresarse en forma compleja como

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{-i\lambda u}\, du \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{i\lambda(x-u)}\, du\, d\lambda$$

Véase el problema 77.

TRANSFORMADAS DE FOURIER

De (*15*) se deduce que si

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} F(u)\, du \tag{16}$$

$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-iwt}\, dt$

Entonces

$$F(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} f(\lambda)\, d\lambda \tag{17}$$

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w)\, e^{iwt}$

que es $F(x)$ al sustituir u por x.

La función $f(\lambda)$ se llama la *transformada de Fourier* de $F(x)$ y usualmente se denota por $f(\lambda) = \mathcal{F}\{F(x)\}$. La función $F(x)$ es la *transformada inversa de Fourier* de $f(\lambda)$ y se denota por $F(x) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\lambda)\}$. Se dice también que (*17*) es una fórmula de inversión correspondiente a (*16*).

Obsérvese que las constantes que preceden los signos de integración son arbitrarias; la única condición es que su producto sea $1/2\pi$. Si cada una vale $1/\sqrt{2\pi}$ obtenemos la llamada *forma simétrica.*

TRANSFORMADAS EN SENO Y COSENO DE FOURIER

La *transformada (infinita) en seno de Fourier* de $F(x)$, $0 < x < \infty$, se define como

$$f_S(\lambda) = \int_0^{\infty} F(u)\operatorname{sen}\lambda u\, du \tag{18}$$

La función $F(x)$ se llama la *inversa de la transformada en seno de Fourier* de $f_S(\lambda)$ y está dada por

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f_S(\lambda)\operatorname{sen}\lambda x\, d\lambda \tag{19}$$

La *transformada (infinita) en coseno de Fourier* de $F(x)$, $0 < x < \infty$, se define como

$$f_C(\lambda) = \int_0^{\infty} F(u)\cos\lambda u\, du \tag{20}$$

$\frac{\operatorname{sen}(w s)}{w}$

$= 2\partial\, \frac{\operatorname{sen} w\partial}{w\partial}$

La función $F(x)$ se llama la *inversa de la transformada en coseno de Fourier* de $f_c(\lambda)$, y está dada por

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_c(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda \tag{21}$$

Véanse los problemas 18-20.

Las transformadas de Fourier son útiles para resolver ecuaciones diferenciales [véase el problema 33].

TEOREMA DE LA CONVOLUCION

La *convolución* de dos funciones $F(x)$ y $G(x)$, donde $-\infty < x < \infty$, se define como

$$F * G = \int_{-\infty}^\infty F(u)\, G(x-u)\, du = H(x) \tag{22}$$

Un resultado importante, conocido como el *teorema de la convolución para transformadas de Fourier* es el siguiente:

Teorema. Si $H(x)$ es la convolución de $F(x)$ y $G(x)$, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty H(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \left\{\int_{-\infty}^\infty F(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^\infty G(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right\} \tag{23}$$

o

$$\mathcal{F}\{F * G\} = \mathcal{F}\{F\}\,\mathcal{F}\{G\} \tag{24}$$

es decir, la transformada de Fourier de la convolución de F y G es el producto de las transformadas de Fourier de F y G.

IDENTIDAD DE PARSEVAL PARA INTEGRALES DE FOURIER

Si la transformada de Fourier de $F(x)$ es $f(\lambda)$, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty |F(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |f(\lambda)|^2\, d\lambda \tag{25}$$

Esto se llama la *identidad de Parseval para integrales de Fourier* y es susceptible de generalizaciones véase el problema 80).

RELACIONES ENTRE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE Y FOURIER

Consideramos la función

$$F(t) = \begin{cases} e^{-xt}\,\Phi(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{26}$$

Al sustituir λ por y, en la fórmula *(16)* de la página anterior, vemos que la transformada de Fourier de $F(t)$ es

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t}\,\Phi(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\,\Phi(t)\, dt \tag{27}$$

donde $s = x + iy$. El miembro derecho de *(27)* es la transformada de Laplace de $\Phi(t)$; este resultado establece la relación entre las transformadas de Laplace y Fourier, e indica además la necesidad de considerar a s como una variable compleja $x + iy$.

Para indicar mejor esta relación, nótese que si $F(t)$ y $G(t)$ son nulas para $t < 0$, la convolución de F y G dada por (22) puede expresarse como

$$F * G = \int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du \tag{28}$$

y (24) corresponde a

$$\mathcal{L}\{F * G\} = \mathcal{L}\{F\}\, \mathcal{L}\{G\} \tag{29}$$

en concordancia con (11), Pág. 45.

Como para la transformada de Fourier existe una fórmula de inversión (17) correspondiente a (16), es natural pensar que hay una fórmula de inversión análoga para la transformada de Laplace; en el capítulo 7 se deduce dicha fórmula de inversión.

Problemas resueltos

SERIES DE FOURIER

1. Demostrar que $\displaystyle\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}\, dx = \int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx = 0$ si $k = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}\, dx = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = -\frac{l}{k\pi} \cos k\pi + \frac{l}{k\pi} \cos(-k\pi) = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = \frac{l}{k\pi} \operatorname{sen} k\pi - \frac{l}{k\pi} \operatorname{sen}(-k\pi) = 0$$

2. Demostrar (a) $\displaystyle\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = 0$

donde m y n pueden tomar los valores 1, 2, 3, ...

(a) Sabemos que $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$, $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$.

Entonces, si $m \neq n$, tenemos, por el problema 1, que

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left\{\cos \frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos \frac{(m+n)\pi x}{l}\right\} dx = 0$$

Análogamente si $m \neq n$,

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left\{\cos \frac{(m-n)\pi x}{l} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{l}\right\} dx = 0$$

Si $m = n$,

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 + \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l$$

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l$$

Obsérvese que si $m = n = 0$ estas integrales son iguales a $2l$ y 0 respectivamente.

(*b*) Tenemos que $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)\}$. Entonces, por el problema 1, si $m \neq n$,

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{l} + \operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0$$

Si $m = n$,

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{l}\,dx = 0$$

Los resultados de las partes (*a*) y (*b*) siguen valiendo cuando los límites de integración se remplazan por c, $c + 2l$ respectivamente.

3. Si la serie $A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right)$ converge uniformemente a $f(x)$ en $(-l, l)$, demostrar que cuando $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$(a)\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (b)\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (c)\ A = \frac{a_0}{2}.$$

(*a*) Multiplicando

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

por $\cos\frac{m\pi x}{l}$ e integrando de $-l$ a l, tenemos, por el problema 2,

$$\begin{aligned}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx &= A\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \\ &= a_m l \qquad \text{si } m \neq 0\end{aligned} \tag{2}$$

Así,
$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \qquad \text{si } m = 1, 2, 3, \ldots$$

(*b*) Multiplicando (*1*) por $\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}$ e integrando de $-l$ a l obtenemos, haciendo uso del problema 2,

$$\begin{aligned}\int_{-l}^{l} F(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx &= A\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \\ &= b_m l\end{aligned} \tag{3}$$

Así,
$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx \qquad \text{si } m = 1, 2, 3, \ldots$$

(*c*) Integrando (*1*) de $-l$ a l y usando el problema 1, obtenemos

$$\int_{-l}^{l} F(x)\,dx \;=\; 2Al \qquad \text{o} \qquad A \;=\; \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx$$

Haciendo $m = 0$ en el resultado de la parte (*a*), encontramos $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx$ de manera que $A = \frac{a_0}{2}$.

Los resultados anteriores son válidos también si los límites de integración $-l$, l se remplazan por c, $c - 2l$.

Obsérvese que en todo lo anterior es válido el intercambio de la sumatoria con la integral; esto se debe a la hipótesis que las series convergen uniformemente a $F(x)$ en $(-l, l)$. Aún en el caso en que no se garantice esta hipótesis, los coeficientes a_m y b_m se llaman *coeficientes de Fourier*, correspondientes a $F(x)$ y la serie de Fourier correspondiente a estos valores de a_m y b_m se llama la *serie de Fourier* correspondiente a $F(x)$. Un interesante problema es el de investigar las condiciones bajo las cuales esta serie converge realmente a $F(x)$. Son condiciones suficientes para tal convergencia las *condiciones de Dirichlet* que se enunciarán posteriormente [véanse los problemas 12-17].

4. (*a*) **Hallar los coeficientes de Fourier correspondientes a la función**

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \qquad \text{Período} = 10$$

(*b*) **Escribir la serie de Fourier correspondiente.**

(*c*) **¿Cómo podría definirse $F(x)$ en $x = -5$, $x = 0$ y $x = 5$ para que la serie de Fourier converja a $F(x)$ para $-5 \leqq x \leqq 5$?**

En la Fig. 6-4 aparece la gráfica de $F(x)$.

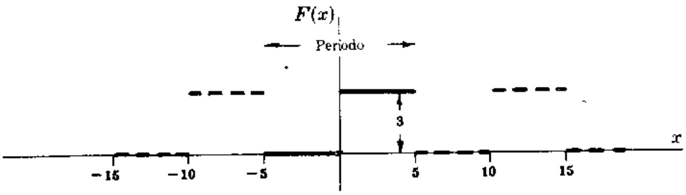


Fig. 6-4

(*a*) Período $= 2l = 10$ y $l = 5$. Como intervalo c a $c + 2l$ escogemos al que va de -5 a 5 de manera que $c = -5$. Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \;=\; \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx \\ &= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5}(3)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} \;=\; \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx \\ &= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_{0}^{5} \;=\; 0 \qquad \text{si } n \neq 0 \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $\quad a_n = a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3.$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} F(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \;=\; \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}\,dx \\ &= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5}(3)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} \;=\; \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}\,dx \\ &= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_{0}^{5} \;=\; \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} \end{aligned}$$

(*b*) La serie de Fourier correspondiente es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)$$

(*c*) Como $F(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet, podemos decir que la serie converge a $F(x)$ en todos los puntos de continuidad, y a $\dfrac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$ en los puntos de discontinuidad. En $x = -5$, 0 y 5, los cuales son puntos de discontinuidad, la serie converge a $(3+0)/2 = 3/2$ como se ve en la gráfica. Si definimos $F(x)$ como

$$F(x) = \begin{cases} 3/2 & x = -5 \\ 0 & -5 < x < 0 \\ 3/2 & x = 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \\ 3/2 & x = 5 \end{cases} \qquad \text{Periodo} = 10$$

entonces la serie converge a $F(x)$ para $-5 \leqq x \leqq 5$.

5. Desarrollar $F(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$ en serie de Fourier si (*a*) el período es 2π, (*b*) el período no se especifica.

(*a*) La gráfica de $F(x)$ con período 2π se muestra en la Fig. 6-5.

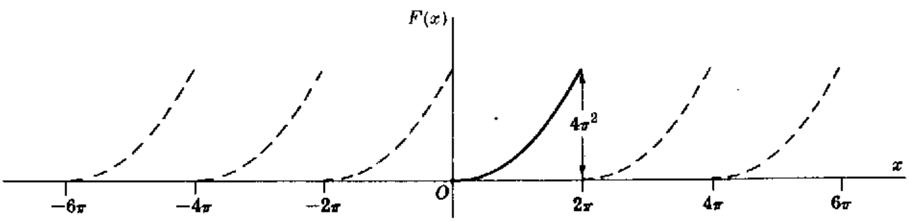


Fig. 6-5

Período $= 2l = 2\pi$, luego $l = \pi$. Tomando $c = 0$, obtenemos

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right) - (2x)\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\operatorname{sen} nx}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}, \qquad n \neq 0$$

Si $n = 0$, $\quad a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \dfrac{8\pi^2}{3}$.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(-\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

Entonces
$$F(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\operatorname{sen} nx\right).$$

Esto es válido para $0 < x < 2\pi$. En $x = 0$ y $x = 2\pi$ la serie converge en $2\pi^2$.

(*b*) Si el período no se especifica, no es posible determinar unívocamente la serie de Fourier en general.

FUNCIONES PARES E IMPARES. SERIES DE FOURIER DE SENO Y COSENO DE SEMI-PERIODO

6. Si $F(x)$ es par, demostrar que (*a*) $a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (*b*) $b_n = 0$.

(*a*)
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Haciendo $x = -u$,

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l F(-u)\cos\left(\frac{-n\pi u}{l}\right)du = \frac{1}{l}\int_0^l F(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du$$

ya que por definición de función par, $f(-u) = f(u)$. Entonces

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^l F(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du + \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

(*b*)
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (1)$$

Si hacemos la transformación $x = -u$ en la integral del miembro derecho de (*1*), obtenemos

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l F(-u)\,\text{sen}\left(-\frac{n\pi u}{l}\right)du = -\frac{1}{l}\int_0^l F(-u)\,\text{sen}\,\frac{n\pi u}{l}\,du \qquad (2)$$
$$= -\frac{1}{l}\int_0^l F(u)\,\text{sen}\,\frac{n\pi u}{l}\,du = -\frac{1}{l}\int_0^l F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

hemos usado el hecho de que para una función par $F(-u) = F(u)$ y en el último paso, que la variable muda de integración u puede remplazarse por cualquier otro símbolo, en particular por x. Así, de (*1*) y (2) tenemos que

$$b_n = -\frac{1}{l}\int_0^l F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

7. Desarrollar $F(x) = x$, $0 < x < 2$ en serie de semi-período (*a*) seno (*b*) coseno.

(*a*) Extendamos la definición de la función dada a la función impar de período 4 que se muestra en la Fig. 6-6. Esta se llama la *extensión impar* de $F(x)$. Entonces $2l = 4$, $l = 2$.

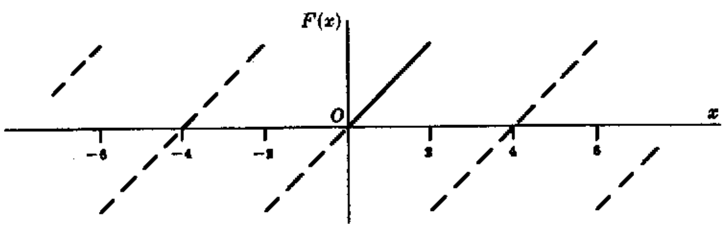


Fig. 6-6

Así, $a_n = 0$ y

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$= \left\{(x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi$$

Entonces
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$$
$$= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

(*b*) Extendemos la definición de $F(x)$ a la función par de período 4 que se muestra en la Fig. 6-7. Esta se llama la *extensión par* de $F(x)$. Entonces $2l = 4$, $l = 2$.

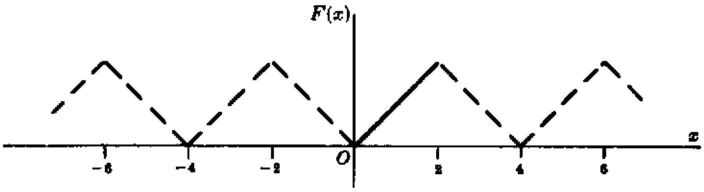


Fig. 6-7

Así, $b_n = 0$,
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$= \left\{(x)\left(\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2$$
$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \qquad \text{si } n \neq 0$$

Si $n = 0$, $a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2.$

Entonces
$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$
$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

Se notará que la función dada $F(x) = x$, $0 < x < 2$ está *"igualmente bien representada"* por las dos series *diferentes* de (*a*) y (*b*).

IDENTIDAD DE PARSEVAL PARA LAS SERIES DE FOURIER

8. Suponiendo que la serie de Fourier correspondiente a $F(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en $(-l, l)$, demostrar la identidad de Parseval
$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{F(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum(a_n^2 + b_n^2)$$
suponiendo que existe el integrando.

Si $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right)$, entonces multiplicando por $F(x)$ e integrando término a término de $-l$ a l (lo cual es lícito puesto que la serie es uniformemente convergente) obtenemos
$$\int_{-l}^{l}\{F(x)\}^2\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}F(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}F(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}$$
$$= \frac{a_0^2}{2}l + l\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \qquad (1)$$

Hemos usado los resultados

$$\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \;=\; la_n, \qquad \int_{-l}^{l} F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx \;=\; lb_n, \qquad \int_{-l}^{l} F(x)\,dx \;=\; la_0 \tag{2}$$

obtenidos de los coeficientes de Fourier.

El resultado requerido se sigue al dividir los dos miembros de *(1)* por l. La identidad de Parseval es válida en condiciones menos fuertes que las impuestas aquí.

TRANSFORMADAS FINITAS DE FOURIER

9. Establecer (*a*) la ecuación *(9)* y (*b*) la ecuación *(11)* de la Pág. 175.

(*a*) Si $F(x)$ es una función impar en $(-l, l)$ entonces

$$F(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

donde

$$b_n \;=\; \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{2}$$

Así, si escribimos

$$\int_0^l F(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx \;=\; f_s(n)$$

entonces $b_n = \frac{2}{l} f_s(n)$ y *(1)* se puede expresar, como queríamos,

$$F(x) \;=\; \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l} \tag{3}$$

También podemos escribir $F(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\{f_s(n)\}$.

(*b*) Si $F(x)$ es una función impar en $(-l, l)$, entonces

$$F(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{4}$$

donde

$$a_n \;=\; \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{5}$$

Así, si escribimos

$$\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \;=\; f_c(n)$$

entonces $a_0 = \frac{2}{l} f_c(0)$ y *(4)* se puede escribir, como queríamos,

$$F(x) \;=\; \frac{1}{l} f_c(0) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

Podemos también escribir $F(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\{f_c(n)\}$.

10. Hallar (*a*) la transformada finita de seno de Fourier y (*b*) la transformada finita de coseno de Fourier de la función $F(x) = 2x$, $0 < x < 4$.

(*a*) Como $l = 4$, tenemos que

$$f_s(n) = \int_0^l F(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx = \int_0^4 2x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4}\, dx$$

$$= \left\{(2x)\left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n\pi/4}\right) - (2)\left(\frac{-\operatorname{sen} n\pi x/4}{n^2\pi^2/16}\right)\right\}\Bigg|_0^4 = 32\left(\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}\right)$$

(*b*) Si $n > 0$, $\quad f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \int_0^4 2x \cos \frac{n\pi x}{4}\, dx$

$$= \left\{(2x)\left(\frac{\operatorname{sen} n\pi x/4}{n\pi/4}\right) - (2)\left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n^2\pi^2/16}\right)\right\}\Bigg|_0^4 = 32\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}\right)$$

Si $n = 0$, $\quad f_c(n) = f_c(0) = \int_0^4 2x\, dx = 16$

11. Hallar $F(x)$ si (*a*) $\mathcal{F}_s\{F(x)\} = 16(-1)^{n-1}/n^3$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde $0 < x < 8$; (*b*) $\mathcal{F}_c\{F(x)\} = \operatorname{sen}(n\pi/2)/2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\pi/4$ si $n = 0$, donde $0 < x < 2\pi$.

(*a*) Aplicamos la ecuación (3) del problema 9(*a*) en el caso $l = 8$ y obtenemos

$$F(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\left\{\frac{16(-1)^{n-1}}{n^3}\right\}$$

$$= \frac{2}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n-1}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{8} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{8}$$

(*b*) Aplicamos la ecuación (6) del problema 9(*b*) en el caso $l = 2\pi$ y obtenemos

$$F(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{2n}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{2}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n}$$

CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER

12. Demostrar que (*a*) $\displaystyle \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Mt = \frac{\operatorname{sen}(M+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}$

$$(b)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(M+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\, dt = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\operatorname{sen}(M+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\, dt = \frac{1}{2}.$$

(*a*) Tenemos que $\cos nt \operatorname{sen}\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t - \operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})t\}$.

Sumando de $n = 1$ a M,

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\{\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Mt\} = (\operatorname{sen}\tfrac{3}{2}t - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t) + (\operatorname{sen}\tfrac{5}{2}t - \operatorname{sen}\tfrac{3}{2}t)$$
$$+ \cdots + \{\operatorname{sen}(M+\tfrac{1}{2})t - \operatorname{sen}(M-\tfrac{1}{2})t\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\operatorname{sen}(M+\tfrac{1}{2})t - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\}$$

Dividiendo por $\operatorname{sen}\frac{1}{2}t$ y sumando $\frac{1}{2}$, llegamos al resultado buscado.

(*b*) Al integrar el resultado de la parte (*a*) de $-\pi$ a 0 y de 0 a π respectivamente, obtenemos los resultados deseados, ya que las integrales de todos los términos del coseno valen cero.

13. Demostrar que si $F(x)$ es seccionalmente continua, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\text{sen}\,nx\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx \;=\; 0$$

Esto es consecuencia inmediata del problema 8 cuando $l = \pi$, puesto que si la serie $\dfrac{a_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Este resultado se conoce también con el nombre de *teorema de Riemann.*

14. Demostrar que $\lim\limits_{M\to\infty}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\text{sen}\,(M+\tfrac{1}{2})x\,dx = 0$ si $F(x)$ es seccionalmente continua.

Tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\text{sen}\,(M+\tfrac{1}{2})x\,dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}\{F(x)\text{sen}\,\tfrac{1}{2}x\}\cos Mx\,dx \;+\; \int_{-\pi}^{\pi}\{F(x)\cos\tfrac{1}{2}x\}\text{sen}\,Mx\,dx$$

Podemos concluir directamente mediante el problema 13, al remplazar $F(x)$ por $F(x)$ sen $\frac{1}{2}x$ y $F(x)$ cos $\frac{1}{2}x$ respectivamente, ya que son seccionalmente continuas cuando $F(x)$ lo es.

También podemos demostrarlo tomando como límite de integración a y b en lugar de $-\pi$ y π.

15. Suponiendo que $l = \pi$, o sea, que la serie de Fourier correspondiente a $F(x)$ tiene período $2l = 2\pi$, demostrar que:

$$S_M(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n\cos nx \;+\; b_n\,\text{sen}\,nx) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t+x)\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt$$

Usando las fórmulas para los coeficientes de Fourier en el caso $l = \pi$, tenemos:

$$\begin{aligned}
a_n\cos nx \;+\; b_n\,\text{sen}\,nx \;&=\; \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\cos nu\,du\right)\cos nx \;+\; \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\,\text{sen}\,nu\,du\right)\text{sen}\,nx \\
&=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\,(\cos nu\cos nx \;+\; \text{sen}\,nu\;\text{sen}\,nx)\,du \\
&=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\cos n(u-x)\,du
\end{aligned}$$

Además,
$$\frac{a_0}{2} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\,du$$

Entonces
$$\begin{aligned}
S_M(x) \;&=\; \frac{a_0}{2} \;+\; \sum_{n=1}^{M}(a_n\cos nx \;+\; b_n\,\text{sen}\,nx) \\
&=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\,du \;+\; \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\cos n(u-x)\,du \\
&=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\left\{\frac{1}{2} \;+\; \sum_{n=1}^{M}\cos n(u-x)\right\}du \\
&=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\,\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})(u-x)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(u-x)}\,du
\end{aligned}$$

por el problema 12. Haciendo $u - x = t$, tenemos

$$S_M(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t+x)\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt$$

Como el período del integrando es 2π, podemos remplazar el intervalo $-\pi - x$, $\pi - x$ por cualquier otro intervalo de longitud 2π, en particular $-\pi$, π. Así obtenemos el resultado.

16. Demostrar que

$$S_M(x) - \left(\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{F(t+x)-F(x-0)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\right)\text{sen}\,(M+\tfrac{1}{2})t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\right)\text{sen}\,(M+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

Por el problema 12,

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} F(t+x)\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(t+x)\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (1)$$

Multiplicando las integrales del problema 12(*b*) por $F(x-0)$ y $F(x+0)$ respectivamente,

$$\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} F(x-0)\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x+0)\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (2)$$

Restando (2) de (1) obtenemos el resultado requerido.

17. Si $F(x)$ y $F'(x)$ son seccionalmente continuas en $(-\pi, \pi)$, demostrar que

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$$

La función $\dfrac{F(t+x)-F(x+0)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}$ es seccionalmente continua en $0 < t \leqq \pi$ puesto que $F(x)$ es seccionalmente continua.

Además,

$$\lim_{t\to 0+}\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0+}\frac{F(t+x)-F(x+0)}{t}\cdot\frac{t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0+}\frac{F(t+x)-F(x+0)}{t}$$

existe ya que por hipótesis $F'(x)$ es seccionalmente continua de manera que existe la derivada del miembro derecho para cada x.

Entonces $\dfrac{F(t+x)-F(x+0)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}$ es seccionalmente continua en $0 \leqq t \leqq \pi$.

Análogamente, $\dfrac{F(t+x)-F(x+0)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}$ es seccionalmente continua en $-\pi \leqq t \leqq 0$.

Entonces, de los problemas 14 y 16 se concluye que

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x) - \left\{\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}\right\} = 0 \quad \text{o sea} \quad \lim_{M\to\infty} S_M(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$$

LA INTEGRAL Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER

18. (*a*) Hallar la transformada de Fourier de $F(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$.

(*b*) Hacer la gráfica de $F(x)$ y de su transformada de Fourier para $a = 1$.

(*a*) La transformada de Fourier de $F(x)$ es

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,e^{-i\lambda u}\,du = \int_{-a}^{a}(1)\,e^{-i\lambda u}\,du = \left.\frac{e^{-i\lambda u}}{-i\lambda}\right|_{-a}^{a}$$

$$= \left(\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}\right) = 2\frac{\text{sen}\,\lambda a}{\lambda}, \qquad \lambda \neq 0$$

Para $\lambda = 0$, obtenemos que $f(\lambda) = 2a$.

(*b*) Las gráficas de $F(x)$ y $f(\lambda)$ para $a = 1$ son, respectivamente

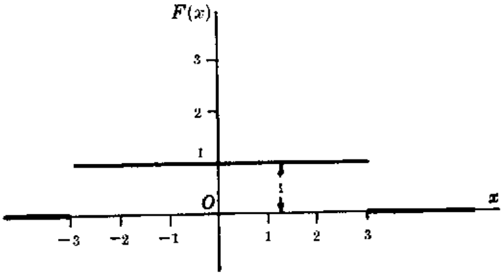


Fig. 6-8

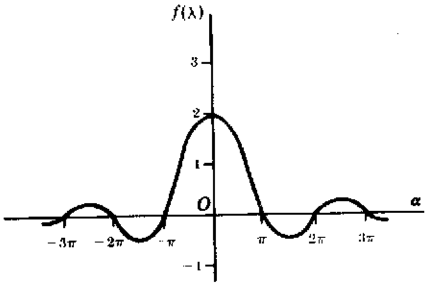


Fig. 6-9

19. (*a*) Usando el resultado del problema 18 calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\lambda a \cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda.$

(*b*) Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du.$

(*a*) Por el teorema de la integral de Fourier tenemos que si

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{-i\lambda u}\, du \qquad \text{entonces} \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

Luego, por el problema 18,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{\operatorname{sen}\lambda a}{\lambda}\, e^{i\lambda x}\, d\alpha = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 1/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{1}$$

El miembro izquierdo de (*1*) es igual a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\lambda a \cos\lambda x}{\lambda}\, d\alpha + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\lambda a \operatorname{sen}\lambda x}{\lambda}\, d\lambda \tag{2}$$

El integrando de la segunda integral de (*2*) es impar, de modo que su integral vale cero. Entonces, de (*1*) y (*2*) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\lambda a \cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda = \begin{cases} \pi & |x| < a \\ \pi/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{3}$$

(*b*) Si $x = 0$ y $a = 1$ en el resultado de (*a*), tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \pi \qquad \text{o} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{2}$$

puesto que el integrando es par.

20. Si $F(x)$ es una función par, demostrar que:

(*a*) $\displaystyle f(\lambda) = 2\int_0^{\infty} F(u)\cos\lambda u\, du,$ (*b*) $\displaystyle F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda.$

Tenemos que

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{-i\lambda u} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda u\, du - i\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\operatorname{sen}\lambda u\, du \tag{1}$$

(a) Si $F(u)$ es par, $F(u)\cos\lambda u$ es par y $F(u)$ sen λu es impar. Entonces la segunda integral del miembro derecho de (1) es cero y el resultado puede escribirse

$$f(\lambda) \quad = \quad 2\int_0^\infty F(u)\cos\lambda u\,du$$

(b) De (a), $f(-\lambda) = f(\lambda)$ de manera que $f(\lambda)$ es una función par. Haciendo una demostración esencialmente igual a la de (a), se obtiene el resultado.

Un resultado análogo es válido para funciones impares y puede obtenerse al remplazar coseno por seno.

IDENTIDAD DE PARSEVAL PARA INTEGRALES DE FOURIER

21. Comprobar la identidad de Parseval para integrales de Fourier en las transformadas de Fourier del problema 18.

Debemos demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)\}^2\,dx \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(\lambda)\}^2\,d\lambda$$

donde $F(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$ y $f(\lambda) = 2\dfrac{\operatorname{sen}\lambda a}{\lambda}$.

Esto es equivalente a

$$\int_{-a}^{a}(1)^2\,dx \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\operatorname{sen}^2\lambda a}{\lambda^2}\,d\lambda$$

o sea

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\lambda a}{\lambda^2}\,d\lambda \quad = \quad 2\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\lambda a}{\lambda^2}\,d\lambda \quad = \quad \pi a$$

es decir

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\lambda a}{\lambda^2}\,d\alpha \quad = \quad \frac{\pi a}{2}$$

Haciendo $\lambda a = u$ y usando el problema 111, de la Pág. 171, queda comprobado. Este método puede usarse también para hallar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}\,du$ en forma directa.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

22. Presentar una demostración heurística del teorema de la integral de Fourier mediante el uso de una forma límite de una serie de Fourier.

Sea
$$F(x) \quad = \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

donde $a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}F(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du$ y $b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}F(u)\operatorname{sen}\frac{n\pi u}{l}\,du$.

Sustituyendo (véase el problema 15),

$$F(x) \quad = \quad \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}F(u)\,du + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}F(u)\cos\frac{n\pi}{l}(u-x)\,du \tag{2}$$

Si suponemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|F(u)|\,du$ converge, el primer término del miembro derecho de (2) tiende a cero cuando $l\to\infty$, en tanto que la parte restante se aproxima a

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\cos\frac{n\pi}{l}(u-x)\,du \tag{3}$$

Este último paso es heurístico pero no riguroso.

Llamando $\Delta\lambda = \pi/l$, (3) puede escribirse como

$$F(x) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda\, F(n\,\Delta\lambda) \tag{4}$$

Aquí hemos expresado
$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos\lambda(u-x)\,du \tag{5}$$

Pero, el límite (4) es igual a

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(u-x)\,du$$

que es la fórmula de la integral de Fourier.

Esta demostración sirve tan sólo para obtener un posible resultado; para ser rigurosos debemos empezar por considerar la integral.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(u-x)\,dx$$

y examinar su convergencia. Este método se contempla en los problemas 23-26.

23. Demostrar que (a) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^l \frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}dv = \frac{\pi}{2}$, (b) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-l}^0 \frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}dv = \frac{\pi}{2}$.

(a) Sea $\lambda v = y$. Entonces, $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^l \frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}dv = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda l}\frac{\operatorname{sen} y}{y}dy = \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} y}{y}dy = \frac{\pi}{2}$ por el problema 43, Pág. 164.

(b) Sea $\lambda v = -y$. Entonces, $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-l}^0 \frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}dv = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda l}\frac{\operatorname{sen} y}{y}dy = \frac{\pi}{2}$.

24. El teorema de Riemann dice que si $G(x)$ es seccionalmente continua en (a, b), entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b G(x)\operatorname{sen}\lambda x\,dx = 0$$

con un resultado similar para el coseno (véase el problema 81). Usando esto, demostrar que

$$(a)\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^l F(x+v)\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}F(x+0)$$

$$(b)\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-l}^0 F(x+v)\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}F(x-0)$$

donde se supone que $F(x)$ y $F'(x)$ son seccionalmente continuas en $(0, l)$ y $(-l, 0)$ respectivamente.

(a) Usando el problema 23(a), resulta demostrado siempre que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^l \{F(x+v) - F(x+0)\}\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv = 0$$

Esto se deduce del teorema de Riemann ya que $G(v) = \dfrac{F(x+v)-F(x+0)}{v}$ es seccionalmente continua en $(0, l)$, pues el $\lim_{v\to 0+} F(v)$ existe y $f(x)$ es seccionalmente continua.

(b) La demostración es análoga a la de la parte (a), haciendo uso del problema 23(b).

25. Si $F(x)$ satisface la condición adicional de que $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\,dx$ converge, demostrar que

$$(a)\ \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty F(x+v)\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \;=\; \frac{\pi}{2}F(x+0),\quad (b)\ \lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{0} F(x+v)\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \;=\; \frac{\pi}{2}F(x-0).$$

Tenemos que

$$\int_0^\infty F(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \;=\; \int_0^l F(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \;+\; \int_l^\infty F(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \tag{1}$$

$$\int_0^\infty F(x+0)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \;=\; \int_0^l F(x+0)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \;+\; \int_l^\infty F(x+0)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \tag{2}$$

Sustrayendo,

$$\int_0^\infty \{F(x+v)-F(x+0)\}\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \tag{3}$$

$$=\; \int_0^l \{F(x+v)-f(x+0)\}\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \;+\; \int_l^\infty F(x+v)\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv \;-\; \int_l^\infty F(x+0)\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv$$

Si denotamos las integrales de (3) por I, I_1, I_2, e I_3 respectivamente, tenemos que $I = I_1 + I_2 + I_3$ de modo que

$$|I| \;\leqq\; |I_1| + |I_2| + |I_3| \tag{4}$$

Ahora $\quad |I_2| \;\leqq\; \int_l^\infty \left|F(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\right| dv \;\leqq\; \frac{1}{l}\int_l^\infty |F(x+v)|\,dv$

Además $\quad |I_3| \;\leqq\; |F(x+0)|\left|\int_l^\infty \frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv\right|$

Como $\int_0^\infty |F(x)|\,dx$ y $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\lambda v}{v}\,dv$ son convergentes, podemos escoger l suficientemente grande para que $|I_2| \leqq \epsilon/3$, $|I_3| \leqq \epsilon/3$. También podemos escoger λ suficientemente grande para que $|I_1| \leqq \epsilon/3$. De (4) tenemos que $|I| < \epsilon$ para λ y l convenientemente grandes; el resultado es inmediato.

Este resultado se obtiene por un razonamiento análogo al de la parte (a).

26. Demostrar la fórmula de la integral de Fourier cuando $F(x)$ satisface las condiciones establecidas en la página 175.

Tenemos que probar que $\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{l}\int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\,du\,d\lambda \;=\; \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$

Como $\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\,du\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty}|F(u)|\,du$ que es convergente, del criterio de Weierstrass para integrales se deduce que $\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\,du$ converge absoluta y uniformemente para todo λ. Así, podemos cambiar el orden de integración y obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{l} d\lambda\int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\,du &= \frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\,du\int_{\lambda=0}^{l}\cos\lambda(x-u)\,du\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\,\frac{\operatorname{sen} l(u-x)}{u-x}\,du\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{v=-\infty}^{\infty} F(x+v)\,\frac{\operatorname{sen} lv}{v}\,dv\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} F(x+v)\,\frac{\operatorname{sen} lv}{v}\,dv + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(x+v)\,\frac{\operatorname{sen} lv}{v}\,dv
\end{aligned}$$

donde $u = x + v$.

Haciendo que $l \to \infty$, vemos, por el problema 24, que la integral dada converge a $\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$, como se esperaba.

PROBLEMAS VARIOS

27. Desarrollar $F(x) = \text{sen}\, x$, $0 < x < \pi$, en serie de coseno de Fourier.

Una serie de Fourier consistente sólo de términos del coseno se obtiene únicamente para una función par. Entonces podemos extender la definición de $F(x)$ de tal suerte que resulte par (véase la gráfica discontinua de la Fig. 6-10). Con esta extensión, $F(x)$ queda definida en un intervalo de longitud 2π. Tomando como período 2π, tendremos que $2l = 2\pi$, o sea $l = \pi$.

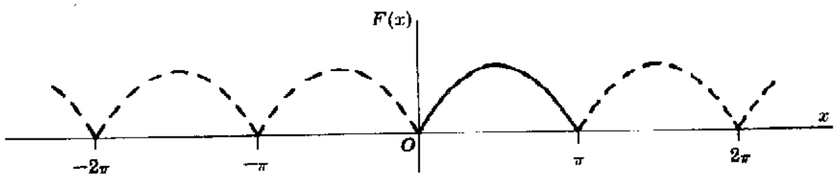


Fig. 6-10

Por el problema 6, $b_n = 0$ y

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\, x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\text{sen}\,(x+nx) + \text{sen}\,(x-nx)\}\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}\Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos n\pi}{n+1} - \frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\}$$

$$= \frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} \qquad \text{si } n \neq 1.$$

Para $n = 1$, $\quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\, x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\text{sen}^2 x}{2}\Big|_0^\pi = 0.$

Para $n = 0$, $\quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\, x\,dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}.$

Entonces

$$F(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^\infty \frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right)$$

28. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x \geqq 0.$

Sea $F(x) = e^{-x}$ en el teorema de la integral de Fourier,

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x\,d\lambda\int_0^\infty F(u)\cos\lambda u\,du$$

Entonces

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x\,d\lambda\int_0^\infty e^{-u}\cos\lambda u\,du = e^{-x}$$

Como $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u}\cos\lambda u\,du = \frac{1}{\lambda^2+1}$, tenemos que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda = e^{-x} \qquad \text{o sea} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

29. Resolver la ecuación de la integral $\displaystyle\int_0^\infty F(x)\cos\lambda x\,dx = \begin{cases}1-\lambda & 0 \leqq \lambda \leqq 1\\ 0 & \lambda > 1\end{cases}$.

Sea $\displaystyle\int_0^\infty F(x)\cos\lambda x\,dx = f(\lambda)$ y escojamos $f(\lambda) = \begin{cases}1-\lambda & 0 \leqq \lambda \leqq 1\\ 0 & \lambda > 1\end{cases}$. Entonces, por el teorema de la integral de Fourier,

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}$$

30. Hallar (*a*) la transformada finita de seuo de Fourier y (*b*) la transformada finita de coseno de Fourier de $\partial U/\partial x$ donde U es una función de x y t, para $0 < x < l$, $t > 0$.

(*a*) Por definición, la transformada finita de seno de Fourier de $\partial U/\partial x$ es, al integrar por partes,

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = U(x,t)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

o sea
$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\,\mathcal{F}_c\{U\}$$

(*b*) La transformada finita de coseno de Fourier es

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

o sea
$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\,\mathcal{F}_s\{U\} - \{U(0,t) - U(l,t)\cos n\pi\}$$

31. Resolver el problema 30 para la función $\partial^2U/\partial x^2$.

Sustituyendo U por $\partial U/\partial x$ en los resultados del problema 30, encontramos que

(*a*)
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} &= -\frac{n\pi}{l}\,\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}\\ &= \frac{n^2\pi^2}{l^2}\,\mathcal{F}_s\{U\} + \frac{n\pi}{l}\{U(0,t) - U(l,t)\cos n\pi\}\end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} &= -\frac{n\pi}{l}\,\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} - \{U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\}\\ &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\,\mathcal{F}_c\{U\} - \{U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\}\end{aligned}$$

donde U_x denota la derivada parcial con respecto a x.

32. Usando transformadas finitas de Fourier, resolver

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad U(0,t) = 0, \quad U(4,t) = 0, \quad U(x,0) = 2x$$

donde $0 < x < 4$, $t > 0$.

Tomando la transformada finita de seno de Fourier (con $l = 4$) a ambos lados de la ecuación diferencial parcial, obtenemos

$$\int_0^4 \frac{\partial U}{\partial t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4}\, dx \quad = \quad \int_0^4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4}\, dx$$

Escribiendo $u = \mathcal{F}_s\{U\}$ y usando el problema 31(*a*) con las condiciones $U(0, t) = 0$, $U(4, t) = 0$, encontramos

$$\frac{du}{dt} \quad = \quad -\frac{n^2\pi^2}{16}\, u \tag{1}$$

donde $u = u(n, t)$.

Tomando la transformada finita de seno de Fourier de la condición $U(x, 0) = 2x$ obtenemos, como en el problema 10(*a*),

$$u(n, 0) \quad = \quad \mathcal{F}_s\{2x\} \quad = \quad \frac{32(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \tag{2}$$

Resolviendo la ecuación diferencial (*1*), encontramos que si c es una constante arbitraria

$$u \quad = \quad u(n, t) \quad = \quad c\, e^{-n^2\pi^2 t/16} \tag{3}$$

Como $c = u(n, 0)$, de (2) y (3) tendremos

$$u \quad = \quad \frac{32(1 - \cos n\pi)}{n\pi}\, e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

Así, por el problema 9(*a*), la inversa de la transformada de seno de Fourier es,

$$U(x, t) \quad = \quad \frac{2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(1 - \cos n\pi)}{n\pi}\, e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

$$= \quad \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n} \right) e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

Físicamente, $U(x, t)$ representa la temperatura en cualquier punto x en cualquier tiempo t de un sólido limitado por los planos $x = 0$ y $x = 4$. Las condiciones $U(0, t) = 0$ y $U(4, t) = 0$ expresan que los extremos se mantienen a temperatura nula, en tanto que $U(x, 0) = 2x$ significa que la temperatura inicial es función de x. Análogamente, el sólido puede remplazarse por una barra sobre el eje x con extremos en $x = 0$ y $x = 4$ cuya superficie está aislada.

33. Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $x > 0$, $t > 0$, sometida a las condiciones

$$U(0, t) = 0, \qquad U(x, 0) \quad = \quad \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geqq 1 \end{cases}, \qquad U(x, t)$$

Tomando la transformada de seno de Fourier a ambos lados de la ecuación diferencial parcial dada, obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial t} \operatorname{sen} \lambda x\, dx \quad = \quad \int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \operatorname{sen} \lambda x\, dx \tag{1}$$

Entonces si $\quad u \quad = \quad u(\lambda, t) \quad = \quad \displaystyle\int_0^\infty U(x, t) \operatorname{sen} \lambda x\, dx$

que se convierte en $\dfrac{du}{dt} \quad = \quad \left\{ \dfrac{\partial U}{\partial x} \operatorname{sen} \lambda x \;-\; \lambda U \cos \lambda x \right\} \Bigg|_0^\infty \;-\; \lambda^2 \displaystyle\int_0^\infty U \operatorname{sen} \lambda x\, dx$

$$= \quad \lambda\, U(0, t) \;-\; \lambda^2 u \tag{2}$$

integrando por partes el miembro derecho de (*1*) bajo la hipótesis de que U y $\partial U/\partial x$ tienden a cero cuando $x \to \infty$.

Con las condiciones impuestas a $U(x, 0)$, al tomar la transformada de Fourier tenemos que

$$u(\lambda, 0) = \int_0^\infty U(x, 0) \operatorname{sen} \lambda x \, dx$$
$$= \int_0^1 \operatorname{sen} \lambda x \, dx = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2} \tag{3}$$

Resolviendo (2) sometido a las condiciones (3) y $U(0, t) = 0$, encontramos que

$$u(\lambda, t) = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2} e^{-\lambda^2 t}$$

Tomando la inversa de la transformada de seno de Fourier, hallamos la solución requerida

$$U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} e^{-\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x \, d\lambda$$

Físicamente, éste representaría la temperatura de un sólido en $x > 0$ [véase el problema 32].

Problemas propuestos

SERIES DE FOURIER, FUNCIONES PARES E IMPARES, SERIES SENO Y COSENO DE FOURIER

34. Hacer la gráfica de cada una de las siguientes funciones y hallar sus correspondientes series de Fourier utilizando las propiedades de las funciones pares e impares cuando sean aplicables.

(a) $F(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases}$ Período 4

(b) $F(x) = \begin{cases} -x & -4 \leqq x \leqq 0 \\ x & 0 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$ Período 8

(c) $F(x) = 4x,\ 0 < x < 10$, Período 10

(d) $F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$ Período 6

Resp. (a) $\dfrac{16}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(1 - \cos n\pi)}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$ (c) $20 - \dfrac{40}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{5}$

(b) $2 - \dfrac{8}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(1 - \cos n\pi)}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{4}$ (d) $\dfrac{3}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left\{ \frac{6(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{6 \cos n\pi}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} \right\}$

35. En cada una de las partes del problema 34, localizar las discontinuidades de $F(x)$ y decir a qué valores converge la serie en estas discontinuidades.

Resp. (a) $x = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots;\ 0$ (c) $x = 0, \pm 10, \pm 20, \ldots;\ 20$

(b) No hay discontinuidades. (d) $x = \pm 3, \pm 9, \pm 15, \ldots;\ 3$

36. Desarrollar $F(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 < x < 4 \\ x - 6 & 4 < x < 8 \end{cases}$ en serie de Fourier de período 8.

Resp. $\dfrac{16}{\pi^2} \left\{ \cos \dfrac{\pi x}{4} + \dfrac{1}{3^2} \cos \dfrac{3\pi x}{4} + \dfrac{1}{5^2} \cos \dfrac{5\pi x}{4} + \cdots \right\}$

37. (a) Desarrollar $F(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi$, en serie de seno de Fourier.
(b) ¿Cómo podría definirse $F(x)$ en $x = 0$ y $x = \pi$ para que la serie converja a $F(x)$ en $0 \leqq x \leqq \pi$?

Resp. (a) $\dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n \operatorname{sen} 2nx}{4n^2 - 1}$ (b) $F(0) = F(\pi) = 0$

38. (*a*) Desarrollar en serie de Fourier $F(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi$ si el período es π; (*b*) comparar con el resultado del problema 37, explicando las semejanzas y diferencias si las hay.
Resp. La misma respuesta del problema 37.

39. Desarrollar $F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 8 - x & 4 < x < 8 \end{cases}$ en serie (*a*) de seno, (*b*) de coseno.

Resp. (*a*) $\dfrac{32}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{8}$ (*b*) $\dfrac{16}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cos n\pi/2 - \cos n\pi - 1}{n^2} \right) \cos \frac{n\pi x}{8}$

40. Demostrar que, para $0 \leqq x \leqq \pi$,

(*a*) $$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots \right)$$

(*b*) $$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^3} + \cdots \right)$$

41. Usando el problema 40, demostrar que

(*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, (*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, (*c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

42. Demostrar que $\dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{7^3} + \dfrac{1}{9^3} + \dfrac{1}{11^3} - \cdots = \dfrac{3\pi^2\sqrt{2}}{16}$.

IDENTIDAD DE PARSEVAL PARA SERIES DE FOURIER

43. Haciendo uso del problema 40 y de la identidad de Parseval, demostrar que

(*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, (*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

44. Demostrar que $\dfrac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \dfrac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \dfrac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2 - 8}{16}$. [*Sugerencia.* Use el problema 27.]

45. Demostrar que (*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$, (*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

46. Demostrar que $\dfrac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dfrac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \dfrac{1}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} + \cdots = \dfrac{4\pi^2 - 39}{16}$.

TRANSFORMADA FINITA DE FOURIER

47. Hallar (*a*) la transformada finita de seno de Fourier y (*b*) la transformada finita de coseno de Fourier de $F(x) = 1$ donde $0 < x < l$. *Resp.* (*a*) $l(1 - \cos n\pi)/n\pi$ (*b*) 0 si $n = 1, 2, 3, \ldots$; l si $n = 0$.

48. Hallar (*a*) la transformada finita de seno de Fourier y (*b*) la transformada finita de coseno de Fourier de $F(x) = x^2$ donde $0 < x < l$.

Resp. (*a*) $\dfrac{2l^3}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1) - \dfrac{l^3}{n\pi} \cos n\pi$ si $n = 1, 2, 3, \ldots$; $\dfrac{l^3}{3}$ si $n = 0$ (*b*) $\dfrac{2l^3}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$

49. Hallar $F(x)$ si $\mathcal{F}_s\{F(x)\} = \dfrac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi^2}$ donde $0 < x < \pi$. *Resp.* $\dfrac{2}{\pi^3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n^2} \right) \operatorname{sen} nx$

50. Hallar $F(x)$ si $\mathcal{F}_c\{F(x)\} = \dfrac{6(\operatorname{sen} n\pi/2 - \cos n\pi)}{(2n+1)\pi}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $2/\pi$ para $n = 0$, donde $0 < x < 4$.

Resp. $\dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{3}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} n\pi/2 - \cos n\pi}{2n+1}\right)\cos\frac{n\pi}{4}$

51. Si $f(n) = \dfrac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}$, hallar (*a*) $\mathcal{F}_s^{-1}\{f(n)\}$ y (*b*) $\mathcal{F}_c^{-1}\{f(n)\}$ si $0 < x < 1$.

Resp. (*a*) $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}\operatorname{sen} n\pi x$ (*b*) $1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}\cos n\pi x$

INTEGRALES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER

52. (*a*) Hallar la transformada de Fourier de $F(x) = \begin{cases} 1/2\epsilon & |x| \leqq \epsilon \\ 0 & |x| > \epsilon \end{cases}$.

(*b*) Determinar el límite de esta transformada cuando $\epsilon \to 0+$ y discutir el resultado.

Resp. (*a*) $\dfrac{\operatorname{sen}\lambda\epsilon}{\lambda\epsilon}$, (*b*) 1

53. (*a*) Hallar la transformada de Fourier de $F(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$.

(*b*) Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}\right)\cos\frac{x}{2}\,dx$.

Resp. (*a*) $4\left(\dfrac{\lambda\cos\lambda - \operatorname{sen}\lambda}{\lambda^3}\right)$, (*b*) $\dfrac{3\pi}{16}$

54. Si $F(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < 1 \\ 0 & x \geqq 1 \end{cases}$ hallar (*a*) la transformada de seno de Fourier, (*b*) la transformada de coseno de Fourier de $F(x)$.

En cada caso obtener la gráfica de $F(x)$ y de su transformada. *Resp.* (*a*) $\dfrac{1-\cos\lambda}{\lambda}$, (*b*) $\dfrac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}$

55. (*a*) Calcular la transformada de seno de Fourier de e^{-x}, $x \geqq 0$.

(*b*) Usando el resultado de (*a*), demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\operatorname{sen} mx}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}$, $m > 0$

(*c*) Desde el punto de vista del teorema de la integral de Fourier, explicar por qué el resultado de (*b*) no es válido para $m = 0$.

Resp. (*a*) $\lambda/(1+\lambda^2)$

56. Resolver para $Y(x)$ la ecuación integral

$$\int_0^{\infty} Y(x)\operatorname{sen} xt\,dx = \begin{cases} 1 & 0 \leqq t < 1 \\ 2 & 1 \leqq t < 2 \\ 0 & t \geqq 2 \end{cases}$$

y comprobar directamente la solución. *Resp.* $Y(x) = (2 + 2\cos x - 4\cos 2x)/\pi x$

IDENTIDAD DE PARSEVAL PARA INTEGRALES DE FOURIER

57. Calcular (*a*) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}$ usando la identidad de Parseval

[*Sugerencia.* Use las transformadas de seno y coseno de Fourier de e^{-x}, $x > 0$.] *Resp.* (*a*) $\pi/4$, (*b*) $\pi/4$

58. Usando el problema 54 demostrar que (*a*) $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

59. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{x^6}\,dx = \frac{\pi}{15}$.

PROBLEMAS VARIOS

60. Si $-\pi < x < \pi$ y $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ demostrar que

$$\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\alpha\pi} = \frac{\operatorname{sen} x}{1^2-\alpha^2} - \frac{2\operatorname{sen}2x}{2^2-\alpha^2} + \frac{3\operatorname{sen}3x}{3^2-\alpha^2} - \cdots$$

61. Si $-\pi < x < \pi$, demostrar que

(a) $$\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{senh}\alpha x}{\operatorname{senh}\alpha\pi} = \frac{\operatorname{sen} x}{\alpha^2+1^2} - \frac{2\operatorname{sen}2x}{\alpha^2+2^2} + \frac{3\operatorname{sen}3x}{\alpha^2+3^2} - \cdots$$

(b) $$\frac{\pi}{2}\frac{\cosh\alpha x}{\operatorname{senh}\alpha\pi} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha\cos x}{\alpha^2+1^2} + \frac{\alpha\cos 2x}{\alpha^2+2^2} - \cdots$$

62. (a) Demostrar que si $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ entonces

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots$$

(b) Demostrar que si $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}-x^{-\alpha}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots$$

(c) Usando (a) y (b) demostrar que $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi}$

[*Sugerencia*. Para (a) desarrolle $F(x) = \cos\alpha x$, $-\pi \leqq x \leqq \pi$ en serie de Fourier. Para (b) escriba la integral dada como una suma de integrales de 0 a 1 y de 1 a ∞ ; haga $x = 1/y$ en la última integral. Luego use la fórmula $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$.]

63. Si $0 < x < \pi$, demostrar $\mathcal{F}_s^{-1}\left\{\dfrac{1-\cos n\pi}{n^3}\right\} = \frac{1}{2}x(\pi - x).$

64. Hallar (a) $\mathcal{F}_s\{\partial^3 U/\partial x^3\}$ y (b) $\mathcal{F}_c\{\partial^3 U/\partial x^3\}$.

65. Demostrar que

(a) $$\mathcal{F}_s\{Y^{(iv)}(x)\} = \frac{n^4\pi^4}{l^4}\mathcal{F}_s\{Y(x)\} - \frac{n^3\pi^3}{l^3}\{Y(0) + (-1)^{n+1}Y(l)\} + \frac{n\pi}{l}\{Y''(0) + (-1)^{n+1}Y''(l)\}$$

(b) $$\mathcal{F}_c\{Y^{(iv)}(x)\} = \frac{n^4\pi^4}{l^4}\mathcal{F}_c\{Y(x)\} + \frac{n^2\pi^2}{l^2}\{Y'(0) + (-1)^{n+1}Y'(l)\} - \{Y'''(0) + (-1)^{n+1}Y'''(l)\}.$$

66. (a) Utilizando la transformada finita de Fourier, resolver

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 4,\ t > 0$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(4,t) = 0, \quad U(x,0) = 3\operatorname{sen}\pi x - 2\operatorname{sen}5\pi x$$

(b) Hacer una interpretación física posible del problema y de su solución.

Resp. (a) $U(x,t) = 3e^{-2\pi^2 t}\operatorname{sen}\pi x - 2e^{-50\pi^2 t}\operatorname{sen}5\pi x$

67. Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $0 < x < 6$, $t > 0$, sometida a las condiciones

$$U(0,t) = 0, \qquad U(6,t) = 0, \qquad U(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 3 \\ 0 & 3 < x < 6 \end{cases}$$

e interpretarla físicamente.

Resp. $U(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\left\{\frac{1-\cos(n\pi/3)}{n\pi}\right\} e^{-n^2\pi^2 t/36}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{6}$

68. (*a*) Al resolver el problema

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 6, \ t > 0$$

$$U_x(0,t) = 0, \qquad U_x(6,t) = 0, \qquad U(x,0) = 2x$$

¿cuál transformada (seno o coseno) le parece más conveniente? Explicar.

(*b*) Hallar la solución del problema (*a*).

Resp. (*b*) $6 + \dfrac{24}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right) e^{-n^2\pi^2 t/36} \cos\frac{n\pi x}{6}$

69. Una cuerda de longitud π está sometida a tensión entre los puntos $x = 0$ y $x = \pi$ sobre el eje x, con sus extremos en dichos puntos. Cuando se le comunica una pequeña vibración transversal, el desplazamiento $Y(x, t)$ desde cualquier punto del eje x está dado, para el tiempo t, por $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ donde $a^2 = T/\rho$, T = tensión, ρ = masa por unidad de longitud.

(*a*) Usando transformadas finitas de Fourier, hallar una solución de esta ecuación (llamada ecuación de onda) con $a^2 = 4$, y que satisface las condiciones $Y(0, t) = 0$, $Y(\pi, t) = 0$, $Y(x, 0) = 0{,}1 \operatorname{sen} x + 0{,}01 \operatorname{sen} 4x$, $Y_t(x, 0) = 0$ para $0 < x < \pi$, $t > 0$.

(*b*) Interpretar físicamente las condiciones de frontera de la parte (*a*) y su solución.

Resp. (*a*) $Y(x, t) = 0{,}1 \operatorname{sen} x \cos 2t + 0{,}01 \operatorname{sen} 4x \cos 8t$

70. (*a*) Resolver el problema de frontera $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ sometido a las condiciones $Y(0,t) = 0$, $Y(2,t) = 0$, $Y(x,0) = 0{,}05x(2-x)$, $Y_t(x,0) = 0$, donde $0 < x < 2$, $t > 0$. (*b*) Hacer una interpretación física.

Resp. (*a*) $Y(x,t) = \dfrac{1{,}6}{\pi^3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2} \cos\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$

71. Resolver el problema de frontera $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t) = 1$, $U(\pi,t) = 3$, $U(x,0) = 2$, donde $0 < x < \pi$, $t > 0$.

Resp. $U(x,t) = 1 + \dfrac{2x}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos n\pi}{n\pi} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$

72. Interpretar físicamente el problema 71.

73. Resolver el problema 70 intercambiando las condiciones de frontera para $Y(x, 0)$ y $Y_t(x, 0)$, es decir, $Y(x, 0) = 0$, $Y_t(x, 0) = 0{,}05x(2-x)$, y dar una interpretación física.

Resp. $Y(x,t) = \dfrac{3{,}2}{3\pi^4} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2} \operatorname{sen}\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$

74. Demostrar los resultados (*4*) y (*5*) de la página 174.

75. Comprobar el teorema de convolución en las funciones $F(x) = G(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$.

76. Escribir la identidad de Parseval en forma compleja utilizando los resultados (*4*) y (*5*) de la Pág. 174.

77. Demostrar el resultado (*15*) de la Pág. 176.

78. Demostrar los resultados (*19*) y (*21*) de las páginas 176 y 177 respectivamente.

79. Demostrar los resultados (23) y (24) de la Pág. 177.

[*Sugerencia.* Si $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} F(u)\, du$ y $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda v} G(v)\, dv$, entonces

$$f(\lambda)\, g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv$$

Se hace ahora la transformación $u + v = x$.]

80. Si $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son respectivamente las transformadas de Fourier de $F(x)$ y $G(x)$, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, \overline{G(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \overline{g(\lambda)}\, d\alpha$$

donde la barra significa el conjugado del complejo.

81. Demostrar el teorema de Riemann (véase el problema 24).

82. (*a*) Mostrar cómo se usa la transformada de Fourier para resolver

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad x > 0$$

si $U(0,t) = 0$, $U(x,0) = e^{-x}$, y $U(x,t)$ es acotada.

(*b*) Dar una interpretación física.

Resp. $U(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x}{\lambda^2 + 1}\, d\lambda$

83. (*a*) Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t) = 0$, $U(x,0) = e^{-x}$, $x > 0$, $U(x,t)$ es acotada cuando $x > 0$, $t > 0$.

(*b*) Hacer una interpretación física.

Resp. $U(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x}{\lambda^2 + 1}\, d\lambda$

84. Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_x(0,t) = 0$, $U(x,0) = \begin{cases} x & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$, $U(x,t)$ es acotada cuando $x > 0$, $t > 0$.

Resp. $U(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda} + \frac{\cos\lambda - 1}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda x\, d\lambda$

85. (*a*) Demostrar que la solución del problema 33 puede expresarse como

$$U(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\, dv - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(1-x)/2\sqrt{t}}^{(1+x)/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\, dv$$

(*b*) Demostrar directamente que la función de la parte (*a*) satisface a $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ y a las condiciones del problema 33.

Capítulo 7

Fórmulas de inversión compleja

FORMULA DE INVERSION COMPLEJA

Si $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ está dada por

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s)\, ds, \qquad t > 0 \tag{1}$$

y $F(t) = 0$ para $t < 0$. Este resultado se llama la *inversión integral compleja* o *fórmula de inversión compleja*. También se conoce como la *fórmula integral de Bromwich.* Este resultado ofrece un método directo para obtener la transformada inversa de Laplace de una función dada $f(s)$.

La integración de *(1)* se realiza a lo largo de un segmento $s = \gamma$ del plano complejo donde $s = x + iy$. El número real γ se escoge en tal forma que $s = \gamma$ quede a la derecha de todas las singularidades (polos, puntos de ramificación o singularidades esenciales); aparte de esta condición γ es arbitraria.

CONTORNO DE BROMWICH

En la práctica, la integral *(1)* se calcula mediante la integral curvilínea

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\, ds \tag{2}$$

donde C es el contorno de la figura 7-1. Este contorno, llamado *contorno de Bromwich,* se compone del segmento AB y el arco $BJKLA$ de una circunferencia de radio R con centro en el origen O.

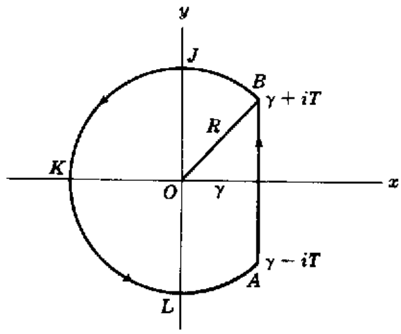


Fig. 7-1

Si representamos el arco $BJKLA$ por Γ, puesto que $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$, por *(1)*, se deduce que

$$F(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} f(s)\, ds \tag{3}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\, ds - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{st} f(s)\, ds\right\}$$

UTILIZACION DEL TEOREMA DEL RESIDUO PARA HALLAR TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Supongamos que las únicas singularidades de $f(s)$ son polos, todos ellos a la izquierda de la recta $s = \gamma$, para alguna constante real γ. Supongamos además que la integral *(3)* a lo largo de Γ tiende a cero cuando $R \to \infty$. Entonces, por el teorema del residuo, *(3)* toma la forma

$$F(t) = \text{suma de residuos de } e^{st}\, f(s) \text{ en los polos de } f(s) \tag{4}$$

$$= \sum \text{ residuos de } e^{st}\, f(s) \text{ en los polos de } f(s).$$

UNA CONDICION SUFICIENTE PARA QUE TIENDA A CERO LA INTEGRAL ALREDEDOR DE Γ

Para la validez del resultado (4) hay que suponer que la integral alrededor de Γ en (3) tiende a cero cuando $R \to \infty$. Una condición suficiente para que se cumpla esta hipótesis se da en el

Teorema 7-1. Si es posible hallar constantes $M > 0$ y $k > 0$ tales que

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k} \tag{5}$$

en todo el conjunto Γ (donde $s = Re^{i\theta}$), entonces la integral alrededor de Γ de $e^{st}\, f(s)$ tiende a cero cuando $R \to \infty$, es decir,

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{st}\, f(s)\, ds = 0 \tag{6}$$

La condición (5) se satisface siempre si $f(s) = P(s)/Q(s)$ donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios en los cuales el grado de $P(s)$ es menor que el de $Q(s)$. Véase el problema 15.

Este resultado es válido si $f(s)$ tiene otras singularidades fuera de polos.

MODIFICACION DEL CONTORNO DE BROMWICH EN EL CASO DE PUNTOS DE RAMIFICACION

Si $f(s)$ tiene puntos de ramificación, los resultados anteriores pueden extenderse a ellos si el contorno de Bromwich es modificado convenientemente. Por ejemplo, si $f(s)$ tiene un solo punto de ramificación en $s = 0$, se puede usar el contorno de la figura 7-2. En esta figura, BDE y LNA representan arcos de una circunferencia de radio R con centro en el origen O, y HJK es el arco de una circunferencia de radio ϵ con centro en O. Para los detalles de la evaluación de transformadas inversas de Laplace en tales casos, véase el problema 9.

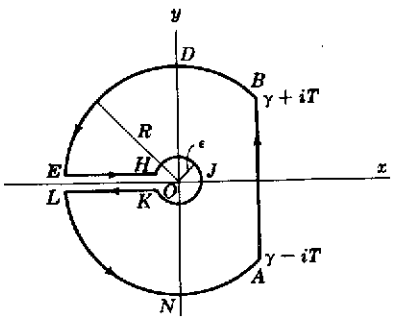


Fig. 7-2

CASO DE INFINITAS SINGULARIDADES

Deseamos hallar la transformada inversa de Laplace de una función que tenga infinitas singularidades aisladas; es posible aplicar los métodos anteriores. En este caso la parte curva del contorno de Bromwich se escoge de tal manera que tenga como radio R_m y que encierre tan sólo un número finito de singularidades sin pasar por ninguna singularidad. La transformada inversa de Laplace requerida se encuentra al tomar un límite conveniente cuando $m \to \infty$. Véanse los problemas 13 y 14.

Problemas resueltos

FORMULA DE INVERSION COMPLEJA

1. Establecer la validez de la fórmula de inversión compleja.

Por la definición, tenemos que $f(s) = \int_0^\infty e^{-su} F(u)\, du$. Entonces

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s)\, ds = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \int_0^\infty e^{st-su} F(u)\, du\, ds$$

Haciendo $s = \gamma + iy$, $ds = i dy$, se transforma en

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{-T}^{T} e^{iyt}\, dy \int_0^\infty e^{-iyu} [e^{-\gamma u} F(u)]\, du = \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \begin{cases} 2\pi e^{-\gamma t} F(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

por el teorema de la integral de Fourier [véase el Cap. 6]. Así, encontramos que

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s)\, ds \qquad t > 0$$

como se esperaba.

En la demostración anterior se ha supuesto que $e^{-\gamma u} F(u)$ es absolutamente integrable en $(0, \infty)$, es decir, que $\int_0^\infty e^{-\gamma u} |F(u)|\, du$ converge, para que sea lícito aplicar el teorema de la integral de Fourier. Para que esta condición se cumpla es suficiente que $F(t)$ sea de orden exponencial γ donde el número real γ se escoge de tal manera que la recta del plano complejo $s = \gamma$ esté a la derecha de todas las singularidades de $f(s)$. Aparte de esta condición, γ se puede escoger arbitrariamente.

2. Sea Γ la parte curva $BJPKQLA$ del contorno de Bromwich [Fig. 7-3] cuya ecuación es $s = Re^{i\theta}$, $\theta_0 \leqq \theta \leqq 2\pi - \theta_0$, es decir, el arco de una circunferencia de radio R y centro en el origen O. Supongamos que sobre Γ se verifica que

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k}$$

donde $k > 0$ y M son constantes. Demostrar que

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{st} f(s)\, ds = 0$$

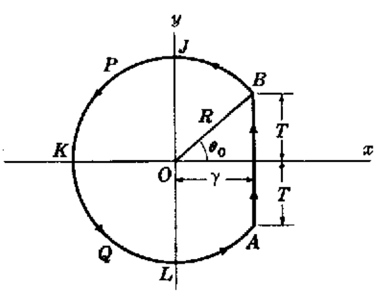


Fig. 7-3

Si $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y Γ_4 representan respectivamente los arcos, BJ, JPK, KQL y LA, tendremos que

$$\int_\Gamma e^{st} f(s)\, ds = \int_{\Gamma_1} e^{st} f(s)\, ds + \int_{\Gamma_2} e^{st} f(s)\, ds + \int_{\Gamma_3} e^{st} f(s)\, ds + \int_{\Gamma_4} e^{st} f(s)\, ds$$

Entonces, si se logra demostrar que cada una de las integrales del lado derecho tiende a cero cuando $R \to \infty$, habremos demostrado el resultado requerido. Para esto consideremos las cuatro integrales.

Caso 1. Integral sobre Γ_1, o sea, sobre BJ.

Como $s = Re^{i\theta}$, $\theta_0 \leqq \theta \leqq \pi/2$, tendremos, a lo largo de Γ_1,

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} e^{st} f(s)\, ds = \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{Re^{i\theta}t} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\, d\theta$$

Entonces
$$|I_1| \leqq \int_{\theta_0}^{\pi/2} |e^{(R\cos\theta)t}|\,|e^{i(R\,\mathrm{sen}\,\theta)t}|\,|f(Re^{i\theta})|\,|iRe^{i\theta}|\,d\theta$$
$$\leqq \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{(R\cos\theta)t}\,|f(Re^{i\theta})|\,R\,d\theta$$
$$\leqq \frac{M}{R^{k-1}}\int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{(R\cos\theta)t}\,d\theta \;=\; \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\phi_0} e^{(R\,\mathrm{sen}\,\phi)t}\,d\phi$$

Aquí hemos usado la condición dada $|f(s)| \leqq M/R^k$ sobre Γ_1, y la transformación $\theta = \pi/2 - \phi$, donde $\phi_0 = \pi/2 - \theta_0 = \mathrm{sen}^{-1}(\gamma/R)$.

Como sen $\phi \leqq$ sen $\phi_0 \leqq \cos\theta_0 = \gamma/R$, la última integral es igual o menor que

$$\frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\phi_0} e^{\gamma t}\,d\phi \;=\; \frac{M\,e^{\gamma t}\,\phi_0}{R^{k-1}} \;=\; \frac{M\,e^{\gamma t}}{R^{k-1}}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{\gamma}{R}$$

Pero cuando $R \to \infty$, esta última cantidad tiende a cero [esto puede verse al observar, por ejemplo, que $\mathrm{sen}^{-1}(\gamma/R) \approx \gamma/R$ para grandes valores de R]. Así, $\lim_{R\to\infty} I_1 = 0$.

Caso 2. Integral sobre Γ_2 o JPK.

Como $s = Re^{i\theta}$, $\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi$, a lo largo de Γ_2, tenemos que

$$I_2 \;=\; \int_{\Gamma_2} e^{st} f(s)\,ds \;=\; \int_{\pi/2}^{\pi} e^{Re^{i\theta}t} f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\,d\theta$$

Entonces, como en el caso 1, obtenemos

$$|I_2| \;\leqq\; \frac{M}{R^{k-1}}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{(R\cos\theta)t}\,d\theta \;\leqq\; \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-(R\,\mathrm{sen}\,\phi)t}\,d\phi$$

haciendo $\theta = \pi/2 + \phi$.

Ahora, sen $\phi \geqq 2\phi/\pi$ para $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$ [véase el problema 3], de manera que la última integral es menor o igual que

$$\frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-2R\phi t/\pi}\,d\phi \;=\; \frac{\pi M}{2tR^k}(1 - e^{-Rt})$$

que tiende a cero cuando $R \to \infty$. Así, $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$.

Caso 3. La integral sobre Γ_3 o sea KQL.

Este caso puede tratarse en forma análoga al caso 2 [véase el problema 58(*b*)].

Caso 4. La integral sobre Γ_4 o sea LA.

Este caso se puede tratar en forma análoga al caso 1, [véase el problema 58(*b*)].

3. Demostrar que sen $\phi \geqq 2\phi/\pi$ para $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$.

***Método 1.* Demostración gráfica.**

De la figura 7-4, en la curva OPQ representa un arco de la curva sinusoidal $y = $ sen ϕ y $y = 2\phi/\pi$ representa la recta OP; geométricamente es evidente que sen $\phi \geqq 2\phi/\pi$ para $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$.

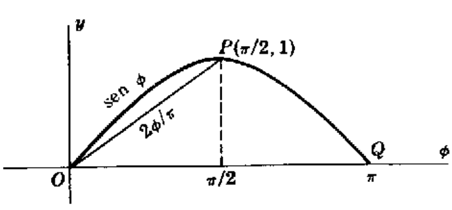


Fig. 7-4

***Método 2.* Demostración analítica.**

Consideramos $F(\phi) = \dfrac{\mathrm{sen}\,\phi}{\phi}$. Tenemos que

$$\frac{dF}{d\phi} \;=\; F'(\phi) \;=\; \frac{\phi\cos\phi - \mathrm{sen}\,\phi}{\phi^2} \qquad (1)$$

Si $G(\phi) = \phi\cos\phi - \sin\phi$, entonces

$$\frac{dG}{d\phi} = G'(\phi) = -\phi \operatorname{sen}\phi \qquad (2)$$

Así, para $0 \leqq \phi < \pi/2$, $G'(\phi) \leqq 0$ luego $G(\phi)$ es una función decreciente. Como $G(0) = 0$, se deduce que $G(\phi) \leqq 0$. Entonces, por *(1)* vemos que $F'(\phi) \leqq 0$, o sea, que $F(\phi)$ es una función decreciente. Definimos $F(0) = \lim_{\phi\to 0} F(\phi) = 1$, vemos que $F(\phi)$ decrece de 1 a $2/\pi$ cuando ϕ va de 0 a $\pi/2$. Así,

$$1 \geqq \frac{\operatorname{sen}\phi}{\phi} \geqq \frac{2}{\pi}$$

de donde se deduce el resultado requerido.

UTILIZACION DEL TEOREMA DEL RESIDUO PARA ENCONTRAR TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

4. Supongamos que las únicas singularidades de $f(s)$ son polos situados todos ellos a la izquierda de la recta $s = \gamma$ para alguna constante real γ. Supongamos además que $f(s)$ satisface la condición dada en el problema 2. Demostrar que la transformada inversa de Laplace de $f(s)$ está dada por $F(t)$ = suma de los residuos de e^{st} en todos los polos de $f(s)$.

Tenemos que $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{st} f(s)\, ds$$

donde C es el contorno de Bromwich del problema 2 y Γ es el arco circular $BJPKQLA$ de la figura 7-3. Por el teorema del residuo,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\, ds = \text{suma de los residuos de } e^{st} f(s) \text{ en todos los polos dentro de } C.$$

$$= \sum \text{residuos dentro de } C.$$

Así, $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s)\, ds = \sum \text{residuos dentro de } C - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{st} f(s)\, ds$$

Tomando el límite cuando $R \to \infty$, por el problema 2, encontramos que

$$F(t) = \text{suma de residuos de } e^{st} f(s) \text{ en todos los polos de } f(s).$$

5. (*a*) Demostrar que $f(s) = \dfrac{1}{s-2}$ satisface la condición del problema 2.

(*b*) Hallar el residuo de $\dfrac{e^{st}}{s-2}$ en el polo $s = 2$.

(*c*) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}$ usando la fórmula de inversión compleja.

(*a*) Para $s = Re^{i\theta}$, tenemos que

$$\left|\frac{1}{s-2}\right| = \left|\frac{1}{Re^{i\theta}-2}\right| \leq \frac{1}{|Re^{i\theta}| - 2} = \frac{1}{R-2} < \frac{2}{R}$$

para R suficientemente grande (por ejemplo $R > 4$). Así, la condición del problema 2 se satisface cuando $k = 1$, $M = 2$. Nótese que al establecer lo anterior se utilizó la desigualdad $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ [véase el problema 49(c), Pág. 167].

(b) El residuo en el polo simple $s = 2$ es

$$\lim_{s\to 2} (s-2)\left(\frac{e^{st}}{s-2}\right) = e^{2t}$$

(c) Por el problema 4 y los resultados de las partes (a) y (b), vemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \text{suma de residuos de } e^{st}f(s) = e^{2t}$$

Obsérvese que en este caso el contorno se escoge de tal modo que γ es cualquier número real mayor que 2 y el contorno encierra el polo $s = 2$.

6. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ usando el método de los residuos.

Como se requiere que la función, cuya transformada inversa de Laplace se busca, satisfaga la condición (5) del teorema de la Pág. 202 [esto se puede establecer directamente como en el problema 5, o usando el problema 15, Pág. 212], tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st}\,ds}{(s+1)(s-2)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{st}\,ds}{(s+1)(s-2)^2} \\
&= \sum \text{residuos de } \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \text{ en los polos } s=-1 \text{ y } s=2.
\end{aligned}$$

Ahora, el residuo en el polo $s = -1$ es

$$\lim_{s\to -1}(s+1)\left\{\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \frac{1}{9}e^{-t}$$

y el residuo en el polo doble $s = 2$ es

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 2}\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s-2)^2\left\{\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right\}\right] &= \lim_{s\to 2}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s+1}\right] \\
&= \lim_{s\to 2}\frac{(s+1)te^{st}-e^{st}}{(s+1)^2} = \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}
\end{aligned}$$

Entonces $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \sum \text{residuo} = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

7. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right\}$.

Como en el problema 6, la inversa buscada es la suma de los residuos de

$$\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}$$

en los polos $s = -1$ y $s = 1$ los cuales son de ordenes tres y dos respectivamente.

Ahora, el residuo en $s = -1$ es

$$\lim_{s \to -1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right] = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{se^{st}}{(s-1)^2}\right] = \frac{1}{16} e^{-t}(1-2t^2)$$

y el residuo en $s = 1$ es

$$\lim_{s \to 1} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds}\left[(s-1)^2 \frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right] = \lim_{s \to 1} \frac{d}{ds}\left[\frac{se^{st}}{(s-1)^2}\right] = \frac{1}{16} e^{t}(2t-1)$$

Entonces $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right\} = \sum \text{residuos} = \frac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2) + \frac{1}{16}e^{t}(2t-1)$$

8. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$.

Tenemos que $$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{[(s+i)(s-i)]^2} = \frac{1}{(s+i)^2(s-i)^2}$$

La inversa buscada es la suma de los residuos de

$$\frac{e^{st}}{(s+i)^2(s-i)^2}$$

en los polos $s = i$ y $s = -i$ que son ambos de orden 2.

Ahora, el residuo en $s = i$ es

$$\lim_{s \to i} \frac{d}{ds}\left[(s-i)^2 \frac{e^{st}}{(s+i)^2(s-i)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it}$$

y el residuo en $s = -i$ es

$$\lim_{s \to -i} \frac{d}{ds}\left[(s+i)^2 \frac{e^{st}}{(s+i)^2(s-i)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{-it} + \frac{1}{4}ie^{-it}$$

que puede obtenerse también del residuo en $s = i$ al remplazar i por $-i$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum \text{residuos} &= -\frac{1}{4}t(e^{it}+e^{-it}) - \frac{1}{4}i(e^{it}-e^{-it}) \\ &= -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t) \end{aligned}$$

Compárese con el problema 18, Pág. 54.

TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE DE FUNCIONES CON PUNTOS DE RAMIFICACION

9. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\}$ utilizando la fórmula de inversión compleja.

Por la fórmula de inversión compleja, la transformada inversa de Laplace buscada está dada por

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st - a\sqrt{s}}}{s}\, ds \qquad (1)$$

Como $s = 0$ es un punto de ramificación del integrando, consideramos

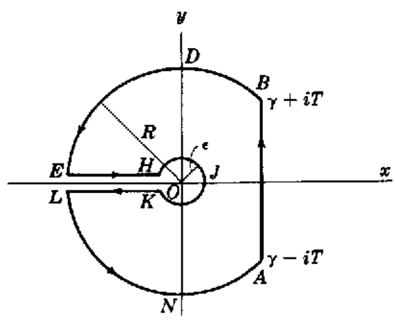


Fig. 7-5

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{BDE}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{EH}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{HJK}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{KL}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{LNA}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds$$

donde C es el contorno de la figura 7-5 que consta de la recta AB ($s = \gamma$), de los arcos BDE y LNA del círculo de radio R y centro en el origen, y del arco HJK de un círculo de radio ϵ y centro en O.

Como la única singularidad del integrado, $s = 0$, no está dentro de C, la integral de la izquierda es cero en virtud del teorema de Cauchy. Además, el integrando satisface la condición del problema 2 [véase el problema 61] de manera que al tomar el límite cuando $R \to \infty$ las integrales a lo largo de BDE y LNA tienden a cero. Se deduce que

$$F(t) = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds$$
$$= -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{EH}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \int_{HJK}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \int_{KL}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds\right\} \tag{2}$$

A lo largo de EH, $s = xe^{\pi i}$, $\sqrt{s} = \sqrt{x}\,e^{\pi i/2} = i\sqrt{x}$ y como s va de $-R$ a $-\epsilon$, x va de R a ϵ. Tenemos entonces que

$$\int_{EH}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_R^{\epsilon}\frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x}\,dx$$

Análogamente, a lo largo de KL, $s = xe^{-\pi i}$, $\sqrt{s} = \sqrt{x}\,e^{-\pi i/2} = -i\sqrt{x}$ y como s va de $-\epsilon$ a $-R$, x va de ϵ a R. Entonces,

$$\int_{KL}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_{-\epsilon}^{-R}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x}\,dx$$

A lo largo de AJK, $s = \epsilon e^{i\theta}$ y tenemos que

$$\int_{HJK}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}}{\epsilon e^{i\theta}}\,i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta$$
$$= i\int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta$$

Así, (2) se convierte en

$$F(t) = -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_R^{\epsilon}\frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x}\,dx + i\int_{\pi}^{-\pi}e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta\right\}$$
$$= -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt}(e^{ai\sqrt{x}} - e^{-ai\sqrt{x}})}{x}\,dx + i\int_{\pi}^{-\pi}e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta\right\}$$
$$= -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{2i\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt}\operatorname{sen} a\sqrt{x}}{x}\,dx + i\int_{\pi}^{-\pi}e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta\right\}$$

Como se puede tomar el límite bajo el signo integral, tenemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{-\pi}e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta = \int_{\pi}^{-\pi}1\,d\theta = -2\pi$$

Así, encontramos que
$$F(t) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}\operatorname{sen} a\sqrt{x}}{x}\,dx \tag{3}$$

Esto puede escribirse (véase el problema 10) como

$$F(t) = 1 - \operatorname{fer}(a/2\sqrt{t}) = \operatorname{fcer}(a/2\sqrt{t}) \tag{4}$$

10. Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sen}\,a\sqrt{x}}{x}\,dx = \mathrm{fer}\,(a/2\sqrt{t})$ y, mediante esto, establecer el resultado final (*4*) del problema 9.

Haciendo $x = u^2$, la integral requerida toma la forma

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-u^2t}\,\mathrm{sen}\,au}{u}\,du$$

Derivando con respecto a a y usando el problema 183, Pág. 41,

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^2t}\cos au\,du = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-a^2/4t}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$$

Entonces, usando el hecho que $I = 0$ cuando $a = 0$,

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-p^2/4t}\,dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du = \mathrm{fer}\,(a/2\sqrt{t})$$

y el resultado queda establecido.

11. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\}$.

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, tenemos que $\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0) = s\,f(s)$ si $F(0) = 0$. Entonces si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $F(0) = 0$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{s\,f(s)\} = F'(t)$.

Por los problemas 9 y 10 tenemos que

$$F(t) = \mathrm{fcer}\,(a/2\sqrt{t}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du$$

de manera que $F(0) = 0$ y $\qquad f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$

Entonces se deduce que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\} = F'(t) = \frac{d}{dt}\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du\right\}$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\,t^{-3/2}\,e^{-a^2/4t}$$

TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE DE FUNCIONES CON INFINITAS SINGULARIDADES

12. Hallar todas las singularidades de $\displaystyle f(s) = \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}$ donde $0 < x < 1$.

Debido a la presencia de $\sqrt{s}$, parece que $s = 0$ es un punto de ramificación. Esto no es cierto; puede verse que

$$f(s) = \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}} = \frac{1 + (x\sqrt{s})^2/2! + (x\sqrt{s})^4/4! + \cdots}{s\{1 + (\sqrt{s})^2/2! + (\sqrt{s})^4/4! + \cdots\}}$$

$$= \frac{1 + x^2s/2! + x^4s^2/4! + \cdots}{s\{1 + s/2! + s^2/4! + \cdots\}}$$

de lo cual resulta evidente que no hay punto de ramificación en $s = 0$. Sin embargo, en $s = 0$ hay un polo simple.

La función $f(s)$ tiene también infinitos polos dados por las raíces de la ecuación

$$\cosh\sqrt{s} = \frac{e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}}{2} = 0$$

Estos ocurren cuando $e^{2\sqrt{s}} = -1 = e^{\pi i + 2k\pi i}$ $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

de donde $\sqrt{s} = (k + \frac{1}{2})\pi i$ o $s = -(k + \frac{1}{2})^2\pi^2$

Estos son polos simples [véase el problema 56].

Así, $f(s)$ tiene polos simples en

$$s = 0 \text{ y } s = s_n, \text{ donde } s_n = -(n - \tfrac{1}{2})^2\pi^2, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

13. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}\right\}$ donde $0 < x < 1$.

Esta inversa puede hallarse haciendo uso del contorno de Bromwich de la Fig. 7-6. La recta AB se escoge en tal forma que permanezca a la derecha de todos los polos, los cuales, como se ve en el problema 12, son

$$s = 0 \quad \text{y} \quad s = s_n = -(n - \tfrac{1}{2})^2\pi^2, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

El contorno de Bromwich se escoge en tal forma que la parte curva $BDEFGHA$ sea un arco de circunferencia Γ_m con centro en el origen y radio

$$R_m = m^2\pi^2$$

donde m es un entero positivo. Esta elección nos asegura que el contorno no pasa por ninguno de los polos.

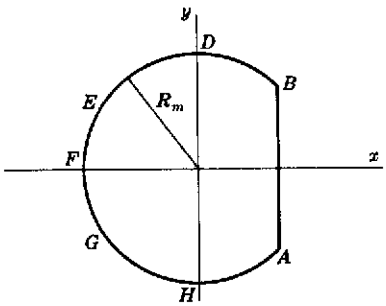


Fig. 7-6

Ahora hallamos los residuos de

$$\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}$$

en los polos. Tenemos:

El residuo en $s = 0$ es $\quad \lim_{s \to 0} (s - 0)\left\{\dfrac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right\} = 1$

El residuo en $s = -(n - \frac{1}{2})^2\pi^2, \; n = 1, 2, 3, \ldots$ es

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to s_n} (s - s_n)\left\{\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right\} &= \lim_{s \to s_n}\left\{\frac{s - s_n}{\cosh\sqrt{s}}\right\} \lim_{s \to s_n}\left\{\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s}\right\} \\
&= \lim_{s \to s_n}\left\{\frac{1}{(\operatorname{senh}\sqrt{s})(1/2\sqrt{s})}\right\} \lim_{s \to s_n}\left\{\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s}\right\} \\
&= \frac{4(-1)^n}{\pi(2n - 1)} e^{-(n - 1/2)^2\pi^2 t}\cos(n - \tfrac{1}{2})\pi x
\end{aligned}$$

Si C_m es el contorno de la Fig. 7-6, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m} \frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\,ds = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{2n - 1} e^{-(n - 1/2)^2\pi^2 t}\cos(n - \tfrac{1}{2})\pi x$$

Tomando el límite cuando $m \to \infty$ y observando que la integral alrededor de Γ_m tiende a cero [véase el problema 54], encontramos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right\} &= 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - 1} e^{-(n - 1/2)^2\pi^2 t}\cos(n - \tfrac{1}{2})\pi x \\
&= 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - 1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}\cos\frac{(2n - 1)\pi x}{2}
\end{aligned}$$

14. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh sa}\right\}$ donde $0 < x < a$.

La función $f(s) = \dfrac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh sa}$ tiene polos en $s = 0$ y en los valores de s para los cuales $\cosh sa = 0$, es decir,

$$s = s_k = (k+\tfrac{1}{2})\pi i/a \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Debido a la presencia de s^2, parecería como si $s = 0$ fuera un polo de orden dos. Sin embargo, al observar que cerca a $s = 0$,

$$\frac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh sa} = \frac{sx + (sx)^3/3! + (sx)^5/5! + \cdots}{s^2\{1 + (sa)^2/2! + (sa)^4/4! + \cdots\}}$$

$$= \frac{x + s^2x^3/3! + s^4x^5/5!}{s\{1 + s^2a^2/2! + s^4a^4/4! + \cdots\}}$$

vemos que $s = 1$ es un polo de orden 1, o sea un polo simple. Los polos s_k son también simples [véase el problema 56].

Procediendo como en el problema 13, obtenemos los residuos de $e^{st}f(s)$ en dichos polos.

El residuo en $s = 0$ es

$$\lim_{s\to 0}\,(s-0)\left\{\frac{e^{st}\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh sa}\right\} = \left\{\lim_{s\to 0}\frac{\operatorname{senh} sx}{s}\right\}\left\{\lim_{s\to 0}\frac{e^{st}}{\cosh sa}\right\} = x$$

usando la regla de L'Hospital.

El residuo en $s = s_k$ es

$$\lim_{s\to s_k}\,(s-s_k)\left\{\frac{e^{st}\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh sa}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_k}\frac{s-s_k}{\cosh sa}\right\}\left\{\lim_{s\to s_k}\frac{e^{st}\operatorname{senh} sx}{s^2}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_k}\frac{1}{a\operatorname{senh} sa}\right\}\left\{\lim_{s\to s_k}\frac{e^{st}\operatorname{senh} sx}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{ai\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\pi}\cdot\frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi it/a}\, i\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\pi x/a}{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2/a^2}$$

$$= -\frac{a(-1)^k e^{(k+\frac{1}{2})\pi it/a}\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\pi x/a}{\pi^2(k+\frac{1}{2})^2}$$

Con un procedimiento conveniente de límite similar al que se usó en el problema 13, al tomar la suma de los residuos obtenemos el resultado buscado,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{senh} sx}{s^2\cosh sa}\right\} = x - \frac{a}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{(k+\frac{1}{2})\pi it/a}\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\pi x/a}{(k+\frac{1}{2})^2}$$

$$= x + \frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(n-\frac{1}{2})\pi t/a\operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})\pi x/a}{(n-\frac{1}{2})^2}$$

$$= x + \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$$

PROBLEMAS VARIOS

15. Sea $f(s) = P(s)/Q(s)$ donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios tales que el grado de $P(s)$ es menor que el de $Q(s)$. Demostrar que $f(s)$ satisface la condición del problema 2.

Sean
$$P(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m$$
$$Q(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n$$

donde $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ y $0 \leqq m < n$. Entonces, si $s = Re^{i\theta}$, tenemos que

$$|f(s)| = \left|\frac{P(s)}{Q(s)}\right| = \left|\frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}\right|$$

$$= \left|\frac{a_0 R^m e^{mi\theta} + a_1 R^{m-1} e^{(m-1)i\theta} + \cdots + a_m}{b_0 R^n e^{ni\theta} + b_1 R^{n-1} e^{(n-1)i\theta} + \cdots + a_n}\right|$$

$$= \left|\frac{a_0}{b_0}\right| \frac{1}{R^{n-m}} \left|\frac{1 + (a_1/a_0 R)e^{-i\theta} + (a_2/a_0 R^2)e^{-2i\theta} + \cdots + (a_m/a_0 R^m)e^{-ni\theta}}{1 + (b_1/b_0 R)e^{-i\theta} + (b_2/b_0 R^2)e^{-2i\theta} + \cdots + (b_n/b_0 R^n)e^{-ni\theta}}\right|$$

Llamemos A el máximo de $|a_1/a_0|, |a_2/a_0|, \ldots, |a_m/a_0|$.

y B el máximo de $|b_1/b_0|, |b_2/b_0|, \ldots, |b_n/b_0|$.

Entonces

$$\left|1 + \frac{a_1}{a_0 R} e^{-i\theta} + \frac{a_2}{a_0 R^2} e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{a_m}{a_0 R^m} e^{-mi\theta}\right| \leqq 1 + \frac{A}{R} + \frac{A}{R^2} + \cdots + \frac{A}{R^m}$$
$$\leqq 1 + \frac{A}{R}\left(1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \cdots\right)$$
$$\leqq 1 + \frac{A}{R-1} < 2$$

para $R > A + 1$.

Además,
$$\left|1 + \frac{b_1}{b_0 R} e^{-i\theta} + \frac{b_2}{b_0 R^2} e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{b_n}{b_0 R^n} e^{-ni\theta}\right|$$
$$\geqq 1 - \left|\frac{b_1}{b_0 R} e^{-i\theta} + \frac{b_2}{b_0 R^2} e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{b_n}{b_0 R^n} e^{-ni\theta}\right|$$
$$\geqq 1 - \left(\frac{B}{R} + \frac{B}{R^2} + \cdots + \frac{B}{R^n}\right)$$
$$\geqq 1 - \frac{B}{R}\left(1 + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2} + \cdots\right)$$
$$\geqq 1 - \frac{B}{R-1} \geqq \frac{1}{2}$$

para $R > 2B + 1$.

Así, para R mayor que $A + 1$ o que $2B + 1$, tenemos que

$$|f(s)| \leqq \left|\frac{a_0}{b_0}\right| \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \cdot \frac{1}{1/2} \leqq \frac{M}{R^k}$$

donde M es cualquier constante mayor que $2|a_0/b_0|$ y $k = n - m \geqq 1$. Esto demuestra el resultado.

16. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}\right\}$ donde $0 < x < a$.

(a) ***Método 1.*** Por el problema 13, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}\right\} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

Sustituyendo s por ks obtenemos, por la propiedad del cambio de escala de la Pág. 44,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{ks}}{ks\cosh\sqrt{ks}}\right\} = \frac{1}{k}\left\{1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2t/4k}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right\}$$

Al multiplicar ambos miembros por k y al sustituir k por a^2 y x por x/a, llegamos al resultado deseado

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh a\sqrt{s}}\right\} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2t/4a^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

Método 2. Podemos usar directamente la fórmula de inversión como en el problema 13.

17. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cosh sx}{s^3\cosh sb}\right\}$ donde $0 < x < b$.

Sea $f(s) = \dfrac{\cosh sx}{s^3\cosh sb}$. Entonces $s = 0$ es un polo de orden 3, en tanto que $s = s_k = (2k+1)\pi i/2b$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ [las raíces de $\cosh sb = 0$] son polos simples. Procediendo como en el problema 13, obtenemos: El residuo de $e^{st}f(s)$ en $s = s_k$ es

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to s_k}(s-s_k)\left\{\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3\cosh sb}\right\}\\
&= \left\{\lim_{s\to s_k}\frac{s-s_k}{\cosh sb}\right\}\left\{\lim_{s\to s_k}\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3}\right\}\\
&= \frac{1}{b\,\operatorname{senh}(2k+1)\pi i/2}\cdot\frac{e^{(2k+1)\pi it/2b}\cosh(2k+1)\pi ix/2b}{\{(2k+1)\pi i/2b\}^3}\\
&= \frac{(-1)^k\,8b^2\,e^{(2k+1)\pi it/2b}}{(2k+1)\pi^3}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2b}
\end{aligned}$$

Para hallar el residuo en $s = 0$, escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3\cosh sb} &= \frac{1}{s^3}\left(1 + st + \frac{s^2t^2}{2!} + \cdots\right)\left\{\frac{1 + s^2x^2/2! + s^4x^4/4! + \cdots}{1 + s^2b^2/2! + s^4b^4/4! + \cdots}\right\}\\
&= \frac{1}{s^3}\left(1 + st + \frac{s^2t^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{s^2x^2}{2!} + \frac{s^4x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{s^2b^2}{2} + \frac{5s^4b^4}{24} - \cdots\right)\\
&= \frac{1}{s^3}\left\{1 + st + \frac{s^2t^2}{2} + \frac{s^2x^2}{2} - \frac{s^2b^2}{2} + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

Así, el residuo [que es el coeficiente de $1/s$ en esta serie] es $\frac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2)$.

El residuo en $s = 0$ se puede obtener calculando

$$\lim_{s\to0}\frac{1}{2!}\frac{d^3}{ds^3}\left\{(s-0)^3\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3\cosh sb}\right\}$$

La transformada inversa de Laplace buscada es la suma de los residuos anteriores y vale

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2) + \frac{8b^2}{\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{(2k+1)\pi it/2b}}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2b}\\
&= \tfrac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2) - \frac{16b^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2b}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2b}
\end{aligned}$$

que es la fórmula 123 de la tabla de la Pág. 252.

18. A un circuito eléctrico, figura 7-8, se le aplica un voltaje periódico $E(t)$ en forma de "onda cuadrada" como el de la figura 7-7. Suponiendo que la corriente es cero en el tiempo $t = 0$, ¿cuánto vale la corriente un tiempo posterior?

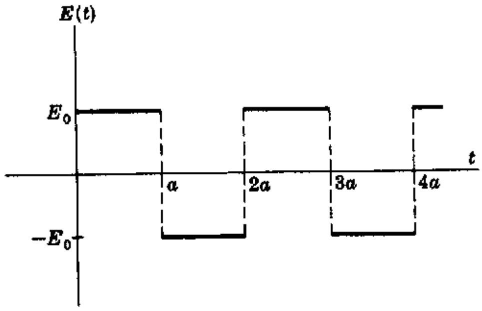


Fig. 7-7

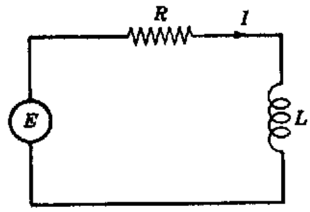


Fig. 7-8

La ecuación diferencial para la corriente $I(t)$ en el circuito es

$$L\frac{dI}{dt} + RI \quad = \quad E(t) \qquad \text{donde} \qquad I(0) = 0 \tag{1}$$

Tomando transformadas de Laplace y usando la fórmula 135 de la Pág. 253, obtenemos

$$Ls\tilde{I} + R\tilde{I} \quad = \quad \frac{E_0}{s}\tanh\frac{as}{2} \qquad \text{o} \qquad \tilde{I}(s) \quad = \quad \frac{E_0}{s(Ls+R)}\tanh\frac{as}{2}$$

donde $\tilde{I}(s) = \mathcal{L}\{I(t)\}$. Así,

$$I(t) \quad = \quad \frac{E_0}{L}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+R/L)}\tanh\frac{as}{2}\right\} \tag{2}$$

La función $f(s) = \dfrac{1}{s(s+R/L)}\tanh\dfrac{as}{2}$ tiene un polo simple en $s = -R/L$ y polos simples en $s = s_k = (2k+1)\pi i/a$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ donde $\cosh(as/2) = 0$. [Compárese con el problema 17.] El valor $s = 0$ no es un polo, puesto que $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\tanh(as/2)}{s} = \dfrac{a}{2}$ es finita. Así, $s = 0$ es una singularidad evitable.

Siguiendo el proceso de los problemas 13 y 17 obtenemos los residuos de $e^{st}f(s)$ en los polos. Hallamos así:

El residuo en $s = -R/L$ es

$$\lim_{s\to -R/L}(s+R/L)\left\{\frac{e^{st}}{s(s+R/L)}\tanh\frac{as}{2}\right\} \quad = \quad \frac{L}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L}$$

El residuo en $s = s_k = (2k+1)\pi i/a$ es

$$\lim_{s\to s_k}(s-s_k)\left\{\frac{e^{st}}{s(s+R/L)}\tanh\frac{as}{2}\right\}$$

$$= \quad \left\{\lim_{s\to s_k}\frac{s-s_k}{\cosh(as/2)}\right\}\left\{\lim_{s\to s_k}\frac{e^{st}\operatorname{senh}(as/2)}{s(s+R/L)}\right\}$$

$$= \quad \left\{\frac{1}{(a/2)\operatorname{senh}(as_k/2)}\right\}\left\{\frac{e^{s_k t}\operatorname{senh}(as_k/2)}{s_k(s_k+R/L)}\right\}$$

$$= \quad \frac{2e^{(2k+1)\pi i t/a}}{(2k+1)\pi i\{(2k+1)\pi i/a + R/L\}}$$

Entonces, la suma de los residuos es

$$\frac{L}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2e^{(2k+1)\pi it/a}}{(2k+1)\pi i\,\{(2k+1)\pi i/a + R/L\}}$$

$$= \frac{L}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{aR\,\text{sen}(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L\cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)\{a^2R^2 + (2n-1)^2\pi^2L^2\}}$$

Así, de (2) deducimos el resultado buscado

$$I(t) = \frac{E_0}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \frac{2E_0}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{aR\,\text{sen}\,(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L\cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)\{a^2R^2 + (2n-1)^2\pi^2L^2\}}$$

que puede escribirse también en la forma

$$I(t) = \frac{E_0}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \frac{2E_0}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,\{(2n-1)\pi t/a - \phi_n\}}{(2n-1)\{a^2R^2 + (2n-1)^2\pi^2L^2\}^{1/2}}$$

donde $\phi_n = \tan^{-1}\{(2n-1)\pi L/aR\}$.

Problemas propuestos

FORMULA DE INVERSION COMPLEJA Y USO DEL TEOREMA DEL RESIDUO

19. Utilizando la fórmula de inversión compleja calcular.

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

Resp. (a) $\cos at$, (b) $(\text{sen}\,at)/a$, (c) $\frac{1}{2}(\text{sen}\,t - \cos t + e^{-t})$

20. Utilizando la fórmula de inversión compleja, hallar las transformadas inversas de Laplace de (a) $1/(s+1)^2$, (b) $1/s^3(s^2+1)$.

Resp. (a) te^{-t}, (b) $\frac{1}{2}t^2 + \cos t - 1$

21. (a) Demostrar que $f(s) = \dfrac{1}{s^2-3s+2}$ satisface las condiciones de la fórmula de inversión. (b) Hallar $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$. *Resp.* (b) $e^{2t} - e^t$

22. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$ justificando todos los pasos.

Resp. $\frac{1}{4}\text{sen}\,2t + \frac{1}{2}t\cos 2t$

23. (a) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^3}\right\}$ justificando los pasos y (b) comprobar su respuesta.

24. (a) Calcular $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{se^{st}}{(s^2-1)^2}\,ds$ alrededor del contorno C que se muestra en la figura adyacente donde $R \geqq 3$ y $\gamma > 1$.

(b) Dar una interpretación a su respuesta dentro de toda la teoría conocida de la teoría de la transformada de Laplace.

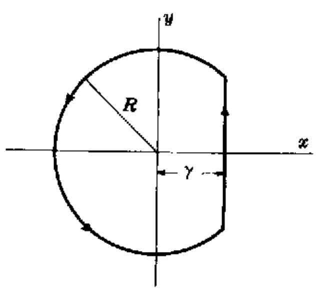


Fig. 7-9

25. Usando la fórmula de inversión, evaluar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+a)(s-b)^2}\right\}$ donde a y b son constantes positivas arbitrarias.

26. Usando la fórmula de inversión resolver: (*a*) El problema 13, Pág. 53; (*b*) El problema 25, Pág. 58; (*c*) El problema 28, Pág. 60; (*d*) El problema 110, Pág. 74.

TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE DE FUNCIONES CON PUNTOS DE RAMIFICACION

27. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\}$ usando la fórmula de inversión compleja.

28. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s}}\right\}$ mediante la fórmula de inversión.

29. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \operatorname{fer}\sqrt{t}$ usando la fórmula de inversión compleja.

30. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{s}}{s-1}\right\}$ usando la fórmula de inversión compleja.

31. (*a*) Usando la fórmula de inversión compleja calcular $\mathcal{L}^{-1}\{s^{-1/3}\}$ y (*b*) comprobar su respuesta por otro método.

32. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1+1/s)\}$ mediante la fórmula de inversión. *Resp.* $(1 - e^{-t})/t$

33. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1+1/s^2)\}$ mediante la fórmula de inversión. *Resp.* $2(1-\cos t)/t$

TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE DE FUNCIONES CON INFINITAS SINGULARIDADES

34. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(e^s+1)}\right\}$ usando la fórmula de inversión compleja.

35. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\cosh s}\right\} = 1 - \dfrac{4}{\pi}\left\{\cos\dfrac{\pi t}{2} - \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{3\pi t}{2} + \dfrac{1}{5}\cos\dfrac{5\pi t}{2} - \cdots\right\}$.

36. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 \operatorname{senh} s}\right\}$. *Resp.* $\frac{1}{2}t^2 + \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}(1-\cos n\pi t)$

37. Haciendo uso de la fórmula de inversión compleja demostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3\operatorname{senh} as}\right\} = \frac{t(t^2-a^2)}{6a} - \frac{2a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{a}$$

38. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)(1+e^{-2as})}\right\} = \dfrac{\operatorname{sen}\omega(t+a)}{2\omega} + \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)\pi t/2a}{\omega^2-(2n-1)^2\pi^2/4a^2}$.

PROBLEMAS VARIOS

39. Calcular (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-1)^4\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}/(s-1)^4\}$, utilizando la fórmula de inversión compleja.

40. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right\}$ utilizando la integral de línea. *Resp.* $t\cos t$

41. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^4}\right\}$ *Resp.* $\dfrac{1}{48}\{3t^2\cos t + (t^3-3t)\operatorname{sen} t\}$

42. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-1}{s(s-1)^2(s+1)}\right\}$ mediante la fórmula de inversión compleja y comprobar por otro método el resultado obtenido.

43. (*a*) Demostrar que la función $f(s) = \dfrac{1}{s^2 \cosh s}$ satisface las condiciones del *teorema 7-1*.

(*b*) Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 \cosh s}\right\} \;=\; t + \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)\pi t.$

44. Discutir la relación entre los resultados de los problemas 43(*b*) y 35.

45. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4+4}\right\}$ por la fórmula de inversión compleja justificando todos los pasos.

Resp. $\frac{1}{4}(\operatorname{sen} t \cosh t - \cos t \operatorname{senh} t)$

46. (*a*) Demostrar que si $x > 0$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s e^{-x\sqrt{s}}}{s^2+\omega^2}\right\} \;=\; e^{-x\sqrt{\omega/2}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\omega/2}\right) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{u e^{-ut} \operatorname{sen} x\sqrt{u}}{u^2+\omega^2}\, du$$

(*b*) Demostrar que la integral de la parte (*a*) es insignificante para grandes valores de t.

47. Demostrar que para $0 < x < 1$, $\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh s} \;=\; \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\,\dfrac{\cos(2n-1)\pi x/2}{s^2 + (2n-1)\pi^2/4}$.

48. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\operatorname{csch}^2 s}{s}\right\}$.

49. Demostrar que para $0 < x < 1$, $\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh\sqrt{s}} \;=\; 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen}(2n-1)\pi x/2}{s + (2n-1)^2\pi^2/4}$.

50. Demostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\ln(1+1/s^2)}{1+e^{-2as}}\right\} \;=\; \frac{1-\cos(t+a)}{t+a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) \cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$$

51. Demostrar que para $0 < x < a$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{senh}\sqrt{s}\,(a-x)}{\operatorname{senh}\sqrt{s}\,a}\right\} \;=\; \frac{a-x}{a} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2 t/a^2}}{n} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$$

52. Usando la fórmula de inversión, desarrollar: (*a*) el problema 3(*g*), Pág. 48; (*b*) el problema 9(*a*), Pág. 51; (*c*) el problema 14, Pág. 53.

53. Usando la fórmula de inversión, resolver $Y^{(iv)}(t) - a^4 Y(t) = \operatorname{sen} at + e^{-at}$ sometida a las condiciones $Y(0) = 2$, $Y'(0) = 0$, $Y''(0) = -1$, $Y'''(0) = 0$.

54. Demostrar que la integral alrededor de Γ del problema 13 tiende a cero cuando $R \to \infty$.

55. Utilizando la fórmula de inversión compleja demostrar: (*a*) El *teorema 2-3*, Pág. 43; (*b*) el *teorema 2-5*, Pág. 44; (*c*) el *teorema 2-10*, Pág. 45.

56. Demostrar que las singularidades calculadas en: (*a*) el problema 12 y (*b*) en el problema 14 son polos simples. [*Sugerencia.* Use el hecho de que si $s = a$ es una raíz doble de $g(s) = 0$, entonces $s = a$ tiene que ser una raíz simple de $g'(s) = 0$.]

57. (*a*) Calcular $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{\sqrt{s+1}}\,ds$ donde $\gamma > 0$. (*b*) ¿Cómo puede comprobar su respuesta?

Resp. $t^{-1/2}e^{-t}/\sqrt{\pi}$ si $t > 0$; o si $t < 0$

58. Completar las demostraciones de: (*a*) El caso 3 y (*b*) el caso 4 del problema 2.

59. Un voltaje $E(t)$ en forma de semionda sinusoidal rectificada, como el que indica en la figura 7-10 se aplica en el circuito eléctrico de la figura 7-11. Suponiendo que la carga del condensador y la corriente valen cero en $t = 0$, demostrar que la carga del condensador en cualquier tiempo posterior está dada por

$$Q(t) = \frac{\pi E_0}{LT^2\alpha^2\omega^2} + \frac{\pi E_0}{2LT}\left\{\frac{\operatorname{sen}\omega t - \operatorname{sen}\omega(t+T)}{\omega(\alpha^2-\omega^2)(1-\cos\omega T)} + \frac{\operatorname{sen}\alpha t - \operatorname{sen}\alpha(t+T)}{\alpha(\omega^2-\alpha^2)(1-\cos\alpha T)}\right\}$$

$$+ \frac{2\pi E_0}{LT^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n t/T}{(\omega^2 - 4\pi^2n^2/T^2)(\alpha^2 - 4\pi^2n^2/T^2)}$$

donde $\omega^2 = 1/LC$, $\alpha^2 = \pi^2/T^2$ y $\omega \neq \alpha$.

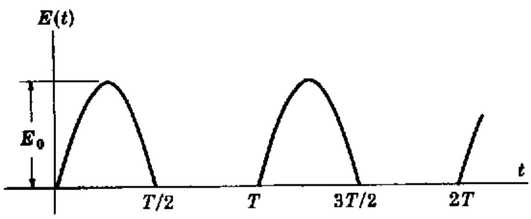


Fig. 7-10

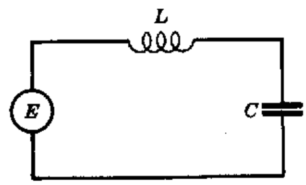


Fig. 7-11

60. Desarrollar el problema 59 en el caso en que $\alpha = \omega$ y discutir el significado físico de sus resultados.

61. Comprobar el *teorema 7-1*, para la función $e^{-a\sqrt{s}}/s$, $a > 0$ [véase el problema 9].

62. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(1-e^{-as})}\right\}$, donde $a > 0$, mediante el uso de la fórmula de inversión y comprobar su resultado por un método diferente.

63. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s^{1/3}}\} = \dfrac{3}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} v^2 e^{-tv^3 - v/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}\,v}{2}\,dv.$

64. Generalizar el resultado del problema 63.

65. Un resorte de rigidez k y de masa despreciable está suspendido verticalmente de un punto fijo y soporta una masa m en su punto más bajo. A la masa m se le comunica una vibración alargando el resorte una distancia x_0 y soltándolo. En cada momento en que la masa está en su punto más bajo, comenzando desde $t = 0$, se le aplica una unidad de impulso. Hallar la posición de la masa en cualquier tiempo $t > 0$ y hacer la discusión física.

Capítulo 8

Aplicaciones a los problemas de valor frontera

PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA QUE INVOLUCRAN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Varios problemas de la ciencia y la ingeniería al ser formulados matemáticamente conducen a ecuaciones diferenciales parciales que involucran una o más funciones incógnitas junto con ciertas condiciones, provenientes de situaciones físicas, para dichas funciones.

Las condiciones se llaman *condiciones de frontera.* El problema de encontrar soluciones para una ecuación que satisface ciertas condiciones de frontera se llama un *problema de valor frontera.*

ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES IMPORTANTES

1. **Ecuación de conducción del calor en una dimensión**

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}$$

$U(x, t)$ es la temperatura de un sólido en el punto x en un tiempo t. La constante k, llamada *difusión*, es igual a $K/c\rho$ donde la *conductividad térmica* K, el *calor específico* c y la *densidad* (masa por unidad de volumen) ρ se suponen constantes. La cantidad de calor por unidad de área conducida a través de un plano en la unidad de tiempo está dada por $-KU_x(x, t)$.

2. **Ecuación de onda en una dimensión**

$$\boxed{\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}$$

Se aplica a vibraciones transversales pequeñas de una cuerda flexible tensa localizada inicialmente sobre el eje x y puesta en movimiento [véase Fig. 8-1]. La variable $Y(x, t)$ es el desplazamiento de cualquier punto x de la cuerda en el tiempo t. La constante $a_2 = T/\rho$, donde T es la tensión (constante) y P es la masa por unidad de longitud (constante) de la cuerda.

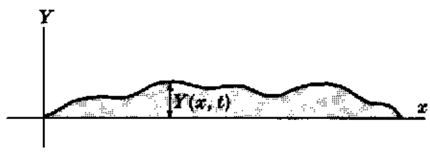


Fig. 8-1

3. **Vibraciones longitudinales de una viga**

$$\boxed{\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}$$

Esta ecuación describe el movimiento de una viga (Fig. 8-2) que puede vibrar longitudinalmente (es decir, en la dirección x). La variable $Y(x, t)$ es el desplazamiento longitudinal desde la posición de equilibrio del corte seccional en x. La constaute $c^2 = gE/\rho$ donde g es la *acelera-*

Fig. 8-2

ción de la gravedad, E es el *módulo de elasticidad* (esfuerzo dividido por alargamiento) que depende de las propiedades de la viga, ρ es la densidad (masa por unidad de volumen) de la viga.

Nótese que ésta es la misma ecuación que para una cuerda vibrante.

4. Vibraciones transversales de una viga

$$\boxed{\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0}$$

Esta ecuación describe el movimiento de una viga (localizada inicialmente sobre el eje x, véase la Fig. 8-3) la cual vibra transversalmente (o sea en dirección perpendicular al eje x). En este caso, $Y(x, t)$ es el desplazamiento transversal o deflexión sobre cualquier punto x en cualquier tiempo t. La constante $b^2 = EIg/\rho$ donde E es el módulo de elasticidad, I es el momento de inercia de cualquier sección transversal con relación al eje x, g es la aceleración de la gravedad y ρ es la masa por unidad de longitud. En el caso en que se aplica una fuerza transversal externa $F(x, t)$, el miembro derecho de la ecuación se remplaza por $b^2\ F(x, t)/EI$.

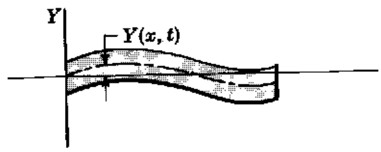


Fig. 8-3

5. Conducción del calor en un cilindro

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)}$$

$U(x, t)$ es la temperatura en cualquier tiempo t de un punto del sólido cilíndrico que está a una distancia r del eje x. Aquí se supone que el flujo de calor se presenta solamente en dirección radial.

6. Líneas de transmisión

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= -RI - L\frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -GE - C\frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}}$$

Son ecuaciones simultáneas para la corriente I y el voltaje E de una línea de transmisión [Fig. 8-4] en cualquier posición x y cualquier tiempo t. Las constantes R, L, G y C son respectivamente la resistencia, la inductancia, la conductividad y la capacidad por unidad de longitud. El extremo $x = 0$ se llama el *extremo emisor*. Cualquier otro valor de x puede considerarse como *extremo receptor*.

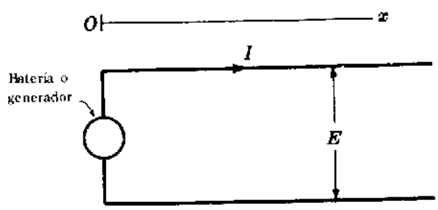


Fig. 8-4

PROBLEMAS EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Es posible generalizar muchas de las ecuaciones anteriores para aplicarlas a problemas en dos y tres dimensiones. Por ejemplo, si $Z(x, y, t)$ es el desplazamiento transversal de cualquier punto (x, y) de una membrana que se halla sobre el plano xy, en cualquier tiempo t, entonces las vibraciones de esta membrana, supuestas pequeñas, obedecen a la ecuación

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

Análogamente, $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) = a^2\nabla^2\phi \tag{2}$$

donde $\nabla^2\phi$ se llama el *laplaciano* de $\Phi(x,y,z,t)$, y (2) es la ecuación para las vibraciones de una membrana pulsante en tres dimensiones.

La ecuación general para la conducción del calor en un sólido tridimensional, suponiendo constantes la conductividad térmica, la densidad y el calor específico, es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = k\nabla^2 U \tag{3}$$

La ecuación para una temperatura estacionaria [donde U es independiente del tiempo, es decir, $\partial U/\partial t = 0$], es

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U = 0 \tag{4}$$

que se llama la *ecuación de Laplace.* Esta sirve también como ecuación para el potencial eléctrico (o gravitacional) debido a la distribución de carga (o masa) en los puntos en que no hay carga (o masa).

SOLUCION DE PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA MEDIANTE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Al hacer uso de la transformación de Laplace (con respecto a t o x) en un problema de valor frontera en una dimensión, las ecuaciones diferenciales parciales pueden transformarse en ordinarias. La solución puede obtenerse resolviendo esta ecuación ordinaria e invirtiendo, bien sea por la fórmula de inversión, o bien por cualquiera de los otros métodos considerados previamente.

Para problemas en dos dimensiones es a veces conveniente aplicar dos veces la transformada de Laplace (por ejemplo, primero con respecto a t y luego con respecto a x) y llegar a una ecuación diferencial ordinaria. En tal caso, la solución se encuentra por una *doble inversión.* Este proceso se conoce con el nombre de *transformación iterada de Laplace.* Puede aplicarse una técnica similar en problemas de tres (o más) dimensiones. Los problemas de valor frontera pueden resolverse a veces mediante el uso combinado de transformadas de Fourier y Laplace [véase el problema 14].

Problemas resueltos

CONDUCCION DE CALOR

1. Un sólido semi-infinito $x > 0$ [Fig. 8-5] está inicialmente a la temperatura cero. En el tiempo $t = 0$ se le aplica y se le mantiene una temperatura constante $U_0 > 0$ en la cara $x = 0$. Hallar la temperatura de cualquier punto sólido en cualquier tiempo posterior $t > 0$.

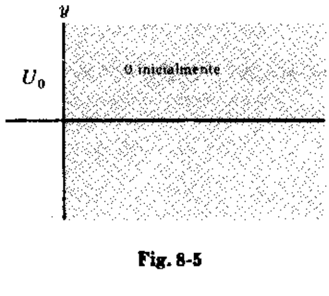


Fig. 8-5

El problema de valor frontera para la determinación de la temperatura $U(x, t)$ en cualquier punto x y en cualquier tiempo t es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0$$

$$U(x,0) = 0, \qquad U(0,t) = U_0, \qquad |U(x,t)| < M$$

la última condición indica que la temperatura es constante para todo x y todo t, tal como lo exige el problema.

Tomando transformadas de Laplace encontramos que

$$su - U(x,0) = k\frac{d^2u}{dx^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{s}{k}u = 0 \tag{1}$$

donde

$$u(0,s) = \mathcal{L}\{U(0,t)\} = \frac{U_0}{s} \tag{2}$$

y $u = u(x, s)$ se necesita que sea acotado.

Resolviendo *(1)* encontramos que

$$u(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s/k}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

Escogemos $c_1 = 0$ para que u resulte acotado cuando $x \to \infty$ y tendremos entonces que

$$u(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x} \tag{3}$$

Por (2) tenemos que $c_2 = U_0/s$, de manera que

$$u(x,s) = \frac{U_0}{s} e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

Entonces, por el problema 9, Pág. 207, y por el problema 10, Pág. 209, encontramos que

$$U(x,t) = U_0 \text{ fcer } (x/2\sqrt{kt}) = U_0\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-u^2}\,du\right\}$$

2. Desarrollar el problema 1 si en $t = 0$ la temperatura que se aplica está dada por $G(t)$, $t > 0$.

El problema de valor frontera es en este caso el mismo que el anterior salvo por el hecho de que la condición de frontera $U(0, t) = U_0$ se remplaza por $U(0, t) = G(t)$. Entonces si la transformada de Laplace de $G(t)$ es $g(s)$, por la fórmula (3) del problema 1 encontramos que $c_2 = g(s)$ de manera que

$$u(x,s) = g(s)\, e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

Ahora, por el problema 11, Pág. 209,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s/k}\,x}\} = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\, t^{-3/2} e^{-x^2/4kt}$$

Entonces, por el teorema de la convolución,

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\, u^{-3/2} e^{-x^2/4ku}\, G(t-u)\,du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{kt}}^{\infty} e^{-v^2}\, G\left(t - \frac{x^2}{4kv^2}\right) dv \end{aligned}$$

haciendo $v = x^2/4ku$.

3. Una barra de longitud l [Fig. 8-6] está a temperatura constante U_0. Cuando $t = 0$, al extremo $x = l$ se le aplica súbitamente una temperatura constante U_1 y al extremo $x = 0$ se le aisla. Suponiendo que la superficie de la barra está aislada, hallar la temperatura de cualquier punto x de la barra en cualquier tiempo $t > 0$.

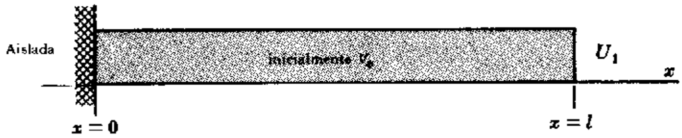


Fig. 8-6

El problema de valor frontera es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l, \ t > 0$$

$$U(x,0) = U_0, \qquad U_x(0,t) = 0, \qquad U(l,t) = U_1$$

Tomando transformadas de Laplace,

$$su - U(x,0) = k\frac{d^2u}{dx^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{su}{k} = -\frac{U_0}{k} \tag{1}$$

$$u_x(0,s) = 0, \qquad u(l,s) = \frac{U_1}{s} \tag{2}$$

La solución general de (1) es

$$u = c_1 \cosh\sqrt{s/k}\,x + c_2 \operatorname{senh}\sqrt{s/k}\,x + \frac{U_0}{s}$$

Por la primera condición de (2) encontramos que $c_2 = 0$; así,

$$u = c_1 \cosh\sqrt{s/k}\,x + \frac{U_0}{s}$$

Por la segunda condición de (2),

$$c_1 \cosh\sqrt{s/k}\,l + \frac{U_0}{s} = \frac{U_1}{s} \qquad \text{o} \qquad c_1 = \frac{U_1 - U_0}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}$$

Así,

$$u(x,s) = \frac{U_0}{s} + (U_1 - U_0)\frac{\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}$$

La inversa del primer miembro es U_0. Por la fórmula de inversión compleja encontramos que la inversa del segundo miembro, a menos del factor constante $U_1 - U_0$, viene dada por

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}\frac{\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}\,ds$$

Como en el problema 13, Pág. 210, se puede demostrar fácilmente que esto es igual a la suma de todos los residuos del integrando en las singularidades que son polos simples y que estos se presentan en

$$s = 0, \qquad \sqrt{s/k}\,l = (n - \tfrac{1}{2})\pi i \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

o

$$s = 0, \qquad s = -\frac{(2n-1)^2\pi^2 k}{4l^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ahora:

El residuo en $s = 0$ es $\quad \lim\limits_{s\to 0}\,(s)\left(\dfrac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}\right) \;=\; 1$

El residuo en $\;s \;=\; -\dfrac{(2n-1)^2\pi^2 k}{4l^2} \;=\; s_n\;$ es

$$\lim_{s\to s_n}\,(s-s_n)\left(\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}\right)$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_n}\frac{s-s_n}{\cosh\sqrt{s/k}\,l}\right\}\left\{\lim_{s\to s_n}\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_n}\frac{1}{(\operatorname{senh}\sqrt{s/k}\,l)(l/2\sqrt{ks}\,)}\right\}\left\{\lim_{s\to s_n}\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s}\right\}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\,e^{-(2n-1)^2\pi^2kt/4l^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

usando la regla de L'Hospital. Así obtenemos

$$U(x,t) \;=\; U_1 \;+\; \frac{4(U_1-U_0)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\,e^{-(2n-1)^2\pi^2kt/4l^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

LA CUERDA VIBRANTE

4. Una cuerda infinitamente larga con uno de sus extremos en $x = 0$ está inicialmente en reposo sobre el eje x. El extremo $x = 0$ se somete a un desplazamiento transversal periódico dado por A_0 sen ωt, $t > 0$. Hallar el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda en cualquier tiempo.

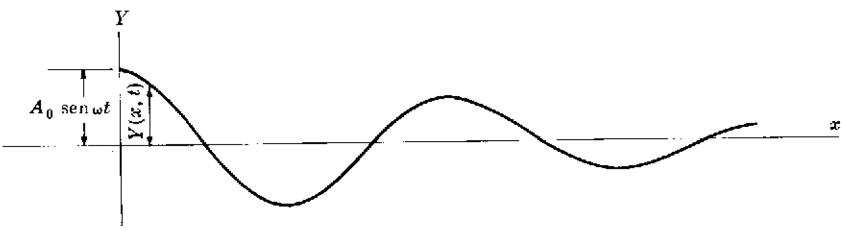


Fig. 8-7

Si $Y(x, t)$ es el desplazamiento transversal de la cuerda en cualquier punto x en cualquier tiempo t, entonces el problema de valor frontera es

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \;=\; a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad x > 0,\; t > 0 \tag{1}$$

$$Y(x,0) = 0, \qquad Y_t(x,0) = 0, \qquad Y(0,t) = A_0\operatorname{sen}\omega t, \qquad |Y(x,t)| < M \tag{2}$$

donde la última condición especifica que el desplazamiento es acotado.

Tomando transformadas de Laplace encontramos que, si $y(x,s) = \mathcal{L}\{Y(x,t)\}$,

$$s^2 y - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) \;=\; a^2\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}y \;=\; 0 \tag{3}$$

$$y(0,t) \;=\; \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad y(x,s) \text{ es acotada} \tag{4}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x, s) = c_1 e^{sx/a} + c_2 e^{-sx/a}$$

Por la condición de acotación es necesario que $c_1 = 0$. Entonces

$$y(x, s) = c_2 e^{-sx/a}$$

Por la primera condición de (4), $c_2 = A_0\omega/(s^2 + \omega^2)$. Entonces

$$y(x, s) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2} e^{-sx/a}$$

Así
$$Y(x, t) = \begin{cases} A_0 \operatorname{sen} \omega(t - x/a) & t > x/a \\ 0 & t < x/a \end{cases}$$

Esto significa físicamente que un punto x de la cuerda permanece en reposo hasta el tiempo $t = x/a$. Después tendrá un movimiento idéntico al del extremo $x = 0$ pero retardado en un tiempo $t = x/a$. La constante a es la velocidad con la cual viaja la onda.

5. **Una cuerda tensa elástica y flexible tiene fijos sus extremos en $x = 0$ y $x = l$. Al tiempo $t = 0$ se le da a la cuerda la forma definida por $F(x) = \mu x(l - x)$, donde μ es una constante, y luego se le suelta. Hallar el desplazamiento de cualquier punto x de la cuerda en cualquier tiempo $t > 0$.**

El problema de valor frontera es

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$Y(0, t) = 0, \qquad Y(l, t) = 0, \qquad Y(x, 0) = \mu x(l-x), \qquad Y_t(x, 0) = 0$$

Tomando transformadas de Laplace encontramos que, si $y(x, s) = \mathcal{L}\{Y(x, t)\}$,

$$s^2 y - s\,Y(x, 0) - Y_t(x, 0) = a^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

o sea
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}y = -\frac{\mu s x(l-x)}{a^2} \tag{1}$$

donde
$$y(0, s) = 0, \qquad y(l, s) = 0 \tag{2}$$

La solución general de (1) es

$$y = c_1 \cosh\frac{sx}{a} + c_2 \operatorname{senh}\frac{sx}{a} + \frac{\mu x(l-x)}{s} - \frac{2a^2\mu}{s^3} \tag{3}$$

De las condiciones (2) deducimos que

$$c_1 = \frac{2a^2\mu}{s^3}, \qquad c_2 = \frac{2a^2\mu}{s^3}\left(\frac{1-\cosh sl/a}{\operatorname{senh} sl/a}\right) = -\frac{2a^2\mu}{s^3}\tanh sl/2a \tag{4}$$

de esta manera (3) se convierte en
$$y = \frac{2a^2\mu}{s^3}\frac{\cosh s(2x-l)/2a}{\cosh sl/2a} + \frac{\mu x(l-x)}{s} - \frac{2a^2\mu}{s^3}$$

Usando residuos (problema 17, Pág. 213) encontramos que

$$Y(x, t) = a^2\mu\left\{t^2 + \left(\frac{2x-l}{2a}\right)^2 - \left(\frac{l}{2a}\right)^2\right\}$$
$$- \frac{32a^2\mu}{\pi^3}\left(\frac{l}{2a}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi(2x-l)}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{l}$$
$$+ \mu x(l-x) - a^2\mu t^2$$

o sea
$$Y(x, t) = \frac{8\mu l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{l}$$

VIBRACIONES DE VIGAS

6. Una viga de longitud l cuyo extremo $x = 0$ está fijo, como se muestra en la Fig. 8-8, se halla inicialmente en reposo. En el extremo libre se le aplica longitudinalmente una fuerza constante F_0 por unidad de área. Hallar el desplazamiento longitudinal de cualquier punto x de la viga en cualquier tiempo $t > 0$.

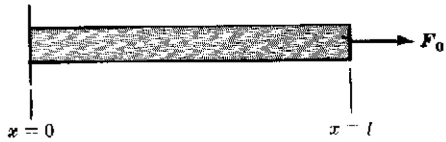


Fig. 8-8

Si $Y(x, t)$ es el desplazamiento longitudinal de cualquier punto x de la viga en el tiempo t, el problema de valor frontera es

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l, \ t > 0$$

$$Y(x,0) = 0, \qquad Y_t(x,0) = 0, \qquad Y(0,t) = 0, \qquad Y_x(l,t) = F_0/E$$

donde E es el módulo de Young.

Tomando transformadas de Laplace encontramos que, si $y(x,s) = \mathcal{L}\{Y(x,t)\}$,

$$s^2 y(x,s) - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) = c^2 \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2}y = 0$$

$$y(0,s) = 0, \qquad y_x(l,s) = F_0/Es \tag{1}$$

Resolviendo la ecuación diferencial encontramos que

$$y(x,s) = c_1 \cosh(sx/c) + c_2 \operatorname{senh}(sx/c)$$

Por la primera condición de (1), $c_1 = 0$; así,

$$y(x,s) = c_2 \operatorname{senh}(sx/c)$$

$$y_x(x,s) = c_2 (s/c) \cosh(sx/c)$$

Por la segunda condición de (1), tenemos que

$$c_2 (s/c) \cosh(sl/c) = F_0/Es \qquad \text{o} \qquad c_2 = \frac{cF_0}{Es^2 \cosh(sl/c)}$$

Entonces
$$y(x,s) = \frac{cF_0}{E} \cdot \frac{\operatorname{senh}(sx/c)}{s^2 \cosh(sl/c)} \tag{2}$$

Luego, por el problema 14, Pág. 211,

$$Y(x,t) = \frac{F_0}{E}\left[x + \frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi ct}{2l}\right] \tag{3}$$

7. En la viga del problema anterior, determinar el movimiento del extremo libre $x = l$ en función del tiempo t.

Por la fórmula (2) del problema 6, para $x = l$ obtenemos

$$y(x,s) = \frac{cF_0}{E}\,\frac{\operatorname{senh}(sl/c)}{s^2 \cosh(sl/c)}$$

Pero, por el problema 92, Pág. 34 o la fórmula 134, Pág. 253, ésta es la transformada de Laplace de la onda triangular de la Fig. 8-9 que describe el movimiento del extremo $x = l$ en función de t.

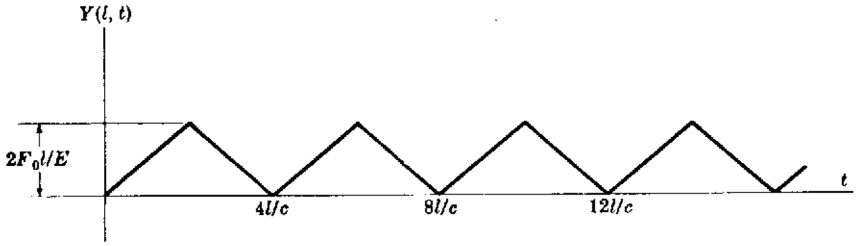


Fig. 8-9

8. A una viga semi-infinita, la cual se halla inicialmente en reposo sobre el eje x, se le comunica un desplazamiento transversal h en el tiempo $t = 0$ sobre el extremo $x = 0$. Determinar el desplazamiento transversal $Y(x, t)$ de cualquier posición $x > 0$ en cualquier tiempo $t > 0$.

El problema de valor frontera es

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \qquad x > 0,\ t > 0 \tag{1}$$

$$Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad Y(0,t) = h, \quad Y_{xx}(0,t) = 0, \quad |Y(x,t)| < M \tag{2}$$

Tomando transformadas de Laplace, obtenemos

$$s^2 y(x,s) - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{s^2}{b^2} y = 0$$

$$y(0,s) = h/s, \qquad y_{xx}(0,s) = 0, \qquad y(x,s) \text{ es acotada} \tag{3}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x,s) = e^{\sqrt{s/2b}\,x}(c_1 \cos\sqrt{s/2b}\,x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{s/2b}\,x) + e^{-\sqrt{s/2b}\,x}(c_3 \cos\sqrt{s/2b}\,x + c_4 \operatorname{sen}\sqrt{s/2b}\,x)$$

Por la condición, $c_1 = c_2 = 0$ así que

$$y(x,s) = e^{-\sqrt{s/2b}\,x}(c_3 \cos\sqrt{s/2b}\,x + c_4 \operatorname{sen}\sqrt{s/2b}\,x)$$

Por la primera y segunda condiciones de acotación de (3), encontramos que $c_4 = 0$ y $c_3 = h/s$ de modo que

$$y(x,s) = \frac{h}{s} e^{-\sqrt{s/2b}\,x} \cos\sqrt{s/2b}\,x$$

La transformada inversa de Laplace es, por la fórmula de inversión compleja,

$$Y(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{h e^{st - \sqrt{s/2b}\,x} \cos\sqrt{s/2b}\,x}{s}\, ds$$

Para calcular esto usamos el contorno de la Fig. 8-10 ya que $s = 0$ es un punto de ramificación. Procediendo como en el problema 9, Pág. 207, al omitir el integrando, obtenemos

$$Y(x,t) = -\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{EH} + \int_{HJK} + \int_{KL} \right\} \tag{4}$$

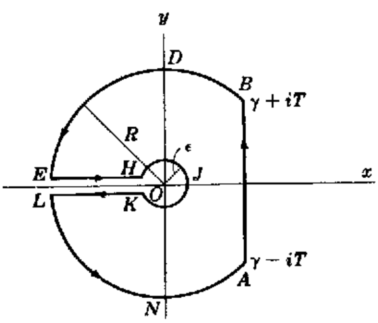


Fig. 8-10

A lo largo de EH, $s = ue^{\pi i}$, $\sqrt{s} = i\sqrt{u}$ y encontramos que

$$\int_{EH} = \int_R^\epsilon \frac{he^{-ut - i\sqrt{u/2b}\,x} \cosh \sqrt{u/2b}\,x}{u}\,du$$

A lo largo de KL, $s = ue^{-\pi i}$, $\sqrt{s} = -i\sqrt{u}$ y obtenemos

$$\int_{KL} = \int_\epsilon^R \frac{he^{-ut + i\sqrt{u/2b}\,x} \cosh \sqrt{u/2b}\,x}{u}\,du$$

Entonces de HJK, $s = \epsilon e^{i\theta}$ y obtenemos

$$\int_{HJK} = \int_\pi^{-\pi} h\, e^{\epsilon e^{i\theta}t - \sqrt{\epsilon e^{i\theta}/2b}\,x} \cos \sqrt{\epsilon e^{i\theta}/2b}\,x\, d\theta$$

Entonces (4) se convierte en

$$Y(x,t) = h\left\{1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-ut} \operatorname{sen} \sqrt{u/2b}\,x \cosh \sqrt{u/2b}\,x}{u}\,du\right\}$$

Haciendo $u/2b = v^2$ escribimos

$$Y(x,t) = h\left\{1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-2bv^2t} \operatorname{sen} vx \cosh vx}{v}\,dv\right\}$$

Este resultado puede también expresarse en términos de *integrales de Fresnel* [véanse el problema 66 y las fórmulas 10 y 11, Pág. 255] como

$$Y(x,t) = h\left\{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{bt}} (\cos w^2 + \operatorname{sen} w^2)\,dw\right\}$$

LINEAS DE TRANSMISION

9. Una línea de transmisión de inductancia y conductancia por unidad de longitud despreciables tiene un voltaje en su extremo emisor, $x = 0$, dado por

$$E(0,t) = \begin{cases} E_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Hallar el voltaje $E(x, t)$ y la corriente $I(x, t)$ sobre cualquier punto $x > 0$ en cualquier punto $t > 0$.

Si tomamos $L = 0$ y $G = 0$, las ecuaciones de la línea de transmisión serán

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -RI, \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial E}{\partial t} \tag{1}$$

Las condiciones de frontera son

$$E(x,0) = 0, \quad I(x,0) = 0, \quad E(0,t) = \begin{cases} E_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}, \quad |E(x,t)| < M$$

Tomando transformadas de Laplace, si usamos las notaciones $\mathcal{L}\{E(x,t)\} = \tilde{E}(x,s)$, $\mathcal{L}\{I(x,t)\} = \tilde{I}(x,s)$, tenemos que

$$\frac{d\tilde{E}}{dx} = -R\tilde{I}, \qquad \frac{d\tilde{I}}{dx} = -C\{s\tilde{E} - E(x,0)\}$$

es decir,

$$\frac{d\tilde{E}}{dx} = -R\tilde{I}, \qquad \frac{d\tilde{I}}{dx} = -Cs\tilde{E} \tag{2}$$

Derivando las primeras ecuaciones de (2) con respecto a x eliminamos $\tilde{I}$; obtenemos así

$$\frac{d^2\tilde{E}}{dx^2} = -R\frac{d\tilde{I}}{dx} = RCs\tilde{E} \quad \text{o} \quad \frac{d^2\tilde{E}}{dx^2} - RCs\tilde{E} = 0 \tag{3}$$

La solución general de (3) es

$$\widetilde{E}(x,s) \quad = \quad c_1\, e^{\sqrt{RCs}\,x} \; + \; c_2\, e^{-\sqrt{RCs}\,x}$$

por la condición de acotación, $c_1 = 0$. Entonces

$$\widetilde{E}(x,s) \quad = \quad c_2\, e^{-\sqrt{RCs}\,x} \tag{4}$$

Escribamos $E(0,\,t) = G(t)$ y $\mathcal{L}\{E(0,t)\} = \widetilde{E}(0,s) = g(s)$. Entonces, por (4), $c_2 = g(s)$; así

$$\widetilde{E}(x,s) \quad = \quad g(s)\, e^{-\sqrt{RCs}\,x} \tag{5}$$

Usando el teorema de la convolución como en el problema 2,

$$E(x,t) \quad = \quad \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}}\, u^{-3/2}\, e^{-RCx^2/4u}\, G(t-u)\, du$$

Ahora como

$$G(t-u) \quad = \quad \begin{cases} E_0 & 0 < t-u < T \quad \text{o} \quad t-T = u < t \\ 0 & \qquad t-u > T \qquad\qquad\quad u < t-T \end{cases}$$

se deduce que si $t > T$,

$$\begin{aligned}
E(x,t) \quad &= \quad \int_{t-T}^{t} \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}}\, u^{-3/2}\, e^{-RCx^2/4u}\, E_0\, du \\
&= \quad \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t-T}} e^{-v^2}\, dv \qquad \text{(tomando } RCx^2/4u = v^2\text{)} \\
&= \quad E_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t-T}} e^{-v^2}\, dv \;-\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\, dv \right\} \\
&= \quad E_0 \left\{ \text{fer}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t-T}}\right) - \text{fer}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right) \right\}
\end{aligned}$$

En tanto que, si $0 < t < T$,

$$\begin{aligned}
E(x,t) \quad &= \quad \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}}\, u^{-3/2}\, e^{-RCx^2/4u}\, E_0\, du \quad = \quad \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2}\, dv \\
&= \quad E_0\,\{1 - \text{fer}\,(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t})\} \\
&= \quad E_0\ \text{fcer}\,(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t})
\end{aligned}$$

Como $I = -\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial E}{\partial x}$, al derivar obtenemos que

$$I(x,t) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\dfrac{C}{R}}\; t^{-3/2}\, e^{-RCx^2/4t} & 0 < t < T \\[2ex] \dfrac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\dfrac{C}{R}} \left[t^{-3/2}\, e^{-RCx^2/4t} \;-\; (t-T)^{-3/2}\, e^{-RCx^2/4(t-T)} \right] & t > T \end{cases}$$

PROBLEMAS VARIOS

10. (*a*) Resolver el problema de valor frontera

$$\frac{\partial U}{\partial t} \;=\; k\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x > 0,\; t > 0$$

$$U(x,0) \;=\; U_0, \qquad U_x(0,t) \;=\; -\alpha U(0,t), \qquad |U(x,t)| \;<\; M$$

(*b*) Dar una interpretación del problema en términos de flujos caloríficos.

La motivación del problema está en considerar un sólido conductor semi-infinito cuya temperatura inicial es U_0, y en el cual ocurre radiación en un medio $x < 0$ a temperatura cero. Se supone que esta radiación es tal que el flujo en la cara $x = 0$ es proporcional a la diferencia en temperaturas de la cara $x = 0$ y el medio $x < 0$, es decir,

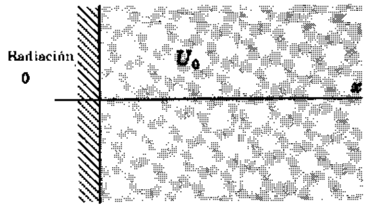


Fig. 8-11

$$U_x(0, t) \quad = \quad -\alpha[U(0, t) - 0] \quad = \quad -\alpha\, U(0, t)$$

Para obtener la solución, tomamos transformadas de Laplace; así encontramos

$$su - U_0 \quad = \quad k\frac{d^2u}{dx^2} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{su}{k} \quad = \quad -\frac{U_0}{k} \tag{1}$$

$$u_x(0, s) \quad = \quad -\alpha\, u(0, s), \qquad u(x, s) \text{ es acotada} \tag{2}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$u(x, s) \quad = \quad c_1\, e^{\sqrt{s/k}\,x} + c_2\, e^{-\sqrt{s/k}\,x} + \frac{U_0}{s}$$

Por la condición de acotación, $c_1 = 0$. Entonces

$$u(x, s) \quad = \quad c_2\, e^{-\sqrt{s/k}\,x} + \frac{U_0}{s}$$

Por la primera condición de (2), $c_2 = \dfrac{\alpha U_0}{s(\sqrt{s} - \alpha)}$; así,

$$u(x, s) \quad = \quad \frac{\alpha U_0}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\, e^{-\sqrt{s/k}\,x} + \frac{U_0}{s}$$

Ahora usando la fórmula de inversión compleja,

$$U(x, t) \quad = \quad U_0 + \alpha U_0\, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\right\}$$

$$= \quad U_0 + \frac{\alpha U_0}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st - \sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\, ds$$

Omitiendo el integrando, como en el problema 8, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st - \sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\, ds \quad = \quad -\lim_{\substack{R \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{EH} + \int_{HJK} + \int_{KL}\right\} \tag{3}$$

A lo largo de EH, $s = ue^{\pi i}$, $\sqrt{s} = i\sqrt{u}$ y obtenemos

$$\int_{EH} \quad = \quad \int_R^{\epsilon} \frac{e^{-ut - i\sqrt{s/k}\,x}}{u(i\sqrt{u} - \alpha)}\, du$$

A lo largo de KL, $s = ue^{-\pi i}$, $\sqrt{s} = -i\sqrt{u}$ y obtenemos

$$\int_{KL} \quad = \quad \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-ut + i\sqrt{s/k}\,x}}{u(-i\sqrt{u} - \alpha)}\, du$$

A lo largo de HJK, $s = \epsilon e^{i\theta}$ y obtenemos

$$\int_{HJK} \quad = \quad \int_{\pi}^{-\pi} \frac{e^{\epsilon e^{i\theta} t - \sqrt{\epsilon e^{i\theta}/k}\,x}}{\sqrt{\epsilon}\, e^{i\theta/2} - \alpha}\, i\, d\theta$$

Usando los resultados de (3) vemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st - \sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\, ds \quad = \quad -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-ut}}{u}\left[\frac{\sqrt{u}\cos x\sqrt{u} - \alpha \operatorname{sen} x\sqrt{u}}{u + \alpha^2}\right] du$$

Entonces
$$U(x,t) = \frac{\alpha U_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{u}\left[\frac{\sqrt{u}\cos x\sqrt{u} - \alpha \operatorname{sen} x\sqrt{u}}{u+\alpha^2}\right]du$$
$$= \frac{2\alpha U_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-v^2t}}{v}\left[\frac{v\cos xv - \alpha \operatorname{sen} xv}{v^2+\alpha^2}\right]dv$$

si $u = v^2$.

11. **Una cuerda tensa y flexible tiene sus extremos sobre el eje x en los puntos $x = 0$ y $x = 1$. En el tiempo $t = 0$ se somete a la cuerda a que tome la forma definida por $F(x)$, $0 < x < 1$ y se le deja libre. Hallar el desplazamiento en cualquier punto x de la cuerda en cualquier tiempo $t > 0$.**

El problema de valor frontera es
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{1}$$
$$Y(0,t) = 0, \qquad Y(1,t) = 0, \qquad Y(x,0) = F(x), \qquad Y_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

En vez de la ecuación (1) es conveniente considerar
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$
la solución final se obtiene al sustituir t por at [véase el problema 49].

Tomando transformadas de Laplace obtenemos
$$s^2 y - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{o sea} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - s^2 y = -s\,F(x) \tag{3}$$
$$y(0,s) = 0, \qquad y(1,s) = 0 \tag{4}$$

La solución general de (3) [problema 8, Pág. 85] es
$$y(x,s) = c_1\cosh sx + c_2\operatorname{senh} sx - \int_0^x F(u)\operatorname{senh} s(x-u)\,du$$

Por la primera condición de (4), $c_1 = 0$; así,
$$y(x,s) = c_2\operatorname{senh} sx - \int_0^x F(u)\operatorname{senh} s(x-u)\,du \tag{5}$$

Por la segunda condición de (4),
$$0 = c_2\operatorname{senh} s - \int_0^1 F(u)\operatorname{senh} s(1-u)\,du$$

o sea
$$c_2 = \int_0^1 F(u)\frac{\operatorname{senh} s(1-u)}{\operatorname{senh} s}\,du$$

Así, (5) se transforma en
$$y(x,s) = \int_0^1 F(u)\frac{\operatorname{senh} s(1-u)\operatorname{senh} sx}{\operatorname{senh} s}\,du - \int_0^x F(u)\operatorname{senh} s(x-u)\,du$$

La primera integral se puede expresar como suma de dos integrales, una de 0 a x y la otra de x a 1. Entonces
$$y(x,s) = \int_0^x F(u)\left\{\frac{\operatorname{senh} s(1-u)\operatorname{senh} sx}{\operatorname{senh} s} - \operatorname{senh} s(x-u)\right\}du + \int_x^1 F(u)\frac{\operatorname{senh} s(1-u)\operatorname{senh} sx}{\operatorname{senh} s}\,du$$
$$= \int_0^x F(u)\frac{\operatorname{senh} s(1-x)\operatorname{senh} su}{\operatorname{senh} s}\,du + \int_x^1 F(u)\frac{\operatorname{senh} s(1-u)\operatorname{senh} sx}{\operatorname{senh} s}\,du$$

Tenemos que encontrar ahora la transformada inversa de Laplace. Por la fórmula de inversión compleja, la inversa del primer término es

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\left\{\int_0^x F(u)\,\frac{\operatorname{senh} s(1-x)\operatorname{senh} su}{\operatorname{senh} s}\,du\right\}ds$$

Como esto es igual a la suma de los residuos en los polos simples $s = n\pi i$, encontramos la inversa requerida

$$\sum_{n=+\infty}^{\infty} e^{n\pi it}\int_0^x F(u)\,\frac{\operatorname{sen} n\pi(1-x)\operatorname{sen} n\pi u}{-\cos n\pi}\,du \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^x F(u)\operatorname{sen} n\pi u\,du\right\}\operatorname{sen} n\pi x\cos n\pi t$$

Análogamente, la inversa del segundo término es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_x^1 F(u)\operatorname{sen} n\pi u\,du\right\}\operatorname{sen} n\pi x\cos n\pi t$$

Sumando hallamos

$$Y(x,t) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^1 F(u)\operatorname{sen} n\pi u\,du\right\}\operatorname{sen} n\pi x\cos n\pi t$$

Y si remplazamos t por at, tendremos

$$Y(x,t) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^1 F(u)\operatorname{sen} n\pi u\,du\right\}\operatorname{sen} n\pi x\cos n\pi at$$

12. Un cilindro circular infinitamente largo y de radio unidad tiene una temperatura inicial constante T. En $t = 0$ se le aplica y se le mantiene una temperatura de 0°C en su superficie. Hallar la temperatura de cualquier punto del cilindro en cualquier tiempo posterior t.

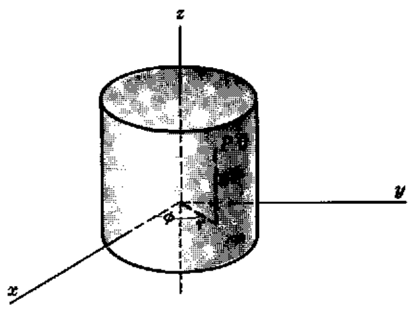


Fig. 8-12

Si (r, ϕ, z) son las coordenadas cilíndricas de cualquier punto del cilindro y éste tiene como eje al eje z [véase Fig. 8-12], es claro que la temperatura es independiente de ϕ y de z; por consiguiente podemos denotarla por $U(r,t)$. El problema de valor frontera es

$$\frac{\partial U}{\partial t} \quad = \quad k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) \qquad 0 < r < 1 \qquad (1)$$

$$U(1,t) = 0, \quad U(r,0) = T, \quad |U(r,t)| < M \qquad (2)$$

En vez de *(1)* es conveniente considerar la ecuación

$$\frac{\partial U}{\partial t} \quad = \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}$$

y remplazar en t por kt.

Tomando las transformadas de Laplace

$$su - U(r,0) \quad = \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - su \quad = \quad -T$$

$$u(1,s) = 0, \qquad u(1,s) = 0, \qquad u(r,s) \text{ es acotada}$$

La solución general de esta ecuación es, en términos de funciones de Bessel,

$$u(r,s) \quad = \quad c_1 J_0(i\sqrt{s}\,r) + c_2 Y_0(i\sqrt{s}\,r) + \frac{T}{s}$$

Como $Y_0(i\sqrt{s}\,r)$ está acotada cuando $r \to 0$, tenemos que tomar $c_2 = 0$.

Entonces $$u(r,s) = c_1 J_0(i\sqrt{s}\,r) + \frac{T}{s}$$

Como $u(1,s) = 0$, encontramos que

$$c_1 J_0(i\sqrt{s}) + \frac{T}{s} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad c_1 = -\frac{T}{s\,J_0(i\sqrt{s})}$$

Así, $$u(r,s) = \frac{T}{s} - \frac{T\,J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s\,J_0(i\sqrt{s})}$$

Por la fórmula de inversión,

$$U(r,t) = T - \frac{T}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s\,J_0(i\sqrt{s})}\,ds$$

Ahora $J_0(i\sqrt{s})$ tiene ceros simples cuando $i\sqrt{s} = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$. Así, el integrando tiene polos simples en $s = -\lambda_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y también en $s = 0$. Puede demostrarse además que el integrando satisface las condiciones del problema 2, Pág. 23, de modo que se puede usar el método de los residuos.

Tenemos:

El residuo del integrando en $s = 0$ es

$$\lim_{s\to 0} s\,\frac{e^{st}J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s\,J_0(i\sqrt{s})} = 1$$

El residuo del integrando en $s = -\lambda_n^2$ es

$$\lim_{s\to -\lambda_n^2} (s+\lambda_n^2)\,\frac{e^{st}J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s\,J_0(i\sqrt{s})} = \left\{\lim_{s\to-\lambda_n^2} \frac{s+\lambda_n^2}{J_0(i\sqrt{s})}\right\}\left\{\lim_{s\to-\lambda_n^2} \frac{e^{st}J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s\to-\lambda_n^2} \frac{1}{J_0'(i\sqrt{s})\,i/2\sqrt{s}}\right\}\left\{\frac{e^{-\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{-\lambda_n^2}\right\}$$

$$= -\frac{2e^{-\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

Para calcular el límite hemos usado la regla de L'Hospital y el hecho de que $J_0'(u) = -J_1(u)$. Entonces,

$$U(r,t) = T - T\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}\right\}$$

$$= 2T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

Remplazando t por kt obtenemos la solución requerida

$$U(r,t) = 2T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-k\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

13. Una barra aislada semi-infinita que coincide con la parte positiva del eje x está inicialmente a temperatura cero. En $t = 0$ se genera instantáneamente una cantidad de calor en el punto $x = a$, donde $a > 0$. Hallar la temperatura de cualquier punto de la barra en cualquier tiempo $t > 0$.

La ecuación de la conducción de calor en la barra es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0 \tag{1}$$

El hecho de que la cantidad de calor se genere instantáneamente en el punto $x = a$ se puede representar por la condición de frontera

$$U(a, t) = Q\,\delta(t) \tag{2}$$

donde Q es una constante y $\delta(t)$ es la función delta de Dirac. Además, como la temperatura inicial es cero, y cualquier temperatura está acotada, se tendrá que

$$U(x, 0) = 0, \qquad |U(x, t)| < M \tag{3}$$

Tomando las transformadas de Laplace de (1) y (2) y usando la primera condición de (3) encontramos que

$$su - U(x, 0) = k\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{o sea} \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{su}{k} = 0 \tag{4}$$

$$u(a, s) = Q \tag{5}$$

Por (4), $$u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/k}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

y por la condición de acotación $c_1 = 0$; así,

$$u(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x} \tag{6}$$

Por (5), $$u(a, s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,a} = Q \quad \text{o sea} \quad c_2 = Q e^{\sqrt{s/k}\,a}$$

así, $$u(x, s) = Q e^{-(x-a)\sqrt{s/k}} \tag{7}$$

Usando el problema 11, Pág. 209, invertimos y encontramos la temperatura buscada

$$U(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-(x-a)^2/4kt} \tag{8}$$

La fuente puntual $x = a$ se llama *fuente de calor de potencia* Q.

14. Una placa semi-infinita de espesor π [véase Fig. 8-13] tiene aisladas sus caras. Los bordes semi-infinitos se mantienen a 0°C en tanto que el borde finito se mantiene a 100°C. Suponiendo que la temperatura inicial es de 0°C, hallar la temperatura de cualquier punto en cualquier tiempo.

Suponiendo que la difusión vale uno, el problema de valor frontera para determinar la temperatura es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$U(0, y, t) = 0 \tag{2}$$

$$U(\pi, y, t) = 0 \tag{3}$$

$$U(x, y, 0) = 0 \tag{4}$$

$$U(x, 0, t) = 100 \tag{5}$$

$$|U(x, y, t)| < M \tag{6}$$

donde $0 < x < \pi$, $y > 0$, $t > 0$.

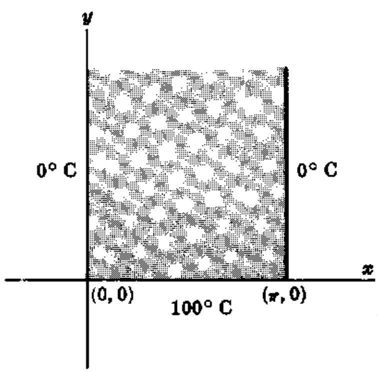


Fig. 8-13

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (1) y utilizando la condición (4), encontramos que si $u = u(x, y, s) = \mathcal{L}\{U(x, y, t)\}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = su \tag{7}$$

Multiplicando (7) por sen nx e integrando de 0 a π [o sea, tomando la transformada de seno, Pág. 175], encontramos que

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \operatorname{sen} nx\, dx + \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \operatorname{sen} nx\, dx = \int_0^\pi su \operatorname{sen} nx\, dx$$

o sea, si $\tilde{u} = \int_0^\pi u \operatorname{sen} nx\, dx$,

$$-n^2 \tilde{u} + n\, u(\pi, y, s) \cos n\pi + n\, u(0, y, s) + \frac{d^2\tilde{u}}{dy^2} = s\,\tilde{u} \tag{8}$$

Por las condiciones (2) y (3) de las transformadas de Laplace, tenemos

$$u(0, y, s) = 0, \qquad u(\pi, y, s) = 0$$

y (8) se convierte en

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dy^2} - (n^2 + s)\,\tilde{u} = 0$$

Esta ecuación tiene como solución $\tilde{u} = A\, e^{y\sqrt{n^2+s}} + B\, e^{-y\sqrt{n^2+s}}$

Como $\tilde{u}$ es acotado cuando $y \to \infty$, debemos tener que $A = 0$; así,

$$\tilde{u} = B\, e^{-y\sqrt{n^2+s}} \tag{9}$$

Por la condición (5)

$$\tilde{u}(n, 0, s) = \int_0^\pi \frac{100}{s} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{100}{s}\left(\frac{1 - \cos n\pi}{n}\right)$$

Ahora, haciendo $y = 0$ en (9), encontramos que

$$B = \frac{100}{s}\left(\frac{1 - \cos n\pi}{n}\right)$$

o sea

$$\tilde{u} = \frac{100}{s}\left(\frac{1 - \cos n\pi}{n}\right) e^{-y\sqrt{n^2+s}}$$

Por la fórmula de inversión seno de Fourier [Pág. 175], tenemos

$$u = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{s}\left(\frac{1 - \cos n\pi}{n}\right) e^{-y\sqrt{n^2+s}} \operatorname{sen} nx \tag{10}$$

Tenemos que obtener ahora la transformada inversa de Laplace de esta expresión. Sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-y\sqrt{s}}\} = \frac{y}{2\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-y^2/4t}$$

de manera que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-y\sqrt{s+n^2}}\} = \frac{y}{2\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-y^2/4t}\, e^{-n^2 t}$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-y\sqrt{s+n^2}}}{s}\right\} = \int_0^t \frac{y}{2\sqrt{\pi v^3}}\, e^{-y^2/4v}\, e^{-n^2 v}\, dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(p^2 + n^2 y^2/4p^2)}\, dp$$

haciendo $y^2/4v = p^2$.

Invirtiendo (10) término a término y usando este último resultado, encontramos

$$U(x,y,t) \quad = \quad \frac{400}{\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right) \operatorname{sen} nx \int_{y/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(p^2+n^2y^2/4p^2)}\, dp$$

Problemas propuestos

CONDUCCION DE CALOR

15. Un sólido semi-infinito, $x > 0$, tiene su temperatura inicial igual a cero. Se le aplica un flujo constante de calor A en su cara $x = 0$ en tal forma que $-KU_x(0,t) = A$. Demostrar que la temperatura de dicha cara, después de un tiempo t es $\dfrac{A}{K}\sqrt{\dfrac{kt}{\pi}}$.

16. Hallar la temperatura del sólido del problema 15 en cualquier punto $x > 0$.

Resp. $\dfrac{A}{K}\{\sqrt{kt/\pi}\, e^{-x^2/4kt} - \tfrac{1}{2}x \text{ fcer } (x/2\sqrt{kt})\}$

17. Un sólido $0 \leqq x \leqq l$ está aislado en sus dos extremos $x = 0$ y $x = l$. Si la temperatura inicial es igual a $ax(l-x)$, con a constante, hallar la temperatura de cualquier punto x en cualquier tiempo t.

Resp. $\dfrac{al^2}{6} - \dfrac{al^2}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-4kn^2\pi^2t/l^2}}{n^2} \cos\frac{2n\pi x}{l}$

18. (*a*) Usando transformadas de Laplace resolver el problema de valor frontera

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0{,}25\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 1 \qquad 0 < x < 10,\ t > 0$$

$$U(10,t) = 20, \qquad U_x(0,t) = 0, \qquad U(x,0) = 50$$

(*b*) Dar una interpretación de este problema en términos de flujos de calor.

Resp. (*a*)

$$U(x,t) \quad = \quad 220 - 2x^2 + \frac{6400}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/1600} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{20}$$

$$- \frac{120}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/1600} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{20}$$

19. (*a*) Resolver

$$2\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0$$

$$U_x(0,t) = 0, \qquad U(x,0) = e^{-x}, \qquad U(x,t) \text{ acotado}$$

(*b*) Dar la interpretación de este problema en términos de flujos de calor.

Resp.

$$U(x,t) \quad = \quad e^{t-x} - \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2 - x^2/4v^2}\, dv$$

20. (*a*) En un sólido semi-infinito $x > 0$ se mantiene su cara $x = 0$ a temperatura $U_0 \cos\omega t$, $t > 0$. Si la temperatura inicial es cero en todas partes, demostrar que la temperatura de cualquier punto $x > 0$ en cualquier tiempo $t > 0$ es

$$U(x,t) \quad = \quad U_0\, e^{-\sqrt{\omega/2k}\,x} \cos(\omega t - \sqrt{\omega/2k}\, x) - \frac{U_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u e^{-ut} \operatorname{sen} x\sqrt{u/k}}{u^2+\omega^2}\, du$$

(*b*) Demostrar que para grandes valores de t la integral del resultado de la parte (*a*) es despreciable.

21. Un sólido semi-infinito, $x \geqq 0$, está inicialmente a temperatura cero. Cuando $t = 0$ la cara $x = 0$ se eleva instantáneamente a una temperatura T_0 y se mantiene a esta temperatura por un tiempo t_0; luego esta temperatura se reduce instantáneamente a cero. Demostrar que, después de que ha transcurrido un tiempo adicional t_0, la temperatura es máxima a una distancia dada por $x = 2\sqrt{kt_0 \ln 2}$ donde k es la constante de difusión, que se supone constante.

22. Cuando $t = 0$, un sólido semi-infinito, $x > 0$, que está a temperatura cero se somete a un flujo calorífico sinusoidal aplicado sobre la cara $x = 0$ en tal forma que $-K\,U_x(0,t) = A + B \operatorname{sen} \omega t,\ t > 0$. Demostrar que la temperatura de la cara está dada, en cualquier tiempo posterior, por

$$\frac{2\sqrt{k}\,A}{K\sqrt{\pi}}\,t^{1/2} + \frac{2B\sqrt{k}\,\omega}{K}\left\{\left(\int_0^{\sqrt{t}} \cos \omega v^2\,dv\right) \operatorname{sen} \omega t - \left(\int_0^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} \omega v^2\,dv\right) \cos \omega t\right\}$$

23. Hallar la temperatura del sólido del problema 22 en cualquier punto $x > 0$.

LA CUERDA VIBRANTE

24. (*a*) Resolver el problema del valor frontera

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

$$Y_x(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = h, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0$$

(*b*) Interpretar físicamente la parte (*a*).

Resp. $Y(x,t) = \dfrac{8h}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \operatorname{sen}\,(n-\tfrac{1}{2})x \operatorname{sen}\,(2n-1)t$

25. Resolver el problema de valor frontera.

$$Y_{tt} = Y_{xx} + g \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = 0, \quad Y(x,0) = \mu\,x(\pi - x), \quad Y_t(x,0) = 0$$

e interpretarlo físicamente.

Resp. $Y(x,t) = \tfrac{1}{2}gx(\pi - x) + \dfrac{4(2\mu x - g)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}(2n-1)x \cos(2n-1)t$

26. Una cuerda tensa, flexible y elástica tiene sus extremos fijos en $x = 0$ y $x = l$. En $t = 0$ se desplaza su punto fijo a una distancia h y se deja libre. Hallar el desplazamiento resultante en cualquier tiempo $t > 0$.

Resp. $Y(x,t) = \dfrac{8h}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n-1)\pi a t}{l}$

27. (*a*) Resolver

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0$$

$$Y_x(0,t) = A \operatorname{sen} \omega t, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0$$

(*b*) Dar una interpretación física de este problema.

Resp. (*a*) $Y(x,t) = \dfrac{Aa}{\omega}\{\cos \omega(t - x/a) - 1\}$ si $t > x/a$ y 0 si $t \leqq x/a$

VIBRACIONES EN LAS VIGAS

28. Una viga de longitud l tiene fijo su extremo $x = 0$ y libre el extremo $x = l$. Su extremo $x = l$ recibe un desplazamiento longitudinal instantáneo de longitud α, y queda libre. Demostrar que el desplazamiento resultante de cualquier punto x en el tiempo t está dado por

$$Y(x,t) = \frac{\alpha x}{l} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c t}{l}$$

29. Una viga tiene sus extremos colgando en $x = 0$ y $x = l$. Cuando $t = 0$ la viga es golpeada con una velocidad transversal V_0 sen $\pi x/l$. Hallar el desplazamiento transversal de cualquiera de sus puntos en cualquier tiempo posterior.

30. Desarrollar el problema 29 cuando la velocidad transversal es $V_0\, x(l - x)$.

31. Una viga de longitud l tiene colgados sus extremos. Demostrar que las frecuencias naturales de sus oscilaciones transversales están dadas por

$$f_n = \frac{n^2\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{EIg}{\rho}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

32. Una viga elástica semi-infinita se está moviendo en relación a su extremo infinito a una velocidad v_0 cuando uno de los extremos es frenado bruscamente, mientras que el otro permanece libre. (*a*) Explicar, con referencia a este problema, el significado de lo que se escribe a continuación y, (*b*) resolver el problema del valor frontera que resulta.

$$Y_{tt}(x,t) = a^2 Y_{xx}(x,t) \qquad x > 0,\ t > 0$$

$$Y(x,0) = 0, \qquad Y_t(x,0) = -v_0, \qquad Y(0,t) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} Y_x(x,t) = 0$$

Resp. (*b*) $Y(x,t) = -v_0 x/a$ si $t > x/a$ y $-v_0 t$ si $t \leqq x/a$

LINEAS DE TRANSMISION

33. Una linea de transmisión semi-infinita, de inductancia y conductancia por unidad de longitud despreciables, tiene voltaje y corriente iguales a cero. Cuando $t = 0$ se aplica un voltaje E_0 en el extremo emisor $x = 0$. (*a*) Demostrar que el voltaje en cualquier punto $x > 0$ y cualquier tiempo $t > 0$ está dado por

$$E(x,t) = E_0 \text{ fcer } (x\sqrt{RC}/2\sqrt{t})$$

y (*b*) que la corriente correspondiente es

$$I(x,t) = \frac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{C}{R}}\, t^{-3/2}\, e^{-RCx^2/4t}$$

34. En el problema 33 demostrar que la corriente, en un tiempo específico t, tiene un máximo en la posición $\sqrt{2t/RC}$ del extremo receptor.

35. Una línea de transmisión semi-infinita, de resistencia y conductancia por unidad de longitud despreciables, tiene voltaje inicial y corriente iguales a cero. Cuando $t = 0$ se aplica un voltaje $E_0(t)$ en el extremo emisor $x = 0$. (*a*) Demostrar que el voltaje en cualquier posición $x > 0$ es

$$E(x,t) = \begin{cases} E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

y (*b*) que la correspondiente corriente es

$$I(x,t) = \begin{cases} \sqrt{C/L}\, E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

36. Supóngase que la línea de transmisión del problema 35 es tal que $R/L = G/C$. Demostrar que el voltaje está dado por

$$E(x,t) = \begin{cases} e^{-x\sqrt{RG}}\, E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

y comparar este resultado con el del problema 35. ¿Cuál es la corriente en este caso?

37. (*a*) Una linea de transmisión de conductancia y resistencia despreciables tiene su extremo emisor en $x = 0$ y el receptor en $x = l$. Se le aplica un voltaje E_0 en el extremo emisor y se mantiene abierto un circuito en el extremo receptor de modo que la corriente es cero. Suponiendo que el voltaje y la corriente iniciales valen cero, demostrar que el voltaje y la corriente de cualquier posición x en cualquier tiempo $t > 0$ están dados por

$$E(x,t) = \frac{E_0 \cosh \sqrt{L/C}\,(l-x)}{\cosh \sqrt{L/C}\, l}$$

$$I(x,t) = \frac{E_0\sqrt{L/C}\,\operatorname{senh} \sqrt{L/C}\,(l-x)}{\cosh \sqrt{L/C}}$$

(b) Discutir el significado del hecho de que el voltaje y la corriente de (a) son independientes del tiempo.

38. (a) Discutir el problema 37 en el caso en que la resistencia y la capacitancia sean despreciables, pero no la inductancia ni la conductancia; demostrar que en este caso

$$E(x,t) = E_0\left\{1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2l\sqrt{LC}}\right\}$$

(b) ¿Cuál es la corriente en este caso? Discutir la convergencia de la serie obtenida y explicar su significado.

PROBLEMAS VARIOS

39. (a) Resolver el problema de valor frontera

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2x \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$

$$U(0,t) = 0, \qquad U(1,t) = 0, \qquad U(x,0) = x - x^2$$

(b) Dar una interpretación física a la parte (a).

Resp. $U(x,t) = x(1-x) - \dfrac{4}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-n^2\pi^2 t}}{n^3}\right)\operatorname{sen} n\pi x$ o sea $U(x,t) = \dfrac{4}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n^3}\operatorname{sen} n\pi x$

40. Desarrollar el problema 39 cuando la condición $U(0,t) = 0$ se remplaza por $U_x(0,t) = 0$.

Resp. $$U(x,t) = \frac{5}{3} - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$
$$- \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}}{(2n-1)^4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

41. Un sólido $0 < x < l$ está inicialmente a temperatura cero. A la cara $x = 0$ se le da una temperatura $U(0,t) = G(t)$, $t > 0$, en tanto que el extremo $x = l$ se mantiene a 0°C. Demostrar que la temperatura en cualquier punto x y tiempo t es

$$U(x,t) = \frac{2\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\int_0^t e^{-n^2\pi^2 u/l^2}G(t-u)\,du\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

42. Desarrollar el problema 41 si el extremo $x = l$ está aislado.

43. Demostrar que resolver un problema de valor frontera con la ecuación $\dfrac{\partial U}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ es equivalente a resolver el mismo problema remplazando la ecuación por $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ y remplazar luego t por kt.

44. En un sólido $0 < x < l$ se mantienen en cero las temperaturas de sus extremos, y su temperatura inicial es $F(x)$. Demostrar que la temperatura de cualquier punto x en cualquier tiempo t es

$$U(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-kn^2\pi^2 t/l^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\int_0^l F(u)\operatorname{sen}\frac{n\pi u}{l}\,du$$

45. Hallar una solución acotada de

$$x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xe^{-y} \qquad 0 < x < 1,\ y > 0$$

que satisfaga $\Phi(x,0) = x$, $0 < x < 1$. *Resp.* $\Phi(x,y) = xe^{-y}(1+y)$

46. Una cuerda tensionada entre $x = 0$ y $x = l$ es desplazada en su centro una distancia D y luego se suelta. Hallar el desplazamiento resultante, con relación a su punto de equilibrio, de cualquier punto x en cualquier tiempo t.
Resp. $Y(x,t) = \dfrac{8D}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\,\text{sen}\,\dfrac{n\pi}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{n\pi x}{l}\cos\dfrac{n\pi a t}{l}$

47. Muestre cómo un problema de líneas de transmisión con inductancia y conductancia por unidad de longitud despreciables es equivalente a un problema de conducción de calor.

48. Resolver el problema de valor frontera

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + x\frac{\partial Y}{\partial x} + Y = x \qquad x > 0,\ t > 0$$

donde $Y(0,t) = 0$, $Y(x,0) = 0$. *Resp.* $Y(x,t) = \frac{1}{2}x(1 - e^{-2t})$

49. Demostrar que resolver un problema de valor frontera, en que aparece la ecuación $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, es equivalente a resolver el problema remplazando la ecuación por $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ y remplazar luego t por at.

50. Demostrar que un problema de líneas de transmisión en la cual la resistencia y la conductancia son despreciables es equivalente al problema de la vibración de una cuerda.

51. Una cuerda está tensionada entre $x = 0$ y $x = l$. El extremo $x = 0$ se somete a un desplazamiento transversal regido por $Y(0,t) = F(t)$, donde $F(t)$ es una función del tiempo pre-fijada; el extremo $x = l$ permanece fijo. Hallar el desplazamiento transversal

52. Una placa semi-infinita tiene espesor π [véase Fig. 8-14] y sus caras aisladas. Los bordes semi-infinitos se mantienen a 0°C y el borde finito está aislado. Si la temperatura inicial es de 100°C, hallar la temperatura de cualquier punto en cualquier tiempo.

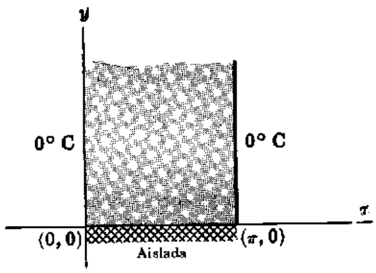


Fig. 8-14

53. Un sólido $0 < x < l$, está inicialmente a una temperatura constante y sus extremos $x = 0$ y $x = l$ se mantienen a temperatura cero. Demostrar que la temperatura de cualquier punto x está dada en cualquier tiempo t por

$$U(x,t) = U_0\,\text{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + U_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\text{fer}\left(\frac{nl-x}{2\sqrt{kt}}\right) - \text{fer}\left(\frac{nl+x}{2\sqrt{kt}}\right)\right\}$$

54. Una viga tiene sus extremos colgando en $x = 0$ y $x = l$. En el tiempo $t = 0$ se le aplica en forma instantánea una carga transversal concentrada de magnitud w sobre el punto medio. Demostrar que el desplazamiento transversal resultante de cualquier punto x de la viga viene dado, en cualquier punto $t > 0$, por

$$Y(x,t) = \frac{wx}{12EI}\left(\tfrac{3}{4}l^2 - x^2\right) - \frac{2wl^3}{\pi^4 EI}\left\{\frac{\text{sen}\,\pi x/l}{1^4} + \frac{\text{sen}\,3\pi x/l}{3^4} + \frac{\text{sen}\,5\pi x/l}{5^4} + \cdots\right\}$$

si $0 < x < l/2$ y el resultado para $l/2 < x < l$ se obtiene por simetría.

55. Demostrar que el problema de frontera

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2 U \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$U(0,t) = U_1, \qquad U(l,t) = U_2, \qquad U(x,0) = 0$$

tiene como solución

$$U(x,t) = \frac{U_1\,\text{senh}\,\alpha(l-x) + U_2\,\text{senh}\,\alpha x}{\text{senh}\,\alpha l} + \frac{2\pi}{l^2}e^{-\alpha^2 t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,e^{-n^2\pi^2 t/l^2}(U_2\cos n\pi - U_1)}{\alpha^2 + n^2\pi^2/l^2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}$$

56. Mostrar cómo el problema 55 puede interpretarse como un problema de flujo de calor en el cual una barra de longitud l puede irradiar calor en sus alrededores.

57. Una fuerza transversal dada por $F(x) = x(\pi - x)$ actúa en cada punto x de una viga que está colgada en sus extremos $x = 0$ y $x = \pi$. Si el desplazamiento transversal inicial y la velocidad valen cero, hallar el desplazamiento transversal un tiempo posterior t.

58. Una línea de transmisión semi-infinita de inductancia y conductancia por unidad de longitud despreciables tiene un voltaje aplicado en su extremo emisor $x = 0$ dado por $E(0, t) = E_0 \cos \omega t$, > 0. Suponiendo que el voltaje y corriente iniciales valen cero, (*a*) demostrar que, después de un largo tiempo, el voltaje en cualquier punto x está dado por

$$E(x, t) = E_0\, e^{-\sqrt{\omega RC/2}\,x} \cos(\omega t - \sqrt{\omega RC/2}\,x)$$

y (*b*) demostrar que la corriente correspondiente es

$$I(x, t) = E_0 \sqrt{\omega C/R}\; e^{-\sqrt{\omega RC/2}} \cos(\omega t - \sqrt{\omega RC/2}\,x - \pi/4)$$

59. Una cuerda semi-infinita está inicialmente en reposo sobre el eje x y tiene fijo su extremo $x = 0$. Cuando $t = 0$, a cada punto x de la cuerda se le da una velocidad inicial definida por $F(x)$, $x > 0$. Hallar el desplazamiento resultante de cada punto x en el tiempo $t > 0$.

60. Una fuerza transversal concentrada $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, $t > 0$, se aplica en el punto medio de una viga que está colgando de sus extremos $x = 0$ y $x = l$. Demostrar que el desplazamiento transversal resultante es

$$Y(x, t) = \frac{bF_0 \operatorname{sen}\omega t}{4EI}\sqrt{\frac{b}{\omega}}\left\{\frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\omega/b}}{\cos l\sqrt{\omega}/2\sqrt{b}} - \frac{\operatorname{senh} x\sqrt{\omega/b}}{\cosh l\sqrt{\omega}/2\sqrt{b}}\right\}$$

$$- \frac{2bF_0\, l}{\pi^2 EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\pi/2}{n^2(\omega^2 - b^2 n^4\pi^4/l^2)}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{bn^2\pi^2 t}{l^2}$$

si $0 < x < l/2$; el resultado para $l/2 < x < l$ se obtiene por simetría. Discutir cuál es el significado físico si $\omega = bn^2\pi^2/l^2$ para algún $n = 1, 2, 3, \ldots$.

61. Hallar la temperatura estacionaria en el cuadrado de la figura 8-15 si las caras planas están aisladas y los lados se mantienen a las temperaturas constantes indicadas.

Resp. $$U(x, y) = \frac{4T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\,\operatorname{senh}(2n-1)\pi(1-y)}{(2n-1)\operatorname{senh}(2n-1)\pi}$$

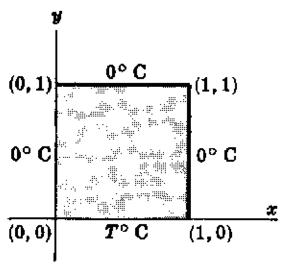


Fig. 8-15

62. Desarrollar el problema 62 cuando los lados se dejan a temperaturas constantes T_1, T_2, T_3, T_4.

63. Supóngase que en el problema 62 la temperatura inicial es de 0°C. ¿Cuál sería la temperatura para cualquier punto del cuadrado en cualquier tiempo?

64. Una viga de longitud l tiene su extremo $x = l$ fijos. Cuando $t = 0$, al extremo x se le da un desplazamiento longitudinal D y se le deja libre. Demostrar que el desplazamiento longitudinal resultante de cualquier punto x viene dado, en cualquier tiempo t, por

$$Y(x, t) = D\left\{\mathcal{U}(t - x/a) - \mathcal{U}\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + \mathcal{U}\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) - \cdots\right\}$$

donde $\mathcal{U}$ es la función escalonada de Heaviside. Discutir la solución gráficamente.

65. Dos sólidos conductores semi-infinitos, $x < 0$ y $x > 0$ [Fig. 8-16] tienen conductividades térmicas y difusividades dadas respectivamente por K_1, k_1, K_2, k_2. Las temperaturas iniciales constantes de estos sólidos son, respectivamente, U_1 y U_2. Demostrar que la temperatura de cualquier punto del sólido $x > 0$ en cualquier tiempo t es

$$U(x,t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{1+\alpha}\left\{1 + \alpha \operatorname{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_2 t}}\right)\right\}$$

donde $\alpha = K_1\sqrt{k_2}/K_2\sqrt{k_1}$.

$\operatorname{sen}\left(10^{7}\left(t - \frac{10}{10^{4}}\right)\right) \; u(t - 10^{-4})$

[*Sugerencia.* Las ecuaciones de conducción del calor son $\frac{\partial U}{\partial t} = k_1\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $x < 0$ y $\frac{\partial U}{\partial t} = k_2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $x > 0$; se necesita además que $\lim_{x\to 0-} U(x,t) = \lim_{x\to 0+} U(x,t)$ y $\lim_{x\to 0-} K_1 U_x(x,t) = \lim_{x\to 0+} K_2 U_x(x,t)$.]

$\frac{10^{7}}{s^{2} + 10^{14}} \cdot e^{-(10^{-4} s)}$

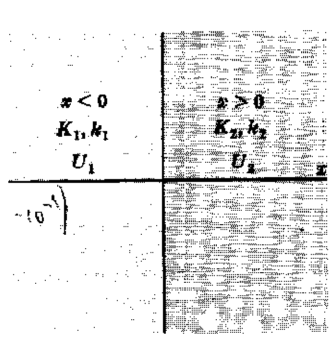


Fig. 8-16

66. Verificar el resultado del final del problema 8, Pág. 228.

67. Un cilindro circular infinito de radio unitario tiene temperatura inicial cero. Se aplica un flujo constante A a su superficie convexa. Demostrar que la temperatura de los puntos que están a una distancia r del eje está dada, en el tiempo t, por

$$U(r,t) = \frac{A}{4k}\{1 - 8kt - 2r^2\} + \frac{2A}{k}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\lambda_n^2 t}\,\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)}$$

donde λ_n son las raíces positivas de $J_0'(\lambda) = 0$.

68. En un cilindro de radio y peso unitarios se mantienen a cero sus extremos circulares y su superficie convexa se mantiene a temperatura U_0. Suponiendo que el eje del cilindro coincide con el eje z, demostrar que la temperatura estacionaria a cualquier distancia r del eje z es

$$U(r,z) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi z}{2n-1}\,\frac{I_0\{(2n-1)\pi r\}}{I_0\{(2n-1)\pi\}}$$

69. (*a*) Resolver el problema de valor frontera

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$Y(0,t) = 0, \quad Y(l,t) = 0, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad Y_{xx}(l,t) = 0, \quad EI\,Y_{xx}(0,t) = P_0 \operatorname{sen}\omega t$

(*b*) interpretando físicamente

Resp. (*a*)

$$Y(x,t) = \frac{bP_0 \operatorname{sen}\omega t}{2EI\omega}\left\{\frac{\operatorname{senh}(l-x)\sqrt{\omega/b}}{\operatorname{senh} l\sqrt{\omega/b}} - \frac{\operatorname{sen}(l-x)\sqrt{\omega/b}}{\operatorname{sen} l\sqrt{\omega/b}}\right\}$$

$$+ \frac{2\omega P_0 b}{\pi E I}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\pi x/l \ \operatorname{sen} bn^2\pi^2 t/l^2}{n(\omega^2 - b^2 n^4\pi^4/l^4)}$$

70. Una línea de transmisión semi-infinita, de inductancia despreciable, tiene voltaje inicial y corriente iguales a cero. Cuando $t = 0$ se aplica un voltaje constante E_0 en el extremo emisor $x = 0$. Demostrar que el voltaje en cualquier punto x es, en cualquier tiempo $t > 0$,

$$E(x,t) = \tfrac{1}{2}E_0\left\{e^{-x\sqrt{GR}} \operatorname{fer}\left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} - \tfrac{1}{2}x\sqrt{\frac{RC}{t}}\right) + e^{x\sqrt{GR}} \operatorname{fer}\left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{\frac{RC}{t}}\right)\right\} - E_0 \cosh x\sqrt{GR}$$

¿Cuál es la corriente correspondiente?

Apéndice A

TABLA DE LAS PROPIEDADES GENERALES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

	$f(s)$	$F(t)$
1.	$a f_1(s) + b f_2(s)$	$a F_1(t) + b F_2(t)$
2.	$f(s/a)$	$a F(at)$
3.	$f(s-a)$	$e^{at} F(t)$
4.	$e^{-as} f(s)$	$u(t-a) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$
5.	$s f(s) - F(0)$	$F'(t)$
6.	$s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$	$F''(t)$
7.	$s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$	$F^{(n)}(t)$
8.	$f'(s)$	$-t F(t)$
9.	$f''(s)$	$t^2 F(t)$
10.	$f^{(n)}(s)$	$(-1)^n t^n F(t)$
11.	$\dfrac{f(s)}{s}$	$\int_0^t F(u)\, du$
12.	$\dfrac{f(s)}{s^n}$	$\int_0^t \cdots \int_0^t F(u)\, du^n = \int_0^t \dfrac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u)\, du$
13.	$f(s)\, g(s)$	$\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du$

DE LAPLACE

	$f(s)$	$F(t)$
14.	$\int_s^\infty f(u)\,du$	$\dfrac{F(t)}{t}$
15.	$\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-su}F(u)\,du$	$F(t) = F(t+T)$
16.	$\dfrac{f(\sqrt{s})}{s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/4t}F(u)\,du$
17.	$\dfrac{1}{s}f(1/s)$	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})\,F(u)\,du$
18.	$\dfrac{1}{s^{n+1}}f(1/s)$	$t^{n/2}\int_0^\infty u^{-n/2}J_n(2\sqrt{ut})\,F(u)\,du$
19.	$\dfrac{f(s+1/s)}{s^2+1}$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})\,F(u)\,du$
20.	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-3/2}e^{-s^2/4u}f(u)\,du$	$F(t^2)$
21.	$\dfrac{f(\ln s)}{s\ln s}$	$\int_0^\infty \dfrac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}\,du$
22.	$\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s)$ = Polinomio de grado menor que n, $Q(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n)$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todas distintas	$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$

Apéndice B

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE ESPECIALES

	$f(s)$	$F(t)$
1.	$\dfrac{1}{s}$	1
2.	$\dfrac{1}{s^2}$	t
3.	$\dfrac{1}{s^n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
4.	$\dfrac{1}{s^n} \qquad n > 0$	$\dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
5.	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
6.	$\dfrac{1}{(s-a)^n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
7.	$\dfrac{1}{(s-a)^n} \qquad n > 0$	$\dfrac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$
8.	$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at}{a}$
9.	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
10.	$\dfrac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\dfrac{e^{bt}\operatorname{sen} at}{a}$
11.	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
12.	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{\operatorname{senh} at}{a}$
13.	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
14.	$\dfrac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\dfrac{e^{bt}\operatorname{senh} at}{a}$

	$f(s)$	$F(t)$
15.	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
16.	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \qquad a \neq b$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
17.	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \qquad a \neq b$	$\dfrac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$
18.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at - at\cos at}{2a^3}$
19.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t\operatorname{sen} at}{2a}$
20.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at + at\cos at}{2a}$
21.	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2}at\operatorname{sen} at$
22.	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
23.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{at\cosh at - \operatorname{senh} at}{2a^3}$
24.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t\operatorname{senh} at}{2a}$
25.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{senh} at + at\cosh at}{2a}$
26.	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2}at\operatorname{senh} at$
27.	$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
28.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\operatorname{sen} at - 3at\cos at}{8a^5}$
29.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t\operatorname{sen} at - at^2\cos at}{8a^3}$
30.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\operatorname{sen} at - at\cos at}{8a^3}$
31.	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{3t\operatorname{sen} at + at^2\cos at}{8a}$

	$f(s)$	$F(t)$
32.	$\dfrac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\operatorname{sen} at + 5at\cos at}{8a}$
33.	$\dfrac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos at - 7at\operatorname{sen} at}{8}$
34.	$\dfrac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\operatorname{sen} at}{2a}$
35.	$\dfrac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cos at$
36.	$\dfrac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cos at$
37.	$\dfrac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\operatorname{sen} at}{24a}$
38.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{senh} at - 3at\cosh at}{8a^5}$
39.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at^2\cosh at - t\operatorname{senh} at}{8a^3}$
40.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at\cosh at + (a^2t^2-1)\operatorname{senh} at}{8a^3}$
41.	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{3t\operatorname{senh} at + at^2\cosh at}{8a}$
42.	$\dfrac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{senh} at + 5at\cosh at}{8a}$
43.	$\dfrac{s^5}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\cosh at + 7at\operatorname{senh} at}{8}$
44.	$\dfrac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\operatorname{senh} at}{2a}$
45.	$\dfrac{s^3+3a^2s}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cosh at$
46.	$\dfrac{s^4+6a^2s^2+a^4}{(s^2-a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cosh at$
47.	$\dfrac{s^3+a^2s}{(s^2-a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\operatorname{senh} at}{24a}$
48.	$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2} - \cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2} + e^{-3at/2}\right\}$

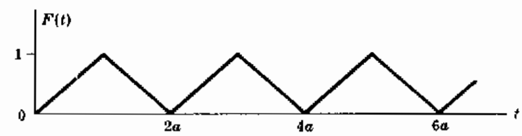
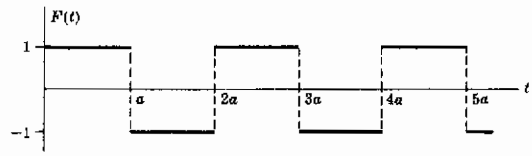
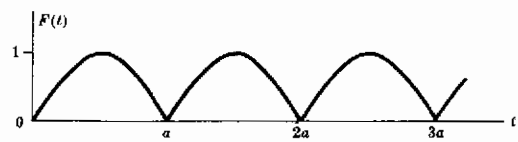
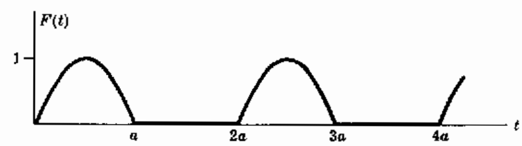
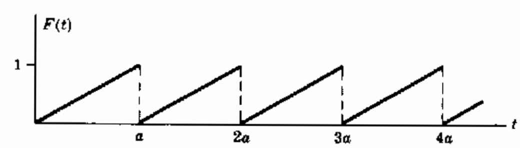
	$f(s)$	$F(t)$
49.	$\dfrac{s}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left\{\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}+\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-e^{-3at/2}\right\}$
50.	$\dfrac{s^2}{s^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
51.	$\dfrac{1}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right\}$
52.	$\dfrac{s}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}+e^{3at/2}\right\}$
53.	$\dfrac{s^2}{s^3-a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
54.	$\dfrac{1}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{4a^3}(\operatorname{sen}at\cosh at-\cos at\operatorname{senh}at)$
55.	$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{\operatorname{sen}at\operatorname{senh}at}{2a^2}$
56.	$\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\operatorname{sen}at\cosh at+\cos at\operatorname{senh}at)$
57.	$\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\cosh at$
58.	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}at-\operatorname{sen}at)$
59.	$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$
60.	$\dfrac{s^2}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\operatorname{senh}at+\operatorname{sen}at)$
61.	$\dfrac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh at+\cos at)$
62.	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
63.	$\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\dfrac{\operatorname{fer}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
64.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}\,(s-a)}$	$\dfrac{e^{at}\operatorname{fer}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
65.	$\dfrac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-b\,e^{b^2t}\operatorname{fer}(b\sqrt{t})\right\}$

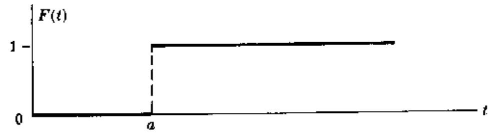
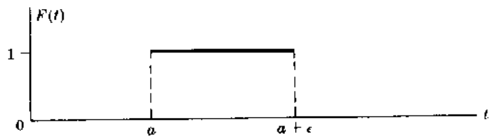
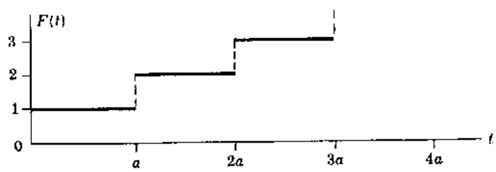
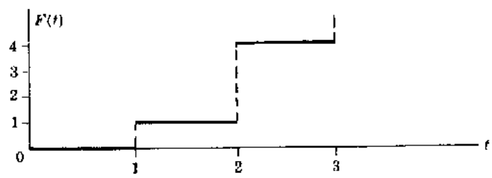
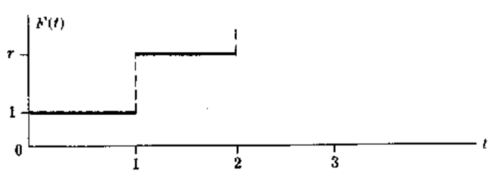
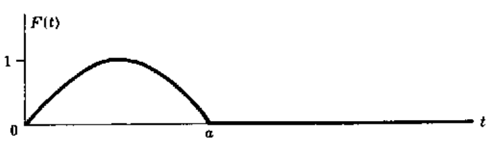
	$f(s)$	$F(t)$
66.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
67.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$
68.	$\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad n > -1$	$a^n J_n(at)$
69.	$\dfrac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}} \quad n > -1$	$a^n I_n(at)$
70.	$\dfrac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
71.	$\dfrac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) & t > b \\ 0 & t < b \end{cases}$
72.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{t\,J_1(at)}{a}$
73.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$t\,J_0(at)$
74.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$J_0(at) - at\,J_1(at)$
75.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{t\,I_1(at)}{a}$
76.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$t\,I_0(at)$
77.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$I_0(at) + at\,I_1(at)$
78.	$\dfrac{1}{s(e^s-1)} = \dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$ Véase también la fórmula 141, Pág. 254	$F(t) = n, \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
79.	$\dfrac{1}{s(e^s-r)} = \dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$F(t) = \sum_{k=1}^{[t]} r^k$ donde $[t]$ = mayor entero $\leq t$
80.	$\dfrac{e^s-1}{s(e^s-r)} = \dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ Véase también la fórmula 143, Pág. 254	$F(t) = r^n, \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
81.	$\dfrac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$

	$f(s)$	$F(t)$
82.	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\dfrac{\operatorname{sen} 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
83.	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{n+1}} \qquad n > -1$	$\left(\dfrac{t}{a}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{at})$
84.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
85.	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-a^2/4t}$
86.	$\dfrac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{fer}\,(a/2\sqrt{t})$
87.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{fcer}\,(a/2\sqrt{t})$
88.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}\,(\sqrt{s}+b)}$	$e^{b(bt+a)} \operatorname{fcer}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
89.	$\dfrac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{n+1}} \qquad n > -1$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}\, a^{2n+1}} \displaystyle\int_0^\infty u^n e^{-u^2/4a^2t} J_{2n}(2\sqrt{u})\, du$
90.	$\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$	$\dfrac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$
91.	$\dfrac{\ln\,[(s^2+a^2)/a^2]}{2s}$	$\operatorname{Ic}\,(at)$
92.	$\dfrac{\ln\,[(s+a)/a]}{s}$	$\operatorname{Ie}\,(at)$
93.	$-\dfrac{(\gamma + \ln s)}{s}$ γ = constante de Euler = 0,5772156...	$\ln t$
94.	$\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$	$\dfrac{2\,(\cos at - \cos bt)}{t}$
95.	$\dfrac{\pi^2}{6s} + \dfrac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$ γ = constante de Euler = 0,5772156...	$\ln^2 t$
96.	$\dfrac{\ln s}{s}$	$-(\ln t + \gamma)$ γ = constante de Euler = 0,5772156...
97.	$\dfrac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t + \gamma)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$ γ = constante de Euler = 0,5772156...

	$f(s)$	$F(t)$
98.	$\dfrac{\Gamma'(n+1) - \Gamma(n+1)\ln s}{s^{n+1}} \qquad n > -1$	$t^n \ln t$
99.	$\tan^{-1}(a/s)$	$\dfrac{\text{sen}\, at}{t}$
100.	$\dfrac{\tan^{-1}(a/s)}{s}$	$\text{Is}\,(at)$
101.	$\dfrac{e^{a/s}}{\sqrt{s}}\ \text{fcer}\,(\sqrt{a/s})$	$\dfrac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
102.	$e^{s^2/4a^2}\ \text{fcer}\,(s/2a)$	$\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}\, e^{-a^2t^2}$
103.	$\dfrac{e^{s^2/4a^2}\ \text{fcer}\,(s/2a)}{s}$	$\text{fer}\,(at)$
104.	$\dfrac{e^{as}\ \text{fcer}\,\sqrt{as}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$
105.	$e^{as}\ \text{Ie}\,(as)$	$\dfrac{1}{t+a}$
106.	$\dfrac{1}{a}\left[\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \text{Is}\,(as)\right\} - \text{sen}\, as\ \text{Ic}\,(as)\right]$	$\dfrac{1}{t^2+a^2}$
107.	$\text{sen}\, as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \text{Is}\,(as)\right\} + \cos as\ \text{Ic}\,(as)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
108.	$\dfrac{\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \text{Is}\,(as)\right\} - \text{sen}\, as\ \text{Ic}\,(as)}{s}$	$\tan^{-1}(t/a)$
109.	$\dfrac{\text{sen}\, as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \text{Is}\,(as)\right\} + \cos as\ \text{Ic}\,(as)}{s}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
110.	$\left[\dfrac{\pi}{2} - \text{Is}\,(as)\right]^2 + \text{Is}^2\,(as)$	$\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
111.	0	$\mathcal{N}(t)$
112.	1	$\delta(t)$
113.	e^{-as}	$\delta(t-a)$
114.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ Véase también el problema 139, Pág. 254	$\mathcal{U}(t-a)$

	$f(s)$	$F(t)$
115.	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi t}{a}$
116.	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s \cosh sa}$	$\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
117.	$\dfrac{\cosh sx}{s \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{t}{a} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\cos\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi t}{a}$
118.	$\dfrac{\cosh sx}{s \cosh sa}$	$1 + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
119.	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi t}{a}$
120.	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh sa}$	$x + \dfrac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
121.	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{t^2}{2a} + \dfrac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{a}\left(1-\cos\dfrac{n\pi t}{a}\right)$
122.	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$	$t + \dfrac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
123.	$\dfrac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$	$\tfrac{1}{2}(t^2+x^2-a^2) - \dfrac{16a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
124.	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\, e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}$
125.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
126.	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
127.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\cos\dfrac{n\pi x}{a}$
128.	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{s \operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}$
129.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}$	$1 + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
130.	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{s^2 \operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\left(1-e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}$
131.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2 \cosh a\sqrt{s}}$	$\tfrac{1}{2}(x^2-a^2) + t - \dfrac{16a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$

	$f(s)$	$F(t)$
132.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s\,J_0(ia\sqrt{s})}$	$1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son las raíces positivas de $J_0(\lambda) = 0$
133.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2 J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{1}{4}(x^2 - a^2) + t + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son las raíces positivas de $J_0(\lambda) = 0$
134.	$\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	**Función de onda triangular** 
135.	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	**Función de onda cuadrada** 
136.	$\dfrac{\pi a}{a^2 s^2 + \pi^2}\coth\left(\dfrac{as}{2}\right)$	**Función de onda sinusoidal rectificada** 
137.	$\dfrac{\pi a}{(a^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}$	**Función de onda sinusoidal semi-rectificada** 
138.	$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	**Función de onda dentada** 

	$f(s)$	$F(t)$
139.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ Véase también la fórmula 114, Pág. 251	**Función unidad de Heaviside** $\mathcal{U}(t-a)$ 
140.	$\dfrac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{s}$	**Función pulsación** 
141.	$\dfrac{1}{s(1-e^{-as})}$ Véase también la fórmula 78, Pág. 249	**Función escalonada** 
142.	$\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$F(t) = n^2, \quad n \leqq t < n+1, \; n = 0, 1, 2, \ldots$ 
143.	$\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ Véase también la fórmula 80, Pág. 249	$F(t) = r^n, \quad n \leqq t < n+1, \; n = 0, 1, 2, \ldots$ 
144.	$\dfrac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$F(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi t/a) & 0 \leqq t \leqq a \\ 0 & t > a \end{cases}$ 

Apéndice C

TABLA DE FUNCIONES ESPECIALES

1. Función gama

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\, du, \qquad n > 0$$

2. Función beta

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\, du = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \qquad m, n > 0$$

3. Función de Bessel

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\,\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$

4. Función de Bessel modificada

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \frac{x^n}{2^n\,\Gamma(n+1)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right\}$$

5. Función de error

$$\operatorname{fer}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}\, du$$

6. Función complementaria de error

$$\operatorname{fcer}(t) = 1 - \operatorname{fer}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2}\, du$$

7. Integral exponencial

$$\operatorname{Ie}(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

8. Integral seno

$$\operatorname{Is}(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$$

9. Integral coseno

$$\operatorname{Ic}(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\, du$$

10. Integral seno de Fresnel

$$S(t) = \int_0^t \operatorname{sen} u^2\, du$$

11. Integral coseno de Fresnel

$$C(t) = \int_0^t \cos u^2\, du$$

12. Polinomios de Laguerre

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

INDICE

Schaum

• La teoría de las transformadas o transformaciones de Laplace, conocida también con el nombre de cálculo operacional, ha venido a constituir en los últimos años una parte esencial de la matemática requerida por los ingenieros, físicos, matemáticos y otros científicos.

• Este libro está destinado a ser utilizado como texto en un curso formal de teoría de las transformadas de Laplace y sus aplicaciones.

• Cada capítulo comienza con el enunciado claro de las definiciones, principios y teoremas, con ilustraciones y material descriptivo; conjuntos graduados de problemas resueltos y propuestos. Los problemas resueltos, constituyen parte esencial del texto, contienen una insistente repetición de los principios básicos, lo cual es efectivo y vital para el aprendizaje. Hay demostraciones de teoremas y deducciones de fórmulas. El gran número de problemas propuestos, con sus respuestas, constituye material de revisión completo para cada capítulo.

• Entre los temas tratados están las propiedades de la transformada de Laplace y su inversa, junto con sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, a las ecuaciones integrales, a las ecuaciones de diferencias y a los problemas de frontera.

9 789684 228818
ISBN: 968-422-881-3

Mc Graw Hill

ISBN 968-422-881-3