Transformada de Laplace y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales

José Salvador Cánovas Peña

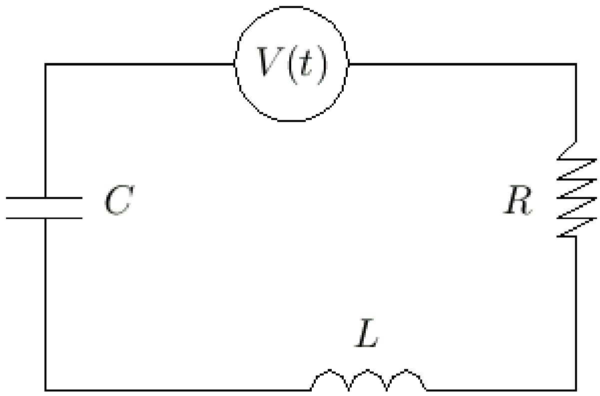
8 de enero de 2008

Índice General

Introducción

Vamos a desarrollar un tema sobre la Transformada de Laplace y su aplicación a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Estas ecuaciones surgen de manera natural en el contexto de los circuitos eléctricos.

Consideremos por ejemplo el típico circuito LRC de la figura



donde la inductancia L, la resistencia R y la capacidad de condensador C se consideran constantes. Se tiene entonces que la carga $q(t)$ que circula por el circuito está dada por la ecuación

$$Lq''(t) + Rq'(t) + q(t)/C = V(t),$$

y dado que la intensidad $I(t)$ es la derivada de la carga, ésta puede calcularse por la ecuación

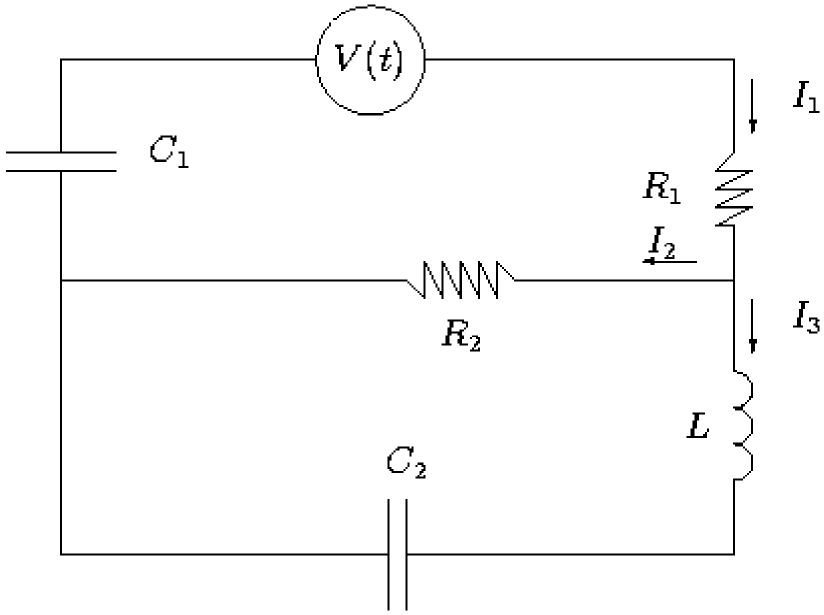
$$LI'(t) + RI(t) + \int_0^t I(s)ds/C = V(t),$$

o equivalentemente con la ecuación diferencial

$$LI''(t) + RI'(t) + I(t)/C = V'(t),$$

en el caso en que $V(t)$ sea una función derivable.

De forma similar, si tenemos un circuito con varias ramas y más elementos, como por ejemplo



podemos deducir a partir de las leyes de Kirchoff que las intensidades que circulan por los hilos eléctricos del circuito vienen dadas por

$$\begin{cases} 0 = I_1 - I_2 - I_3, \\ V'(t) = I_1' R_1 + I_1/C_1 + I_2' R_2, \\ 0 = -I_2' R_2 + I_3'' L + I_3/C_2, \end{cases}$$

Si suponemos los elementos del circuito constantes, salvo a lo mejor el voltaje $V(t)$, que supondremos una función derivable, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

La Transformada de Laplace es una herramienta que permite transformar los problemas anteriores en problemas algebraicos y, una vez resuelto este problema algebraico más fácil a priori de resolver, calcular a partir de la solución del problema algebraico la solución del problema de ecuaciones diferenciales.

Esta es la forma en que los ingenieros abordan el estudio de estos problemas, como pone de manifiesto las referencias [Oga1], [Sen] o [Jam]. Además este método es explicado en algunos libros de ecuaciones diferenciales como [BoPr], [Bra], [Jef] o [MCZ].

Sin embargo, para entender en su justa dimensión la Transformada de Laplace hay que dominar contenidos básicos de variable compleja que nuestros alumnos ya han estudiado durante el curso (ver por ejemplo [Mur]). Así, vamos a presentar la Transformada de Laplace en un primer lugar usando los conocimientos que el alumno tiene de funciones de variable compleja y una vez explicada ésta, procederemos a indicar algunas aplicaciones a las ecuaciones y sistemas citadas anteriormente. Nuestros alumnos también deben conocer y dominar contenidos relativos a integrales impropias que fueron explicados en la asignatura de primer curso *fundamentos matemáticos de la ingeniería*.

A modo de introducción histórica, diremos que la expresión

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t)$$

fué acuñada en primer lugar por Pierre–Simon Laplace en 1782. Su utilización dentro de la técnica se debe en su forma rigurosa a Thomas Bromwich, el cual formalizó utilizando las funciones de variable compleja y la Transformada de Laplace un cálculo operacional inventado por Oliver Heaviside para la resolución de circuitos eléctricos.

Capítulo 1

Transformada de Laplace

1.1 Funciones continuas a trozos. Función de Heaviside

Previamente a introducir la Transformada de Laplace, hemos de concretar qué tipo de funciones vamos a considerar para nuestros problemas. Las funciones que van a ser de importancia dentro de la ingeniería son aquellas llamadas *continuas a trozos*, que a continuación definimos.

Dados los números reales $a < b$, se dice que la función $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es *continua a trozos* si existe una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, de manera que f es continua en (t_i, t_{i+1}), $0 \leq i < n$, y existen y son finitos los límites laterales de f en cada uno de los puntos t_i, $0 \leq i \leq n$.

Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ se dice que es *continua a trozos* si para cada intervalo compacto $[a, b] \subset [0, +\infty)$ se verifica que $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua a trozos.

Uno de los primeros ejemplos de función continua a trozos es

$$h_a : [0, +\infty) \to \mathbb{C},$$

donde a es un número real mayor o igual que cero. Esta función está definida por

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ 1 & \text{si } t \geq a, \end{cases}$$

y se conoce en ingeniería con el nombre de *función de Heaviside.*

Físicamente, la función de Heaviside realiza la función de interruptor, de manera que si $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ es una función continua se tiene que $h_a \cdot f$ es la función

$$(h_a \cdot f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ f(t) & \text{si } t \geq a, \end{cases}$$

lo que representa que la función h_a "enciende" a la función o señal f en el instante de tiempo $t = a$. Adicionalmente, si consideramos $0 \leq a < b$ y la función $h_a - h_b : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$, ésta tiene la forma

$$(h_a - h_b)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [a, b), \\ 1 & \text{si } t \in [a, b). \end{cases}$$

Así, si tomamos ahora la función $h_a \cdot f - h_b \cdot f$, la función h_b tiene el efecto físico de "apagar" la función f, ya que

$$(h_a \cdot f - h_b \cdot f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ f(t) & \text{si } a \leq t < b, \\ 0 & \text{si } b \leq t. \end{cases}$$

Además de estas interpretaciones físicas, la función de Heaviside es útil para describir funciones continuas a trozos que a su vez sean continuas por la derecha. Por ejemplo, la función

$$f(f) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ t - 1 & \text{si } 1 \leq t < 3, \\ \sin t & \text{si } 3 \leq t, \end{cases}$$

puede escribirse como

$$f(t) = t \cdot [h_0(t) - h_1(t)] + (t - 1) \cdot [h_1(t) - h_3(t)] + \sin t \cdot h_3(t).$$

Esta forma de describir funciones continuas a trozos será útil en los siguientes apartados del tema debido a las propiedades de la Transformada de Laplace que posteriormente estudiaremos. Por otra parte hemos de comentar que al venir la Transformada de Laplace definida como una integral, la condición de ser la función continua por la derecha es irrelevante y todas las funciones pueden tomarse de esta forma.

1.2 Definición de Transformada de Laplace

1.2.1 Definición y primeros ejemplos

Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función localmente integrable, esto es, existe la integral de Riemann de f en todo intervalo compacto $[0, a] \subset [0, +\infty)$. Se define la *Transformada de*

Laplace de f en $z \in \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt, \tag{1.1}$$

siempre que tal integral impropia exista. Como el alumno debe conocer, la convergencia de la integral

$$\int_0^{+\infty} |e^{-zt} f(t)| dt$$

implica la convergencia de la integral (1.1). Denotaremos por $\mathcal{D}_f$ el dominio de $\mathcal{L}[f]$, es decir, el subconjunto del plano complejo donde la expresión (1.1) tiene sentido.

A continuación vamos a ver ejemplos de Transformadas de Laplace de algunas funciones elementales.

- **Función de Heaviside**. Sea $a \geq 0$ y consideremos la función de Heaviside h_a definida anteriormente. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$ se verifica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h_a](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} h_a(t) dt = \int_a^{+\infty} e^{-zt} dt \\ &= \lim_{x \to +\infty} \int_a^x e^{-zt} dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{-za}}{z} - \frac{e^{-zx}}{z} \right) = \frac{e^{-za}}{z}. \end{aligned}$$

  En particular, cuando $a = 0$ obtenemos

$$\mathcal{L}[h_0](z) = \frac{1}{z}.$$

- **Función exponencial**. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ y consideremos la función exponencial $f(t) = e^{\omega t}$. Se verifica entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \omega$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\omega)t} dt \\ &= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-(z-\omega)t} dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{z-\omega} - \frac{e^{-(z-\omega)x}}{z-\omega} \right) = \frac{1}{z-\omega}. \end{aligned}$$

  En particular, si $\omega = 0$ se verifica que $f(t) = 1$, con lo que nuevamente

$$\mathcal{L}[h_a](z) = \frac{1}{z} \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Re} z > 0.$$

- **Potencias**. Sea n un número natural y consideremos la función $f_n(t) = t^n$. Vamos ver que la Transformada de Laplace de f_n viene dada por la expresión

$$\mathcal{L}[f_n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Re} z > 0.$$

Para ver esto procedemos por inducción calculando en primer lugar la Transformada de f_1. Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-tz}tdt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-tz}tdt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^{-xz}}{z}+\frac{1-e^{-xz}}{z^2}\right)=\frac{1}{z^2},\end{aligned}$$

A continuación, por la hipótesis de inducción supongamos que $\mathcal{L}[f_n](z) = n!/z^{n+1}$ y calculemos la Transformada de f_{n+1}. Consideremos

$$\mathcal{L}[f_{n+1}](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz}t^{n+1}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-tz}t^{n+1}dt. \tag{1.2}$$

Tomando partes en la expresión anterior

$$\int_0^x e^{-tz}t^{n+1}dt = \frac{x^{n+1}e^{-xz}}{-z}+\frac{n+1}{z}\int_0^x e^{-tz}t^n dt. \tag{1.3}$$

Combinando (1.2) y (1.3) concluimos que

$$\mathcal{L}[f_{n+1}](z) = \frac{n+1}{z}\mathcal{L}[f_n](z) = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}.$$

- **Funciones periódicas**. Las funciones periódicas son bastante importantes en ingeniería debido a que su periodicidad las hace controlables. Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ una función periódica con periodo T. Entonces

$$\int_0^{nT} e^{-tz}f(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{jT}^{(j+1)T} e^{-tz}f(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-jzT}\int_0^T e^{-tz}f(t)dt$$

realizando cambios de variable en las integrales y usando que la función es periódica de periodo T. Tomando límites cuando $n \to +\infty$, se verifica para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$ la relación

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{1-e^{-zT}}\int_0^T e^{-tz}f(t)dt.$$

1.2.2 Dominio de definición de la Transformada de Laplace

Los ejemplos que anteriormente hemos explicado ponen de manifiesto que la función Transformada de Laplace de una función $f : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ no tiene porque estar definida en todo el plano complejo. Vamos a estudiar con precisión cómo es el dominio de definición de estas funciones, pero consideraremos una clase especial de funciones que tienen lo que llamaremos *orden exponencial*.

Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ se dice que tiene orden exponencial si existen constantes $A > 0$ y $B \in \mathbb{R}$ de manera que para todo $t \geq 0$ se satisface la condición

$$|f(t)| \leq Ae^{tB}. \tag{1.4}$$

Denotaremos por $\mathcal{E}$ el conjunto de funciones continuas a trozos con orden exponencial, que serán las funciones con las que trabajaremos a partir de ahora. El siguiente resultado ofrece una primera aproximación sobre el dominio de definición de la Transformada de Laplace de funciones con orden exponencial.

Proposition 1 *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función continua a trozos cumpliendo la condición (1.4). Entonces $\mathcal{L}[f](z)$ está definida para todo número complejo z tal que* $\operatorname{Re} z > B$.

Proof. Vamos a ver que la función $e^{-zt}f(t)$ es absolutamente integrable para todo complejo z tal que $\operatorname{Re} z > B$. Para ello consideramos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |e^{-zt}f(t)|dt &= \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re} zt}|f(t)|dt \\
&\leq A\int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} z - B)t}dt \\
&= \lim_{x\to+\infty} A\int_0^{x} e^{-(\operatorname{Re} z - B)t}dt \\
&= A\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{B-\operatorname{Re} z} - \frac{e^{-x(\operatorname{Re} z - B)}}{B-\operatorname{Re} z}\right) = \frac{1}{B-\operatorname{Re} z},
\end{aligned}$$

con lo que la Transformada de Laplace existe en el subconjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > B\}$. ■

Este resultado prueba que $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > B\} \subset \mathcal{D}_f$. Si definimos

$$\rho = \inf\{B \in \mathbb{R} : \exists A > 0 \text{ con } |f(t)| \leq Ae^{Bt} \text{ para todo } t \geq 0\},$$

y denotamos por

$$\mathcal{D}_f^* = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \rho\}.$$

La Proposición 1 nos asegura que $\mathcal{D}_f^* \subseteq \mathcal{D}_f$.

1.3 Propiedades de la Transformada de Laplace

Una vez estudiada la definición de Transformada de Laplace y caracterizadas algunas condiciones para que una función f tenga Transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$ definida en un dominio del plano complejo $\mathcal{D}_f$, pasamos a estudiar algunas propiedades básicas de esta transformada integral. La primera propiedad que vamos a estudiar es la linealidad.

1.3.1 Linealidad

Esta propiedad será muy útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, a la vez que permitirá el cálculo de la transformada de algunas funciones.

Theorem 2 *Sean $f, g \in \mathcal{E}$ y $a, b \in \mathbb{C}$. Entonces para todo $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ se verifica que*

$$\mathcal{L}[af + bg](z) = a\mathcal{L}[f](z) + b\mathcal{L}[g](z).$$

Proof. La demostración se sigue inmediatamente de la linealidad de la integral. Consideremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[af + bg](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}(af(t) + bg(t))dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-zt}(af(t) + bg(t))dt \\
&= a \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-zt} f(t)dt + b \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-zt} g(t)dt \\
&= a\mathcal{L}[f](z) + b\mathcal{L}[g](z),
\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. ■

A partir de la linealidad de la Transformada de Laplace podemos obtener nuevas Transformadas de funciones elementales, como muestran los siguientes ejemplos.

- **Función seno**. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

  $$f(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

  Entonces

  $$\begin{aligned}
  \mathcal{L}[f](z) &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{it\omega}](z) - \mathcal{L}[e^{-it\omega}](z)\right) \\
  &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z - i\omega} - \frac{1}{z + i\omega}\right) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}
  \end{aligned}$$

  siempre que $\operatorname{Re} z > 0$.

- **Función coseno**. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

  $$f(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

  De forma análoga a la anterior se obtiene que

  $$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z}{z^2 + \omega^2}$$

  siempre que $\operatorname{Re} z > 0$.

- **Función seno hiperbólico**. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](z) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{\omega t}](z) - \mathcal{L}[e^{-\omega t}](z)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-\omega} - \frac{1}{z+\omega}\right) = \frac{\omega}{z^2 - \omega^2}\end{aligned}$$

si $\operatorname{Re} z > |\omega|$.

- **Función coseno hiperbólico**. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}.$$

De forma análoga a la anterior se obtiene que

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z}{z^2 - \omega^2}$$

siempre que $\operatorname{Re} z > |\omega|$.

1.3.2 Transformada de la derivada

Se dice que la función $f \in \mathcal{E}$ es derivable a trozos si es continua, existen las derivadas laterales de f en cada punto de $[0, +\infty)$ y en cada subintervalo $[a, b] \subset [0, +\infty)$ existen a lo sumo una cantidad finita de puntos donde f no es derivable. Si f es derivable a trozos, definimos $f' : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ como $f'(x) = f'_+(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Es claro entonces que f' es una función continua a trozos, que coincidirá en casi todos los puntos con la derivada ordinaria. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Theorem 3 *Bajo las condiciones anteriores se verifica para todo $z \in \mathcal{D}_f^*$*

$$\mathcal{L}[f'](z) = z\mathcal{L}[f](z) - f(0). \tag{1.5}$$

Proof. Sean $z \in \mathcal{D}_f^*$ y $x > 0$ y consideremos

$$0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x$$

los puntos de discontinuidad de f' en el intervalo $(0, x)$ y fijemos $x_0 = 0$ y $x_n = x$. Entonces, dividiendo el intervalo de integración y utilizando la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{-zt} f'(t)dt &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-zt} f'(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} [e^{-zx_i} f(x_i) - e^{-zx_{i-1}} f(x_{i-1})] + z \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-zt} f(t)dt \\
&= e^{-zx} f(x) - f(0) + z \int_0^x e^{-zt} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $x \to +\infty$, y teniendo en cuenta que $z \in \mathcal{D}_f^*$ y que por tanto existen $A, B \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $\operatorname{Re} z > B$, tales que

$$|f(x)e^{-zx}| \leq Ae^{(B - \operatorname{Re} z)x} \to 0 \text{ si } x \to +\infty,$$

obtenemos inmediatamente (1.5). ■

Procediendo por inducción a partir de la fórmula (1.5) se prueba una fórmula general para la derivada k–ésima de la función f en el caso de que $f^{k-1)}$ sea derivable a trozos para $k \in \mathbb{N}$. Esta fórmula viene dada para todo $z \in \mathcal{D}_f^*$ por

$$\mathcal{L}[f^{k)}](z) = z^k \mathcal{L}[f](z) - z^{k-1} f(0) - z^{k-2} f'(0) - ... - z f^{k-2)}(0) - f^{k-1)}(0), \tag{1.6}$$

donde las derivadas sucesivas de f en 0 se entienden como derivadas por la derecha.

Las fórmulas 1.5 y 1.6 serán claves para resolver ecuaciones y sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes, como veremos en el apartado de aplicaciones de este tema.

1.3.3 Transformada de la integral

Sea $f \in \mathcal{E}$ y definamos la función

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

que obviamente está bien definida y es continua para todo $t \in [0, +\infty)$. La relación entre las Transformadas de Laplace de ambas funciones viene dada por el siguiente resultado.

Theorem 4 *En las condiciones anteriores, para todo* $z \in \mathcal{D}_f^* \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ *se verifica*

$$\mathcal{L}[g](z) = \frac{\mathcal{L}[f](z)}{z}. \tag{1.7}$$

Proof. Sea $x > 0$ y consideremos

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = x$$

de manera que f no es continua en x_i para 1$\leq i < n$. Obviamente g es derivable en (x_i, x_{i+1}) para $1 \leq i < n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{-zt} g(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-zt} g(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(g(x_i) \frac{e^{-zx_i}}{z} - g(x_{i+1}) \frac{e^{-zx_{i+1}}}{z} \right) + \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-zt} f(t)dt \\
&= -g(x) \frac{e^{-zx}}{z} + \frac{1}{z} \int_0^x e^{-zt} f(t)dt,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta la continuidad de g y $g(0) = 0$. Vamos a comprobar que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) e^{-zx} = 0.$$

Para ello y dado que $f \in \mathcal{E}$, existirán reales B y $A > 0$ de manera que $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ para todo $t \geq 0$. Sea

$$\begin{aligned}
|g(x)e^{-zx}| &\leq \int_0^x e^{-zx} f(t)dt \leq A \int_0^x e^{Bt - x \operatorname{Re} z} \\
&= Ae^{-x \operatorname{Re} z} \left(\frac{e^{Bx}}{B} - \frac{1}{B} \right) \to 0 \text{ si } x \to +\infty.
\end{aligned}$$

Entonces tomando límites en la expresión anterior obtenemos (**??**). ■

1.3.4 Transformada de la convolución

Sean $f, g \in \mathcal{E}$ y definamos $f(t) = g(t) = 0$ para todo $t < 0$. Se define la convolución de f y g como la función

$$(f * g)(t) = \int_0^{+\infty} f(t-s)g(s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

Puede verse con el cambio de variable $y = t - s$ que $f * g = g * f$. El principal interés de la convolución respecto a la Transformada de Laplace se concreta en el siguiente resultado.

Theorem 5 *En las condiciones anteriores, para todo $z \in \mathcal{D}_f^* \cap \mathcal{D}_g^*$ se verifica la fórmula*

$$\mathcal{L}[f * g](z) = \mathcal{L}[f](z)\mathcal{L}[g](z).$$

Proof. En primer lugar, existen números reales B y $A_i > 0$, $i = 1, 2$, de manera que para todo $t \geq 0$ se verifica

$$|f(t)| \leq A_1 e^{Bt} \text{ y } |g(t)| \leq A_2 e^{Bt}.$$

Entonces para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &= \left| \int_0^t f(t-s)g(s)ds \right| \leq \int_0^t |f(t-s)||g(s)|ds \\ &\leq A_1 A_2 e^{Bt} \int_0^t ds = A_1 A_2 t e^{Bt}, \end{aligned}$$

con lo que se ve fácilmente que $e^{-zt}(f * g)(t)$ es absolutamente integrable para todo $\operatorname{Re} z > B$, con lo que $\mathcal{L}[f * g](z)$ existe para todo z con $\operatorname{Re} z > B$. Por otra parte, como las funciones $e^{-zt}f(t)$ y $e^{-zt}g(t)$ también son absolutamente integrables para todo $\operatorname{Re} z > B$, por el Teorema de Fubini (ver [PiZa, pag. 187]) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left[\int_0^t f(t-s)g(s)ds \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t e^{-z(t-s)} f(t-s) e^{-zs} g(s)ds \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} e^{-z(t-s)} f(t-s) e^{-zs} g(s)dt \right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} e^{-z(t-s)} f(t-s)dt \right] e^{-zs} g(s)ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-zu} f(u)du \right] e^{-zs} g(s)ds \\ &= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[f](z) e^{-zs} g(s)ds = \mathcal{L}[f](z)\mathcal{L}[g](z), \end{aligned}$$

con lo que termina la prueba. ■

La demostración de este resultado no la haremos a los alumnos, debido a que pensamos que sus conocimientos le impedirán comprenderla completamente. No obstante la fórmula será bastante útil en las aplicaciones.

1.3.5 Primer Teorema de Traslación

Fijemos un número complejo a y consideremos $f \in \mathcal{E}$. El primer teorema de desplazamiento hace referencia a la transformada de la función $e^{at}f(t)$ y afirma lo siguiente.

Theorem 6 *Bajo las condiciones anteriores*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](z) = \mathcal{L}[f](z-a) \tag{1.8}$$

para todo $z \in \mathcal{D}_f + \operatorname{Re} a := \{\omega + \operatorname{Re} a : \omega \in \mathcal{D}_f\}$.

Proof. Sea

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{at} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-(z-a)t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-a)t} f(t)dt,$$

de donde se deduce inmediatamente (1.8). ■

A partir de este resultado podemos obtener las Transformadas de las funciones siguientes:

- $f(t) = e^{at}\sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, cuya Transformada de Laplace para todo número complejo z tal que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$ es
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{\omega}{(z-a)^2 + \omega^2}.$$
- $f(t) = e^{at}\cos(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, cuya Transformada de Laplace para todo número complejo z tal que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$ es
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z-a}{(z-a)^2 + \omega^2}.$$
- $f(t) = e^{at}\sinh(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Re} z > |\omega| + \operatorname{Re} a$, entonces
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{\omega}{(z-a)^2 - \omega^2}.$$
- $f(t) = e^{at}\cosh(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Re} z > |\omega| + \operatorname{Re} a$, entonces
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z-a}{(z-a)^2 - \omega^2}.$$
- $f(t) = e^{at}t^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$$
siempre que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$.

1.3.6 Segundo Teorema de Traslación

Sea ahora $a > 0$ un número real y supongamos que $f \in \mathcal{E}$ está definida por $f(t) = 0$ para todo $t < 0$. Recordemos que h_a es la función de Heaviside. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Theorem 7 *Bajo las anteriores condiciones se verifica para todo* $z \in \mathcal{D}_f$

$$\mathcal{L}[h_a(t)f(t-a)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[f](z). \tag{1.9}$$

Proof. Tomamos

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-zt}h_a(t)f(t-a)dt &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-zt}h_a(t)f(t-a)dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\int_a^x e^{-zt}f(t-a)dt \\ &= \lim_{x\to\infty}\int_0^{x-a} e^{-z(s+a)}f(s)ds \\ &= e^{-za}\int_0^{+\infty} e^{-zs}f(s)ds,\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $s = t - a$. De aquí se obtiene inmediatamente (1.9). ■

Este resultado es útil para obtener la Transformada de Laplace de funciones continuas a trozos. Por ejemplo consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Esta función puede describirse como

$$f(t) = t[h_0(t) - h_1(t)].$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](z) &= \mathcal{L}[h_0(t)t](z) - \mathcal{L}[h_1(t)t](z) = \mathcal{L}[t](z) - e^{-z}\mathcal{L}[t+1](z) \\ &= \frac{1}{z^2} - e^{-z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} - e^{-z}\frac{z+1}{z^2},\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$.

1.4 Propiedades de la función Transformada de Laplace

En esta sección estudiamos la propiedades de la función Transformada de Laplace considerándola como una función de variable compleja definida en un semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Dividimos la sección en tres subsecciones.

1.4.1 Derivabilidad de la Transformada de Laplace

Consideremos una función $f \in \mathcal{E}$ y su Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f] : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \rho\} \to \mathbb{C}.$$

Theorem 8 *Bajo la notación anterior, la función $\mathcal{L}[f]$ es holomorfa para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > \rho$ y además se verifica*

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}[f](z) = -\int_0^{+\infty} te^{-zt}f(t)dt.$$

En las condiciones del resultado anterior, obtenemos por inducción la fórmula para la derivada n–ésima de la Transformada de Laplace

$$\frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}[f](z) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}f(t)dt.$$

Claramente la demostración de este resultado no es apropiada para hacerla en clase, pues presupone muchos contenidos que no hemos explicado en la misma. Nos centraremos en que el alumno entienda el resultado y sepa aplicarlo. Por ejemplo, calculando las Transformadas de las siguientes funciones.

- $f(t) = t^n \sin(at)$, $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se tiene siempre que $\operatorname{Re} z > 0$ la relación

$$\mathcal{L}[f](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}[\sin(at)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{a}{z^2+a^2}\right).$$

- $f(t) = t^n \cos(at)$, $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se tiene análogamente siempre que $\operatorname{Re} z > 0$

$$\mathcal{L}[f](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}[\cos(at)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{z^2+a^2}\right).$$

De forma similar se obtienen fórmulas equivalentes para el coseno y seno hiperbólicos.

1.4.2 Teoremas del valor inicial

Estos resultados hacen alusión a aspectos cualitativos de la Transformada de Laplace de funciones de la clase $\mathcal{E}$.

Theorem 9 *Sea $f \in \mathcal{E}$. Entonces*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} \mathcal{L}[f](z) = 0. \tag{1.10}$$

Proof. Sea $z \in \mathcal{D}_f^*$. Existen números reales $A > 0$ y B de manera que $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ para todo $t \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f](z)| &\leq \lim_{x\to+\infty}\int_0^x |e^{-tz}f(t)|dt \leq A \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t(B-\operatorname{Re} z)}dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{A(e^{x(B-\operatorname{Re} z} - 1)}{B-\operatorname{Re} z} = \frac{A}{\operatorname{Re} z - B}, \end{aligned}$$

de donde claramente obtenemos (1.10) al hacer $\mathrm{Re}\, z \to +\infty$. ■

Continuamos esta sección con otro resultado que estudia cuestiones cualitativas de la Transformada de Laplace.

Theorem 10 *Asumamos que $f \in \mathcal{E}$ es derivable a trozos y que $f' \in \mathcal{E}$. Entonces*

$$\lim_{\mathrm{Re}\, z \to +\infty} z\mathcal{L}[f](z) = f(0). \tag{1.11}$$

Proof. Sea $z \in \mathcal{D}_f^*$. Por el Teorema 3 tenemos que

$$z\mathcal{L}[f](z) = f(0) + \mathcal{L}[f'](z). \tag{1.12}$$

Aplicando el Teorema 9 a (1.12) se tiene que $\lim_{\mathrm{Re}\, z \to +\infty} \mathcal{L}[f'](z) = 0$, de donde se deduce inmediatamente (1.11). ■

Los resultados anteriores muestran que no todas las funciones de variable compleja pueden ser Transformadas de Laplace de funciones de $\mathcal{E}$. Por ejemplo, la función $1/\sqrt{z}$ no puede serlo al tenerse que

$$\lim_{\mathrm{Re}\, z \to +\infty} \frac{z}{\sqrt{z}} = \infty.$$

1.4.3 Teorema del valor final

Al igual que los resultados de la sección anterior el Teorema del valor final aporta información cualitativa de la Transformada de Laplace en conexión directa con la función de la cual es transformada.

Theorem 11 *Sea $f \in \mathcal{E}$ una función derivable a trozos tal que $f' \in \mathcal{E}$. Supongamos que $0 \in \mathcal{D}_f^*$ y que existe y es finito $\lim_{t \to +\infty} f(t)$. Entonces*

$$\lim_{z \to 0} z\mathcal{L}[f](z) = \lim_{t \to +\infty} f(t).$$

Proof. Por el Teorema 3,

$$z\mathcal{L}[f](z) - f(0) = \mathcal{L}[f'](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t) dt.$$

Por el Teorema 8, $\mathcal{L}[f'](z)$ es derivable y por lo tanto continua. Entonces

$$\lim_{z \to 0} \mathcal{L}[f'](z) = \mathcal{L}[f'](0) = \int_0^{+\infty} f'(t) dt = \lim_{t \to +\infty} f(t) - f(0),$$

lo cual concluye la demostración. ■

1.5 Transformada de Laplace inversa

1.5.1 Inyectividad de la Transformada de Laplace

Al intervenir en la definición de Transformada de Laplace la integración, está claro que puede haber infinitas funciones en $\mathcal{E}$ teniendo la misma Transformada, por lo que la ésta no será inyectiva. Sin embargo este problema puede paliarse en parte para así poder hablar de la Transformada inversa de una función holomorfa definida en un semiplano complejo. Como veremos en las aplicaciones del tema, este punto será de vital importancia.

Consideremos $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función localmente integrable. Diremos que f es *nula* o *nula casi por todas partes* si para todo $x \in (0, +\infty)$ se verifica que

$$\int_0^x |f(t)|dt = 0.$$

Dos funciones $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ localmente integrables se dirán *iguales casi por todas partes* si $f - g$ es nula. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposition 12 *Sean $f, g \in \mathcal{E}$ iguales casi por todas partes. Entonces $\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[g](z)$ para todo $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.*

Proof. Sea $x > 0$ y $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral existe $\rho \in (0, x)$ tal que

$$\int_0^x |e^{-zt}f(t) - e^{-zt}g(t)|dt = e^{-\rho \operatorname{Re} z} \int_0^x |f(t) - g(t)|dt = 0.$$

Así

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f](z) - \mathcal{L}[g](z)| &= \lim_{x \to +\infty} \left| \int_0^x e^{-zt}f(t)dt - \int_0^x e^{-zt}g(t)dt \right| \\ &\leq \lim_{x \to +\infty} e^{-\rho \operatorname{Re} z} \int_0^x |f(t) - g(t)|dt = 0, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. ■

El siguiente resultado establece una especie de recíproco para el resultado anterior.

Theorem 13 ***(Lerch)*** *Sean $f, g \in \mathcal{E}$ tales que $\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[g](z)$ para todo $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Entonces f y g son iguales salvo a lo mejor en los puntos de discontinuidad de ambas, con lo que además $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$.*

La demostración de este resultado no la haremos en clase y no lo hemos incluido en la lección ya que no puede obtenerse de forma autocontenida con las técnicas que tenemos a nuestra disposición.

1.5.2 Transformada de Laplace inversa

Consideremos la función

$$\mathcal{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}).$$

El Teorema 13 permite definir clases de equivalencia en $\mathcal{E}$ del siguiente modo. Dadas $f, g \in \mathcal{E}$ se dirá que ambas están relacionadas, $f \sim g$ si y sólo si son iguales salvo a lo sumo en los puntos de discontinuidad de ambas. Podemos definir entonces la Transformada de Laplace inversa

$$\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}/\sim$$

para $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ como $\mathcal{L}^{-1}[F] = [f]$ donde $[f]$ denota la clase de $f \in \mathcal{E}$ de manera que $\mathcal{L}[f] = F$. En general con nuestros alumnos tenderemos a identificar clases con funciones que normalmente podrán ser calculadas. Así diremos que dada $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ su Transformada inversa es una función $\mathcal{L}^{-1}[F](t) = f(t)$ de forma que $\mathcal{L}[f] = F$, aunque está perfectamente claro que tal f no es única.

En este contexto, destacamos las siguiente propiedades de Transformada inversa que serán especialmente interesantes a la hora de las aplicaciones.

- **Linealidad**. Dadas $F, G \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se verifica

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F + \beta G](t) = \alpha\mathcal{L}^{-1}[F](t) + \beta\mathcal{L}^{-1}[G](t).$$

- **Traslación**. Dada $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ y $a > 0$ se cumple la relación

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-az}F(z)](t) = h_a(t)\mathcal{L}^{-1}[F](t-a).$$

- **Convolución**. Dadas $F, G \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ se cumple

$$\mathcal{L}^{-1}[FG](t) = (\mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[G])(t).$$

Estas propiedades son particularmente interesantes a la hora de obtener Transformadas inversas de Laplace una vez conocidas las Transformadas directas.

1.5.3 Fórmula de inversión compleja

Aparte de las técnicas estudiadas en el apartado anterior para hallar Transformadas inversas, estudiaremos la siguiente fórmula de inversión compleja.

Theorem 14 *Supongamos que $F(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{z_1,z_2,...,z_n\}$, y que existe $\sigma\in\mathbb{R}$ tal que F es holomorfa en $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>\sigma\}$. Supongamos además que existen constantes positivas M, R y β tales que*

$$|F(z)|\leq\frac{M}{|z|^{\beta}} \text{ si } |z|\geq R. \tag{1.13}$$

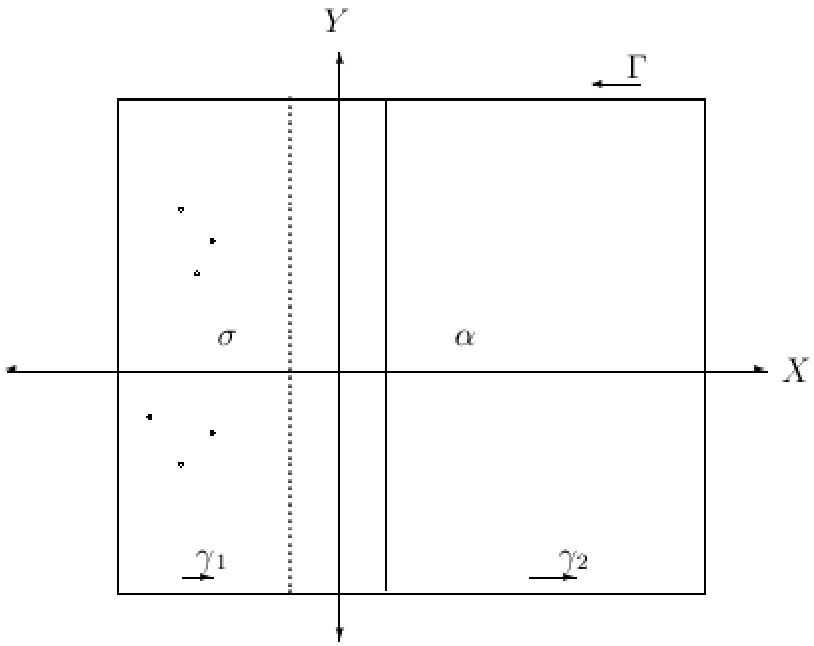
Para $t\geq 0$ sea

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}(e^{tz}F(z),z_i).$$

Entonces

$$\mathcal{L}[f](z)=F(z) \text{ si } \operatorname{Re}z>\sigma.$$

Proof. Sea $\alpha>\sigma$ y consideremos el rectángulo Γ de la figura, suficientemente grande para que las singularidades de F estén contenidas en su interior y además todo $z\in\Gamma$ cumpla la condición $|z|>R$. Separamos Γ en la suma de dos caminos cerrados γ_1 y γ_2 divididos por la recta $\operatorname{Re}z=\alpha$.



Como las singularidades de F están contenidas en el interior de γ_1, por definición de f tenemos que

$$\int_{\gamma_1}e^{zt}F(z)dz=2\pi i f(t).$$

Entonces

$$2\pi i\mathcal{L}[f](z) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-zt}\left[\int_{\gamma_1}e^{\omega t}F(\omega)d\omega\right]dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \int_{\gamma_1} \left[\int_0^x e^{(\omega-z)t} F(\omega) dt \right] d\omega,$$

aplicando el Teorema de Fubini. Por integración directa

$$2\pi i \mathcal{L}[f](z) = \lim_{x\to+\infty} \int_{\gamma_1} \left(e^{(\omega-z)x} - 1 \right) \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega.$$

Para z fijo en el semiplano $\operatorname{Re} z > \alpha$, el término $e^{(\omega-z)x}$ converge uniformemente a 0 si $x \to +\infty$ y el integrando converge a $-F(\omega)/(\omega - z)$ en γ_1. Así

$$\begin{aligned} 2\pi i \mathcal{L}[f](z) &= -\int_{\gamma_1} \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega = \int_{\gamma_2} \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega - \int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega \\ &= 2\pi i F(z) - \int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega. \end{aligned}$$

Por otra parte, sea $\tau(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ una circunferencia de radio $\rho > R$ y conteniendo a Γ. Entonces

$$\int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega = \int_{\tau} \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega,$$

de donde

$$\left| \int_{\tau} \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega \right| \leq \frac{M}{|\rho|^{\beta} (\rho - R)} 2\pi\rho \to 0 \text{ si } \rho \to +\infty.$$

Así

$$\int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega = 0$$

y como α era arbitrario, la fórmula $\mathcal{L}[f](z) = F(z)$ es válida para todo $\operatorname{Re} z > \sigma$. ■

Remarquemos aquí que la condición (1.13) del resultado anterior se cumple para funciones de la forma $F(z) = P(z)/Q(z)$ donde P y Q son polinomios tales que $\deg Q \geq 1 + \deg P$, donde $\deg P$ denota el grado de P. Así por ejemplo, la Transformada inversa de la función

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

puede calcularse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F](t) &= f(t) \\ &= \operatorname{Res}(e^{tz} F(z), i) + \operatorname{Res}(e^{tz} F(z), -i) \\ &= e^{it} \frac{i}{2i} + e^{-it} \frac{i}{-2i} = \cos t. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Aplicaciones

2.1 Una primera aproximación al problema

La Transformada de Laplace es una herramienta útil para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Como comentamos en la introducción del tema, estas ecuaciones aparecen de forma natural en la teoría de circuitos eléctricos. Para ilustrar el método, consideremos el siguiente ejemplo: la ecuación

$$y'' + y = \cos t \tag{2.1}$$

junto con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0;\ y'(0) = 1. \tag{2.2}$$

Básicamente se trata de aplicar la Transformada de Laplace y sus propiedades a (2.1) de manera que teniendo en cuenta (2.2), nuestro problema se convierte en el problema algebraico

$$z^2\mathcal{L}[y](z) - zy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y](z) = \frac{z}{z^2+1},$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2}.$$

Una vez obtenida $\mathcal{L}[y]$, hemos de usar la Transformada inversa para volver atrás y recuperar la solución del problema y. En este caso, $\mathcal{L}[y]$ satisface las condiciones del Teorema 14, por lo que

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Res}\left(e^{tz}\frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2}, i\right) + \operatorname{Res}\left(e^{tz}\frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2}, -i\right) \\ &= (1+t/2)\sin t, \end{aligned}$$

una vez realizados los cálculos.

2.2 Uso de la convolución

Otra forma de abordar el problema anterior, sin necesidad de tener que calcular la Transformada de Laplace de la función coseno es la siguiente. Consideremos los cálculos realizados anteriormente, pero sin obtener $\mathcal{L}[f](z)$ donde $f(t) = \cos t$. Nos quedará entonces la ecuación algebraica

$$z^2\mathcal{L}[y](z) - 1 + \mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f](z),$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\mathcal{L}[f](z).$$

Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[1/(z^2+1)](t) + \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f](z)/(z^2+1)](t) \\ &= \sin t + (\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f](z)] * \mathcal{L}^{-1}[1/(z^2+1)])(t) \\ &= \sin t + \int_0^t \sin(t-s)\cos s ds \\ &= \sin t + \left[\frac{1}{4}(\cos(2s-t) + 2s\sin t\right]_0^t \\ &= \sin t + \frac{t}{2}\sin t = (1+t/2)\sin t, \end{aligned}$$

que era la solución obtenida anteriormente.

Así, el uso del producto de convolución presenta una vía alternativa para la resolución de estos problemas, aunque a veces el cálculo de las integrales que aparecen en el producto de convolución pueden ser bastante complicado.

2.3 Sistemas de ecuaciones

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}(t)+\mathbf{f}(t) \tag{2.3}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de n filas por n columnas con coeficientes reales, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)^t$ donde f_i son funciones dadas e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$ es la función vectorial incógnita. Supongamos además las condiciones iniciales

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{2.4}$$

donde $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)^t$ con y_i^0 números reales para $1 \leq i \leq n$. Sea

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (\mathcal{L}[y_1](z), \mathcal{L}[y_2](z), ..., \mathcal{L}[y_n](z))^t.$$

Entonces, tomando la Transformada de Laplace en (2.3) y teniendo en cuenta (2.4) obtenemos que

$$z\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](z) + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z),$$

de donde, si $\mathbf{I}_n$ denota la matriz identidad,

$$(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = \mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z),$$

y de aquí

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z)). \tag{2.5}$$

Una vez calculada de este modo $\mathcal{L}[\mathbf{y}](z)$ obtendremos $\mathbf{y}$ tomando la Transformada inversa.

Por ejemplo consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De (2.5)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathcal{L}[y_1](z) \\ \mathcal{L}[y_2](z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z-2 & 3 \\ -3 & z-2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{z^2-4z+13} \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2z+1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)} \\ \frac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces la solución del problema viene dada por

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}[\frac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)}](t) \\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)}](t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 28e^{2t}\cos(3t) + 16e^{2t}\sin(3t) - 2 \\ 28e^{2t}\sin(3t) - 16e^{2t}\cos(3t) + 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2.4 Problemas con funciones discontinuas

Supongamos que el problema

$$\begin{cases} y'' + y = f(t); \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1; \end{cases}$$

viene dada ahora con la función discontinua

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ \cos(2t) & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$$

Podemos escribir ahora

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}[y](z) = 1 + \mathcal{L}[f](z).$$

Por otra parte

$$f(t) = t(h_0(t) - h_\pi(t)) + h_\pi(t)\cos(2t),$$

con lo que

$$\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[th_0(t)](z) + \mathcal{L}[th_\pi(t)](z) + \mathcal{L}[h_\pi(t)\cos(2t)](z).$$

Desarrollando cada sumando por separado, obtenemos

$$\mathcal{L}[th_0(t)](z) = 1/z^2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[th_\pi(t)](z) &= \mathcal{L}[(t-\pi)h_\pi(t)](z) + \pi\mathcal{L}[h_\pi(t)](z) \\ &= \frac{e^{-\pi z}}{z^2} + \pi\frac{e^{-\pi z}}{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h_\pi(t)\cos(2t)](z) &= \mathcal{L}[h_\pi(t)\cos(2(t-\pi))](z) \\ &= e^{-\pi z}\frac{z}{z^2+4}. \end{aligned}$$

Combinando estas expresiones tenemos

$$(z^2+1)\mathcal{L}[f](z) + 1 = \frac{z^2+1}{z^2} + e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{\pi}{z} + \frac{z}{z^2+4}\right).$$

Entonces

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{z^2+1}{z^2(z^2+1)} + e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2(z^2+1)} + \frac{\pi}{z(z^2+1)} + \frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right),$$

y así

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) + \pi\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) \\
&\quad + \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t) \\
&= t + f_1(t-\pi)h_\pi(t) + \pi f_2(t-\pi)h_\pi(t) + f_3(t-\pi)h_\pi(t),
\end{aligned}$$

donde las funciones f_1, f_2 y f_3 se determinan de la siguiente manera.

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t) = t - \sin t.$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+1}\right](t) = 1 - \cos t.$$

$$\begin{aligned}
f_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t) \\
&= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+1}\right](t) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+4}\right](t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos(2t).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
y(t) &= t + h_\pi(t)[(t-\pi) - \sin(t-\pi) + \pi - \pi\cos(t-\pi) + \frac{1}{3}\cos(t-\pi) - \frac{1}{3}\cos(2t-2\pi)] \\
&= (1-h_\pi(t))t + h_\pi(t)[2t + \sin t + (3\pi-1)/3\cos t - \cos(2t)/3],
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$y(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t < \pi, \\ 2t + \sin t - (3\pi-1)/3\cos t - \cos(2t)/3 & \text{si } t \ge \pi. \end{cases}$$

2.5 Funciones de impulso

A continuación hacemos de estudio formal de las *funciones generalizadas* por su papel modelizador dentro de la teoría de circuitos. Estas "funciones" se utilizan para modelizar fenómenos en los que la transferencia del momento es tan rápida que sólo pueden observarse los instantes anterior y posterior. Por ejemplo cuando excitamos instantáneamente un determinado sistema.

Este tipo de fenómenos se modelizan con la llamada *delta de Dirac*. Si $a > 0$, definimos la "función" delta de Dirac por

$$\delta_a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = a; \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}$$

Esta "función" puede obtenerse a partir del límite funcional obtenido a partir de la sucesión

$$\Delta_n^a(t) = \begin{cases} 1/(2n) & \text{si } |t-a| < 1/n; \\ 0 & \text{si } |t-a| > 1/n. \end{cases}$$

Nótese que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n^a(t)dt = 1,$$

por lo que se conviene formalmente que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \Delta_n^a(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n^a(t)dt = 1.$$

Además, si $f \in \mathcal{E}$ es una función continua en a, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_a(t)dt = f(a), \tag{2.6}$$

cuya justificación formal puede hacerse a partir del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. De (2.6) obtenemos que para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica

$$\mathcal{L}[\delta_a](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\delta_a(t)dt = e^{-az}$$

y en particular si denotamos δ_0 por δ, entonces

$$\mathcal{L}[\delta](z) = 1.$$

La "función" delta tiene su aplicación en el contexto de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Consideremos por ejemplo el problema formal de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' + y = \delta(t); \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando formalmente la Transformada de Laplace obtenemos que

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{1+z^2},$$

de donde la solución

$$y_\delta(t) = \sin t$$

recibe el nombre de *respuesta al impulso* δ. Nótese que y_δ no satisface las condiciones iniciales del problema. Sin embargo esta solución es útil ya que si $f \in \mathcal{E}$, la solución de

$$\begin{cases} y'' + y = f(t); \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0; \end{cases}$$

es de la forma

$$y(t) = (f * y_\delta)(t).$$

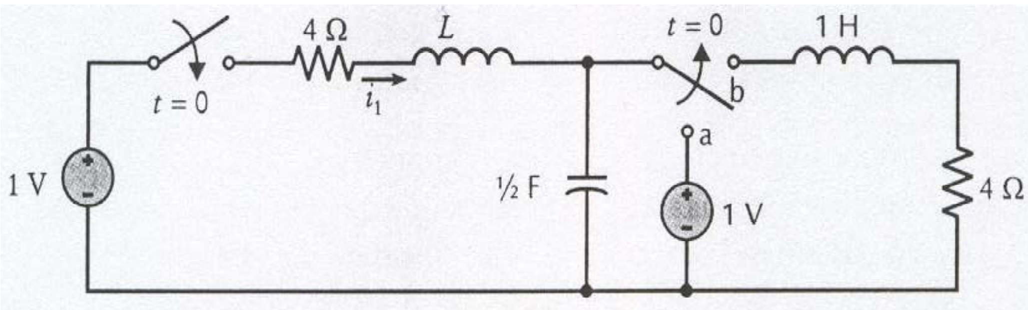
Por ejemplo, si $f(t) = \cos t$ la solución del problema sería

$$y(t) = \frac{1}{2} t \sin t,$$

que como vemos si satisface las condiciones iniciales.

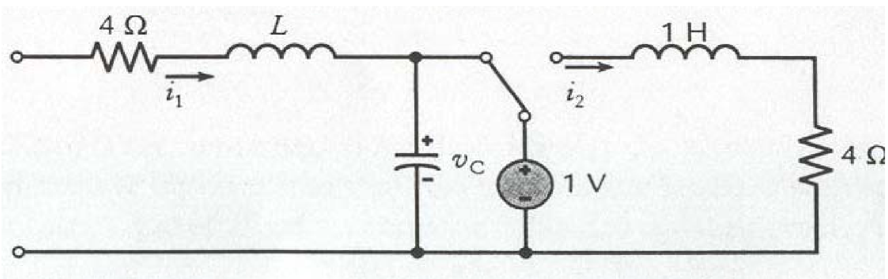
2.6 Una aplicación concreta

En la referencia [DoSv, pag. 754] se propone el siguiente problema. "El transbordador Atlantis, de Estados Unidos, se acopló con la cosmonave Mir, de Rusia, el 28 de junio de 1995. Para activarse y abrir una puerta de carga del transbordador estadounidense, el electroimán consume 0.1 A antes de activarse. El diagrama eléctrico del circuito del electroimán se ve en la siguiente figura, donde la bobina del imán se representa con L.

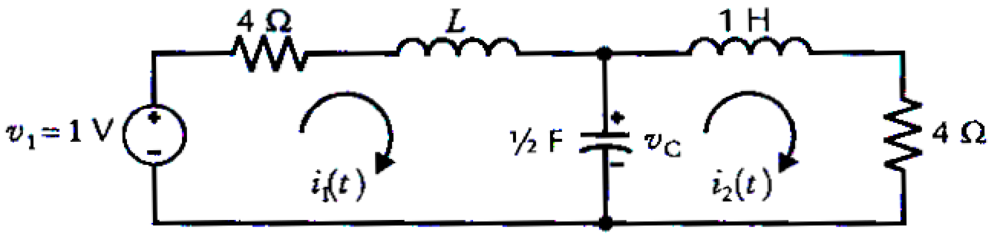


La corriente de activación es $i_1(t)$. El intervalo en el que i_1 llega a 0.1 A debe ser menor que 3 segundos. Comprobar $L = 1$ H es un valor adecuado para conseguir este objetivo."

Inicialmente el circuito estaba según el diagrama



por lo que inicialmente $i_1(0) = i_2(0) = 0$ A y $v_C(0) = 1$ V. Una vez que se cierran los dos interruptores el circuito pasa a ser de la forma



y las ecuaciones del mismo son

$$\begin{cases} 1 = 4i_1(t) + i_1'(t) + v_C(0) + 2\int_0^t (i_1(s) - i_2(s))ds, \\ 0 = 4i_2(t) + i_2'(t) - v_C(0) - 2\int_0^t (i_1(s) - i_2(s))ds, \end{cases}$$

de donde teniendo en cuenta las condiciones iniciales y tomando la Transformada de Laplace obtenemos

$$\begin{cases} 0 = \mathcal{L}[i_1](z)(4 + z + \frac{2}{z}) - 2\mathcal{L}[i_2](z)/z, \\ 1/z = -2\mathcal{L}[i_1](z)/z + \mathcal{L}[i_2](z)(4 + z + \frac{2}{z}). \end{cases}$$

Despejando $\mathcal{L}[i_2]$ en función de $\mathcal{L}[i_1]$ en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda tenemos que

$$\mathcal{L}[i_1](z) = \frac{2}{z(z+4)(z+2)^2},$$

por lo que tomando la Transformada de Laplace inversa

$$i_1(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4t} - \frac{1}{2}te^{-2t}\ A,\ t \geq 0.$$

Observamos que la función i_1 es creciente si $t \geq 0$ y que $i_1(2) \approx 0.106\ A$, por lo que el valor $L = 1\ H$ es perfectamente válido en el diseño del circuito.

2.7 Funciones de transferencia. Estabilidad y control de sistemas eléctricos

Supongamos un sistema dado por la ecuación

$$a_n y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b_m f^{m)} + b_{m-1}f^{m-1)} + ... + b_1 f' + b_0 f, \tag{2.7}$$

donde $m < n$, $a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq n$ y $b_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq m$. f es una señal entrada del sistema e y es la respuesta que produce en sistema a la excitación que f representa.

Aplicando formalmente la transformada de Laplace a (2.7) con todas las condiciones iniciales nulas obtenemos

$$Q_n(z)\mathcal{L}[y](z) = P_{m(z)}\mathcal{L}[f](z),$$

donde Q_n es un polinomio de grado n y P_m es un polinomio de grado m. La *función de transferencia del sistema*, se define como

$$T(z) = \frac{\mathcal{L}[y](z)}{\mathcal{L}[f](z)} = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}.$$

La estabilidad del sistema puede estudiarse a partir de los polos de la función de transferencia, entendiendo por estabilidad de un sistema lo siguiente. El sistema será *asintóticamente estable* si en ausencia de excitación ($f = 0$) y para cualquier condición inicial que consideremos se verifica que $|y(t)| \to 0$ si $t \to +\infty$. Será *estable* si existen $K > 0$ y $t_0 > 0$ tales que $|y(t)| < K$ si $t \geq t_0$. Finalmente es sistema es *inestable* si $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Theorem 15 *Sea* $Q_n(z) = \prod_{i=1}^r a_n(z-\beta_i)^{n_i}$, $\sum_{i=1}^r n_i = n$. *Entonces el sistema (2.7) es*

(a) Asintóticamente estable si $\operatorname{Re}\beta_i < 0$ *para todo* $i = 1, 2, ..., r$.

(b) Estable si $\operatorname{Re}\beta_i \leq 0$ *y* $\operatorname{Re}\beta_i = 0$ *implica que la multiplicidad de* β_i *es* 1.

(c) Inestable si no se cumplen algunas de las condiciones (a) o (b) anteriores.

Proof. Sean β_j, $1 \leq j \leq r$ las raíces de $Q_n(z)$ con multiplicidades n_j. Para $1 \leq j \leq r$, consideremos los polinomios

$$P_j^{k_j}(z) = (x-\beta_j)^{k_j-1}\prod_{i\neq j}(x-\beta_i)^{n_i},\ 1 \leq k_j \leq n_j.$$

Es fácil comprobar que $\mathcal{B} = \{P_j^{k_j}(z) : 1 \leq j \leq r;\ 1 \leq k_j \leq n_j\}$ es una base del conjunto de polinomios con coeficientes en el cuerpo de los números complejos de grado a lo sumo $n-1$.

Consideremos el problema de condiciones iniciales

$$a_n y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{2.8}$$

$$y(0) = y_1,\ y'(0) = y_2, ..., y^{n-1)}(0) = y_n, \tag{2.9}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_n$ son números reales arbitrarios.

Supongamos en primer lugar que $\operatorname{Re}\beta_j < 0$ para todo $j = 1, 2, ..., r$. Entonces, sean cuales fueran las condiciones (2.9) se tiene que la solución del problema es de la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k_j=1}^{n_j} A_j^{k_j}\mathcal{L}^{-1}[1/(z-\beta_j)^{k_j}](t) \\ &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k_j=1}^{n_j} A_j^{k_j}\frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}e^{t\beta_j}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes $A_j^{k_j}$, $1 \leq j \leq r$, $1 \leq k_j \leq n_j$ vienen determinados a partir de las condiciones iniciales del problema. Como $\operatorname{Re}\beta_j < 0$, es claro que $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 0$.

Supongamos ahora que existe $j \in \{1, 2, ..., r\}$ de manera que $\operatorname{Re}\beta_j > 0$. Como $\mathcal{B}$ es una base, existen condiciones iniciales de manera que para las mismas la solución $y(t)$ contiene un término de la forma

$$A\mathcal{L}^{-1}[1/(z-\beta_j)](t) = Ae^{t\beta_j}$$

con $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces claramente $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$.

Consideremos ahora que toda raíz de $Q_n(z)$, β_j con $\operatorname{Re}\beta_j = 0$ tiene multiplicidad uno ($n_j = 1$) y las restantes raíces tienen parte real negativa. Entonces para cualquier condición inicial la solución $y(t)$ verifica que si $\operatorname{Re}\beta_j = 0$, entonces existe $A_j \in \mathbb{C}$ tal que

$$A_j\mathcal{L}^{-1}[1/(z-\beta_j)](t) = A_je^{t\beta_j} = A_j(\cos(t\operatorname{Im}\beta_j) + i\sin(t\operatorname{Im}\beta_j)),$$

aparece en la solución. Teniendo en cuenta que todas las raíces tienen parte real menor o igual que cero y el primer apartado, existirá $\varepsilon > 0$ tal que si t es suficientemente grande se verifica

$$|y(t)| \leq \sum_{\operatorname{Re}\beta_j=0} |A_j| + \varepsilon,$$

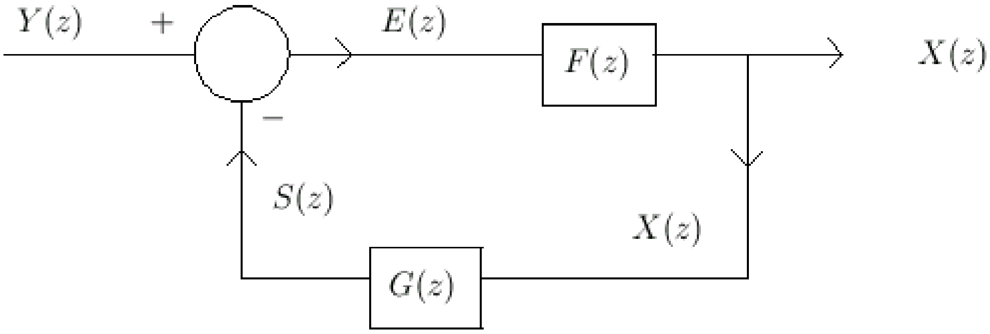
lo que prueba que el sistema es estable.

Por último, supongamos que existe una raíz de $Q_n(z)$, β_j con $\operatorname{Re}\beta_j = 0$ y con multiplicidad mayor que uno. En estas condiciones existen condiciones iniciales de manera que $y(t)$ contiene un término no nulo de la forma

$$A\mathcal{L}^{-1}[1/(z-\beta_j)^2](t) = Ate^{t\beta_j} = At(\cos(t\operatorname{Im}\beta_j) + i\sin(t\operatorname{Im}\beta_j)),$$

obviamente $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$. ■

En ingeniería es usual describir los sistemas lineales mediante sus funciones de transferencia en vez de con sus ecuaciones diferenciales de la forma (2.7). Por ejemplo el siguiente sistema de control mediante retroalimentación, dado por el siguiente diagrama



En este sistema buscamos obtener la solución transformada $Y(z)$ mediante el siguiente proceso. Inicialmente obtenemos $X(z)$ a partir del sistema dado por la función de transferencia $F(z)$. La función $X(z)$ se transforma en el sistema dado por $G(z)$ obteniéndose $S(z)$. Finalmente $E(z) = Y(z) - S(z)$, que a su vez vuelve a ser utilizada para obtener una nueva $X(z)$ mediante el proceso dado por la función de transferencia $F(z)$. Buscamos la función de transferencia

$$T(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}.$$

Para ello utilizamos que

$$X(z) = F(z)E(z),$$

$$S(z) = G(z)X(z).$$

Como $E(z) = Y(z) - S(z)$,

$$X(z) = F(z)(Y(z) - S(z)) = F(z)(Y(z) - G(z)X(z)),$$

de donde

$$T(z) = \frac{F(z)}{1 + F(z)G(z)}.$$

A partir de esta función de transferencia puede la estabilidad del sistema de control por retroalimentación planteado calculando los polos de $T(z)$.

Por ejemplo, supongamos que $F(z) = 1/(z^2+1)$ y $G(z) = 1/(z-1)$. Es inmediato ver que

$$T(z) = \frac{z-1}{z^3 - z^2 + z}$$

y resolviendo la ecuación

$$z^3 - z^2 + z = 0$$

obtenemos como posibles raíces 0 y $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, por lo que el sistema será inestable en virtud del Teorema 15. Además, podemos expresar la ecuación diferencial lineal que define el sistema teniendo en cuenta que

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{z-1}{z^3 - z^2 + z}$$

de donde

$$X(z)(z^3 - z^2 + z) = Y(z)(z-1),$$

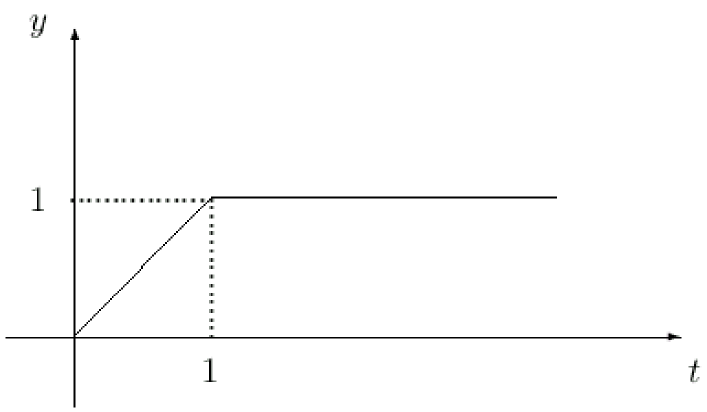
y definiendo $x = \mathcal{L}^{-1}[X]$ e $y = \mathcal{L}^{-1}[Y]$ y sabiendo como se construye la función de transferencia, tenemos que el sistema vendrá dado por las ecuaciones

$$x''' - x'' + x' = y' - y.$$

Para finalizar, podemos comprobar el carácter inestable del sistema de retroalimentación del ejemplo anterior considerando la función *rampa*

$$y(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,1), \\ 1 & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

cuya gráfica es



Entonces su Transformada de Laplace es

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[th_0(t)](z) + \mathcal{L}[(t-1)h_1(t)](z) \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{e^{-z}}{z^2} = (1 - e^{-z})/z^2, \end{aligned}$$

de donde la Transformada de Laplace de x viene dada por

$$\begin{aligned} X(x) &= \mathcal{L}[x](z) = T(z)Y(z) \\ &= \frac{z-1}{(z^2-z+1)z^3}(1-e^{-z}). \end{aligned}$$

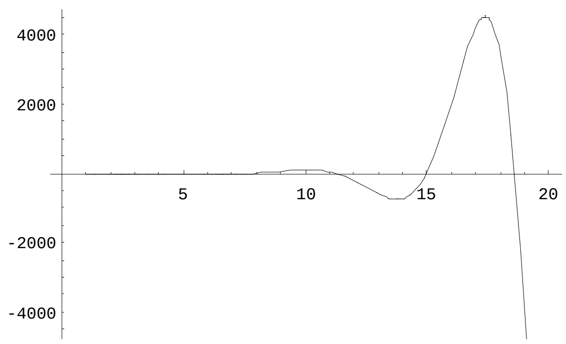
Obtenemos su Transformada inversa

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z^2-z+1)z^3}(1-e^{-z})\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z^2-z+1)z^3}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z^2-z+1)z^3}e^{-z}\right](t) \\ &= g(t) + g(t-1)h_1(t), \end{aligned}$$

donde

$$g(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{e^{t/2}}{\sqrt{3}}\left(\sin(t\sqrt{3}/2) - \sqrt{3}\cos(t\sqrt{3}/2)\right).$$

La gráfica de la función x en en intervalo $[1, 20]$ es



lo cual ejemplifica la inestabilidad de este sistema concreto.

Bibliografía

[BoPr] W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera,* Limusa, Mexico, 1996.

[Bra] M. Braun, *Differential equations and their applications,* Springer–Verlag, Berlin, 1993.

[Dav] B. Davies, *Integral transforms and their applications,* Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[DoSv] R. C. Dorf y J. A. Svoboda, *Circuitos eléctricos. Introducción al análisis y diseño*, Alfaomega, Mexico, 2000.

[Jam] G. James y otros, *Advanced modern engineering mathematics (*2^a edición*),* Addison–Wesley 1999.

[Jef] A. Jeffrey, *Linear algebra and ordinary differential equations,* CRC Press, 1993.

[MCZ] F. Marcellán, L. Casasús y A. Zarzo, *Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones,* McGraw–Hill, 1990.

[MaHo] J. E. Marsden y M. J. Hoffman, *Basic complex analysis,* W. H. Freeman & Co., 1999.

[Mur] J. A. Murillo, *Variable compleja y transformadas,* DM–Universidad de Murcia, 2000.

[Oga1] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna,* Prentice Hall, 1998.

[PiZa] A. Pinkus y S. Zafrany, *Fourier series and integral transforms,* Cambridge University Press, 1997.

[Sen] T. B. A. Senior, *Mathematical methods in electrical engineering,* Cambridge University Press 1986.