Transformadas de Laplace

1 Introducción

[1]La teoría de las transformadas de Laplace (TL), conocida también con el nombre de cálculo operacional, constituye una parte esencial de la matemática requerida por los ingenieros, físicos, matemáticos y otros cientificos. Esto se debe a que, además del interés teórico, constituyen un instrumento fácil y efectivo para la solución de muchos problemas de la ciencia y la ingeniería.

En este tema se hará una repaso de variables y funciones complejas. Se revisarán funciones fundamentales como el escalón, interruptor, impulso, rampa, exponencial y sinusoidal. Se definirá la TL. Se calculará la TL de funciones elementales usando la definición. Se estudiarán las propiedades y teoremas de la TL, tales como: linealidad, derivación, integración, desplazamiento, funciones periódicas, convolución, teorema del valor inicial y final. Se definirá la transformada inversa de Laplace. Se revisará el concepto de funciones estrictamente propias, el método de expansión en fracciones parciales y se calculará la TL de funciones haciendo uso de las tablas de pares y propiedades. Se aplicará la transformada de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Finalmente se revisarán las funciones de MATLAB asociadas a este tema.

2 Variable Compleja

Debido a que no existe número real x que satisfaga ciertas ecuaciones polinomiales, como por ejemplo $x^2+1=0$, es necesario definir el sistema de los números complejos.

Un número complejo tiene la forma

$$z = x + yi \tag{1}$$

Donde x y y son números reales denominados las *partes real* e *imaginaria*, respectivamente.

La *unidad imaginaria* se denota como

$$i = \sqrt{-1} \tag{2}$$

Los números complejos pueden ser considerados un conjunto de pares ordenados (x, y) de números reales, los cuales se pueden localizar sobre un *plano complejo* que contenga dos ejes perpendiculares con escalas reales.

El *complejo conjugado* de $z = x + yi$ se denota como

$$z^* = x - yi \tag{3}$$

[1]José Luis Rodríguez, Ph.D., jlrodriguez@ieee.org agosto 2003

Para operaciones con números complejos, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i, \ldots.$

Los números complejos además de representarse en forma rectangular, también se representan en forma polar definiendo r igual al valor absoluto o módulo de z

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

El ángulo que forma un vector desde el origen hasta z con la semi-recta positiva del eje x se define como

$$\theta = \arctan\left(y/x\right) \tag{5}$$

Nota: al usar calculadoras científicas, si $x < 0$, $\theta = \arctan\left(y/x\right) \pm 180°$.

Se observa que

$$x = r\cos\left(\theta\right) \tag{6}$$

$$y = rsen\left(\theta\right) \tag{7}$$

$$z = r\left(\cos\left(\theta\right) + \operatorname{sen}\left(\theta\right) i\right) \tag{8}$$

Representación o fórmula de Euler:

$$e^{\theta i} = \cos\left(\theta\right) + \operatorname{sen}\left(\theta\right) i \tag{9}$$

De la fórmula de Euler y de las propiedades trigonométricas

$$\cos\left(-\theta\right) = \cos\left(\theta\right) \tag{10}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\theta\right) = -\operatorname{sen}\left(\theta\right) \tag{11}$$

se obtiene que:

$$\cos\left(\theta t\right) = \frac{e^{\theta t i} + e^{-\theta t i}}{2} \tag{12}$$

$$sen\left(\theta t\right) = \frac{e^{\theta t i} - e^{-\theta t i}}{2i} \tag{13}$$

De manera tal que:

$$z = re^{\theta i} \tag{14}$$

Operaciones fundamentales:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\theta_1 + \theta_2) i} \tag{15}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1 - \theta_2) i} \tag{16}$$

$$z^n = r^n e^{n\theta i} \tag{17}$$

3 Función Compleja

Si a cada elemento z, variable, de un conjunto de complejos se le hace corresponder uno o varios valores de una variable g, se dice que g está relacionado con la variable compleja z, y se escribe

$$g = f\left(z\right) \tag{18}$$

Una relación es una función si a cada valor de z le corresponde solamente un valor de g. En general se puede escribir

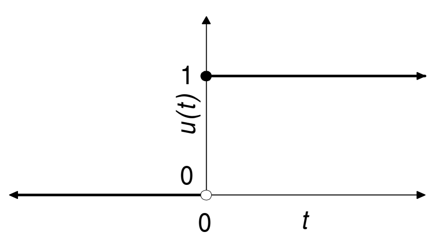
$$g = f\left(z\right) = u\left(x, y\right) + v\left(x, y\right) j \tag{19}$$

Donde u y v son funciones reales de x y de y.

4 Funciones Fundamentales

4.1 Función Escalón (step)

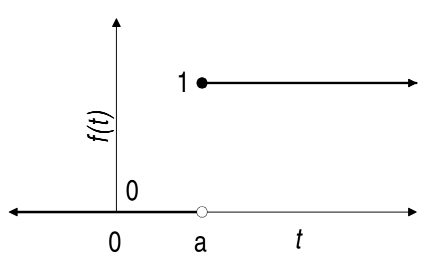
$$f\left(t\right) = u\left(t\right) = \begin{cases} 0 \quad \text{para} \quad t < 0 \\ 1 \quad \text{para} \quad t \geq 0 \end{cases}$$



4.2 Función Escalón desplazada en el tiempo

$f\left(t\right) = u\left(t - a\right) = u\left(\tau\right), \quad \tau = t - a$

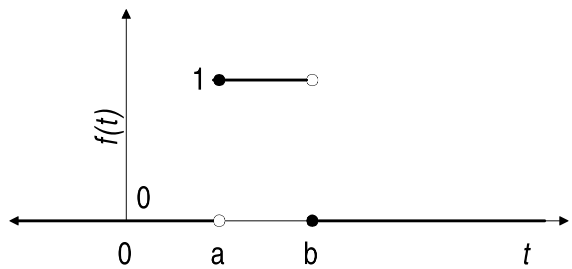
$$f\left(\tau\right) = u\left(\tau\right) = \begin{cases} 0 \quad \text{para} \quad \tau < 0 \to t - a < 0 \to t < a \\ 1 \quad \text{para} \quad \tau \geq 0 \to t - a \geq 0 \to t \geq a \end{cases}$$



4.3 Función Interruptor (switch)

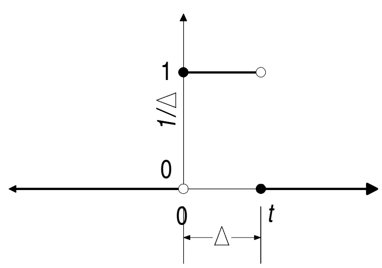
$$f(t) = u(t-a) - u(t-b) \quad , \quad a \le b$$

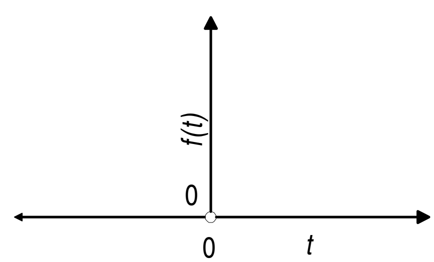
$$f(t) = \begin{cases} 0 \ \text{para} & t < a \\ 1 \ \text{para} & a \le t < b \\ 0 \ \text{para} & t \ge b \end{cases}$$



4.4 Función Impulso

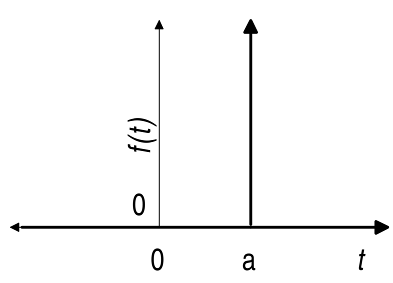
$$f(t) = \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \left(u(t) - u(t-\Delta) \right) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$





4.5 Función Impulso desplazado en el tiempo

$$f(t) = \delta(t-a) = \begin{cases} 0 & t \neq a \\ 1 & t = a \end{cases}$$



5 Definición de la Transformada de Laplace

$$F(s) = \pounds\{f(t)\} = \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} f(t)\, e^{-st} dt$$

$s = \sigma + \omega i$

La función es transformable si el límite existe y se cumplen las condiciones de Dirichlet:

1. $f(t)$ es seccionalmente continua.
2. $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades.
3. $f(t)$ es de orden exponencial.

La condición 3 implica que existe una constante arbitraria M, tal que para todo t

$$\left| f(t)\, e^{-\sigma t} \right| < M \tag{20}$$

5.1 TL de la función escalón

$$\pounds\left\{u(t)\right\} = \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} u(t)\, e^{-st} dt = \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} e^{-st} dt = \lim_{t_o \to \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{t_0} \tag{21}$$

$$\pounds\left\{u(t)\right\} = \lim_{t_o \to \infty} \frac{e^{-st_0} - e^0}{-s} = \frac{1}{s} \quad , \quad \text{si} \quad s > 0. \tag{22}$$

5.2 TL de la función escalón desplazada en el tiempo

$$\pounds\left\{u(t-a)\right\} = \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} u(t-a)\, e^{-st} dt = \lim_{t_o \to \infty} \int_a^{t_0} e^{-st} dt \tag{23}$$

$$= \lim_{t_o \to \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_a^{t_0} = \lim_{t_o \to \infty} \frac{e^{-st_0} - e^{-as}}{-s} \tag{24}$$

$$\pounds\left\{u(t-a)\right\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad , \quad \text{si} \quad s > 0,\ a > 0 \tag{25}$$

5.3 TL de la función impulso

Primer método:

$$\pounds\left\{\delta(t)\right\} = \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} \delta(t)\, e^{-st} dt = \lim_{t_o \to \infty} \left. e^{-st} \right|_{t=0} = 1 \tag{26}$$

Segundo:

$$\pounds\left\{\delta\left(t\right)\right\} = \lim_{t_o\to\infty}\int_0^{t_0}\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left(u\left(t\right)-u\left(t-\Delta\right)\right)e^{-st}dt \tag{27}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\lim_{t_o\to\infty}\int_0^{t_0}\left(u\left(t\right)-u\left(t-\Delta\right)\right)e^{-st}dt \tag{28}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-\Delta s}}{s}\right) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1-e^{-\Delta s}}{\Delta s} = \frac{0}{0} \tag{29}$$

Aplicando l'Hoppital

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{se^{-\Delta s}}{s} = \frac{s}{s} \to \pounds\left\{\delta\left(t\right)\right\} = 1 \tag{30}$$

5.4 TL de la función exponencial

$$\pounds\left\{Be^{-at}u\left(t\right)\right\} = \lim_{t_o\to\infty}\int_0^{t_0}Be^{-at}u\left(t\right)e^{-st}dt \tag{31}$$

$$= B\lim_{t_o\to\infty}\int_0^{t_0}e^{-(s+a)t}dt = \lim_{t_o\to\infty}\left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-\left(s+a\right)}\right|_a^{t_0} \tag{32}$$

$$= B\lim_{t_o\to\infty}\frac{e^{-(s+a)t_0}-e^0}{-\left(s+a\right)} \to \pounds\left\{Be^{-at}u\left(t\right)\right\} \tag{33}$$

$$= B\frac{1}{s+a} \ \ , \text{ si } s+a>0 \to s>-a \quad , \quad a>0 \tag{34}$$

5.5 TL de la función seno

$$\pounds\left\{sen\left(wt\right)\right\} = \lim_{t_o\to\infty}\int_0^{t_0}sen\left(wt\right)e^{-st}dt \tag{35}$$

$$sen\,(wt) = \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j} \tag{36}$$

$$\pounds\left\{sen\,(wt)\right\} = \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j} e^{-st} dt \tag{37}$$

$$= \frac{1}{2j} \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} \left(e^{-(s-jw)t} - e^{-(s+jw)t}\right) dt \tag{38}$$

$$= \frac{1}{2j} \lim_{t_o \to \infty} \left(\left. \frac{e^{-(s-jw)t}}{-(s-jw)} \right|_0^{t_0} - \left. \frac{e^{-(s+jw)t}}{-(s+jw)} \right|_0^{t_0} \right) \tag{39}$$

$$= \frac{1}{2j} \lim_{t_o \to \infty} \left(\frac{e^{-(s-jw)t_0} - e^0}{-(s-jw)} - \frac{e^{-(s+jw)t_0} - e^0}{-(s+jw)} \right) \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{-1}{-(s-jw)} - \frac{-1}{-(s+jw)} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-jw} - \frac{1}{s+jw} \right) \tag{41}$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{s+jw-s+jw}{s^2+jsw-jsw+w^2} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{2jw}{s^2+w^2} \right) \tag{42}$$

$$\pounds\left\{sen\,(wt)\right\} = \frac{w}{s^2+w^2} \quad , \quad \text{si } s > jw \tag{43}$$

5.6 TL de la función coseno

$$\pounds\left\{cos\,(wt)\right\} = \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} cos\,(wt)\, e^{-st} dt \tag{44}$$

$$cos\,(wt) = \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2} \tag{45}$$

$$\pounds\left\{cos\,(wt)\right\} = \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2} e^{-st} dt \tag{46}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t_o \to \infty} \int_0^{t_0} \left(e^{-(s-jw)t} + e^{-(s+jw)t} \right) dt \tag{47}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t_o \to \infty} \left(\left. \frac{e^{-(s-jw)t}}{-(s-jw)} \right|_0^{t_0} + \left. \frac{e^{-(s+jw)t}}{-(s+jw)} \right|_0^{t_0} \right) \tag{48}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t_o \to \infty} \left(\frac{e^{-(s-jw)t_0} - e^0}{-(s-jw)} + \frac{e^{-(s+jw)t_0} - e^0}{-(s+jw)} \right) \tag{49}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{-(s-jw)} + \frac{-1}{-(s+jw)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-jw} + \frac{1}{s+jw} \right) \tag{50}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{s+jw+s-jw}{s^2+jsw-jsw+w^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{s^2+w^2} \right) \tag{51}$$

$$\pounds \left\{ cos\left(wt\right) \right\} = \frac{s}{s^2+w^2} \quad , \quad \text{si } s > jw \tag{52}$$

6 TL usando la tabla de pares y propiedades

6.1 Reglas para obtener la transformada de Laplace directa

Asumiendo la función $f(t) = f_1(t) f_2(t) ... f_n(t)$

1. Si alguna de las funciones $f_k(t)$ es igual a $u(t-a)$, use la propiedad

$$\pounds \left\{ f(t)\, u(t-a) \right\} = e^{-as} \pounds \left\{ f(t+a) \right\}. \tag{53}$$

2. Si la función se puede descomponer en una suma, tome cada sub-función como un problema independiente y use la propiedad #1

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t) \to F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s) \tag{54}$$

3. Usando las propiedades comenzado con la más sencilla o fácil de aplicar descomponga $f(t)$ en funciones auxiliares hasta obtener una función que se encuentre en la tabla de pares de transformadas de Laplace.

4. Para finalizar use el par de transformada sobre la función auxiliar y substituya hacia atrás hasta obtener $F(s)$.

(a) El par usado corresponderá a la sub-función $f_k(t)$ que no tenga asociada alguna propiedad.

(b) Si todas las funciones $f_k(t)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ tienen asociadas alguna propiedad, el par usado corresponderá a la función $f_k(t)$ que tenga la propiedad más complicada.

(c) Si la función para la cual existe un par no está en la forma que aparece en la tabla, haga las manipulaciones algebraicas o trigonométricas necesarias para ajustarla a la tabla.

(d) Se debe usar **sólo** un par.

6.2 Ejemplos

1)

$$f(t) = sen(2t)\, e^{-4t} u(t) \tag{55}$$

$$F(s) = \pounds\left\{e^{-4t} g(t)\right\} = G(s+4) \tag{56}$$

$$g(t) = sen(2t) \tag{57}$$

$$G(s) = \pounds\left\{g(t)\right\} = \frac{2}{s^2+4} \tag{58}$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+4)^2+4} = \frac{2}{s^2+8s+20} \tag{59}$$

2)

$$f(t) = \left[e^{-3t}+2\right] u(t) \tag{60}$$

$$F(s) = \pounds\left\{\left[e^{-3t}+2\right] u(t)\right\} \tag{61}$$

$$= \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s} = \frac{s+2s+6}{(s+3)\, s} \tag{62}$$

$$F\left(s\right)=\frac{3\left(s+2\right)}{s\left(s+3\right)} \tag{63}$$

3)

$$f\left(t\right)=te^{-2t}u\left(t\right) \tag{64}$$

$$F\left(s\right)=\pounds\left\{e^{-2t}g\left(t\right)\right\}=G\left(s+2\right) \tag{65}$$

$$g\left(t\right)=tu\left(t\right) \tag{66}$$

$$G\left(s\right)=\pounds\left\{g\left(t\right)\right\}=\frac{1}{s^2} \tag{67}$$

$$F\left(s\right)=G\left(s+2\right)=\frac{1}{\left(s+2\right)^2} \tag{68}$$

4)

$$f\left(t\right)=te^{-2t}cos\left(3t-1\right)u\left(t\right) \tag{69}$$

$$F\left(s\right)=\pounds\left\{e^{-2t}h\left(t\right)\right\}=H\left(s+2\right) \tag{70}$$

$$H\left(s\right)=\pounds\left\{h\left(t\right)\right\}=\pounds\left\{tcos\left(3t-1\right)u\left(t\right)\right\}=\pounds\left\{tg\left(t\right)\right\}=-\frac{dG\left(s\right)}{ds} \tag{71}$$

$$g\left(t\right)=cos(3t-1)u\left(t\right) \tag{72}$$

$$cos(3t-1)=cos\left(3t\right)cos\left(1\right)+sen\left(3t\right)sen\left(1\right) \tag{73}$$

$$G\left(s\right)=\pounds\left\{g\left(t\right)\right\}=cos\left(1\right)\frac{s}{s^2+9}+sen\left(1\right)\frac{3}{s^2+9} \tag{74}$$

$$H(s) = -\frac{dG(s)}{ds} \tag{75}$$

$$H(s) = -\frac{1}{\left(s^2+9\right)^2}\left[cos(1)\left(s^2+9-2s^2\right)+sen(1)(-6s)\right] \tag{76}$$

$$H(s) = \frac{1}{\left(s^2+9\right)^2}\left[cos(1)\left(s^2-9\right)+sen(1)\,6s\right] \tag{77}$$

$$F(s) = H(s+2) \tag{78}$$

$$F(s) = \frac{1}{\left((s+2)^2+9\right)^2}\left[cos(1)\left((s+2)^2-9\right)+sen(1)\,6(s+2)\right] \tag{79}$$

$$F(s) = \frac{1}{\left(s^2+4s+13\right)^2}\left[cos(1)\left(s^2+4s-5\right)+sen(1)(6s+12)\right] \tag{80}$$

5)

$$f(t) = t^2 e^{-at} u(t-b) \tag{81}$$

$$F(s) = \pounds\{g(t)\,u(t-b)\} = e^{-bs}\pounds\{g(t+b)\} \tag{82}$$

$$g(t) = t^2 e^{-at} \tag{83}$$

$$j(t) = g(t+b) = (t+b)^2 e^{-a(t+b)} = \left(t^2+2bt+b^2\right)e^{-at-ab} \tag{84}$$

$$J(s) = \pounds\{j(t)\} = \pounds\{g(t+b)\} = \pounds\left\{e^{-at-ab}h(t)\right\} = e^{-ab}H(s+a) \tag{85}$$

$$H(s) = \pounds\{h(t)\} = \pounds\left\{t^2+2bt+b^2\right\} = \frac{2}{s^3}+\frac{2b}{s^2}+\frac{b^2}{s} \tag{86}$$

$$J(s) = e^{-ab}H(s+a) = e^{-ab}\left(\frac{2}{(s+a)^3}+\frac{2b}{(s+a)^2}+\frac{b^2}{(s+a)}\right) \tag{87}$$

$$F(s) = e^{-bs}\pounds\{g(t+b)\} = e^{-bs}J(s) \tag{88}$$

$$F(s) = e^{-b(s+a)}\left(\frac{2}{(s+a)^3}+\frac{2b}{(s+a)^2}+\frac{b^2}{(s+a)}\right) \tag{89}$$

7 Ecuaciones Diferenciales:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_n y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_0 u(t) \tag{90}$$

7.1 Transformada de Laplace de la Ecuación Diferencial

$$\left[s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y^1(0) - ... - y^{n-1}(0)\right] + \tag{91a}$$
$$a_1 \left[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - s^{n-3} y^1(0) - ... - y^{n-2}(0)\right] + \tag{91b}$$
$$... \tag{91c}$$
$$a_n Y(s) \tag{91d}$$
$$= b_m \left[s^m U(s) - s^{m-1} u(0) - s^{m-2} u^1(0) - ... - u^{m-1}(0)\right] + \tag{91e}$$
$$b_{m-1} \left[s^{m-1} U(s) - s^{m-2} u(0) - s^{m-3} u^1(0) - ... - u^{m-2}(0)\right] + \tag{91f}$$
$$... \tag{91g}$$
$$b_0 Y(s) \tag{91h}$$

Ejemplo:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2u(t) \tag{92}$$

Condiciones iniciales: $y(0) = 4 \quad , \quad y^1(0) = 1$
Entrada: $u(t) = 7e^{-6t}$

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y^1(0)\right] + 5\left[sY(s) - y(0)\right] + 3Y(s) = 2U(s) \tag{93}$$

$$\left[s^2 Y(s) - 4s - 1\right] + 5\left[sY(s) - 4\right] + 3Y(s) = 2\frac{7}{s+6} \tag{94}$$

$$\left[s^2 + 5s + 3\right] Y(s) = 4s + 1 + 20 + \frac{14}{s+6} = \frac{(s+6)(4s+21) + 14}{s+6} \tag{95}$$

$$Y(s) = \frac{(s+6)(4s+21) + 14}{(s+6)(s^2 + 5s + 3)} \tag{96}$$

Esta transformada de $y(t)$ contiene toda la información necesaria para calcular la respuesta del proceso para la condiciones iniciales y señal de entrada particulares para este problema.

8 Obtención de la función $f(t)$ aplicando la inversa de la transformada de Laplace a $F(s)$.

8.1 Reglas para obtener la transformada de Laplace inversa

1. Se reconoce las propiedades de la transformada de Laplace en $F(s)$ y se descompone $F(s)$ en funciones auxiliares, al remover esas propiedades. (ejemplo: e^{-as}), hasta obtener una función racional de s.

2. Hacer mónico el numerador y el denominador de $G(s)$ obteniéndose de esta manera K; es decir,

$$G(s) = KN(s)/D(s) \tag{97}$$

(mónico: el coeficiente de máximo orden es uno).

3. Calcular los ceros y polos de $G(s)$ y cancelar los términos comunes.

4. Verificar si $G(s)$ es propia, es decir, el orden del polinomio del denominador es mayor que el orden del polinomio del numerador.

5. Si $G(s)$ no es propia, se calcula

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = C(s) + \frac{R(s)}{D(s)} = G_1(s) + G_2(s) \tag{98}$$

usando la técnica de división de polinomios. (En MATLAB: $[Q, R] = deconv(B, A)$ divide el polinomio $B(s)$ entre el polinomio $A(s)$, los resultados son el cociente en el polinomio Q y el residuo en el polinomio R, de manera tal que $B = conv(A, Q) + R$.

6. Si $G(s)$ es propia se expande en fracciones parciales. Si $G(s)$ no es propia, la expansión sólo se hace para $G_2(s)$. (En MATLAB: $[R, P, K] = residue(B, A)$ calcula los residuos, polos y el término directo de la expansión en fracciones parciales de la división entre los polinomios $B(s)/A(s)$).

7. Se obtiene la "forma" de $g(t)$, usando la inversa de los pares y las propiedades de la transformada de Laplace. $(g(t) = g_1(t) + g_2(t))$.

8. Se calcula el valor de los residuos para polos simples (K_i), polos múltiples (A_i) y polos conjugados ($M_i\,|\phi_i$).

Polos Simples:
$F(s) = \dfrac{C\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{K_j}{s - p_j}$
Donde: $K_j = \left.((s - p_j)\,F(s))\right|_{s=p_j}$, para $j = 1, 2, ..., n$

Polo Múltiple: (asumiendo que está multiplicando otros polos)

$F\left(s\right)=\dfrac{Q\left(s\right)}{\left(s-p\right)^{r}}=\sum_{k=1}^{r}\dfrac{A_{k}}{\left(s-p\right)^{r+1-k}}$
Donde: $A_{k}=\dfrac{1}{\left(k-1\right)!}\,\dfrac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left(\left(s-p\right)^{r}F\left(s\right)\right)\Big|_{s=p}$, para $k=1,2,...,r$

Polo Conjugado: (asumiendo que está multiplicando otros polos)
$F\left(s\right)=\dfrac{Q\left(s\right)}{\left[\left(s+a\right)^{2}+w^{2}\right]}=\dfrac{M\lfloor\phi}{\left[\left(s+a\right)^{2}+w^{2}\right]}$
Donde: $M\lfloor\phi=\left(\left[\left(s+a\right)^{2}+w^{2}\right]F\left(s\right)\right)\big|_{s=-a+jw}$

Ejemplos:

$$F\left(s\right)=\frac{4}{s^{3}\left(s+2\right)\left(s+1\right)} \tag{99}$$

$$F\left(s\right)=\frac{A_{1}}{s^{3}}+\frac{A_{2}}{s^{2}}+\frac{A_{3}}{s}+\frac{K_{1}}{s+2}+\frac{K_{2}}{s+1} \tag{100}$$

Forma de $f\left(t\right)$:

$$f\left(t\right)=\left(A_{1}\frac{t^{2}}{2}+A_{2}t+A_{3}+K_{1}e^{-2t}+K_{2}e^{-t}\right)u\left(t\right) \tag{101}$$

Cálculo de los residuos:

$$A_{1}=\left(s^{3}F\left(s\right)\right)\big|_{s=0}=\left.\frac{4}{\left(s+2\right)\left(s+1\right)}\right|_{s=0}=2 \tag{102}$$

$$A_{2}=\left.\frac{d\left(s^{3}F\left(s\right)\right)}{ds}\right|_{s=0}=\left.\frac{d\left(\dfrac{4}{s^{2}+3s+2}\right)}{ds}\right|_{s=0} \tag{103}$$

$$A_{2}=\left.\frac{0-\left(2s+3\right)4}{\left(s^{2}+3s+2\right)^{2}}\right|_{s=0}=-3 \tag{104}$$

$$A_{3}=\frac{1}{2}\left.\frac{d^{2}\left(s^{3}F\left(s\right)\right)}{ds^{2}}\right|_{s=0}=\frac{1}{2}\left.\frac{d\left(-\dfrac{4\left(2s+3\right)}{\left(s^{2}+3s+2\right)^{2}}\right)}{ds}\right|_{s=0} \tag{105}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} - \left. \frac{8\left(s^2+3s+2\right)^2 - 2\left(s^2+3s+2\right)\left(2s+3\right)4\left(2s+3\right)}{\left(s^2+3s+2\right)^4} \right|_{s=0} \tag{106}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} - 8\left. \frac{\left(s^2+3s+2\right) - \left(2s+3\right)^2}{\left(s^2+3s+2\right)^3} \right|_{s=0} = -4\frac{2-9}{8} = \frac{7}{2} \tag{107}$$

$$K_1 = \left.\left(\left(s+2\right)F\left(s\right)\right)\right|_{s=-2} = \left. \frac{4}{s^3\left(s+1\right)} \right|_{s=-2} = \frac{1}{2} \tag{108}$$

$$K_2 = \left.\left(\left(s+1\right)F\left(s\right)\right)\right|_{s=-1} = \left. \frac{4}{s^3\left(s+2\right)} \right|_{s=-1} = -4 \tag{109}$$

Respuesta en el tiempo:

$$f\left(t\right) = \left(2\frac{t^2}{2} - 3t + \frac{7}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - 4e^{-t}\right)u\left(t\right) \tag{110}$$

$$f\left(t\right) = \left(t^2 - 3t + \frac{7}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - 4e^{-t}\right)u\left(t\right) \tag{111}$$

9 EJERCICIOS

1) Escriba las funciones matemáticas que describen a $f(t)$ en las Figura 1 y Figura2**.**

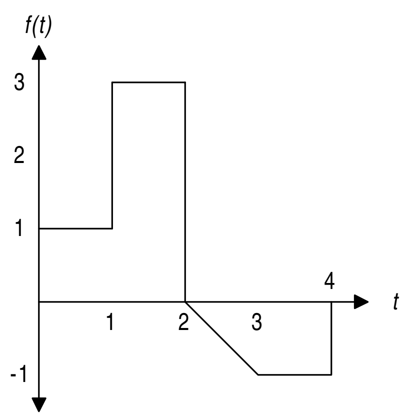


Figura 1

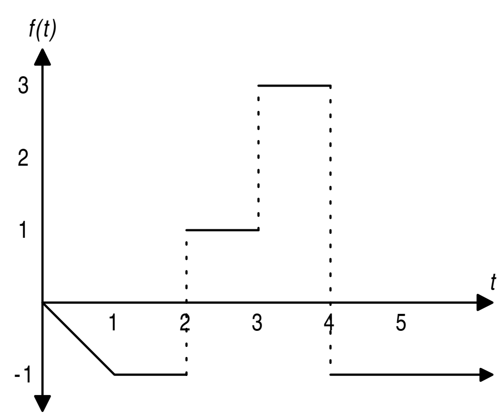


Figura 2

2) Usando la tabla de Pares y Propiedades de la Transformada de Laplace, halle la transformada de Laplace, correspondiente a las funciones:

2.1)

$$r\left(t\right)=e^{4t-8}sen\left(2t-4\right)\left(t-2\right)u\left(t-2\right)$$

2.2)

$$r\left(t\right)=e^{t}t^{2}u\left(t-3\right) \tag{112}$$

2.3)

$$f\left(t\right)=5\left(t-\pi\right)e^{-2t}sen(3t)u(t-\pi) \tag{113}$$

2.4)

$$f\left(t\right)=\left(t-6\right)^{5}e^{-2t}u\left(t-6\right)$$

3) Escriba la forma de $f\left(t\right)$ y calcule el valor de los residuos si el sistema no es muy complicado.

3.1)

$$F\left(s\right)=\frac{\left(s^{5}+4s^{2}+1\right)e^{-s}}{\left(s+2\right)^{2}\left(s-3\right)\left[\left(s-4\right)^{2}+9\right]} \tag{114}$$

3.2)

$$F\left(s\right)=\frac{s^{4}+3s^{2}+4}{s\left(s+1\right)\left(s-3\right)} \tag{115}$$

3.3)

$$F\left(s\right)=\frac{\left(s^{2}-2s-3\right)e^{-2s}}{s\left(s+1\right)^{2}\left(s-3\right)} \tag{116}$$

4) Obtenga la **forma** de la respuesta, $y\left(t\right)$, y el valor del residuo $(M\mid\phi)$ correspondiente a los polos en $s=-2\pm3j$ para la función de Laplace:

$$F\left(s\right)=\frac{s^{2}+5s+6}{s^{3}\left[\left(s+2\right)^{2}+9\right]\left(s+2\right)^{2}\left(s+3\right)}$$

5) Un sistema se excita con una entrada $r\left(t\right)=e^{-2t}sen\left(3t\right)$ y se obtiene una respuesta en el tiempo de la forma:

$$y\left(t\right)=\left[B_{1}te^{-3t}+B_{2}e^{-3t}+B_{3}e^{t}sen\left(2t+\phi_{1}\right)+B_{4}e^{-2t}sen\left(3t+\phi_{2}\right)+B_{5}+B_{6}e^{-5t}\right]u\left(t\right)$$

Escriba cual debería ser la forma de $G(s)$, de la manera más compacta posible (el numerador solo debe ser indicado como $N(s)$).

6) Resuelva analítica y completamente, es decir, halle la función $y(t)$ incluyendo el valor de los residuos para la siguientes ecuaciones diferenciales:

6.1)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=r(t)$$

Donde:

Entrada: $r(t)=12u(t)$

Condiciones iniciales: $y(0+)=1$, $\dot{y}(0+)=4$

6.2)

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+6\frac{d^2y(t)}{dt^2}+10\frac{dy(t)}{dt}=te^{-t}u(t)$$

Donde $y''(0^+)=y'(0^+)=y(0^+)=0$

6.3)

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}-2\frac{dy(t)}{dt}=\frac{dr(t)}{dt}-r(t)$$

Donde $r(t)=12u(t)$ y las condiciones iniciales iguales a cero.

10 BIBLIOGRAFIA

FRANKLIN, Gene F., POWELL, J. David, EMAMI-NAEINI Abbas **Feedback Control of Dynamic Systems**, 3era Edición, Ed. Addison-Wesley, Massachusetts (Estados Unidos), 1995.

KUO, Benjamin C. **Automatic Control Systems**, Ed. Prentice-Hall Inc. 6ta. Edición, New Jersey (Estados Unidos), 1991.

OGATA, K. **Modern Control Engineering** , Ed. Prentice-Hall, 3ra Edición, New Jersey (Estados Unidos), 1997

REY V, Horacio. **Instrumentación y Control, Unidades I,II y III**, Ed. REPROUNET, San Cristóbal (Venezuela), 1984.

SPIEGEL, Murray R. **Transformadas de Laplace**, Ed. McGraw-Hill, Serie Schaum, México, 1971.

11 FORMULARIO

11.1 Pares de las Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\dfrac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n
2	$\delta(t)$	1
3	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
4	$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
5	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{s^n}$
6	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
7	e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
8	$\dfrac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{(s+a)^n}$
9	$sen(wt)$	$\dfrac{w}{s^2+w^2}$
10	$cos(wt)$	$\dfrac{s}{s^2+w^2}$
11	$senh(wt)$	$\dfrac{w}{s^2-w^2}$
12	$cosh(wt)$	$\dfrac{s}{s^2-w^2}$
13	$\dfrac{M}{w}e^{-at}sen(wt+\phi)$	$\dfrac{M\lfloor\phi}{(s+a)^2+w^2}$

11.2 Propiedades de las Transformadas de Laplace

	$\pounds\left\{g\left(t\right)\right\}$	$G\left(s\right)=\lim\limits_{t_0\to\infty}\int_0^{t_0}g\left(t\right)e^{-st}dt$
1	$\pounds\left\{af_1\left(t\right)\pm bf_2\left(t\right)\right\}$	$aF_1(s)\pm bF_2(s)$
2	$\pounds\left\{f\left(at\right)\right\}$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\ ,\ a>0$
3	$\pounds\left\{f\left(t-a\right)u\left(t-a\right)\right\}$	$e^{-as}F\left(s\right)\ ,\ a\geq 0$
4	$\pounds\left\{f\left(t\right)u\left(t-a\right)\right\}$	$e^{-as}\pounds\left\{f\left(t+a\right)\right\}$
5	$\pounds\left\{e^{-at}f\left(t\right)\right\}$	$F\left(s+a\right)$
6	$\pounds\left\{\frac{d^nf\left(t\right)}{dt^n}\right\}$	$s^nF\left(s\right)-s^{n-1}f\left(0\right)-s^{n-2}f^1\left(0\right)-...-f^{n-1}\left(0\right)$
7	$\pounds\left\{t^nf\left(t\right)\right\}$	$\left(-1\right)^n\frac{d^nF\left(s\right)}{ds^n}$
8	$\pounds\left\{\int_0^t f\left(\tau\right)d\tau\right\}$	$\frac{F\left(s\right)}{s}$
9	$\pounds\left\{\frac{f\left(t\right)}{t}\right\}$	$\int_s^\infty F\left(s\right)ds\quad ,$ si $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f\left(t\right)}{t}$ existe
10	$\lim\limits_{t\to 0}f\left(t\right)$	$\lim\limits_{s\to\infty}sF\left(s\right)$
11	$\lim\limits_{t\to\infty}f\left(t\right)$	$\lim\limits_{s\to 0}sF\left(s\right)$

11.3 Otras formulas importantes

$sen\left(\alpha\pm\beta\right)$	$sen\left(\alpha\right)cos\left(\beta\right)\pm cos\left(\alpha\right)sen\left(\beta\right)$
$cos\left(\alpha\pm\beta\right)$	$cos\left(\alpha\right)cos\left(\beta\right)\mp sen\left(\alpha\right)sen\left(\beta\right)$
$e^{\pm jw}$	$cos\left(w\right)\pm jsen\left(w\right)$
$cos\left(w\right)$	$\frac{e^{jw}+e^{-jw}}{2}$
$sen\left(w\right)$	$\frac{e^{jw}-e^{-jw}}{2j}$
$cosh\left(x\right)$	$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$
$senh\left(x\right)$	$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$
$\frac{D}{d}$	$c+\frac{r}{d}$
A_k	$\frac{1}{\left(k-1\right)!}\left.\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left(\left(s+a\right)^rF\left(s\right)\right)\right\|_{s=-a}$, para $k=1,2,...,r$
$M\lfloor\phi$	$F\left(s\right)\left.\left[\left(s+a\right)^2+w^2\right]\right\|_{s=-a+jw}$

12 Un Poco de Diversión....

12.1 Derivación

$$\pounds\left\{\frac{df\,(t)}{dt}\right\} = \lim_{t_o\to\infty}\int\limits_0^{t_0}\frac{df\,(t)}{dt}e^{-st}dt = \lim_{t_o\to\infty}\int\limits_0^{t_0}e^{-st}df\,(t) \tag{117}$$

Integrando por partes:

$$u = e^{-st} \qquad dv = df\,(t) \tag{118}$$

$$du = -se^{-st}dt \qquad v = f\,(t) \tag{119}$$

$$\lim_{t_o\to\infty}\int\limits_0^{t_0}e^{-st}df\,(t) = \left. f\,(t)\,e^{-st}\right|_0^{t_o} + s\int\limits_0^{t_0}f\,(t)\,e^{-st}dt \Rightarrow \tag{120}$$

$$\pounds\left\{\frac{df\,(t)}{dt}\right\} = sF\,(s) - f\,(0)\ \text{, para}\ \ s > 0 \tag{121}$$

$$\pounds\left\{\frac{d^2f\,(t)}{dt^2}\right\} = \lim_{t_o\to\infty}\int\limits_0^{t_0}\frac{d^2f\,(t)}{dt^2}e^{-st}dt = \lim_{t_o\to\infty}\int\limits_0^{t_0}e^{-st}\frac{d^2f\,(t)}{dt} \tag{122}$$

Integrando por partes:

$$u = e^{-st} \qquad dv = \frac{d^2f\,(t)}{dt} \tag{123}$$

$$du = -se^{-st}dt \qquad v = \frac{df\,(t)}{dt} \tag{124}$$

$$\lim_{t_o\to\infty}\int\limits_0^{t_0}e^{-st}\frac{d^2f\,(t)}{dt} = \left.\frac{df\,(t)}{dt}e^{-st}\right|_0^{t_o} + s\int\limits_0^{t_0}\frac{df\,(t)}{dt}e^{-st}dt \tag{125}$$

$$= s\,(sF\,(s) - f\,(0)) - f^1\,(0)\ \text{, para}\quad s > 0 \Rightarrow \tag{126}$$

$$\pounds\left\{\frac{d^2f\,(t)}{dt^2}\right\} = s^2F\,(s) - sf\,(0) - f^1\,(0)\ \text{, para}\quad s > 0. \tag{127}$$

Por inducción matemática es posible demostrar que:

$$\pounds\left\{\frac{d^nf\,(t)}{dt^n}\right\} = s^nF\,(s) - s^{n-1}f\,(0) - ... - f^{n-1}\,(0)\ \text{, para}\quad s > 0. \tag{128}$$

12.2 Integración

$$\pounds\left\{\int f\left(t\right)dt\right\}=\lim_{t_o\to\infty}\int\limits_0^{t_0}\left(\int f\left(t\right)dt\right)e^{-st}dt \tag{129}$$

Integrando por partes:

$$u=\int f\left(t\right)dt \qquad dv=e^{-st}dt \tag{130}$$

$$du=f\left(t\right)dt \qquad v=-\frac{e^{-st}}{s} \tag{131}$$

$$\lim_{t_o\to\infty}\int\limits_0^{t_0}\left(\int f\left(t\right)dt\right)e^{-st}dt=-se^{-st}\int f\left(t\right)dt\Big|_0^{t_o}+\frac{1}{s}\int\limits_0^{t_0}f\left(t\right)e^{-st}dt\Rightarrow \tag{132}$$

$$\pounds\left\{\int f\left(t\right)dt\right\}=\frac{F\left(s\right)}{s}\text{ , para} \quad s>0. \tag{133}$$