Algebra Lineal

Luisa Aburto H. Daniel Jiménez B Roberto Johnson H.

2003

Índice general

Capítulo 1

Matrices

1.1. Álgebra de Matrices

Informalmente, una matriz es un arreglo rectangular de números dispuestos horizontalmente en filas y verticalmente en columnas.

Una matriz se dice racional, real o compleja según sea el conjunto en el que se encuentren los números del arreglo o elementos de la matriz (coeficientes de la matriz).

Más precisamente una *matriz de orden* $m \times n$ con coeficientes reales, es un arreglo rectangular de números reales, con m filas y n columnas.

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Convencionalmente usaremos letras mayúsculas para denotar matrices indicando su orden o formato con subíndices. Dado que el texto se trabaja principalmente con matrices reales, no se indica el conjunto numérico en el que se define la matriz, salvo los casos que requieran para mayor claridad de un desarrollo.

El elemento situado en la fila i y columna j de una matriz cualquiera, se describe como a_{ij}. Así la fila i de A es

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

y la anotamos $f_i(A)$. Del mismo modo, la columna j de A está dada por

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

y la anotamos $c_i(A)$. Cuando sea necesario, usamos la notación $c_{ij}(A)$ para indicar el coeficiente ij de la matriz A o simplemente a_{ij}.

El conjunto de la matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ lo anotamos $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si $m = n$ entonces las matrices se dicen cuadradas de orden n y el conjunto de todas ellas se denota por $M_n(\mathbb{K})$, si los coeficientes son números reales entonces denotamos $M_{m\times n}$ o simplemente M_n

Definición 1 *Dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{p\times q}$ se dice que son iguales si y sólo si $m = p$, $n = q$, y $a_{ij} = b_{ij}$ con $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$*

Ejemplo 1 *Notemos en los ejemplos siguientes, las matrices dadas son distintas:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, *ya que la primera tiene orden 3×2 y la segunda 2×2. Ellas tienen diferentes ordenes.*

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, *ellas son distintas pues $a_{11} = 1 \neq 0 = b_{11}$*

Ejemplo 2 *En cada caso hallar a, b, c y d, constantes reales, tales que*

a) $\begin{bmatrix} a^2 + 2a & -1 \\ b & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 + a & 2 \end{bmatrix}$, *en M_2*

b) $\begin{bmatrix} c^2 - c + 1 & d \\ c + 2d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2c \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, *en M_2*

c) $\begin{bmatrix} a^2 + 2a + b & -1 \\ a + b + c & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 1 & 2c \\ b & d \end{bmatrix}$, *en M_2*

Desarrollo.

a) Si $\begin{bmatrix} a^2 + 2a & -1 \\ b & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 + a & 2 \end{bmatrix}$ entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} a^2 + 2a & = & -3 \\ -1 & = & -1 \\ 2 & = & 2 \\ b & = & 1 + a \end{array}\right|$$

las igualdades a estudiar son

$$\left.\begin{array}{lrcl} (1) & a^2 + 2a & = & -3 \\ (2) & b & = & 1 + a \end{array}\right|$$

De (1), $a^2 + 2a + 3 = 0$, luego $a = -1 + i\sqrt{2}$ con $i^2 = -1$, o sea a y b en $\mathbb{C}$ pero la igualdad se estudia en los números reales, entonces la solución es vacía, pues no es posible encontrar a y b en $\mathbb{R}$ que satisfagan las igualdades (1) y (2).

b) Si $\begin{bmatrix} c^2-c+1 & d \\ c+2d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2c \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$\left.\begin{array}{lrcl} (1) & c^2-c+1 & = & 3 \\ (2) & d & = & 2c \\ (3) & c+2d & = & 6 \\ (4) & 1 & = & 1 \end{array}\right|$$

Si $d = 2c$ entonces reemplazando en (3) tenemos $5c = 6$, luego $c = \frac{6}{5}$ cuyo valor no cumple la igualdad $c^2 - c + 1 = 3$, pues $\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \frac{6}{5} + 1 = \frac{31}{25}$.

Así no hay c y d que cumplan la igualdad matricial (b) pues el sistema formado por las ecuaciones (1),(2),(3) y (4) tiene solución vacía.

c) Si $\begin{bmatrix} a^2+2a+b & -1 \\ a+b+c & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+1 & 2c \\ 6 & d \end{bmatrix}$. En este caso se tiene:

$$\left.\begin{array}{lrcl} (1) & a^2+2a+b & = & a^2+1 \\ (2) & a+b+c & = & 6 \\ (3) & -1 & = & 2c \\ (4) & 2 & = & d \end{array}\right|$$

De (4) $d = 2$, de (3) $c = -\frac{1}{2}$ reemplazando en (2) y simplificando (1) obtenemos:

$$\left.\begin{array}{lrc} (5) & a+b = & \frac{13}{2} \\ (1') & 2a+b = & 1 \end{array}\right|$$

restando (1') la ecuación (5) nos queda $a = -\frac{11}{2}$. Reemplazando en (5) se tiene que $b = 12$. Por lo tanto $a = -\frac{11}{2}$; $b = 12$, $c = -\frac{1}{2}$; $d = 2$ son las constantes reales que satisfacen la igualdad matricial c).

Definición 2 *Sean A=$[a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de orden $m \times n$, entonces la suma de A y B es la matriz de orden $m \times n$ definida por:*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Ejemplo 3 *Si* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ *entonces*

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+(-3) & 4+(-4) \\ (-1)+(-1) & 7+0 & 1+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

Nota. La matriz nula de orden $m \times n$, denotada por $0_{m\times n}$ es una matriz compuesta sólo de ceros, o sea, $0_{m\times n} = [a_{ij}]$ con $a_{ij} = 0$ para todo i,j. Toda vez que se indique la matriz nula sin especificar su orden, debe entenderse definido por el contexto.

De la definición se deduce que dos matrices pueden sumarse solamente si son de igual orden.

Definición 3 *Sean c en $\mathbb{R}$ y A en $M_{m\times n}$ entonces*

$$c\cdot A = A\cdot c = [c\cdot a_{ij}]$$

es llamado el producto por escalar.

En particular, si $c=-1$ y $A=[a_{ij}]$ entonces $(-1)\cdot A = [-a_{ij}]$, denotada por $-A$.

Proposición 4 *Sean A, B, C cualesquiera en $M_{m\times n}$ y $c, d \in \mathbb{R}$ entonces:*

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$.
2. $A+B = B+A$.
3. $A+0 = A$.
4. $A+(-A)=0$, *matriz nula de orden $m\times n$.*
5. $c(A+B) = cA+cB$.
6. $(c+d)A = cA+dA$.

Definición 5 *Sean $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ y $B_{n\times q} = [b_{ij}]$ definimos el producto de A y B como la matriz*

$$A\cdot B = [c_{ij}]_{m\times q} \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Ejemplo 4 *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinar una matriz X en $M_{2\times 3}$ tal que

$$2A + X - BC = 0_{2\times 3}.$$

Desarrollo. Calculemos primero

$$\begin{array}{rcll} 2A+X-BC &=& 0 & \text{Sumando Inverso Aditivo} \\ -2A+2A+X-BC &=& 0-2A & \text{Cancelando} \\ X-BC &=& -2A & \text{Sumando Inverso Aditivo y Cancelando} \\ X &=& BC-2A & \end{array}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{array}{rcl} 2A &=& 2\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 6 \\ -2 & 10 & 8 \end{bmatrix} \\ BC &=& \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Así, obtenemos

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 14 & 6 \\ -2 & 10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -5 \\ 6 & -12 & -8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5 *Sean A, B en M_2. Determinar el valor de verdad de la proposición*

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Desarrollo.

Basta tomar $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ambas diferentes de la matriz nula y $A \cdot B = 0$. Luego la proposición es falsa en general.

Observación. El producto de dos matrices $A \cdot B$ sólo es posible cuando el número de columnas de A es el mismo que el número de filas B.

No hay ley conmutativa para el producto matricial, en general $AB \neq BA$, puede ocurrir que AB está definida pero no BA, o que estando ambas definidas, éstas sean diferentes.

Ejemplo 6 *Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}$*

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 - 3\sqrt{2} & 1 - 3\pi \\ 3 & 20 + \sqrt{2} & 2 + \pi \end{bmatrix}$ *y*

$BA = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ *no está definido. Luego no tiene sentido preguntarnos por la propiedad conmutativa.*

Ejemplo 7 *Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$*

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 - 3\sqrt{2} \\ 3 & 20 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$ *y*

$BA = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 1 + 2\sqrt{2} & -3 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$. *En este caso, existen AB y BA, pero son diferentes.*

Observación. Para que dos matrices A y B sean sumables y multiplicables es necesario que sean cuadradas y de igual orden.

Por otra parte para que estén definidos los productos AB y BA la condición general es que las matrices sean de orden $m \times n$ y $n \times m$.

Definición 6 *Decimos que las matrices A y B conmutan si y sólo si*

$$AB = BA$$

Definición 7 *Llamamos matriz identidad o unitaria de orden n a la matriz cuadrada de orden n definida por*

$$I = I_n = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{donde } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

El símbolo δ_{ij} es llamado “Delta de Kronecker”.

Teorema 8 *Si cada suma y producto indicado existe, se cumple:*

1. $A(BC) = (AB)C$.
2. $(A+B)C = AC + BC$.
3. $D(E+F) = DE + DF$.
4. $AI_n = A$, $I_mA = A$, *donde* A *es de orden* $m \times n$.

Ejemplo 8 *Dadas* A, B, C *y* D *matrices cuadradas del mismo orden* n *tales que* $AB = I$ *y* $CD = B$. *Resuelva la ecuación matricial*

$$(B+C)D - BX = C + B$$

Desarrollo.

$$\begin{array}{rcll}
(B+C)D - BX & = & C+B & \text{Por distribución,} \\
BD + CD - BX & = & C+B & \text{Reemplazando,} \\
BD + B - BX & = & C+B & \text{Sumando inverso aditivo,} \\
-BX & = & C+B-BD-B & \text{cancelando,} \\
-BX & = & C-BD & \text{multiplicando por -1,} \\
BX & = & -C+BD & \text{multiplicando por izquierda por } A, \\
A(BX) & = & A(BD-C) & \text{Distributividad y Asociatividad,} \\
(AB)X & = & (AB)D - AC & \text{Reemplazando,} \\
IX & = & ID - AC & \text{Identidad.}
\end{array}$$

Así, obtenemos

$$X = D - AC$$

Corolario 9 *Sean* A *y* B *matrices tales que* AB *existe entonces:*

1. *El coeficiente* $c_{ij}(AB)$ *de* AB *es el producto matricial de la fila* i *de* A *y la columna* j *de* B, *es decir,*
$$c_{ij}(AB) = f_i(A) \cdot c_j(B).$$
2. *La columna* j *de* AB *es el producto matricial de* A *y la columna* j *de* B, *es decir,*
$$c_j(AB) = A \cdot c_j(B).$$
3. *La fila* i *de* AB *es el producto matricial de la fila* i *de* A *y* B, *es decir,*
$$f_i(AB) = f_i(A) \cdot B.$$

Definición 10 *Si* A *es una matriz cuadrada de orden* n. *Se define, por recurrencia, la potencia de una matriz*

$$\begin{array}{rcl}
A^0 & = & I_n \\
A^{k+1} & = & A^k \cdot A \text{ con } k \in \mathbb{N}_0
\end{array}$$

Observación. Nótese que para definir potencia no es necesaria la propiedad conmutativa, sin embargo, la propiedad asociativa es imprescindible

Ejemplo 9 *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, *entonces podemos calcular sus potencias*

$$\begin{aligned} A^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A^3 &= A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A. \end{aligned}$$

Ejemplo 10 *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, *entonces podemos calcular sus potencias*

$$\begin{aligned} A^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A^3 &= A^2 \cdot A = -I_2 \cdot A = -A, \\ A^4 &= A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = I_2. \end{aligned}$$

Definición 11 *Si A es una matriz cuadrada de orden n y $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces se define p evaluado en A como*

$$p(A) = \sum_{i=0}^{m} a_i A^i$$

Observación.

Note que, en la evaluación el coeficiente a_0 (término constante) se reemplaza por $a_0 I_n$.

Esta definición no es trivial, entenderemos su importancia en el último capítulo de este libro.

Ejemplo 11 *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *y el polinomio* $p(x) = x^3 + 3x + 1$. *Calcular* $p(A)$.

Usando los cálculos obtenidos en el ejemplo 9 y reemplazando, obtenemos:

$$\begin{aligned} p(A) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^3 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + I_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 12 *Dada la matriz* $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ *y el polinomio* $p(x)=x^5-3x^2+2$. *Calcular* $p(A)$.

Usando los resultados obtenidos en el ejemplo 10 y reemplazando, tenemos:

$$\begin{aligned} p(A) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^5 - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^2 + 2I_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definición 12 *Sea* $A=[a_{ij}]$ *una matriz cuadrada de orden* n *entonces:*

a) *A es una matriz diagonal si y sólo si* $a_{ij}=0$, *si* $i\neq j$. *Escribimos*

$$D\left[a_{11},a_{22},a_{33},....,a_{nn}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

b) *A es una matriz antidiagonal si y sólo si* $a_{ij}=0$ *si* $i+j\neq n+1$. *Escribimos:*

$$DS\left[a_{n1},a_{(n-1)2},a_{(n-2)3},...,a_{1n}\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{(n-2)3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{(n-1)2} & 0 & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

c) *A es una matriz tridiagonal si y sólo si* $a_{ij}=0$ *si* $(i>j+1$ *ó* $i<j-1)$.

d) *A es una matriz triangular superior si y sólo si* $a_{ij}=0$ *si* $i>j$ *(o sea, todo elemento bajo la diagonal principal es cero)*

e) *A es una matriz triangular inferior si y sólo si* $a_{ij}=0$ *si* $i<j$ *(o sea, todo elemento sobre la diagonal principal es cero)*

f) *Particularmente A es una matriz triangular estrictamente superior o triangular estrictamente inferior si y sólo si* ($a_{ij}=0$ *para* $i\geqslant j$ *ó* $i\leqslant j$), *respectivamente.*

Ejemplo 13 *Las siguientes matrices las podemos clasificar, según la definición anterior como:*

$L=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *es una matriz triangular inferior,*

$U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *es una matriz triangular estrictamente superior,*

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *es una matriz tridiagonal en* M_4.

Ejemplo 14 *Sean* A, B *en* M_n *matrices triangulares superiores.*
Probar que AB *es una matriz triangular superior.*

Desarrollo. Sean $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $AB = [c_{ij}]$.
Debemos probar que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0 \text{ si } i > j.$$

Sea $i > j$ tenemos

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

pero $a_{ik} = 0$ si $k = 1, ..., (i-1)$, ya que A es una matriz triangular superior, luego la primera parte de la suma es nula. También $b_{kj} = 0$ si $k = i, ..., n$ debido a que B es triangular superior. Luego la suma (2) es nula.

De lo anterior AB es una matriz triangular superior ya que $c_{ij} = 0$ si $i > j$.

Ejemplo 15 *Determinar para que matrices cuadradas se cumple la igualdad*

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

Desarrollo. Esta igualdad es verdadera, cuando las matrices A y B conmutan, ya que

$$\begin{aligned} (A + B)(A - B) &= (A + B)(A + (-1)B) \\ &= (A + B)A + (A + B)(-1)B \\ &= A^2 + BA + (-1)(AB + B^2) \\ &= A^2 - B^2 + BA - AB. \end{aligned}$$

Luego,

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \Longleftrightarrow BA - AB = 0 \Longleftrightarrow BA = AB.$$

Ejercicio 16 *Determinar la forma más general de dos matrices cuadradas de orden 2 no diagonales que conmuten.*

Desarrollo. Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ las matrices pedidas. Entonces

$$AB = BA \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} bz & = & cy & (1) \\ (a-d)y & = & b(x-w) & (2) \\ (a-d)z & = & c(x-w) & (3) \end{array} \right.$$

Como A y B son no diagonales, entonces $b \neq 0$ ó $c \neq 0$; $\quad y \neq 0$ ó $z \neq 0$

Caso I Supongamos que $c \neq 0$, luego en (1) tenemos que $z \neq 0$,de lo contrario, si $z = 0$ entonces $y = 0$

a) Si $a = d$ entonces $x = w$

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{z} = t$$

Así obtenemos que las matrices son

$$A = \begin{bmatrix} a & ct \\ c & a \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} x & zt \\ z & x \end{bmatrix}$$

donde a, x, t son números reales cualesquiera, c, z son no nulos.

b) Si $a \neq d$ entonces $x \neq w$ además

$$\frac{x-w}{a-d} = \frac{z}{c} = t$$

luego $z = tc$ y de (1) $y = tb$, además,

si usamos el cambio de variable $u = a - d$ entonces $tu = x - w$

Resumiendo tenemos

$$\begin{array}{lcl} x & = & tu + w \\ y & = & tb \\ z & = & tc \end{array}$$

matricialmente obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} u+d & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} tu+w & tb \\ tc & w \end{bmatrix}$$

donde b, d, w son números reales cualesquiera y t, u, c son no nulos.

Caso II Si $c = 0$ entonces $b \neq 0$, $z = 0$, $y \neq 0$. Si usamos el cambio de variable $t = \dfrac{y}{b}$, obtenemos $y = tb$ además, si definimos $u = a - d$ entonces $tu = x - w$, así obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} u+d & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} tu+w & tb \\ 0 & w \end{bmatrix}$$

donde d, w son números reales cualesquiera y t, u, b son no nulos

Resumiendo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & ct \\ c & a \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} x & zt \\ z & x \end{bmatrix} \text{ con } a, x, t \ \in \mathbb{R} \quad c, z \in \mathbb{R}^* \text{ ó} \\ A &= \begin{bmatrix} u+d & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} tu+w & tb \\ tc & w \end{bmatrix} \text{ con } b, c, d, w \ \in \mathbb{R} \quad t, u \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Definición 13 *Sea A una matriz de orden $m \times n$*

a) *Trasponer una martiz A de orden $m \times n$ consiste en intercambiar sus filas por sus columnas, respetando la secuencia. La matriz resultante se llama traspuesta de A, es de orden $n \times m$ y se anota A^t. Es decir, si $A = [a_{ij}]$ entonces $A^t = [a_{ji}]$, donde el elemento ubicado en la fila i y la columna j de A, aparece en la fila j y la columna i de A^t*

b) *Si una matriz es igual a su traspuesta se dice simétrica.*

c) *Si una matriz es igual al inverso aditivo (negativo) de su traspuesta se dice antisimétrica.*

Observación. Una matriz A simétrica o antisimétrica debe ser cuadrada, por ejemplo:
I_n es simétrica;
0_n es simétrica y antisimétrica.

Observación. Si A es antisimétrica, entonces los coeficientes de la diagonal principal de A son todos ceros.

Ejemplo 17 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 7 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$.
Determinar la traspuesta de A y decidir si es simétrica o antisimétrica.

Desarrollo. La traspuesta esta dada por

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 & \sqrt{2} \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

y A no es simétrica ni antisimétrica.

Ejemplo 18 *Determinar si las siguientes matrices son simétricas o antisimétricas.*

1. $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

2. $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

3. $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

Desarrollo.

1. B es simétrica ya que $B^t = B$.
2. C es antisimétrica ya que $-C^t = C$.
3. D no es simétrica y D no es antisimétrica.

Ejemplo 19 *Sea A en M_n una matriz antisimétrica.*
Demostrar que A tiene sólo ceros en la diagonal principal.

Desarrollo.
Sabiendo que A es antisimétrica, debemos probar que

$$a_{ii} = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Como $A = -A^t$, es decir,

$$[a_{ij}] = [-a_{ji}] \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \quad \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

El coeficiente a_{ij} está en la diagonal principal si y sólo si $i = j$.
Para dichos coeficientes tenemos:

$$a_{ii} = -a_{ii} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

o sea

$$2a_{ii} = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

luego

$$a_{ii} = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Ejercicio 20 *Demostrar que si A es simétrica y antisimétrica entonces $A = 0_n$.*

Teorema 14 *Sean A y B dos matrices de orden $m \times n$ y C una matriz de orden $n \times q$ y $r \in \mathbb{K}$ entonces se cumple:*

1. $(AC)^t = C^t A^t$.
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
3. $(rA)^t = rA^t = (Ar)^t; \quad rAC = A(rC) = (AC)r$.
4. $(A^t)^t = A$.
5. *La suma y producto escalar de matrices simétricas resultan simétricas.*
6. *El producto de matrices simétricas es simétrico si y sólo si las matrices conmutan*

Definición 15 *Una submatriz de una matriz A, es una matriz que se obtiene a partir de A eliminando algunas (no todas) filas y/o columnas.*

Observación. Las filas y columnas de una matriz son ejemplos importantes de submatrices de ésta.

Ejercicios:

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ y $p(x) = (x-3)(x-1)$.

   a) Calcular $p(A)$ y $p(C)$.

   b) Calcular AC^2A

   c) Determinar el valor "a" tal que $p(B) = 0$

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, y $p(x) = (x-4)(x-1)$.

   a) Calcular $p(A)$

   b) Calcular A^2BA^2

   c) Determinar el valor "a" tal que $p(B) = 0$

3. Dada las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 20 & 2 & -1 & a \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Encontrar el conjunto solución de la ecuación matricial , para cada valor de a en los reales.

$$A \cdot C^t = B \cdot C^t$$

1.2. Inversión de matrices

1.2.1. Operaciones elementales

El estudio de las ecuaciones matriciales $AX = B$ con $A_{n\times m}$; $X_{m\times p}$; $B_{n\times q}$ es de gran utilidad en matemáticas aplicadas, pues además de la utilidad directa por saber resolver la ecuación, en la búsqueda de la solución general, hay que enfrentar y resolver varios problemas muy frecuentes y característicos de los sistemas lineales.

La ecuación $AX = B$, en base a lo que ya hemos estudiado tiene un método natural de solución, que consiste en hacer directamente el producto AX, asumiendo X como una matriz de $m \times p$ variables o incógnitas distintas y proceder a igualarlo término a término con $B_{n\times p}$.

Este método reduce o transforma la ecuación matricial en p sistemas lineales cada uno de ellos con n ecuaciones y m incógnitas.

Sin embargo es posible concebir otras alternativas de desarrollo para el mismo problema. Una de estas, es tratar de modificar la ecuación $AX = B$, transformándola en otra, que sea equivalente a la anterior, pero que sea más simple o de desarrollo más evidente.

Particularmente importante es el caso en que A es cuadrada, pues pensando en forma análoga a la resolución de una ecuación en una variable en $\mathbb{R}$, tenemos que encontrar una matriz A^* de modo que cumpla con $A^* \cdot A = I_n$ y así al multiplicar la ecuación $AX = B$ por A^*, obtenemos

$$A^*AX = A^*B$$

de donde

$$I_nX = A^*B,$$

o sea,

$$X = A^*B.$$

En este desarrollo tenemos que A^* es una matriz que actúa sobre A, tal como lo hace a^{-1} sobre a en $\mathbb{R}-\{0\}$; en otras palabras, la matriz A^* es la matriz "inversa" de A, respecto del producto de matrices.

Precisamente, esta parte del texto, esta destinada a estudiar la inversa de una matriz A, tanto en lo relativo a su existencia como a su determinación o cálculo.

Por otra parte, también nos interesa estudiar ciertas tansformaciones aplicables a las matrices A y B que preservan (no alteran) el conjunto de las soluciones de la ecuación $AX = B$ y que son de gran utilidad para resolver tanto Ecuaciones Matriciales de la forma $AX = B$ como Sistemas de Ecuaciones en general.

Definición 16 *Sean A, B en M_n*

a) Se dice que B es la matriz inversa de A en M_n si y sólo si

$$AB = BA = I_n$$

b) Una matriz se dice regular (invertible, no singular) si y sólo si existe la inversa de ella.

c) Una matriz se dice singular si no es regular.

Notación. Si A es regular, anotamos A^{-1} para la inversa de A.

Proposición 17 *Si existe una inversa de A en M_n ella es única.*

Demostración. Sean B y H dos inversas de A, entonces

$$B = BI = B(AH) = (BA)H = IH = H$$

Así obtenemos que

$$B = H$$

luego la inversa es única.

Proposición 18 *Dada A en M_n. Si existe B en M_n tal que $AB = I_n$ entonces $BA = I_n$.*

La demostración de esta proposición se verá más adelante.

De acuerdo a esto para determinar A^{-1} basta resolver una de las ecuaciones $AX = I_n$ ó $XA = I_n$.

Observación. No toda matriz de orden n tiene inversa.

Por ejemplo para $n = 2$ y $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

Supongamos que $B = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$ es la inversa de A, tenemos que

$$BA = I_n,$$

pero

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa + zc & 0 \\ ya + tc & 0 \end{bmatrix}$$

luego $BA \neq I_n$ para toda matriz B.

Más adelante en M_n se demuestra: Si una matriz de orden n tiene una fila o columna nula, entonces ella no tiene inversa.

Ejemplo 21 *Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.*

Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 22 *Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.*

Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, y resuelva la ecuación $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, para b_1, b_2, b_3 en $\mathbb{R}$

Solución. A^{-1}es inversa de A si sólo si $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

$$
\begin{aligned}
A^{-1}\cdot A &= \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -5+6 & -3+5-12 & -6+6 \\ -2+2 & -1+6-4 & -2+2 \\ 1-1 & 1-3+2 & 2-1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

por lo tanto A^{-1}es inversa de A. Ahora premultiplicamos por A^{-1} la ecuación

$$
A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}
$$

Así obtenemos

$$
A^{-1}A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}
$$

y luego asociando e igualando $A^{-1}\cdot A = I$, tenemos que

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}
$$

por lo tanto

$$
\begin{array}{ll|}
x = & -3b_1 + 5b_2 + 6b_3 \\
y = & -b_1 + 2b_2 + 2b_3 \\
z = & b_1 - b_2 - b_3 \\
\hline
\end{array}
$$

Teorema 19 *Si A y B en M_n son regulares, entonces*

1. A^{-1} *es regular y* $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB *es regular y* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demostración.
1. Sabemos que
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$
por lo tanto, la inversa de A^{-1} es A, y también la inversa de A^{-1} es $\left(A^{-1}\right)^{-1}$, y como ella es única tenemos,
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
2. Como A y B son regulares entonces existen A^{-1}, B^{-1}.
Así,
$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$
y análogamente $B^{-1}A^{-1}(AB) = I$, por unicidad de la inversa se tiene
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Observación. Note que si A, B, C son matrices regulares, entonces
$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

Ejemplo 23 *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *en M_2. Determinar la matriz inversa de A, si ésta existe.*

Desarrollo. Supongamos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ y calculemos las constantes x, y, z, w
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$por igualdad de matrices tenemos el siguiente sistema:
$$\left.\begin{array}{rrcl} 1) & ax + bz & = & 1 \\ 2) & cx + dz & = & 0 \\ 3) & ay + bw & = & 0 \\ 4) & cy + dw & = & 1 \end{array}\right|.$$

Consideremos los sistemas
$$(\mathrm{I}) \left.\begin{array}{rrcl} 1) & ax + bz & = & 1 \\ 2) & cx + dz & = & 0 \end{array}\right| \qquad (\mathrm{II}) \left.\begin{array}{rrcl} 3) & ay + bw & = & 0 \\ 4) & cy + dw & = & 1 \end{array}\right|$$

En (I) Multiplicamos la ecuación 1) por c y la ecuación 2) por a y finalmente restando a la ecuación 2) la ecuación 1) obtenemos
$$\begin{array}{rcl} adz - cbz & = & -c \\ (ad - cb)z & = & -c \end{array}$$

Repitiendo el proceso tenemos que multiplicar la ecuación 1) por d y la ecuación 2) por b y realizando la diferencia se tiene,

$$(ad - cb)x = d.$$

En (II) procediendo de manera análoga obtenemos

$$\begin{aligned}(ad - cb)y &= -b \\ (ad - cb)w &= a\end{aligned}$$

Si $ad - bc = 0$, la matriz original es nula, luego no tiene inversa.

Así $ad - bc \neq 0$ y podemos concluir

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

de otra manera

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

El ejercicio permite determinar una condición necesaria y suficiente para que una matriz de orden 2 sea invertible.

Lamentablemente el método empleado para matrices de orden n mayor que 2 no es eficiente, ya que tenemos que resolver n sistemas lineales con n ecuaciones y n incógnitas.

Estudiamos a continuación ciertas operaciones realizables a las matrices, semejantes a las empleadas para resolver el sistema de ecuaciones lineales anterior.

Definición 20 *Dada una matriz A de orden $n \times m$. Llamaremos Operaciones Elementales Filas (OEF) sobre A a cada una de las siguientes operaciones con filas de la matriz A.*

1. *Denotamos F_{ij} al intercambio solamente de la fila i con la fila j.*
2. *Denotamos $F_i(r)$ al reemplazo de la fila i por r veces la fila i, con $r \neq 0$.*
3. *Denotamos $F_{ij}(k)$ al reemplazo de la fila i por la suma de la fila i más k veces la fila j, con $i \neq j$.*
4. *Denotamos C_{ij} al intercambio solamente de la columna i con la columna j.*
5. *Denotamos $C_i(r)$ al reemplazo de la columna i por r veces la columna i, con $r \neq 0$.*
6. *Denotamos $C_{ij}(k)$ al reemplazo de la columna i por la suma de la columna i más k veces la columna j, con $i \neq j$.*

Notación. Si A, B son matrices de orden $n \times m$ y B se obtiene desde la matriz A efectuando sobre ésta la operación elemental E, entonces anotamos

$$A \overset{E}{\sim} B \quad \text{o} \quad A \xrightarrow{E} B$$

Ejemplo 24 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ejemplifiquemos las distintas operaciones elementales

$$\begin{aligned} A \overset{C_{13}(-2)}{\longrightarrow} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \overset{F_{31}(-2)}{\longrightarrow} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 2 & -5 \end{bmatrix} \\ \overset{F_{21}(6)}{\longrightarrow} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & -3 & 19 \\ 0 & 9 & 2 & -5 \end{bmatrix} \\ \overset{C_2(\frac{-1}{8})}{\longrightarrow} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 19 \\ 0 & \frac{-9}{8} & 2 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observación. A partir de la matriz identidad podemos formar las siguientes matrices notables.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{C_{13}(-2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{31}(-2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{F_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{31}(-2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{F_{21}(6)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}(6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{C_2(-\frac{1}{8})}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{22}(-\frac{1}{8})$$

que para el ejemplo anterior cumple con

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 19 \\ 0 & \frac{-9}{8} & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 19 \\ 0 & \frac{-9}{8} & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Definición 21 *Una* Matriz Elemental *(ME) de orden n es la matriz identidad I_n luego de efectuarle una operación elemental fila y la anotaremos del siguiente modo*

$$I_n \overset{F_{ij}}{\to} E_{ij} \quad I_n \overset{F_{ij}(k)}{\to} E_{ij}(k) \quad I_n \overset{F_i(r)}{\to} E_{ii}(r)$$

Ejemplo 25 *Algunas matrices elementales de orden* 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{F_{12}}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{12}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{F_{23}(k)}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{23}(k)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{F_3(r)}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = E_{33}(r)$$

Teorema 22 *Sea A matriz de orden $m \times n$, si denotamos por $L(A)$ la matriz de orden $m \times n$ resultante de actuar sobre A la operación elemental L, se tiene*

1. $L(A) = E_{ij} \cdot A$, *donde L es F_{ij}.*
2. $L(A) = E_{ii}(r) \cdot A$, *donde L es $F_i(r)$, $r \neq 0$*
3. $L(A) = E_{ij}(k) \cdot A$, *donde L es $F_{ij}(k)$.*
4. $L(A) = A \cdot E_{ij}$, *donde L es C_{ij}.*
5. $L(A) = A \cdot E_{ii}(r)$, *donde L es $C_i(r)$, $r \neq 0$*
6. $L(A) = A \cdot E_{ji}(k)$, *donde L es $C_{ij}(k)$.*

Observación. El teorema anterior se puede generalizar del siguiente modo.

Teorema 23 *Sean A, B matrices de orden $m \times n$, si desde A se llega a B con operaciones elementales filas o columnas, que enumeramos por orden de ejecución, distinguiendo filas de columnas, entonces existen Matrices Elementales filas $E_1, E_2, \cdots, E_t$ de orden $m \times m$ y existen Matrices Elementales columnas $E'_1, E'_2, \cdots, E'_s$ de orden (n, n) tales que*

$$(E_t E_{t-1} \cdots E_2 E_1) A \left(E'_1 E'_2 \cdots E'_{s-1} E'_s\right) = B$$

Observación. En las condiciones del teorema anterior tenemos que existen matrices P, Q tal que

$$PAQ = B$$

en los próximos teoremas se demostrará que estas matrices son regulares.

Teorema 24 *Toda Matriz Elemental es regular*

1. $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$
2. $E_{ii}^{-1}(r) = E_{ii}(r^{-1})$, *con $r \neq 0$*
3. $E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$, *con $i \neq j$*

Observación. Teniendo presente los teoremas anteriores tenemos que toda matriz que se pueda escribir como producto de matrices elementales es regular.

Definición 25 *Sean A, B matrices en $M_{m \times n}$.*

1. *Se dice que A es* Equivalente por Fila *a B si y sólo si B se obtiene por un número finito de operaciones elementales filas. en tal caso se denota por $A \xrightarrow{F} B$.*
2. *Se dice que A es* Equivalente por Columna *a B si y sólo si B se obtiene desde A por un número finito de operaciones elementales columnas en tal caso se denota por $A \xrightarrow{C} B$.*

3. *Se dice que A es* Equivalente *a B si y sólo si B se obtiene desde A por un número finito de operaciones elementales en tal caso se denota por $A \longrightarrow B$.*

Observación.

A es equivalente por fila a B implica que existe una matriz regular P tal que $PA = B$.

A es equivalente por Columna a B implica que existe una matriz regular Q tal que $AQ = B$.

A es equivalente a B implica que existen dos matrices regulares P, Q tal que $PAQ = B$.

Teorema 26 *En $M_{m\times n}$ la relación $\xrightarrow{F}$ tiene las siguientes propiedades:*

Es reflexiva: Para toda $A \in M_{m\times n}$ se tiene $A \xrightarrow{F} A$

Es simétrica: Para toda $A, B \in M_{m\times n}$. Si $A \xrightarrow{F} B$ entonces $B \xrightarrow{F} A$.

Es transitiva: Para toda $A, B, C \in M_{m\times n}$. Si $A \xrightarrow{F} B$ y $B \xrightarrow{F} C$ entonces $A \xrightarrow{F} C$.

Teorema 27 *Sea A en M_n.*

1. *Si A es equivalente por fila a la identidad, $A \xrightarrow{F} I_n$, entonces A es producto de matrices elementales.*

2. *Si A es producto de matrices elementales entonces A es regular.*

3. *Si A es equivalente por columna a la identidad,$A \xrightarrow{C} I_n$, entonces A es producto de matrices elementales.*

4. *Si A es equivalente a la identidad, $A \longrightarrow I_n$, entonces A es producto de matrices elementales.*

5. *Si A es regular entonces A es equivalente por fila a la identidad.*

Corolario 28 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *A es equivalente por fila a la identidad.*

2. *A es producto de matrices elementales.*

3. *A es regular.*

Corolario 29 *Sean A, B matrices cuadradas de orden n.*

1. *Si A es singular y $A \xrightarrow{F} B$, entonces B es singular.*

2. *Si A es singular y $A \xrightarrow{C} B$, entonces B es singular.*

3. Si A es singular y $A \longrightarrow B$, entonces B es singular.

Demostración. Por transitividad de la implicancia tenemos que

$$A \text{ es regular } \Longrightarrow A \xrightarrow{F} I_n$$

lo cual es equivalente

$$A \text{ no es equivalente por fila } I_n \Longrightarrow A \text{ es singular.}$$

Usando la simetría y transitividad de la equivalencia por fila tenemos que B no es equivalente por fila a la Identidad, luego B es singular.

Observación. El teorema anterior nos entrega un método para determinar la inversa de una matriz regular mediante operaciones elementales.

Construyamos una nueva matriz de orden $n \times (2n)$ dada por $[A|I_n]$ y realizemos sobre ella las operaciones elementales necesarias para obtener a partir de A la matriz identidad, es decir

$$[A|I_n] \longrightarrow [I_n|B]$$

entonces en B tenemos efectuadas todas las operaciones que se realizarón a A, y por lo tanto

$$BA = I_n$$

luego

$$B = A^{-1}$$

Si operamos por columnas, entonces el procedimiento es análogo pero actuando sobre la matriz de orden $(2n) \times n$, dada por $\left[\begin{array}{c} A \\ \hline I_n \end{array}\right]$ y recordando que la matriz elemental columna post-multiplica a A.

Aún no disponemos de un método que permite saber anticipadamente si una matriz es regular o singular.

Teorema 30 *Si A es una matriz de orden n con una fila o columna de ceros, entonces A es singular.*

Demostración.

a) Supongamos que $f_i(A) = 0$ y como para cualquier $B \in M_n$ se tiene

$$f_i(AB) = f_i(A)B = 0B = 0,$$

entonces $AB \neq I_n$, para cualquier $B \in M_n$, por lo tanto A no es regular.

b) Supongamos que $c_j(A) = 0$ y como para cualquier $B \in M_n$ se tiene

$$c_j(BA) = Bc_j(A) = B0 = 0,$$

entonces $BA \neq I_n$, para cualquier $B \in M_n$, por lo tanto A no es regular.

Corolario 31 *Sean $A, B \in M_n$.*

Si $A \longrightarrow B$ y alguna fila o columna de B es cero entonces A es singular.

Ejemplo 26 *Las siguientes matrices son singulares*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo 27 *Hallar, si existe, la inversa de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solución. Usando Operaciones Elementales Filas, determinemos la inversa de A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{12} \\ F_{23}}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{31}(-1) \\ F_{32}(-2)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{23}(-2) \\ F_{13}(-1)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Luego A es regular y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 28 *Hallar, si existe, la inversa de* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solución. Usando Operaciones Elementales Filas, determinemos la inversa de B.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{12}(1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{12}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{12}(-2) \\ F_{32}(-2)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

realizando las operaciones elementales $F_{13}(\frac{1}{4}), F_{13}(1), F_{23}(-1)$ obtenemos

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Luego B es regular y

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Ejemplo 29 *Hallar, si existe, la inversa de* $C = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right]$

Solución. Usando operaciones elementales filas, calculemos la inversa de C.

$$\left[\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 11 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(-5) \\ F_{41}(-13)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 11 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & -36 & -13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 11 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & -36 & -13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{42}(-3)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 11 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Usando el corolario anterior, concluimos que C es singular.

Definición 32 *Una matriz E de orden $m \times n$ se dice* Escalonada Reducida por Fila *si y sólo si*

1. *El primer elemento no cero de cada fila (no nula) es 1 y la columna en que aparece es columna de la matriz identidad I_m (los demás coeficientes de la colunma son ceros).*

2. *Las filas nulas (si las hay) van abajo, es decir las primeras r columnas son no nulas y las restantes $m - r$ son nulas.*

3. *Si los unos, con que comienza cada fila no nula están en las posiciones* $(1, C_1), (2, C_2), \cdots (r, C_r)$, *entonces*
$$C_1 < C_2 < \cdots < C_r$$

Observación. Las matrices Identidad y Nula son siempre matrices Escalonada Reducida por Filas

Ejemplo 30 *Las siguientes matrices son ejemplos de Matrices Escalonadas por Filas.*

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *Aquí tenemos* $C_1 = 1, C_2 = 4.$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *Aquí tenemos* $C_1 = 1, C_2 = 3, C_3 = 4.$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *Aquí tenemos* $C_1 = 2, C_2 = 4, C_3 = 6.$

Teorema 33 *Toda matriz A de orden $m \times n$ es equivalente por fila a una única matriz Escalonada Reducida por Fila E.*

Demostración. La prueba que damos es "constructiva": desarrollaremos un procedimiento ordenado para obtener la forma Escalonada Reducida por Fila de cualquier matriz no nula.

1) Consideremos a_{11}, si $a_{11} = 0$, entonces consideremos, $a_{21}, a_{31,}$ etc., hasta encontrar algún $a_{i1} \neq 0$.

Si $c_1(A) = 0$ entonces consideremos a_{12}, el primer elemento de la segunda columna, que de ser cero nuevamente nos obliga a buscar en la misma columna algún elemento no nulo. De no enconstrarse algún elemento distinto de cero en la columna 2, repetimos el procedimiento en la columna siguiente y así sucesivamente hasta encontrar algún $a_{ij} \neq 0$.

Tal elemento debe existir pues de lo contrario la matriz A sería nula.

2) Una vez localizado el primer elemnto $a_{ij} \neq 0$ aplicando sobre A la Operación Elemental Fila $F_i\left(\frac{1}{a_{ij}}\right)$ y luego si $i \neq 1$ realizamos Operación Elemental Fila $F_{1i,}$ dejando así un 1 en la posición $(1, j)$.

3) A la matriz ya modificada se le aplica las siguientes Operaciones Elementales Filas $F_{k1}(-a_{kj})$, para todo $k > i$, con lo cual la columna j queda reducida a un 1 en su primer posición y 0 en todos los otros lugares.

4) A continuación consideremos en las columnas siguientes el mismo proceso de busqueda, es decir, a partir de la columna $j + 1$ y de la segunda fila. Si el coeficiente de la posición

$(2, j+1)$ es nulo entonces reiniciamos el proceso indicado en 1), una vez encontrado el elemento no cero aplicamos 2) y 3). Volviendo así sucesivamente a 4).

Observación. La demostración del teorema anterior es programable fácilmente en computador. El lector con experiencia en programación , puede construir un diagrama de flujo de la demostración.

Ejemplo 31 *Hallar la forma Escalonada Reducida por Fila de la Matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución. Seguiremos el procedimiento de la demostración del teorema 33

Consideremos el orden de busqueda, el primer elemento no nulo es a_{22}. Aplicando las Operaciones Elementales Filas $F_2(\frac{1}{2})$ y F_{12} obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_{31}(-1) \\ F_{41}(-1) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seguimos buscando en el orden establecido, el primer elemento no nulo, este es $a_{25} = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_{32}(-1) \\ F_{42}(-2) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

El elemento ahora es $a_{36} = -1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} F_3(-1) \\ \longrightarrow \\ F_{32}(-1) \\ F_{42}(-2) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así la matriz Escalonada Reducida por Fila de A es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Corolario 34 *Si A es de orden n y su Escalonada Reducida por Fila E, no tiene filas nulas entonces $E = I_n$.*

Observación. Dada una matriz A de orden $m \times n$ podemos obtener su matriz escalonada reducida por fila E, que tiene r filas no nulas, las cuales son columnas de la matriz I_m. Si a E aplicamos Operaciones Elementales Columnas ocupando los unos de cada fila no nula, entonces tenemos $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$.

Teorema 35 *Si A es una matriz de orden $m\times n$, no nula, entonces existe un entero positivo r tal que*

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

Teorema 36 *Si A es una matriz de orden n, entonces las siguientes tres proposiciones son equivalentes:*

1. *A es regular*
2. *A es equivalente por fila a la Identidad*
3. *A es producto de matrices elementales.*

Demostración. Solamente probamos que (1) implica (2).

Supongamos que A es regular, luego podemos obtener su matriz escalonada reducida por fila E asociada a A.

Si E tiene una fila nula entonces E es singular luego por corolario 31 tenemos que A es singular, lo que es una contradicción.

Por lo tanto E no tiene filas nulas y por corolario.34 tenemos que A es equivalente por fila a la identidad.

Teorema 37 *Si A, B son matrices de orden $m \times n$, entonces:*

1. *A es equivalente por fila a B si y sólo si existe una matriz regular P tal que $PA = B$.*
2. *A es equivalente por Columna a B si y sólo si existe una matriz regular Q tal que $AQ = B$.*
3. *A es equivalente a B si y sólo si existen dos matrices regulares P, Q tal que $PAQ = B$.*
4. *Existe una matriz P regular de orden m tal que PA es Escalonada Reducida por Fila de A.*
5. *Si $A \neq 0$, entonces existen un entero positivo r y matrices P, Q regulares tales que*

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Teorema 38 *Sean k, r enteros positivos tales que $r \leq \min\{m, n\}$, $k \leq \min\{m, n\}$ entonces*

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \textit{si y sólo si } k = r$$

Demostración.

Si $k = r$ entonces $\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$ luego $\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$.

Si $\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$ entonces por teorema existen matrices P y Q regulares tales que

$$\begin{aligned} P\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ P\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \end{aligned}$$

Comparando columnas tenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Supongamos $k > r$ entonces $n - k < n - r$ luego $P_3 = 0$, Además P_1 tiene más filas y columnas que Q_1 y que Q_2 luego de la igualdad se concluye que P_1 al menos tiene una fila nula. O sea, por Teorema 10 P_1 es singular.

Si P_1 es de orden k y singular por observación del Teorema 11 sabemos que si E_1 es su Escalonada Reducida por Fila, además E_1 es equivalente a $\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, con lo cual obtenemos

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_s & 0 & P_2 \\ 0 & 0 & P_4 \end{bmatrix}$$

Luego P es equivalente a una matriz singular ya que tiene una columna nula, por lo tanto P es singular lo que es una contradicción.

Ahora supongamos $k < r$ entonces $Q_2 = 0$. Además Q_1 tiene más filas y columnas que P_1 y que P_2 luego de la igualdad se concluye que Q_1 al menos tiene una fila nula.

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto Q tiene una fila nula, luego Q es singular, lo que es una contradicción.

Corolario 39 *Si A es una matriz de orden $m \times n$ no nula, entonces:*

1. *Existe un único entero positivo r tal que*

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. *Si $A \longrightarrow B$ y $A \longrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $B \longrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, es decir, "r" es un invariante de A, respecto de operaciones elementales.*

Observación. El Teorema 38 y corolario 39 constituye la culminación del tema de equivalencia de matrices de nuestro texto, pues permite establecer que cada matriz $A_{m\times n}$ tiene asociado un entero positivo "r" único e invariante respecto de Operaciones Elementales.

Definición 40 *Sea A una matriz de orden $m \times n$, se define el rango de A igual a r $(Rg(A) = r)$ si y sólo si $A \longrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

Observación. Haciendo uso de la definición anterior podemos reescribir el teorema anterior.

Proposición 41 *Dada A una matriz de orden n*

$$A \textit{ es regular si y sólo si } Rg(A) = n$$

Proposición 42 *Dadas A, B matrices de orden (m, n).*

$$A \longrightarrow B \textit{ si y sólo si } Rg(A) = Rg(B)$$

Ejercicios:

1. Dada las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   Determinar la Inversa de A y B si existe.

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Calcular la Inversa de A y B, si existe.

3. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

   Determinar el Rg(A) y Rg(B).

1.3. Determinante

Definición 43 *Asociado con cualquier matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n definimos el* determinante *de A, por recurrencia, como el número obtenido del siguiente modo:*

1. *Si $n = 1$, es decir, $A = [a]$ entonces $|A| = a$*
2. *Si $n > 1$, entonces*
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}|$$
donde $|A_{1j}|$ es el determinante de la submatriz, de orden $n-1$, obtenida desde A al eliminar la primera fila y la $j-$ésima columna.

Ejemplo 32 *Veremos los casos $n = 2$ y $n = 3$*

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$
$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$

Ejemplo 33 *Si $A = D[a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ entonces*
$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Teorema 44 *Sea A una matriz cuadrada de orden n.*

1. $|A| = |A^t|$.
2. *Si todos los coeficientes de cualquier fila o columna son ceros, su determinante es cero.*
3. *Si intercambiamos dos filas o columnas, el determinante cambia de signo.*
4. *Si multiplicamos por un número r todos los elementos de una fila o columna el determinante queda multiplicado por r.*
5. *Si los correspondientes coeficientes de dos filas o columnas están en una razón constante, el determinante es cero.*

6. *Si expresamos cada coeficiente de una fila o columna como la suma de dos términos, el determinante es igual a la suma de dos determinantes en cada uno de los cuales falta uno de los sumandos de cada coeficiente de aquella fila o columna.*

   En particular: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$

7. *Si se sustituye cualquier fila o columna por la suma de ella más k-veces otra fila o columna, el determinante de la matriz no cambia.*

8. $|I_n| = 1$

9. $|F_{ij}| = |C_{ij}| = -1$; $|F_i(r)| = |C_i(r)| = r$; $|F_{ij}(k)| = |C_{ij}(k)| = 1$, *con k, r escalares cualesquiera (inclusive cero).*

Corolario 45 *Sean A una matriz y E_1, E_2, matrices elementales, todas de orden n, entonces*

1. $|E_1A| = |E_1|\,|A| = |A|\,|E_1| = |AE_1|$.

2. $|E_1E_2| = |E_1|\,|E_2| = |E_2|\,|E_1| = |E_2E_1|$.

3. $|A| = -\,|F_{ij}A|$.

4. $|A| = |F_{ij}(k)A|$.

5. $|A| = \frac{1}{r}\,|F_i(r)A|$.

Teorema 46 *Sea A una matriz cuadrada de orden n. La matriz A es regular si y solamente si $|A| \neq 0$.*

Demostración. Sea A una matriz regular, por teorema 36

$$A = F_1F_2F_3\cdots F_s$$

Por corolario anterior tenemos

$$|A| = |F_1|\,|F_2|\,|F_3|\cdots|F_s|$$

Por teorema 44, el determinante de una matriz elemental es siempre distinto de cero. Luego $|A| \neq 0$.

Sea E_A la Escalonada Reducida por Fila de A, luego existe P regular tal que

$$\begin{aligned} PA &= E_A \\ |P|\,|A| &= |E_A| \\ |E_A| &\neq 0, \end{aligned}$$

y E_A es la matriz identidad (de lo contrario E_A tendría una fila de ceros y $|E_A| = 0$, lo que implicaría $|A| = 0$) así $PA = I$, esto significa que A es una matriz regular.

Teorema 47 *Sean A, B matrices de orden n.*

$$|AB| = |A|\,|B|$$

Demostración. Sean A, B matrices regulares de orden n

Caso I Supongamos que A es regular por teorema 36

$$A = F_1 F_2 F_3 \cdots F_s$$

Por corolario tenemos

$$\begin{aligned} |AB| &= |F_1|\,|F_2|\,|F_3| \cdots |F_s|\,|B| \\ |AB| &= |F_1 F_2 F_3 \cdots F_s|\,|B| \\ |AB| &= |A|\,|B|\,. \end{aligned}$$

Caso II Supongamos que B es regular, por teorema 36 tenemos

$$B = F_1' F_2' F_3' \cdots F_s'$$

Por corolario obtenemos

$$\begin{aligned} |AB| &= |A|\,|F_1'|\,|F_2'|\,|F_3'| \cdots |F_s'| \\ |AB| &= |A|\,|F_1' F_2' F_3' \cdots F_s'| \\ |AB| &= |A|\,|B|\,. \end{aligned}$$

Caso III Supongamos que A, B son singulares, entonces por teorema anterior las matrices singulares tienen determinante cero. Sea E_A la matriz escalonada reducida por fila de la matriz A con la última fila nula,

$$A = F_1 F_2 F_3 \cdots F_s E_A.$$

Luego

$$|AB| = |F_1|\,|F_2|\,|F_3| \cdots |F_s|\,|E_A B|\,.$$

La última fila de $E_A B$ es nula, ya que

$$f_n(E_A B) = f_n(E_A) B = 0B = 0.$$

Finalmente obtenemos que $|E_A B| = 0$, y así

$$|AB| = 0 = |A|\,|B|\,.$$

Teorema 48 *Sean i, j dos enteros positivos tales que $i, j \leq n$, y A una matriz de orden n entonces*

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} |A_{kj}| \qquad j\text{-ésima columna fija} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}| \qquad i\text{-ésima fila fija} \end{aligned}$$

Donde A_{ik} es la submatriz que se obtiene a partir de A al eliminar la i-ésima fila y la k-ésima columna.

Ejemplo 34 *Hallar $|A|$ si*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ -7 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución. Desarrollando por la segunda columna

$$\begin{aligned} |A| &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -7 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2(-8) - 1(-11) = 27 \end{aligned}$$

Ejemplo 35 *Hallar $|A|$ vía Operaciones elementales si*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ -7 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución.

$$\begin{aligned} |A| &\underset{F_{13}(-2)}{=} \begin{vmatrix} 16 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ -7 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} 16 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{F_{13}(1) \\ F_{23}(-5)}}{=} - \begin{vmatrix} 18 & 0 & -5 \\ -9 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 18 & -5 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} = 72 - 45 = 27 \end{aligned}$$

Definición 49 *Dada una matriz A cuadrada de orden n, se define la matriz adjunta de A,*

$$\begin{aligned} Adj(A) &= \left[\left((-1)^{i+j}\,|A_{ij}|\right)_{ij}\right]^t \\ &= \left[\left((-1)^{i+j}\,|A_{ji}|\right)_{ij}\right] \end{aligned}$$

Teorema 50 *Para toda matriz A de orden n se cumple*

$$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = |A|\, I_n$$

Observación. El teorema anterior permite desarrollar otro método para obtener la inversa de una matriz regular, llamado *método de la adjunta.*

Corolario 51 *Si A es una matriz regular entonces*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A).$$

Ejemplo 36 *Hallar, si existe, la inversa de A por método de la adjunta.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Desarrollo. Primero calculemos $|A| = (-3+0-8) - (6+0+0) = -5 \neq 0$

$$Adj(A) = [A_{ij}]^t = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^t$$

donde

$c_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$; $c_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4$; $c_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$;

$c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$; $c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$;

$c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$;

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} Adj(A) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 37 *Hallar, si existe, la inversa de* $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$

Calculemos su determinante

$$|A| = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} = a^2 - b^2$$

$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a;\ |A_{12}| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{vmatrix} = 0;\ |A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$

$|A_{21}| = -\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0; |A_{22}| = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2;\ |A_{23}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix} = 0;$

$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b;\ |A_{32}| = -\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2}\begin{bmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ -b & 0 & a \end{bmatrix},\ \text{con } a^2 - b^2 \neq 0$$

Observación. El método de la adjunta es más conveniente para invertir matrices con elementos literales.

Ejercicios:

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Calcular su Determinante.

2. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

   Calcular el determinante de AB^t y BA^t.

3. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

   Determinar la matriz Adjunta para cada una de las matrices dadas.

1.4. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Recordemos que $\mathbb{K}$ denota uno de los siguientes cuerpos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Q}$.

Una *Ecuación lineal* de n variables o incógnitas es una igualdad de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n$ y b son constantes en $\mathbb{K}$ y $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ son variables en $\mathbb{K}$.

Las constantes $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n$ son llamadas coeficientes de la ecuación y las variables $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ son las incógnitas de la ecuación.

Matricialmente la ecuación puede escribirse

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [b] \,.$$

El conjunto solución S de la ecuación, consiste de todas las $n-uplas$ en $\mathbb{K}$ (o matrices X en $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$) tales que al sustituir por sus componentes las respectivas incógnitas, la igualdad es verdadera, es decir,

$$S = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad / \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [b] \right\}$$

o bién

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \quad / \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [b] \right\}$$

Un *sistema de ecuaciones lineales* de n variables, es un conjunto finito de ecuaciones lineales de n variables cuyas incógnitas son comunes.

Así entonces

$$\begin{array}{ccc|} a_{11}x_{1+}a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_{1+}a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_{1+}a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \\ \hline \end{array}$$

o bién

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

es un sistema de m ecuaciones lineales de n incógnitas. Matricialmente se escribe como $A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$, donde A es la *matriz de coeficientes*, B es la *matriz constante* y X es la *matriz incógnita.*

Otra forma de anotar un sistema de ecuaciones, es mediante una *matriz aumentada,* esta es

$$[A|B]_{m\times(n+1)}$$

donde A y B son las matrices anteriormente definidas.

El conjunto solución S del sistema de ecuaciones lineales es la intersección de los conjuntos soluciones de las ecuaciones lineales que lo componen.

Así,

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \ldots.. \cap S_n,$$

donde cada S_i es el conjunto solución de la i-ésima ecuación del sistema.

Es importante destacar, que el conjunto solución S de un sistema de ecuaciones lineales puede ser descrito como sigue

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \quad / \quad A_{m\times n} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B_{m\times 1} \right\}$$

o bién

$$S = \left\{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad / \quad A_{m\times n} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B_{m\times 1} \right\}$$

Usamos indistintamente las dos formas adecuándolas a los desarrollos más cómodos del sistema y a las particularidades del problema que se esté resolviendo.

Definición 52 *Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales son* equivalentes *si y sólo si tienen el mismo conjunto solución.*

Especial importancia tienen en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, ciertas transformaciones u operaciones elementales que pueden realizarse en ellos sin que se altere el conjunto solución, o sea, de modo que el nuevo sistema obtenido sea *equivalente* al original.

Teorema 53 *Un sistema de ecuaciones lineales admite las siguientes transformaciones manteniendo (invariante) su conjunto solución.*

1. *Si dos ecuaciones se intercambian.*

2. *Si una ecuación es multiplicada por un escalar no nulo.*

3. *Si una ecuación es reemplazada, por ella más k veces otra ecuación.*

Demostración.

1. Inmediato, por la conmutatividad de la intersección.

2. En este caso basta demostrar que la ecuación multiplicada por el escalar no nulo tiene el mismo conjunto solución que la original, hecho que es directo por las propiedades de las igualdades en $\mathbb{K}$.

3. Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_{1+}a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_{1+}a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_{1+}a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right|$$

Consideremos la operación elemental consistente en reemplazar la ecuación j por la suma de k veces la ecuación i más la ecuación j. Puesto que todas las ecuaciones salvo la "j" son las mismas en ambos sistemas (el original y el transformado), será suficiente demostrar que las soluciones de los sistemas de ecuaciones formados por las ecuaciones i y j de los sistemas original y transformado son iguales, o sea, basta demostrar que si:

S_1 es solución de

$$\begin{array}{ll} 1) & a_{i1}x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{in}x_n=b_i \\ 2) & a_{j1}x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{jn}x_n=b_j \end{array}\Bigg|$$

y

S_2 es solución de

$$\begin{array}{ll} 1) & a_{i1}x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{in}x_n=b_i \\ 3) & ka_{i1}x_1+a_{ji}x_1+\ldots.+ka_{in}+a_{jn}x_n=kb_i+b_j \end{array}\Bigg|$$

entonces $S_1=S_2$.

Por lo tanto la operación realizada en el sistema no altera el conjunto solución.

Observación. Dada la correspondencia evidente entre las Operaciones Elementales Filas y las operaciones elementales de equivalencia entre sistemas de ecuaciones de este teorema se concluyen los siguientes corolarios.

Corolario 54 *Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si sólo si tienen matrices aumentadas equivalentes por fila.*

Definición 55 *Sea $AX=B$, un sistema de ecuaciones.*

Diremos que un sistema es inconsistente *si y sólo si su conjunto solución es el conjunto vacío.*

En caso contrario diremos que el sistema es consistente.

Ejemplo 38 *Resolver*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución. La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{F_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\overset{F_2(-\frac{1}{3})}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$\overset{F_{12}(-2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Luego el conjunto solución es

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\}.$$

Ejemplo 39 *Resolver*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución. La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \overset{F_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso tenemos que la segunda ecuación del sistema es

$$0x + 0y = 1$$

que es una contradicción.

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \phi$$

Ejemplo 40 *Resolver los sistemas:*

$$\left.\begin{array}{rl} x + y - z & = 1 \\ 2x - 3y + 2z & = 2 \\ 3x - 2y + z & = 3 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{rl} x + y - z & = 1 \\ 2x - 3y + 2z & = 2 \\ 3x - 2y + z & = 0 \end{array}\right|$$

Solución. Se observa que ambos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes pero diferentes matrices aumentadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvamos el primero escribiendo paralelamente la matriz aumentada:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y - z & = 1 \\ 2x - 3y + 2z & = 2 \\ 3x - 2y + z & = 3 \end{array}\right| \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

hacemos $F_{21}(-2)$ buscando la Escalonada Reducida por Fila de la aumentada

$$\left.\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ -5y+4z & =2 \\ 3x-2y+z & =3 \end{array}\right| \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

hacemos $F_{31}(-3)$

$$\left.\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ -5y+4z & =0 \\ -5y+4z & =0 \end{array}\right| \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

hacemos $F_{32}(-1), F_2(\frac{-1}{5})$

$$\left.\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ y-\frac{4}{5}z & =0 \\ 0 & =0 \end{array}\right| \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

finalmente hacemos $F_{12}(-1)$

$$\left.\begin{array}{rl} x-\frac{1}{5}z & =1 \\ y-\frac{4}{5}z & =0 \\ 0 & =0 \end{array}\right| \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ahora leemos las soluciones:

$$\left.\begin{array}{ll} x & =1+\frac{1}{5}z \\ y & =0+\frac{4}{5}z \\ z & =z \end{array}\right| \text{o sea} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

y el conjunto solución es

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \mid z \text{ en } \mathbb{R} \right\}$$

que geométricamente es una recta en $\mathbb{R}^3$que pasa por $(1,0,0)$ con dirección $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 1)$. La variable z se dice *independiente* o libre (notese que en este caso solo aparece una sola variable libre).

De inmediato notamos que no es necesario escribir las incógnitas x, y, z; el método es buscar la Escalonada Reducida por Fila de la matriz aumentada, el sistema tiene soluciones y tantas como z hay en $\mathbb{R}$, o sea, para cada z en $\mathbb{R}$ que se use, el trío resultante es solución; luego hay infinitas soluciones.

Resolvemos el segundo sistema, hacemos los mismos pasos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_{21}(-2) \\ \rightarrow \\ F_{31}(-3) \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} F_{32}(-1) \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

y llegamos sólo hasta aquí, puesto que al traducir la actual matriz aumentada a su forma de sistema queda en evidencia que se busca un (x, y, z) que cumpla con las tres siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 1 \\ & - & 5y & + & 4z & = 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = -3 \end{array}\right|$$

No hay solución (x, y, z) que las cumpla, así, la solución del segundo sistema es

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ en } \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{array}{rl} x + y - z & = 1 \\ 2x - 3y + 2z & = 2 \\ 3x - 2y + z & = 0 \end{array} \right\} = \phi$$

Se observa que podríamos haber resuelto ambos sistemas al poner desde el comienzo:

$$\left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Puesto que al tener ceros en la tercera fila de la matriz de coeficientes y un valor distinto de cero en la última fila de la quinta columna necesariamente tal sistema es inconsistente, o sea $S_2 = \phi$. Luego no considerando la quinta columna se sigue hasta hallar S_1.

Definición 56 *Dado el sistema*

$$AX = B.$$

Diremos que el sistema es homogéneo *si y sólo si* $B = 0$. *En caso contrario se dice que el sistema es* no homogéneo.

Observación 1. Dado que

$$A_{m\times n} \cdot 0_{m\times 1} = 0_{m\times 1}$$

todo sistema homogéneo

$$A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$$

es consistente.

Observación 2. Si A es regular entonces el sistema

$$AX = B$$

tiene solución única dada por $X = A^{-1} \cdot B$, luego el sistema es consistente.

Esta solución la podemos determinar usando el siguiente teorema.

Teorema 57 (Regla de Cramer) *Sea* $A = [a_{ij}]$, *matriz de orden* n, B *en* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $\triangle = |A| \neq 0$ *entonces el sistema* $AX = B$ *tiene única solución* $X = (x_1, ..., x_n)$ *y*

$$x_i = \frac{\triangle_i}{\triangle}, \qquad i = 1, 2, ..., n, \ \ donde$$

$$\triangle_i = \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{columna } i \text{ ésima} \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{2n} \\ & & \\ & & \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{array} \right| \end{array}$$

Demostración.

Si $\triangle = |A| \neq 0$ entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\triangle} Adj(A)$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\triangle}(Adj(A))B$$

luego $x_i = \dfrac{1}{\triangle} f_i(Adj(A))B = \dfrac{1}{\triangle}(b_1 A_{1i} + ... + b_n A_{ni}) = \dfrac{1}{\triangle}\triangle_i$

Definición 58 *Llamamos a* $\triangle$ determinante principal *del sistema de ecuaciones.*

Ejemplo 41 *Resolver por Cramer, si es posible, el sistema:*

$$\left. \begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 & = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \end{array} \right|$$

Desarrollo. La matriz del sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante es $|A| = (2 + 1 + 2) - (4 + 1 + 1) = -1 \neq 0$, luego el sistema tiene única solución (x_1, x_2, x_3),dado por

$$x_1 = \tfrac{1}{-1} \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(13 - 6) = -7$$

$$x_2 = \tfrac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-13 - (-5)) = 8$$

$$x_3 = \tfrac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(5 - 27) = 22$$

Ejemplo 42 *Usando el método de Cramer (cuando proceda) y el determinante principal del sistema, discutir en qué casos existe ninguna, una única o varias soluciones para el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+by+z & = & 1 \\ x+aby+z & = & b \\ x+by+az & = & 1 \end{array}\right| \text{ con } a,b \text{ reales.}$$

Encontrar las soluciones en cada caso.

Desarrollo.

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a^3-3a+2) = b(a-1)^2(a+2)$$

a) Si $\triangle \neq 0$ hay única solución, esto es $a \neq 1$ y $b \neq 0$ y $a \neq -2$

y la solución es (x,y,z) tal que

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}}{\triangle} = \frac{a^2-ab+b-a}{(a-1)^2(a+2)} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\triangle} = \frac{-2+(a+1)b}{(a+2)(a-1)b} \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & b & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}}{\triangle} = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \end{aligned}$$

b) Si $\triangle = 0$, hay infinitas soluciones o ninguna solución

Caso $a=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{F}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Luego, si $b=1$ y $a=1$ hay infinitas soluciones. Si $b \neq 1$ y $a=1$ no hay solución.

Caso $b=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right] \underset{F}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Luego si $b=0$ no hay solución.

Caso $a = -2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{F}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2b & 1 & b \\ 0 & -3b & 3 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 2+b \end{array}\right]$$

Luego, si $a = -2$ y $b = -2$ hay infinitas soluciones. Si $a = -2$ y $b \neq -2$ no hay solución.

Resumen:
Si $a \neq 1$, $b \neq 0$ y $a \neq -2$ entonces hay única solución.
Si $a = 1$ y $b = 1$ hay infinitas soluciones.
Si $a = 1$ y $b \neq 1$ no hay solución (conjunto solución vacio).
Si $b = 0$ no hay solución.
Si $a = -2$ y $b = -2$ hay infinitas soluciones.
Si $a = -2$ y $b \neq -2$ no hay solución.

Ejercicio 43 *¿Es verdadero que si A es matriz de orden n y $|A| = 0$, entonces $AX = b$ no tiene solución? Justifique.*

A continuación, se optimizan métodos que permitan encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales $(m \times n)$, (m ecuaciones y n incógnitas). Para ello utilizamos los corolarios del teorema 27, nos servimos de las operaciones elementales que preservan el conjunto solución, con el objeto de reducir los sistemas a otros equivalentes más simples y de los cuales pueda obtenerse su conjunto solución.

Definición 59 *Llamamos **Pivotear** en la posición (p, q) ($a_{pq} \neq 0$) a la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden $(m \times n)$, al proceso de aplicar $F_p(\frac{1}{a_{pq}})$, $F_{ip}(-a_{iq})$ con $i \neq p$ para $i = 1, 2......., m$, sucesivamente a la matriz hasta dejar su columna q como una columna de I_m. El coeficiente $a_{pq} \neq 0$ se dice **Pivote**.*

Ejemplo 44 *Pivotear la matriz A en la posición $(2, 3)$ donde* $A = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{F_2(\frac{1}{2})}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{F_{32}(-1)}{\overset{F_{12}(1)}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Ejemplo 45 *Resolver el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrl} & & & & & & x_5 & + & x_6 & = 1 \\ 2x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & & & & & = 4 \\ x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & = 1 \\ x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = 2 \end{array}\right| \text{ en } \mathbb{R}^6$$

Desarrollo. Consideremos la matriz aumentada, pensando en seis incógnitas x_i

$$\left[\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]\right] \rightarrow \left[\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]\right]$$

Ahora pivoteando en la posición $(1,2)$, es decir, aplicando $F_{31}(-1)$, $F_{41}(-1)$ obtenemos

$$\left[\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]\right] \rightarrow \left[\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right]$$

Así ya tenemos pivoteadas las columnas 2, 5, y 6.
Ahora las incógnitas correspondientes a columnas sin pivote son variables independientes.
Sean $x_1 = k_1$; $x_3 = k_2$; $x_4 = k_3$, así:

$$\begin{aligned} x_2 &= \ 2 - 3k_2 - k_3 \\ x_5 &= \ -1 \\ x_6 &= \ 2 \end{aligned}$$

En términos matriciales:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_1 \overset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + k_2 \overset{v_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + k_3 \overset{v_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

donde k_i son reales arbitrarios.
En este ejemplo $x_p = (0, 2, 0, 0, -1, 2)$ es una solución particular del sistema.
El conjunto solución resulta ser :

$$S = \{x_p + k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 \mid k_1, k_2, k_3 \text{ en } \mathbb{R}\}.$$

Existen tantas soluciones como tríos de reales (k_1, k_2, k_3). Por ejemplo si $(k_1, k_2, k_3) = (\sqrt{3}, -1, 1)$ escogido arbitrariamente

$$x_p + \sqrt{3}v_1 - v_2 + v_3 = (\sqrt{3}, 4, -1, 1, -1, 2)$$

es otra solución particular del sistema.
¿Es $(-8, 3, 0, -1, -1, 2)$ una solución del sistema?
Sí, basta verlo en la Escalonada Reducida por Fila de la matriz aumentada, o si no hallar

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 = -8 \\ x_3 &= k_2 = 0 \\ x_4 &= k_3 = -1 \end{aligned}$$

¿Es $(3,4,2,-1,0,1)$ una solución del sistema ?
No porque,

$$k_1 = x_1 = 3; k_2 = x_3 = 2; k_3 = x_4 = -1;$$

pero,

$$x_2 = 4 = 2 - 3k_2 - k_3 = 2 - 6 - (-1) = -3.$$

Observemos también, que la resolución en $\mathbb{R}^6$ del ejercicio anterior exige usar una variable x_1 que no está explícita en el sistema original. No escribir la primera columna (de cero) en la resolución, equivale a resolver en $\mathbb{R}^5$ un problema diferente ya que se pierde un grado de libertad (una variable independiente x_1).

Ejemplo 46 *Resolver*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
-x_1 & & & - & x_3 & & & & & - & 7x_6 & + & x_7 & = & 3 \\
2x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & & & + & 2x_6 & & & = & 0 \\
3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & & & - & 4x_6 & & & = & 2 \\
x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & & & = & 1 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & & & - & 11x_6 & + & x_7 & = & 5
\end{array}$$

Desarrollo.

Para obtener la solución de este sistema podemos realizarlo de dos formas distintas, la primera de ella es buscar .la Escalonada Reducida por Fila de la matriz aumentada.

En este caso procedemos de la siguiente forma.

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r}
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -7 & 1 & 3 \\
2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 3 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 2 & 0 & 0 & -11 & 1 & 5
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{rrrrrrr|r}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12 & 2 & 6 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -25 & 3 & 11 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -7 & 1 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -25 & 3 & 11
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -25 & 3 & 11 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -7 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12 & 2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{rrrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 14 & -2 & -7 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -25 & 3 & 11 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -7 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12 & 2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Así obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & -7 + x_5 - 14x_6 + 2x_7 \\
x_2 & = & 11 + 25x_6 - 3x_7 \\
x_3 & = & 4 - x_5 + 7x_6 - x_7 \\
x_4 & = & 6 + 12x_6 - 2x_7
\end{array}$$

y realizando el siguiente cambio $x_5 = k_1$; $x_6 = k_2$; $x_7 = k_3$ tenemos

$$\begin{array}{l}
x_1 = -7 + k_1 - 14k_2 + 2k_3 \\
x_2 = 11 + 25k_2 - 3k_3 \\
x_3 = 4 - k_1 + 7k_2 - k_3 \\
x_4 = 6 + 12k_2 - 2k_3
\end{array} .$$

En terminos matriciales obtenemos

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -14 \\ 25 \\ 7 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } k_i \in \mathbb{R}$$

Un segundo método es pivotear la matriz aumentada original escogiendo los pivotes más convenientes (lo que equivale a realizar un cambio de variables para alterar el orden de las columnas o variables en la matriz)

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & -11 & 1 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrrrrrr|r} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -7 & \boxed{1} & 3 \\ 2 & 0 & 2 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Si tenemos presente el siguiente cambio de variables solo como información

$$y_1 = x_7; \quad y_2 = x_4; \quad y_3 = x_2; \quad y_4 = x_5$$

obtenemos que en este caso una matriz Escalonada Reducida por Fila.

Volvamos a las variables originales y usemos $x_1 = k'_1$; $x_3 = k'_2$; $x_6 = k'_3$

$$\begin{aligned} x_7 &= 3 + k'_1 + k'_2 + 7k'_3 \\ x_4 &= 0 + -2k'_1 - 2k'_2 - 2k'_3 \\ x_2 &= 2 - 3k'_1 - 3k'_2 + 4k'_3 \\ x_5 &= 1 - k'_1 - 2k'_2 \end{aligned}$$

en terminos matriciales obtenemos

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + k'_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k'_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k'_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{con } k'_i \in \mathbb{R}$$

El conjunto solución está descrito de distinto modo, lo que puede hacer pensar que son conjuntos distintos, lo cual es falso. Lo anterior lo podemos comprobar realizando el siguiente cambio de variables $k_1 = 1 - k_1' - 2k_2'$, $k_2 = k_3'$, $k_3 = 3 + k_1' + k_2' + k_3'$ en

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -14 \\ 25 \\ 7 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando el cambio de variables y sumando obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + k_1' + 0k_2' + 0k_3' \\ 2 - 3k_1' - 3k_2' + 4k_3' \\ 0 + 0k_1' + 1k_2' + 0k_3' \\ 0 - 6k_1' + -2k_2' - 2k_3' \\ 1 - k_1' - 2k_2' + 0k_3' \\ 0 + 0k_1' + 0k_2' + 1k_3' \\ 3 + k_1' + k_2' + 7k_3' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + k_1' \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2' \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3' \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

En la forma reducida de un sistema de ecuaciones lineales, pueden distinguirse dos números que están asociados con las variables del sistema.

Uno de estos números corresponde al número de variables que pueden ser despejadas en el sistema simplificado, este es el número de pivotes usados en la matriz aumentada, lo que es igual al número de filas no nulas de la Escalonada Reducida por Filas de la matriz aumentada, en otras palabras el rango de la matriz aumentada.

El otro, es el número de las variables llamadas independientes o libres.

Así tenemos la siguiente propiedad.

El número de variables o incognitas del sistema es igual al número de variables independientes más el número de variables despejadas.

Proposición 60 *Dados los siguientes sistema de ecuaciones*

$$Ax = 0; \quad Ax = B$$

con $Ay_p = B$, *es decir,* y_p *es una solución particular del sistema no homogéneo entonces*

$$\{y \quad / \quad Ay = B\} = \{y_p + y \quad / \quad Ay = 0\}$$

Es decir, El conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales no homogéneo se obtiene a partir de una solución particular más una solución de la ecuación homogénea.

Demostración. Sea S el conjunto solución del sistema $Ax = B$, con $y_p \in S$, debemos probar la siguiente igualdad de conjuntos

$$\begin{aligned} S &= \{x \quad / \quad Ax = B\} \\ &= \{x \quad / \quad x = y_p + y \text{ con } Ay = 0\} \end{aligned}$$

Primeros probaremos

$$\{x \quad / \quad x = y_p + y \text{ con } Ay = 0\} \subset S$$

Sea $x = y_p + y$ con $Ay = 0$, entonces

$$\begin{aligned} Ax &= A(y_p + y) \\ &= Ay_p + Ay \\ &= B + 0 \\ &= B \end{aligned}$$

luego $x \in S$.

Ahora probaremos la otra contención

$$S \subset \{x \quad / \quad x = y_p + y \text{ con } Ay = 0\}$$

Sea $x \in S$, entonces apliquemos A al vector $(x - y_p)$

$$A(x - y_p) = Ax - Ay_p = B - B = 0$$

Luego, $x - y_p$ es una solución del sistema homogéneo, además

$$x = y_p + (x - y_p)$$

es decir,

$$x \in \{x \quad / \quad x = y_p + y \text{ con } Ay = 0\}.$$

Se recomienda al alumno verificar o comprobar que en los ejemplos anteriores, toda solución del sistema se puede escribir como suma de una solución particular y una solución del sistema homogéneo, las que se pueden leer a partir de la escalonada reducida por fila del sistema.

Teorema 61 *Dado un sistema $A_{m\times n}X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$ con E matriz Escalonada Reducida por Filas de A y*

$$[A \mid B] \to [E \mid b]\,,$$

entonces se cumple

1. *Si $Rg([E \mid b]) > Rg(E)$, entonces el conjunto solución del sistema es vacío.*

2. *Si $Rg([E \mid b]) = Rg(E) = r < n$, entonces el conjunto solución del sistema es infinito. (Dicho de otra manera el sistema tiene infinitas soluciones).*

3. *Si $Rg(E) = Rg([E \mid b]) = n$, entonces el conjunto solución del sistema tiene un único elemento. (Dicho de otra manera el sistema tiene única solución).*

Ejemplo 47 *Dado el sistema*

$$\left.\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ 2x-3y+2z & =3 \\ 3x-2y+az & =b \end{array}\right|$$

Determinar a, b de modo que el sistema tenga infinitas soluciones y explicítelas.

Solución. La matriz asociada al sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & a \end{bmatrix}$$

y su determinante es $-5a+5$, por teorema de Cramer tenemos que si $-5a+5 \neq 0$ el sistema tiene única solución.

Por lo tanto debemos analizar el caso $-5a+5=0$, es decir $a=1$

Consideremos la matriz aumentada del sistema con $a=1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & b \end{array}\right]$$

Cuya matriz reducida es

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right].$$

Como $Rg(A) = 2$, entonces tenemos:

$$Rg([A|B] = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad b = 4 \\ \\ 3 & \text{si} \quad b \neq 4 \end{cases}$$

Si $b \neq 4$, entonces $Rg(A) \neq Rg([A|B]$ y el conjunto solución es

$$S = \phi$$

Si $b = 4$, entonces $Rg(A) = Rg([A|B] < 3$ y el conjunto solución es

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad / \quad \left.\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ 2x-3y+2z & =3 \\ 3x-2y+z & =4 \end{array}\right| \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad / \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} + \frac{1}{5}t \\ -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}t \\ t \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} t \quad / \quad t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Definición 62 *Sea A matriz de orden $m \times n$.*

Llamaremos núcleo de A al conjunto solución del sistema homogéneo $Ax = 0$. Anotamos

$$N(A) = \{x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \quad / \quad Ax = 0\}$$

Teorema 63 *Dado el sistema de ecuaciones lineales con n incognitas $Ax = b$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $Rg(A) = n$
2. $N(A) = \{0\}$
3. $\{x \quad / \quad Ax = b\} = \{x_p\}$.

Corolario 64 *Sea A una matriz de orden n.*

1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*
   a) $|A| \neq 0$
   b) *El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene única solución $x = 0$*
   c) *A es regular.*
2. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*
   a) $Rg(A) < n$
   b) *El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones*
   c) *A es singular*
   d) $|A| = 0$

Método del Pivote:
Otra manera de obtener la solución general de un sistema, es el siguiente:

1. Se pivotea la matriz ampliada del sistema
2. Se asigna el valor 1 a una variable libre y 0 a las restantes.
3. Se calculan las variables dependientes en base a los valores anteriormente asignados, y se resuelve el sistema homogéneo, así construimos un vector solución y_1 del sistema homogéneo.
4. Se asigna nuevamente el valor 1 a otra variable libre y 0 a las restantes y procedemos como en 3.
5. Una vez que todas las variables libres han sido sustituidas por 1 en alguna oportunidad, (como en 3), obtenemos k soluciones distintas y_j donde k es el número de variables libres.

6. El conjunto solución del sistema homogéneo se expresa entonces:

$$S = \{y \ / \ y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_k y_k, \text{con } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i\}$$

7. Una solución particular del sistema no homogéneo se obtiene reemplazando por 0 todas las variables libres.

Ejemplo 48 *Resolvamos el siguiente sistema $Ax = b$, donde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & -7 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 8 & \boxed{1} & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & \boxed{1} & 4 & -7 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución. La matriz está pivoteada en las posiciones (1,2); (2,4); (3,5).

Sabemos que hay cuatro variables libres y tres dependientes del sistema $Ax = 0$.

Para determinar la primera solución, le asignamos el valor 1 a la primera variable independiente y cero a las otras con ello obtenemos el vector $v_1 = (1, a, 0, b, c, 0, 0)$, para determinar los coeficientes que faltan resolvemos

$$Av_1^t = 0$$

Multiplicando tenemos.

$$1 + a = 0; \quad 2 + b = 0; \quad 0 + c = 0$$

Así obtenemos que

$$v_1 = (1, -1, 0, -2, 0, 0, 0)$$

Para determinar la segunda solución, le asignamos el valor 1 a la segunda variable libre y cero a las restantes con ello formamos el vector $v_2 = (0, a, 1, b, c, 0, 0)$, para determinar los coeficientes restantes, debemos resolver

$$Av_2^t = 0$$

Multiplicando obtenemos.

$$-7 + a = 0; \quad 8 + b = 0; \quad 9 + c = 0$$

Así tenemos

$$v_2 = (0, 7, 1, -8, -9, 0, 0)$$

Procediendo de manera similar obtenemos

$$v_3 = (0, -2, 0, -3, -4, 1, 0) \quad v_4 = (0, 5, 0, 6, 7, 0, 1)$$

La solución particular la obtenemos asignando 0 a las variables libres y determinando las otras.

$$x_p = (0, a, 0, b, c, 0, 0)$$

para ello resolvemos

$$Ax_p^t = B$$

Multiplicando

$$a = 2; \quad b = 10; \quad c = 1$$

Así tenemos

$$x_p = (0, 2, 0, 10, 1, 0, 0)$$

Finalmente el conjunto solución es

$$\{x_p + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \mid \alpha_i \text{ en } \mathbb{R}\}.$$

con

$$\begin{array}{rcl} x_p & = & (0, 2, 0, 10, 1, 0, 0) \\ v_1 & = & (1, -1, 0, -2, 0, 0, 0) \\ v_2 & = & (0, 7, 1, -8, -9, 0, 0) \\ v_3 & = & (0, -2, 0, -3, -4, 1, 0) \\ v_4 & = & (0, 5, 0, 6, 7, 0, 1) \end{array}$$

Ejercicios:

1. Dada las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 20 & 2 & -1 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

Encontrar el conjunto solución de la ecuación matricial , para cada valor de a en los reales.

$$A \cdot X = BC$$

2. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -8 & a \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

Encontrar el conjunto solución de la ecuación matricial , para cada valor de a en los reales.

$$A \cdot X = B$$

3. Dados los sistemas

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + 3y - z & = & a \\ x - y - z & = & 2 \\ x + y - z & = & 3 \end{array}\right| \quad , \quad \left.\begin{array}{rcl} x + 3y + z & = & a \\ x - y - z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 3 \end{array}\right|$$

Resolverlo mediante Operaciones Elementales Filas.

4. Sean
$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+4y-z+w & = & 1 \\ 3x+6y+2y+2w & = & 3 \\ x+2y+3z+aw & = & 3 \end{array}\right|$$

   a) Determinar el valor de a de modo que el sistema tenga solución.
   b) Para $a = 2$, determinar el conjunto solución.

5. Sean
$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y+2z+aw & = & 1 \\ 3x+6y+6y+2w & = & 3 \\ 2x+3y+4z+2w & = & 1 \end{array}\right|$$

   a) Determinar el valor de a de modo que el sistema tenga solución.
   b) Para $a = 2$, determinar el conjunto solución.

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

La noción de espacio vectorial se obtiene al comparar una variedad de ejemplos (Matrices, Polinomios, Funciones, etc.), en los cuales están definidas dos operaciones (suma y multiplicación) las que nos permiten operar en distintos ambientes de manera análoga, es decir, podemos agrupar estos conjuntos con una estructura muy similar.

Recordemos la definición de grupo dada en el libro de Matemáticas para Ingeniería.

2.1. Grupos

Definición 65 *Sea G un conjunto no vacío y $*$ una operación en G. Diremos que G es un* grupo *bajo la operación $*$ si las siguientes tres afirmaciones son ciertas.*

i) Asociatividad:

Para todo x, y, z en G, se cumple

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

ii) Existencia de elemento neutro:

Existe e, elemento neutro en G, tal que para todo x en G, se tiene

$$x * e = e * x = x$$

iii) Existencia de elementos inversos:

Para todo x en G, existe x' en G tal que

$$x * x' = x' * x = e$$

Esto se denota resumidamente; $(G, *)$ *es grupo.*

Si además se verifica;

iv) Conmutatividad:

Para todo x, y en G, se cumple

$$x * y = y * x$$

entonces $(G, *)$ es un *grupo Abeliano* o simplemente G es un grupo Abeliano, subentendiendo que hay una operación $(*)$.

Ejemplo 49 *Recordemos de la asignatura de calculo 1, los siguientes ejemplos:*

El conjunto de los números reales con la suma.

El conjunto de los números reales no nulo con el producto.

El conjunto de las funciones con la suma.

Otros ejemplos los puede encontrar en el libro de Matemáticas para Ingeniería.

Definición 66 *Se dice* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *es un cuerpo si y sólo si se cumple:*

i) $(\mathbb{K}, +)$ *es un grupo abeliano, con* e *neutro aditivo.*

ii) $(\mathbb{K} - \{e\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano.*

iii) *Distributividad:*

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{K})(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$$

Ejemplo 50 *Análogamente los ejemplos de cuerpos que usted conoce son:*

El conjunto de los números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$.

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$.

El conjunto de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$.

Observación. También usted conoce ejemplos de conjuntos en los cuales están definidas dos operaciones, pero no es un cuerpo, como es el que presentamos en el capítulo anterior, es decir las matrices cuadradas de orden 2.

2.2. Espacios vectoriales

Definición 67 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, se dice que $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ o un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial si y sólo si cumple con:*

1. *$(V,+)$ es un grupo abeliano.*
2. *$\cdot : \mathbb{K}\times V \to V$, es una función que cumple:*
   a) $(\forall a \in \mathbb{K})(\forall x, y \in V)(a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y)$
   b) $(\forall a, b \in \mathbb{K})(\forall y, z \in V)((a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x)$
   c) $(\forall a, b \in \mathbb{K})(\forall y, z \in V)((ab)\cdot x = a\cdot(b\cdot x))$
   d) $(\forall x \in V)(1\cdot x = x)$

Los ejemplos más conocidos son:

Ejemplo 51 *Las matrices de orden $n\times m$, esto es $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con la suma de matrices y multiplicación por escalar.*

Primero explicitemos la suma de matrices.

$$\begin{array}{rccc} +: & M_{n\times m}(\mathbb{K})\times M_{n\times m}(\mathbb{K}) & \to & M_{n\times m}(\mathbb{K}) \\ & (A,B) & \to & A+B \end{array}$$

donde $A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}]$.

Ahora explicitemos la multiplicación de una matriz por un escalar.

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K}\times M_{n\times m}(\mathbb{K}) & \to & M_{n\times m}(\mathbb{K}) \\ & (a,A) & \to & a\cdot A \end{array}$$

donde $a\cdot A = a\cdot[a_{ij}] = [a\cdot a_{ij}]$.

Ejemplo 52 *$\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, con las operaciones de suma por coordenadas y multiplicación por un escalar.*

Primero explicitemos la suma de n-uplas.

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,y) & \to & x+y \end{array}$$

donde $x+y = (x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$.

Ahora explicitemos la multiplicación de una n-upla por un escalar.

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (a,x) & \to & a\cdot x \end{array}$$

donde $a\cdot x = a\cdot(x_i) = (a\cdot x_i)$.

Ejemplo 53 *$\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, con las operaciones de suma por coordenadas y multiplicación por un escalar.*

Primero explicitemos la suma de n-uplas.

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & (x,y) & \to & x+y \end{array}$$

donde $x+y=(x_i)+(y_i)=(x_i+y_i)$.

Ahora explicitemos la multiplicación de una n-upla por un escalar.

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & (a,x) & \to & a\cdot x \end{array}$$

donde $a\cdot x=a\cdot(x_i)=(a\cdot x_i)$.

Ejemplo 54 *$\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, con las operaciones suma por coordenadas y multiplicación por escalar.*

Primero explicitemos la suma de n-uplas.

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & (x,y) & \to & x+y \end{array}$$

donde $x+y=(x_i)+(y_i)=(x_i+y_i)$.

Ahora explicitemos la multiplicación de una n-upla por un escalar.

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & (a,x) & \to & a\cdot x \end{array}$$

donde $a\cdot x=a\cdot(x_i)=(a\cdot x_i)$.

Note que la diferencia entre los tres ejemplos anteriores está en donde varían los coeficientes o los escalares.

Ejemplo 55 *Sea A un conjunto entonces*

$$F(A,\mathbb{R})=\{f:A\to\mathbb{R} \quad / \quad f \text{ es función}\},$$

es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, con las operaciones de suma de funciones y multiplicación por un escalar.

Primero explicitemos la suma de funciones.

$$\begin{array}{rccc} + : & F(A,\mathbb{R}) \times F(A,\mathbb{R}) & \to & F(A,\mathbb{R}) \\ & (f,g) & \to & f+g \end{array}$$

donde $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

Ahora explicitemos la multiplicación de una función por un escalar.

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times F(A,\mathbb{R}) & \to & F(A,\mathbb{R}) \\ & (a,f) & \to & a\cdot f \end{array}$$

donde $(a\cdot f)(x)=a\cdot(f(x))$.

Ejemplo 56 *Sea* $A =]0,1[$ *un intervalo de números reales entonces*

$$C^n(\mathbb{R}) = \left\{ f \in F(]0,1[\,,\mathbb{R}) \quad / \quad f^{(n)} \text{ es continua en }]0,1[\right\},$$

es un $\mathbb{R}-$ *espacio vectorial.*

Las operaciones son análogas, ya que estamos trabajando con funciones, solamente debemos recordar que si dos funciones son continuas (derivables) la suma es continua (derivable), el mismo resultado lo tenemos para la multiplicación por escalar.

Ejemplo 57 *Sea* $L = \{f \in F([0,1],\mathbb{R}) \quad / \quad f \text{ es } \mathbb{R}\text{-integrable en } [0,1]\}$ *entonces* L *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

En este caso las operaciones son la suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar, y ahora recordamos que, si dos funciones son $\mathbb{R}$-integrable entonces la suma es $\mathbb{R}$-integrable, el resultado análogo lo tenemos para la multiplicación por escalar.

Ejemplo 58 *Sea* $\mathbb{K}[x] = \{\text{Los polinomios en la variable } x \text{ con coeficientes en } \mathbb{K}\}$, *es decir* $\mathbb{K}[x]$ *es el conjunto de los polinomios* $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$. *con* $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ *y* $n \in \mathbb{N}$.

Primero explicitemos la suma de polinomios.

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{K}[x]\times\mathbb{K}[x] & \to & \mathbb{K}[x] \\ & (p(x),q(x)) & \to & p(x)+q(x) \end{array}$$

donde $p(x) + q(x) = \sum a_ix^i + \sum b_ix^i = \sum(a_i + b_i)x^i$.

Ahora explicitemos la multiplicación de un polinomio por un escalar.

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K}\times\mathbb{K}[x] & \to & \mathbb{K}[x] \\ & (a,p(x)) & \to & a\cdot p(x) \end{array}$$

donde $a \cdot p(x) = a \cdot \sum a_ix^i = \sum a \cdot a_ix^i$.

Teorema 68 *Sea* $(V, +, \cdot)$ *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *entonces tenemos:*

1. *Sean* $u, v, w \in V$ *entonces*

$$(u + v = u + w) \Longleftrightarrow (v = w)$$

2. *Sean* $u, v \in V$, $a \in \mathbb{K}^*$ *entonces*

$$(au = av) \Longleftrightarrow (u = v)$$

3. *Sean* $\overrightarrow{0} \in V$, *neutro aditivo* $a \in \mathbb{K}$ *entonces*

$$a\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

4. *Sean* $v \in V$, $0 \in \mathbb{K}^*$ *entonces*
$$0v = \overrightarrow{0}$$

5. *Sean* $v \in V$, $a \in \mathbb{K}$ *entonces*
$$(av = \overrightarrow{0}) \Longleftrightarrow (v = \overrightarrow{0} \vee a = 0)$$

Ejemplo 59 *Sean* $u = (1, 2)$, $v = (2, -3)$, $w = (-1, 3)$ *vectores en* $\mathbb{R}^2$, *resolver la ecuación*
$$2(x + u) + 3w = 5v$$

Solución. Como $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, luego
$$\begin{aligned} 2(x + u) + 3w &= 5v \\ 2x + 2u + 3w &= 5v \\ 2x &= 5v - 2u - 3w \\ x &= 1/2(5v - 2u - 3w) \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos
$$x = (11/2, -14).$$

Ejemplo 60 *Sean* V *un* $\mathbb{R}$-*espacio vectorial,* u, v, w *vectores en* V.
Resolver la ecuación
$$2(x + u) + 3(w - u) = 2(v + w)$$

Solución. Como V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, luego
$$\begin{aligned} 2(x + u) + 3(w - u) &= 2(v + w) \\ 2x + 2u + 3w - 3u &= 2v + 2w \\ 2x + 3w - u &= 2v + 2w \\ 2x &= 2v + u - w \\ x &= 1/2(2v + u - w) \end{aligned}$$

Ejemplo 61 *Sean* V *un* $\mathbb{K}$-*espacio vectorial,* u, v, w *vectores en* V *y* a, b *elementos en* $\mathbb{K}$, *con* a *no nulo. Resolver la ecuación*
$$a(x + u) + b(w - u) = b(v + w)$$

Solución. Como $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, luego
$$\begin{aligned} a(x + u) + b(w - u) &= b(v + w) \\ ax + au + bw - bu &= bv + bw \\ ax + (a - b)u &= bv \\ ax &= bv - (a - b)u \end{aligned}$$

obtenemos
$$x = \frac{1}{a}(bv - (a - b)u).$$

Ejercicio 62 *Sea $V = \mathbb{R}$ y definamos las siguientes operaciones en V.*

$$\begin{aligned} * &: V \times V \to V;\ x * y = x + y + xy \\ \star &: \mathbb{R} \times V \to V;\ \alpha \star y = \alpha x \end{aligned}$$

Determinar que propiedades de $\mathbb{R}-$ espacio vectorial, no cumple.$(V, *, \star)$

2.3. Subespacios Vectoriales

Definición 69 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U un subconjunto de V. Se dice que U es un subespacio vectorial de V si y sólo si U es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con las mismas operaciones (suma y producto) de V.*

Notación. U es un subespacio vectorial de V lo denotamos por $U \leq V$.

Ejemplo 63 *Algunos de estos ejemplos los obtenemos del capítulo anterior.*

1. *Las matrices triangulares superiores (inferiores) de orden n, forman un subespacio (del espacio vectorial) de las matrices de orden n.*

2. *Las matrices simétricas (antisimétricas) de orden n, forman un subespacio de las matrices de orden n.*

3. *Las matrices diagonales de orden n, forman un subespacio de las matrices de orden n.*

4. *Cada Recta (Plano) que pasa por el origen en $\mathbb{R}^n$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

5. *El conjunto solución de un sistema homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.*

6. *El conjunto de las funciones pares es un subespacio de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

7. $\mathbb{K}_n[x] = \left\{ \begin{array}{c} \textit{Los polinomios en la variable } x \textit{ con coeficientes en } \mathbb{K}, \textit{ de} \\ \textit{grado menor o igual que } n \textit{ incluyendo al polinomio nulo} \end{array} \right\}$ *es un subespacio de $\mathbb{K}[x]$.*

Teorema 70 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U un subconjunto de V. U es un subespacio de V si y sólo si se cumplen:*

i) El neutro aditivo de V pertenece a U o simplemente $\overrightarrow{0} \in U$.

ii) La clausura aditiva con elementos de U.

Si para todo $u, v \in U$ entonces $u + v \in U$.

iii) La clausura multiplicativa.

Si para todo $u \in U$ y $a \in K$ entonces $au \in U$.

Observación. En los siguientes ejemplos demostraremos lo afirmado anteriormente.

Ejemplo 64 *Las matrices simétricas (antisimétricas) de orden n, forman un subespacio de las matrices de orden n.*

Demostración. Una matriz es simétrica si cumple la propiedad

$$A^t = A$$

i) La matriz nula es claramente simétrica, ya que $0^t = 0$.

ii) Ahora sean A, B dos matrices simétricas, demostraremos que la suma es simétrica

$$\begin{aligned}(A+B)^t &= A^t + B^t \\ &= A + B\end{aligned}$$

Así entonces tenemos que $A + B$ es simétrica.

iii) Falta demostrar, dada una matriz simétrica la multiplicación por escalar es simétrica.

$$\begin{aligned}(aA)^t &= a \cdot A^t \\ &= a \cdot A\end{aligned}$$

Por lo tanto, aA es simétrica, así hemos demostrado que el conjunto de las matrices simétricas son un subespacio vectorial de las matrices de orden $n \times n$.

Ejemplo 65 *El conjunto solución de un sistema homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo lo podemos describir

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \quad / \quad Ax^t = 0\right\}$$

donde A es matriz de orden $m \times n$.

i) Como $A \cdot 0 = 0$, luego tenemos que el vector nulo es solución del sistema.

ii) Sean x, y dos soluciones del sistema, demostremos que $x + y$, es solución.

$$\begin{aligned}A(x+y)^t &= A(x^t + y^t) \\ &= Ax^t + Ay^t \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Así tenemos que $x + y$ es solución.

iii) Ahora demostremos, dado x solución del sistema y a un escalar entonces ax también es solución

$$\begin{aligned} A(ax)^t &= A(ax^t) \\ &= a(Ax^t) \\ &= a \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Con lo cual demostramos que ax es solución del sistema.

Por lo tanto, el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 66 *El conjunto de las funciones pares es un subespacio de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Demostración. El conjunto de las funciones pares lo podemos describir por

$$\{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad / \quad (\forall x \in \mathbb{R})(f(x) = f(-x)\}$$

i) En primera instancia podemos comprobar que la función nula $\hat{0}$, es una función par, ya que

$$\begin{aligned} \hat{0}(-x) &= 0 \\ \hat{0}(x) &= 0 \end{aligned}$$

ii) Ahora veamos la suma de funciones pares, para ello consideremos f, g dos funciones pares, demostremos que $f + g$ es par.

$$\begin{aligned} (f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= f(x) + g(x) \\ &= (f+g)(x). \end{aligned}$$

iii) Nos falta demostrar que dado f una función par y a un escalar entonces af es una función par.

$$\begin{aligned} (af)(-x) &= a \cdot f(-x) \\ &= a \cdot f(x) \\ &= (af)(x). \end{aligned}$$

Con lo cual demostramos que el conjunto de las funciones pares es un subespacio vectorial de las funciones.

Ejemplo 67 *Las matrices triangulares superiores de orden n, forman un subespacio de las matrices de orden n.*

Solución. Describamos el conjunto de matrices triangulares superiores.

$$\{A = [a_{ij}] \in M(n, \mathbb{K}) \quad / \quad a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$$

i) Claramente la matriz nula satisface la condición, ya que todos sus coeficientes son nulos.

ii) Ahora consideremos A, B dos matrices triangulares superiores, veremos que $A + B$ es una matriz triangular superior.

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}] + [b_{ij}] \\ &= [a_{ij} + b_{ij}] \,. \end{aligned}$$

Como A, B son matrices triangulares superiores, luego $a_{ij} = 0$ y $b_{ij} = 0$, si $i > j$, por lo tanto $a_{ij} + b_{ij} = 0$, siempre que $i > j$.

iii) En la tercera parte de la demostración, tenemos que verificar que: Si A es una matriz triangular superior y a es un escalar entonces aA es triangular superior.

$$\begin{aligned} aA &= a\,[a_{ij}] \\ &= [a \cdot a_{ij}] \end{aligned}$$

Como A es una matriz triangular superior, luego $a_{ij} = 0$ si $i > j$, así obtenemos que $a \cdot a_{ij} = 0$ si $i > j$.

Por lo tanto, el conjunto de matrices triangulares superiores de orden n es un subespacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n.

Ejercicio 68 *Para cada una de las siguientes afirmaciones determine el valor de verdad.*

1. *Las matrices invertibles forman un subespacio de las matrices cuadradas de orden n.*

2. *Las matrices cuadradas de orden 2 tales que al cuadrado es cero forman un subespacio de las matrices cuadradas de orden 2.*

3. *El semiplano superior de $\mathbb{R}^2$ (segunda coordenada mayor igual que cero), es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.*

4. *La circunferencia unitaria centrada es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.*

5. *El conjunto de las funciones tales que al evaluarlas en cero es cero, es un subespacio de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

6. *El conjunto de las funciones tales que al evaluarlas en uno es uno, es un subespacio de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Ejercicio 69 *Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, W dos subespacios de V. Demostrar que $U \cap W$ es un subespacio de V.*

Ejercicio 70 *Demostrar que* $S_f = \{f \in F(A,\mathbb{R}) \ / \ f$ *tiene soporte finito*$\}$ *es un subespacio de* $F(A,\mathbb{R})$. *(*f *tiene soporte finito si y sólo si el cardinal de* $\{x \in A \ / \ f(x) \neq 0\}$ *es finito).*

Ejercicio 71 *Considere* $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial. Demostrar que* $U = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ (\forall x \in \mathbb{R})(f(ax) = af(x))\}$ *es un subespacio de* $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ejercicio 72 *Sea* $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial,*

$$U = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(-x) = -f(x)\}, V = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(-x) = f(x)\}$$

Demostrar que U *y* V *son subespacios de* $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ejercicio 73 *Considere* $\mathbb{C}^2$ *como* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial. Demostrar que* $W = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ 3z + iw = 0\}$ *es un subespacio de* $\mathbb{C}^2$.

Ejercicio 74 *Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales. JUSTIFIQUE.*

1. *a)* $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ xyz = 0\}$
   b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 = y^2\}$
   c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z^2 = 0\}$
   d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x + 2y + z = 0\}$
   e) $W = \{\begin{bmatrix} x & y \\ x & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x = y\}$

2.4. Bases

El concepto de base de un espacio vectorial permite describir en forma única todos los vectores del espacio, lo cual es una generalización de la localización de un objeto en el espacio tridimensional.

Esto nos motiva a considerar las siguientes definiciones.

2.4.1. Combinaciones lineales

Definición 71 *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y* $v, v_1, v_2, ..., v_m$*, elementos en* V*. Decimos que* v *es* combinación lineal *de* $v_1, v_2, ..., v_m$ *si y sólo si existen* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$*, escalares en* $\mathbb{K}$ *tal que*

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m \\ v &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \end{aligned}$$

Ejemplo 75 *Determinar si* $(1,2,1)$ *es combinación lineal de los vectores* $(-1,2,1)$, $(1,1,-2)$, $(1,2,3)$, *en* $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Tenemos que determinar $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que,

$$\begin{aligned}
(1,2,1) &= a(-1,2,1) + b(1,1,-2) + c(1,2,3) \\
(1,2,1) &= (-a+b+c, 2a+b+2c, a-2b+3c)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned}
-a+b+c &= 1 \\
2a+b+2c &= 2 \\
a-2b+3c &= 1
\end{aligned}\right|$$

Determinando la matriz del sistema tenemos,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Luego el sistema tiene solución, es decir, $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{8}$

$$(1,2,1) = \frac{1}{8}(-1,2,1) + \frac{1}{2}(1,1,-2) + \frac{5}{8}(1,2,3).$$

Por lo tanto $(1,2,1)$ es combinación lineal de los vectores $(-1,2,1)$, $(1,1,-2)$, $(1,2,3)$.

Ejemplo 76 *Determinar si* $(1,2,1)$ *es combinación lineal de los vectores* $(-1,2,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,3)$, *en* $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Tenemos que determinar $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que,

$$\begin{aligned}
(1,2,1) &= a(-1,2,1) + b(1,1,2) + c(1,2,3) \\
(1,2,1) &= (-a+b+c, 2a+b+2c, a+2b+3c)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned}
-a+b+c &= 1 \\
2a+b+2c &= 2 \\
a+2b+3c &= 1
\end{aligned}\right|$$

Determinando la matriz del sistema tenemos,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego el sistema no tiene solución, es decir, no existen $a, b, c \in \mathbb{R}$, tales que satisfagan el sistema.

Por lo tanto $(1,2,1)$ no es combinación lineal de los vectores $(-1,2,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,3)$.

Ejemplo 77 *Determinar si* $1 + x + x^2$ *es combinación lineal de los vectores*
$-1 + x + 2x^2, \quad 1 + 3x + 2x^2, \quad 1 - x + x^2$ *en* $\mathbb{R}[x]$

Demostración. Tenemos que determinar $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que,

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 &= a(-1 + x + 2x^2) + b(1 + 3x + 2x^2) + c(1 - x + x^2) \\ 1 + x + x^2 &= (-a + b + c)1 + (a + 3b - c)x + (2a + 2b + c)x^2 \end{aligned}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned} -a + b + c &= 1 \\ a + 3b - c &= 1 \\ 2a + 2b + c &= 1 \end{aligned}\right|$$

Determinando la matriz del sistema tenemos,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Luego el sistema tiene solución, es decir, existen $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$, tales que

$$1 + x + x^2 = -\frac{1}{6}(-1 + x + 2x^2) + \frac{1}{2}(1 + 3x + 2x^2) + \frac{1}{3}(1 - x + x^2)$$

Por lo tanto $1 + x + x^2$ es combinación lineal de los vectores $(-1 + x + 2x^2)$, $(1 + 3x + 2x^2)$ y $(1 - x + x^2)$.

Definición 72 *Sea V un espacio vectorial sobre K, y $v_1, v_2, ..., v_m$, vectores en V.*

a) *Decimos que $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ es* linealmente independiente *si y sólo si la única solución de*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0$$

es la trivial, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$.

b) *Decimos que $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ es* linealmente dependiente *si y sólo si la ecuación*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0$$

tiene una solución no trivial.

Ejemplo 78 *Demostrar que $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$.*

Demostración. Escribamos el vector nulo como combinación lineal de los vectores dados

$$\begin{aligned} a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) &= (0, 0, 0) \\ (a + b + c, b + c, a + c) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Luego tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ a + c &= 0 \end{aligned}\right|$$

Determinemos la matriz del sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el sistema tiene única solución, es decir, $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Por lo tanto, el conjunto $\{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 79 *Determinar si* $\{(1,2,1),(1,1,0),(1,3,2)\}$ *es un conjunto linealmente independiente o linealmente dependiente en* $\mathbb{R}^3$*.*

Solución. Escribamos el vector nulo como combinación lineal de los vectores dados

$$\begin{aligned} a(1,2,1)+b(1,1,0)+c(1,3,2) &= (0,0,0) \\ (a+b+c, 2a+b+3c, a+2c) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Luego tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ 2a+b+3c &= 0 \\ a+2c &= 0 \end{aligned}\right|$$

Determinemos la matriz del sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, $a = -2t$, $b = t$, $c = t$, con $t \in \mathbb{R}$, esto es

$$-2t(1,2,1)+t(1,1,0)+t(1,3,2) = (0,0,0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, el conjunto $\{(1,2,1),(1,1,0),(1,3,2)\}$ es linealmente dependiente.

Ejemplo 80 *Demostrar que* $\{1+x+x^2, 1+2x-x^2, 1+x^2\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Escribamos el vector nulo como combinación lineal de los vectores dados

$$\begin{aligned} a(1+x+x^2)+b(1+2x-x^2)+c(1+x^2) &= 0 \\ (a+b+c)1+(a+2b)x+(a-b+c)x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Luego tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ a+2b &= 0 \\ a-b+c &= 0 \end{aligned}\right|$$

Determinando la matriz del sistema tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el sistema tiene única solución, es decir, $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Por lo tanto, el conjunto $\{1 + x + x^2, 1 + 2x - x^2, 1 + x^2\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 81 *Determinar si* $\{1, i\}$ *es un conjunto linealmente independiente o linealmente dependiente en* $\mathbb{C}$.

a) $\mathbb{C}$ *como* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial.*

b) $\mathbb{C}$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

Solución. Escribamos el vector nulo como combinación lineal de los vectores dados

$$a \cdot 1 + b \cdot i = 0 + 0i$$

a) Como $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, los escalares a, b son números complejos. Luego

$$a = a_1 + a_2 i; \quad b = b_1 + b_2 i$$

reemplazando en la ecuación tenemos,

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 i) \cdot 1 + (b_1 + b_2 i) \cdot i &= 0 + 0i \\ (a_1 - b_2) \cdot 1 + (a_2 + b_1) \cdot i &= 0 + 0i \end{aligned}$$

Igualando parte real e imaginaria tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1 - b_2 &= 0 \\ a_2 + b_1 &= 0 \end{aligned}$$

es decir $a_1 = b_2 \quad a_2 = -b_1$.

Luego el sistema tiene infinitas soluciones.

Por lo tanto, el conjunto $\{1, i\}$ es linealmente dependiente.

b) Como $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, los escalares a, b son números reales.

$$a \cdot 1 + b \cdot i = 0 + 0i$$

Luego igualando parte real e imaginaria tenemos el sistema trivial

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Luego el sistema tiene única solución.

Por lo tanto, el conjunto $\{1, i\}$ es linealmente independiente.

2.4.2. Espacios Generados

En un espacio vectorial cualquier subconjunto de él, no es un subespacio vectorial, pero a partir de él podemos construir un subespacio a traves de combinaciones lineales.

Definición 73 *Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y $v_1, v_2, ..., v_m$, vectores de V. Decimos que* $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ genera *a V si y sólo si todo vector de V es combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_m$.*
Es decir, dado $v \in V$, existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, escalares en $\mathbb{K}$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m.$$

Teorema 74 *Sea V un espacio vectorial sobre K, y $v_1, v_2, ..., v_m$, vectores en V. El conjunto de todas las combinaciones lineales de $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ es un subespacio vectorial de V.*

Notación. El subespacio de todas las combinaciones lineales de $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ se denota por $\langle \{v_1, v_2, ..., v_m\} \rangle$ o simplemente $\langle v_1, v_2, ..., v_m \rangle$.

Ejemplo 82 *Demostrar que* $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *genera* $\mathbb{R}^3$

Demostración. Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, luego podemos escribir

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Como x, y, z son arbitrarios, por lo tanto

$$\langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3$$

Ejemplo 83 *Demostrar que* $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ *genera el espacio de las matrices simétricas de orden* 2.

Demostración. Sea $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ una matriz simétrica . Como $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$ luego $y = z$. Reemplazando tenemos

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & t \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como x, y, t son arbitrarios, por lo tanto

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \{\text{Matrices simétricas de orden dos}\}$$

Ejemplo 84 *Sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 2x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^2$. Determinar un conjunto generador de U.*

Solución. Dado $(x, y) \in U$, tenemos que $2x + y = 0$, es decir, $y = -2x$, por lo tanto

$$\begin{aligned}(x, y) &= (x, -2x) \\ &= x(1, -2)\end{aligned}$$

luego todos los elementos de U se pueden escribir como combinación lineal del vector $(1, -2)$.

Así

$$U = \langle (1, -2) \rangle$$

Por lo tanto $\{(1, -2)\}$ genera a U.

Ejemplo 85 *Sea* $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x + y + z = 0, \quad x + y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$. *Determinar un conjunto generador de* U.

Solución. Dado $(x, y, z) \in U$, tenemos que $2x + y + z = 0 \quad$ y $\quad x + y - z = 0$, asociando la matriz, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (-2z, 3z, z) \\ &= z(-2, 3, 1)\end{aligned}$$

luego todo los elementos de U se pueden escribir como combinación lineal del vector $(-2, 3, 1)$.

Así

$$U = \langle (-2, 3, 1) \rangle$$

Por lo tanto $\{(-2, 3, 1)\}$ genera a U.

Ejemplo 86 *Sea* $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad A = -A^t\} \leq M_2(\mathbb{R})$. *Determinar un conjunto generador de* U.

Solución. Dado $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in U$, se tiene

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}^t \\ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -x & -z \\ -y & -t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Así obtenemos que $x = -x, \quad y = -z, \quad z = -y, \quad t = -t$.

Por lo tanto $x = 0, \quad y = -z, \quad t = 0$. Reemplazando en la matriz tenemos que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{bmatrix} \\ &= y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Luego todos los elementos de U se pueden escribir como combinación lineal del vector

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Por lo tanto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ genera a U.

Ejercicio 87 *Sea* $U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x+3y+z & = & 0 \end{array} \right\} \leq \mathbb{R}^3$. *Determinar un conjunto generador de U.*

Ejercicio 88 *Sea* $U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leq \mathbb{R}^4$. *Determinar un conjunto generador de U.*

2.4.3. Bases

Definición 75 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $v_1, v_2, ..., v_m$, vectores en V. Decimos que $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ es una* base *de V si y sólo si se cumple:*

a) *$\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ es linealmente independiente.*

b) *$\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ genera a V.*

Ejemplo 89 *Demostrar que $\{(1,2,1),(1,2,3),(3,2,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.*

Demostración. Primeramente vamos a demostrar que el conjunto es linealmente independiente. Sea $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{array}{rcl} (0,0,0) & = & a(1,2,1)+b(1,2,3)+c(3,2,1) \\ (0,0,0) & = & (a+b+3c, 2a+2b+2c, a+3b+c) \end{array}$$

Luego tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b+3c & = & 0 \\ 2a+2b+2c & = & 0 \\ a+3b+c & = & 0 \end{array}\right|$$

Determinando la matriz del sistema tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

Por Cramer, el sistema tiene única solución, es decir, $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Por lo tanto, el conjunto $\{(1,2,1),(1,2,3),(3,2,1)\}$ es linealmente independiente.

En la segunda parte de la demostración veremos que el conjunto genera a $\mathbb{R}^3$. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a(1,2,1) + b(1,2,3) + c(3,2,1) \\ (x,y,z) &= (a+b+3c, 2a+2b+2c, a+3b+c) \end{aligned}$$

Luego tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a+b+3c &= x \\ 2a+2b+2c &= y \\ a+3b+c &= z \end{aligned}\right|$$

Determinando la matriz del sistema y calculando su determinante obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

Por Cramer, el sistema tiene única solución, es decir,

$$a = \frac{-4x+8y-4z}{8},\ b = \frac{-2y+4z}{8},\ c = \frac{4x-2y}{8}.$$

Por lo tanto, el conjunto $\{(1,2,1),(1,2,3),(3,2,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^3$. Y con ello el conjunto $\{(1,2,1),(1,2,3),(3,2,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 90 *Demostrar que* $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \right\}$ *es una base de* $M_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Primeramente vamos a demostrar que el conjunto es linealmente independiente. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= a\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2a+3b+2c+4d & a+3b-c+5d \\ 2a+4b+5c+7d & a+2b-c+5d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} -2a+3b+2c+4d &=& 0 \\ a+3b-c+5d &=& 0 \\ 2a+4b+5c+7d &=& 0 \\ a+2b-c+5d &=& 0 \end{array}\right|$$

Determinando la matriz del sistema tenemos

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -98.$$

Por Cramer, el sistema tiene única solución, es decir, $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$.

Por lo tanto, el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

En la segunda parte de la demostración veremos que el conjunto genera a $M_2(\mathbb{R})$. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tales que

$$\begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} &=& a\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} &=& \begin{bmatrix} -2a+3b+2c+4d & a+3b-c+5d \\ 2a+4b+5c+7d & a+2b-c+5d \end{bmatrix}. \end{array}$$

Luego tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} -2a+3b+2c+4d &=& x \\ a+3b-c+5d &=& y \\ 2a+4b+5c+7d &=& z \\ a+2b-c+5d &=& t \end{array}\right|$$

Determinando la matriz del sistema y calculando su determinante tenemos

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -98.$$

Por Cramer, el sistema tiene única solución, la cual es ,

$$\begin{array}{rcl} a &=& -\frac{16}{49}x + \frac{1}{7}z + \frac{2}{7}y - \frac{11}{49}t \\ b &=& y - t \\ c &=& -\frac{3}{14}y + \frac{3}{98}x + \frac{1}{7}z - \frac{1}{98}t \\ d &=& \frac{9}{14}t - \frac{1}{2}y + \frac{1}{14}x \end{array}$$

Por lo tanto, el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \right\}$ genera a $M_2(\mathbb{R})$.

Y con ello el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 91 *Sea* $U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leq \mathbb{R}^4$. *Determinar una base de* U.

Solución. Primero necesitamos encontrar un conjunto generador, para ello consideremos la matriz del sistema y la escalonada reducida por fila (recuerde que es un sistema homogéneo)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) &= (-11a, 5a, 2a, a) \text{ con } a \in \mathbb{R}. \\ (x,y,z,t) &= a(-11, 5, -2, 1) \text{ con } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

luego $\{(-11,5,-2,1)\}$ genera el espacio U.

Ahora es fácil demostrar que este conjunto es linealmente independiente, ya que

$$a(-11,5,-2,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow a = 0.$$

Así, $\{(-11,5,-2,1)\}$ es linealmente independiente, y por lo tanto es una base de U.

Ejemplo 92 *Sea* $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \quad / \quad p'(1) = p(0)\} \leq \mathbb{R}_2[x]$. *Determinar un base de* V.

Solución. Primero necesitamos encontrar explícitamente la condición que define al conjunto.

Sea $p(x) = a + bx + cx^2$, calculando su derivada obtenemos $p'(x) = b + 2cx$. Evaluando la condición se tiene

$$\begin{aligned} p'(1) &= p(0) \\ b + 2c &= a \\ a &= b + 2c, \qquad \text{con } b, c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

notemos que b, c no tienen restricciones, luego

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 &= b + 2c + bx + cx^2 \\ &= b + bx + 2c + cx^2 \\ &= b(1+x) + c(2+x^2) \end{aligned}$$

por lo tanto un conjunto generador de V es

$$\left\{1+x, 2+x^2\right\}$$

Además, este conjunto es linealmente independiente, ya que

$$\begin{aligned} a(1+x)+b(2+x^2) &= 0 \\ (a+2b)+ax+bx^2 &= 0. \end{aligned}$$

Recuerde que esta última es una igualdad polinomial, por lo tanto

$$a=0, b=0$$

es decir, $\{1+x, 2+x^2\}$ es linealmente independiente.

Así, $\{1+x, 2+x^2\}$ es una base de V.

Ejercicio 93 *Sea* $\delta_x : A \to K$, *tal que* $\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & si \quad x=y \\ 0 & si \quad x \neq y \end{cases}$ *así* $\delta_x \in F(A;\mathbb{R})$, *entonces* $\{\delta_x\}_{x\in A}$, *es un base de* $F(A,\mathbb{R})$.

Teorema 76 *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$, *y* $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$, *una base de* V. *Si* $w \in V$ *y*

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m$$

tal que $\alpha_1 \neq 0$ *entonces* $\{w, v_2, ..., v_m\}$, *es una base de* V.

Observación. Note que la elección del primer elemento de la base no tiene mayor importancia, ya que la condición esencial es que el coeficiente sea no nulo.

En el teorema anterior, podemos reemplazar cualquier v_i en la base por w, siempre que $\alpha_i \neq 0$.

Ejemplo 94 *Sea* $U = \langle (1,1,1), (1,0,0) \rangle$ *el subespacio de* $\mathbb{R}^3$. *Como el vector*

$$(3,7,7) = 7(1,1,1) - 4(1,0,0)$$

y además $7 \neq 0$ *luego*

$$\langle (1,1,1), (1,0,0) \rangle = \langle (3,7,7), (1,0,0) \rangle .$$

Ejemplo 95 *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$, *y* $u, v \in V$. *Demostrar*

$$\langle u, v \rangle = \langle 7u+2v, 3u+v \rangle$$

Demostración. Como el vector

$$7u + 2v = 7 \cdot u + 2 \cdot v$$

y además $7 \neq 0$, luego

$$\langle u, v \rangle = \langle 7u + 2v, v \rangle$$

y ahora veamos que el vector $3u + v$ es combinación de $7u + 2v$, v

$$3u + v = \frac{3}{7}(7u + 2v) + \frac{1}{7}v$$

como $\frac{1}{7} \neq 0$, tenemos

$$\langle 7u + 2v, v \rangle = \langle 7u + 2v, 3u + v \rangle$$

Por lo tanto

$$\langle u, v \rangle = \langle 7u + 2v, 3u + v \rangle .$$

Observación. La demostración del ejemplo anterior no es única, al estudiante lo desafiamos a realizar otra demostración.

Teorema 77 *Sea V un espacio vectorial sobre K, y $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$, una base de V. Si el conjunto $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ es otra base de V, entonces $n = m$.*

Consecuencia de este teorema es la siguiente definición.

2.5. Dimensión

Definición 78 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Decimos que la dimensión de V es n si y sólo si existe una base de V tal que su cardinal es n.*

Notación. Cuando la dimensión de V es n lo denotamos por $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, o simplemente $\dim V = n$.

Ejemplo 96

1. *Las matrices triangulares superiores de orden n, forman un subespacio de las matrices de orden n y su dimensión es $\frac{n(n+1)}{2}$, la base esta formada por las matrices E_{ij} (El coeficiente del lugar (i, j) es 1 y el resto es cero) con $i \leq j$, es decir*

$$B = \{E_{ij} \quad / \quad 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

2. *Las matrices simétricas de orden n, forman un subespacio de las matrices de orden n y su dimensión es $\frac{n(n+1)}{2}$, la base está formada por las matrices $E_{ij} + E_{ji}$ con $i \leq j$, es decir*

$$B = \{E_{ij} + E_{ji} \quad / \quad 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

3. *Las matrices antimétricas de orden n, forman un subespacio de las matrices de orden n y su dimensión es $\frac{n(n-1)}{2}$, la base está formada por las matrices $E_{ij} - E_{ji}$ con $i < j$, es decir*
$$B = \{E_{ij} - E_{ji} \quad / \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

4. *Las matrices diagonales de orden n, forman un subespacio de las matrices de orden n y su dimensión es n, la base está formada por las matrices E_{ii}, es decir*
$$B = \{E_{ii} \quad / \quad 1 \leq i \leq n\}$$

5. $\mathbb{R}^n$ *es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y su dimensión es n, la base está formada por las n-uplas e_i (donde el coeficiente del lugar i tiene el valor uno y en los otros cero), es decir*
$$B = \{e_i \quad / \quad 1 \leq i \leq n\}$$

6. $\mathbb{C}^n$ *es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y su dimensión es n, la base está formada por las n-uplas e_i (donde el coeficiente del lugar i tiene el valor uno y en los otros cero), es decir*
$$B = \{e_i \quad / \quad 1 \leq i \leq n\}$$

7. $\mathbb{K}_n[x] = \left\{ \begin{array}{c} \text{Los polinomios en la variable } x \text{ con coeficientes en } K, \text{ de} \\ \text{grado menor o igual que } n \text{ incluyendo al polinomio nulo} \end{array} \right\}$ *es un subespacio de $\mathbb{K}[x]$ y su dimensión es $n+1$, la base está formada por x^i, $0 \leq i \leq n$, es decir*
$$B = \left\{x^i \quad / \quad 0 \leq i \leq n\right\}$$

Teorema 79 *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión n y A un subconjunto de V entonces:*

1. *Si el cardinal de A es n y A es un conjunto linealmente independiente entonces A es una base de V.*

2. *Si el cardinal de A es n y A es un conjunto que genera a V entonces A es una base de V.*

3. *Si el cardinal de A es mayor estricto que n entonces A es un conjunto linealmente dependiente.*

4. *Si el cardinal de A es menor estricto que n entonces el generado por A es un subespacio distinto de V.*

Corolario 80 *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión n y U un subespacio vectorial de V tal que $\dim U = n$, entonces $U = V$.*

Observación. Tenga presente que para aplicar este teorema, es necesario conocer la dimensión del espacio.

Ejemplo 97 *Determinar la dimensión del espacio*

$$W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \leq M_2(\mathbb{R}).$$

Solución. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$, luego

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+3b & 2a+6b \\ c+3d & 2c+6d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

igualando coeficientes tenemos

$$\begin{array}{rcl|} a+3b & = & 0 \\ c+3d & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

resolviendo y reemplazando en la matriz obtenemos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3b & b \\ -3d & d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

es decir

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Falta demostrar que son linealmente independiente,

$$\begin{aligned} x \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3x & x \\ -3y & y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

así obtenemos que $x = 0$, $y = 0$, con lo cual $\left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de W.

Por lo tanto la dimensión de W es 2.

Ejercicios.

1. Sean

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y-z=0 \wedge 2x+3y-t=0\}, \\ V &= <(1,2,-1,3),(1,1,2,-1)> \end{aligned}$$

   a) Determinar una base de U y su dimensión.

   b) Encontrar un base de $U \cap V$ y su dimensión.

2. Sean

$$\begin{array}{rcl} U &=& \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x+3y+z+2t=0 \wedge x+2y+3z+t=0\}, \\ V &=& \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x+2y-8z+2t=0\} \end{array}$$

   a) Determinar una base de U y su dimensión.

   b) Encontrar un base de $U \cap V$ y su dimensión.

3. Dado el espacio vectorial

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad \begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 0 \\ 2x+4y+z-t &=& 0 \end{array} \right\}$$

   Determinar una base de U y su dimensión.

4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

   a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 2x+y-z=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x+y-z \geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   c) $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad | \quad xt-zy=0 \right\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

   d) $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

   e) El conjunto $\{(1,0,2), (1,1,1), (1,2,3)\}$ es linealmente independiente.

   f) El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

5. Hallar una base y la dimensión de U

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad \begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ x+4t &=& 0 \end{array} \right\}.$$

2.6. Suma Directa

Teorema 81 *Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, W dos subespacios de V, entonces $U \cap W$ es un subespacio de V.*

Demostración. Como U y W son subespacios vectoriales de V, en ambos espacios se verifican las propiedades de espacio vectorial, de donde se obtiene:
i) $0 \in U$ y $0 \in W$, luego $0 \in U \cap W$.

ii) Además, dados $u, w \in U \cap W$, entonces

$$u, w \in U, \quad \text{y} \quad u, w \in W$$

y así

$$u + w \in U, \quad \text{y} \quad u + w \in W$$

luego

$$u + w \in U \cap W$$

iii) Finalmente si $u \in U \cap W$, y $a \in \mathbb{K}$, entonces

$$u \in U \quad \text{y } u \in W \quad \text{y} \quad a \in \mathbb{K}$$

por lo tanto

$$au \in U \quad \text{y } au \in W$$

lo que equivale a decir que

$$au \in U \cap W.$$

De (i), (ii) y (iii) se tiene que $U \cap W$ es un subespacio de V.

Ejemplo 98 *Sean*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x + 3y + z = 0\} \text{ } y \text{ } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x + y - 2z = 0\}.$$

Determinar una base de $U \cap W$.

Solución. Sea $(x, y, z) \in U \cap W$, luego $(x, y, z) \in U$ y $(x, y, z) \in W$. Así tenemos que

$$2x + 3y + z = 0 \quad \text{y} \quad x + y - 2z = 0$$

por lo tanto debemos resolver el sistema, lo cual haremos mediante operaciones elementales fila.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $x = 7t,\ \ y = -5t,\ \ z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

Así obtenemos

$$(x, y, z) \in U \cap W \Leftrightarrow (x, y, z) = (7t, -5t, t) = t(7, -5, 1) \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

es decir

$$U \cap W =< (7, -5, 1) >$$

Como el vector es no nulo, luego $\{(7, -5, 1)\}$ es una base de $U \cap W$.

Ejemplo 99 *Sean*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 3x + 2y - z = 0\} \quad y \quad W =< (1, 1, 1), (2, 1, -1) > .$$

Determinar una base de $U \cap W$.

Solución. Sea $(x,y,z) \in U \cap W$, luego $(x,y,z) \in U$ y $(x,y,z) \in W$. Así tenemos que $3x + 2y - z = 0$ y $(x,y,z) = a(1,1,1) + b(2,1,-1)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, con lo cual,

$$(x,y,z) = (a+2b, a+b, a-b)$$

$$x = a+2b, \quad y = a+b, \quad z = a-b$$

Reemplazando en la ecuación que define la pertenencia a U tenemos,

$$\begin{aligned} 3(a+2b) + 2(a+b) - (a-b) &= 0 \\ 4a + 9b &= 0 \\ a &= -\frac{9}{4}b \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a(1,1,1) + b(2,1,-1) \\ &= -\frac{9}{4}b(1,1,1) + b(2,1,1) \\ &= b(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}) \end{aligned}$$

Así,

$$(x,y,z) \in U \cap W \Leftrightarrow (x,y,z) = b(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}) \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

es decir

$$U \cap W = \left\langle (-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}) \right\rangle.$$

Como el vector es no nulo, luego $\left\{(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})\right\}$ es una base de $U \cap W$.

Ejemplo 100 *Sean* $U =< (1,2,1,1),(1,3,1,2) >$ *y* $W =< (2,1,1,1),(2,2,1,-1) >$ *subespacios de* $\mathbb{R}^4$.

Determinar una base de $U \cap W$.

Solución. Sea $(x,y,z,t) \in U \cap W$, luego $(x,y,z,t) \in U$ y $(x,y,z,t) \in W$.

Veremos primero las condiciones para que el vector pertenezca a U.

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) &= a(1,2,1,1) + b(1,3,1,2), \text{ con } a,b \in \mathbb{R}, \\ (x,y,z,t) &= (a+b, 2a+3b, a+b, a+2b) \text{ con } a,b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ahora el vector (x,y,z,t) también pertenece a W, entonces

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) &= c(2,1,1,1) + d(2,2,1,-1), \text{ con } c,d \in \mathbb{R}, \\ (x,y,z,t) &= (2c+2d, c+2d, c+d, c-d) \text{ con } c,d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Con lo cual tenemos que el vector debe satisfacer las dos condiciones, luego

$$(a+b, 2a+3b, a+b, a+2b) = (2c+2d, c+2d, c+d, c-d), \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Reescribiendo las ecuaciones se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b-2c-2d &=& 0 \\ 2a+3b-c-2d &=& 0 \\ a+b-c-d &=& 0 \\ a+2b-c+d &=& 0 \end{array}\right|$$

Luego la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales es,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y así las soluciones son:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0$$

Reemplazando en cualesquiera de las dos combinaciones lineales se tiene que

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z,t) &=& a(1,2,1,1) + b(1,3,1,2) \\ &=& (0,0,0,0) \end{array}$$

Así,

$$(x,y,z,t) \in U \cap W \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (0,0,0,0)$$

es decir

$$U \cap W = \{(0,0,0,0)\}.$$

Como el vector es nulo, luego no existe base del espacio nulo $U \cap W$.

Ejemplo 101 *Sean* $U = \langle (2,1,2,1),(3,1,2,2)\rangle$ *y* $W = \langle (1,1,1,1),(2,1,4,-1)\rangle$ *subespacios de* $\mathbb{R}^4$*. Determinar una base de* $U \cap W$*.*

Solución. Sea $(x,y,z,t) \in U \cap W$, luego $(x,y,z,t) \in U$ y $(x,y,z,t) \in W$.

Veremos primero las condiciones para que el vector pertenezca a U.

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z,t) &=& a(2,1,2,1) + b(3,1,2,2), \text{ con } a,b \in \mathbb{R}, \\ (x,y,z,t) &=& (2a+3b, a+b, 2a+2b, a+2b) \text{ con } a,b \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Ahora el vector también pertenece a W, entonces

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z,t) &=& c(1,1,1,1) + d(2,1,4,-1), \text{ con } c,d \in \mathbb{R}, \\ (x,y,z,t) &=& (c+2d, c+d, c+4d, c-d) \text{ con } c,d \in \mathbb{R}. \end{array}$$

De esto se tiene que el vector (x,y,z,t) debe satisfacer ambas condiciones, es decir:

$$(2a+3b, a+b, 2a+2b, a+2b) = (c+2d, c+d, c+4d, c-d), \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Reescribiendo las ecuaciones obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a+3b-c-2d & = & 0 \\ a+b-c-d & = & 0 \\ 2a+2b-c-4d & = & 0 \\ a+2b-c+d & = & 0 \end{array}\right|$$

La matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y así las soluciones son:

$$a = 5l, \quad b = -2l, \quad c = 2l, \quad d = l$$

Reemplazando en cualesquiera de las dos combinaciones lineales tenemos

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z,t) & = & a(2,1,2,1) + b(3,1,2,2) \\ & = & 5l(2,1,2,1) - 2l(3,1,2,2) \\ & = & l(4,3,6,1) \end{array}$$

Así,

$$(x,y,z,t) \in U \cap W \Leftrightarrow (x,y,z,t) = l(4,3,6,1)$$

es decir

$$U \cap W =< (4,3,6,1) > .$$

Como el vector no es nulo, $\{(4,3,6,1)\}$ es una base del espacio $U \cap W$.

Observación. La unión de subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, en general, no es un subespacio vectorial de V. Ejemplo de ello lo tenemos en el caso de $U =< e_1 >$, y $W =< e_2 >$ ambos son subespacios de $V = \mathbb{R}^2$, pero la unión de ellos no es un subespacio, ya que $e_1 + e_2 \notin U \cup W$.

Consideremos ahora el subespacio generado por la unión de U y W, (U, W como en la observación anterior),

$$\langle U \cup W \rangle$$

y describamos los vectores que lo forman.

Como el espacio generado por $\langle U \cup W \rangle$ es un subespacio vectorial de V, se tiene que para $u \in U$ y $w \in W$, $u + w$ debe pertenecer a $\langle U \cup W \rangle$. Así tenemos que todos los elementos de la forma $u + w$ pertenecen a $\langle U \cup W \rangle$.

Ahora veamos que acontece con dos elementos de la forma $u + w$, para ello consideremos

$$\begin{gathered} u + w \in \langle U \cup W \rangle , \quad u' + w' \in \langle U \cup W \rangle \\ u + w + u' + w' \in \langle U \cup W \rangle \end{gathered}$$

Usando las propiedades asociativa y conmutativa de la suma tenemos que

$$(u+w)+(u'+w')=(u+u')+(w+w')$$

Luego podemos mantener su estructura, es decir, como la suma de un elemento en U más otro elemento en W.

Ahora veamos que sucede con la multiplicación por escalar.

$$\begin{aligned} u+w &\in \langle U\cup W\rangle \text{ y } a\in\mathbb{K} \\ a(u+w) &= au+aw\in\langle U\cup W\rangle \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que

$$\langle U\cup W\rangle=\{u+w\in V \quad / \quad u\in U,\ w\in W\}.$$

2.6.1. Sumas de Espacios

Definición 82 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U,W dos subespacios de V entonces se define la suma de U y W como $\{u+w\in V \quad / \quad u\in U, \quad w\in W\}$, es decir*

$$U+W=\{u+w\in V \quad / \quad u\in U, \quad w\in W\}.$$

Ejemplo 102 *Sean $U=<e_1>$ y $W=<e_2>$ dos subespacios de $\mathbb{R}^2$ entonces*

$$\begin{aligned} U+W &= \left\{u+w\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad u\in U, \quad w\in W\right\} \\ &= \left\{xe_1+ye_2\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad xe_1\in U, \quad ye_2\in W, \quad x,y\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^2 \\ &< e_1>+<e_2>=\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 103 *Sean $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad x+3y=0\}$, $\quad W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad 2x+5y=0\}$ subespacios de $\mathbb{R}^2$. Determinar $U+W$.*

Solución. Primero determinemos un conjunto generador del subespacio U,

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad x+3y=0\} \\ U &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad x=-3y\} \\ U &= \{(-3y,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad y\in\mathbb{R}\} \\ U &= <(-3,1)>. \end{aligned}$$

Ahora realicemos el mismo proceso con W,

$$\begin{aligned} W &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad 2x+5y=0\} \\ W &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad x=-\frac{5}{2}y\} \\ W &= \{(-\frac{5}{2}y,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad y\in\mathbb{R}\} \\ W &= \left\langle\left(-\frac{5}{2},1\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

Ahora veamos la suma,

$$\begin{aligned} U+W &= \{u+w \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad u \in U, \quad w \in W\} \\ &= \{x(-3,1)+y(-\frac{5}{2},1) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\langle (-3,1),(-\frac{5}{2},1) \right\rangle \end{aligned}$$

Como $\left\{(-3,1),(-\frac{5}{2},1)\right\}$ es un conjunto linealmente independiente, ya que

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$$

entonces $\left\{(-3,1),(-\frac{5}{2},1)\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, luego

$$U+W = \left\langle (-3,1),(-\frac{5}{2},1) \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

Teorema 83 *Sean U, W subespacios vectoriales de V tales que $U =< A >$ y $W =< B >$ con A y B subconjuntos de V, entonces*

$$U+W =< A \cup B > .$$

Teorema 84 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y U, W subespacios vectoriales de V, entonces*

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

2.6.2. Suma Directa

Definición 85 *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y U, W dos subespacios vectoriales de V. Decimos que V es suma directa de U y W si y sólo si todo vector de V se escribe en forma única como un vector de U más otro vector de W.*

Notación. Si V es suma directa de U y W esto se denota por $V = U \oplus W$.

Observación. La definición dice que un espacio vectorial V es suma directa de los subespacios U y W si dado cualquier v en V existe un único u en U y existe un único w en W de modo que $v = u + w$.

Ejemplo 104 *En $\mathbb{R}^2$, tenemos que todo elemento (x, y) se puede escribir como*

$$(x,y) = (x,0) + (0,y)$$

la cual es única, con la condición que cada uno de los sumandos esté situado en $U =< e_1 >$ y $W =< e_2 >$ respectivamente. Así podemos decir que

$$\mathbb{R}^2 =< e_1 > \oplus < e_2 > .$$

Teorema 86 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, W dos subespacios vectoriales de V.*
V es suma directa de U y W si y sólo si se cumple

i) $U \cap W = \{0\}$

ii) $V = U + W$.

Ejemplo 105 *Sean $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x + 2y - z = 0\}$, y $W =< (1, 2, 1) >$. Determinar si $\mathbb{R}^3$ es suma directa de U y W.*

Solución. Sea $(x, y, z) \in U \cap W$, luego $(x, y, z) \in U$ y $(x, y, z) \in W$. Así tenemos que $3x + 2y - z = 0$ y $(x, y, z) = a(1, 2, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$, con lo cual

$$(x, y, z) = (a, 2a, a)$$

Reemplazando en la ecuación, obtenemos,

$$\begin{aligned} 3(a) + 2(2a) - (a) &= 0 \\ 6a &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= a(1, 2, 1) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$(x, y, z) \in U \cap W \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

es decir,

$$U \cap W = \langle (0, 0, 0) \rangle$$

Ahora, determinaremos un conjunto generador de U, para ello

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ z &= 3x + 2y \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (x, y.z) &\in U \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, 3x + 2y) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, 2) \end{aligned}$$

luego $U =< (1, 0, 3), (0, 1, 2) >$. Como $U =< (1, 0, 3), (0, 1, 2) >$ y $W =< (1, 2, 1) >$ se tiene que

$$U + W =< (1, 0, 3), (0, 1, 2), (1, 2, 1) >$$

El conjunto $\{(1, 0, 3), (0, 1, 2), (1, 2, 1)\}$, generador de $U + W$, es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

Con lo cual hemos probado que

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W.$$

Ejemplo 106 *Sean*

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad 3x + 2y - z = 0, \quad x + y + t = 0\},$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x + y - z + t = 0, \quad x + 2y + z - t = 0\}$$

dos subespacios de $\mathbb{R}^4$*. Determinar si* $\mathbb{R}^4$ *es suma directa de* U *y* W*.*

Solución. Sea $(x, y, z, t) \in U \cap W$, luego $(x, y, z, t) \in U$ y $(x, y, z, t) \in W$. Cada pertenencia nos entrega dos ecuaciones con las cuales obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + 2y - z & = & 0 \\ x + y - t & = & 0 \\ x + y - z + t & = & 0 \\ x + 2y + z - t & = & 0 \end{array}\right|$$

y la matriz del sistema esta dada por

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante es -3, luego el sistema tiene única solución, es decir, la solución trivial. Por lo tanto,

$$U \cap W = \langle (0, 0, 0, 0) \rangle .$$

Ahora determinaremos un conjunto generador para cada uno de los subespacios. Realicemos esto para el subespacio U.

$$3x + 2y - z = 0, \quad x + y + t = 0$$

$$z = 3x + 2y, \quad t = -x - y.$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} (x, y, z, t) & = & (x, y, 3x + 2y, -x - y) \\ (x, y, z, t) & = & x(1, 0, 3, -1) + y(0, 1, 2, -1) \end{array}$$

por lo tanto

$$U =< (1, 0, 3, -1), (0, 1, 2, -1) > .$$

Ahora obtendremos un conjunto generador de W.

$$x + y - z + t = 0, \quad x + 2y + z - t = 0$$

$$x = 3z - 3t, \quad y = -2z + 2t$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} (x, y, z, t) & = & (3z - 3t, -2z + 2t, z, t) \\ (x, y, z, t) & = & z(3, -2, 1, 0) + t(-3, 2, 0, 1) \end{array}$$

por lo tanto
$$W =< (3, -2, 1, 0), (-3, 2, 0, 1) > .$$

Como $U =< (1, 0, 3, -1), (0, 1, 2, -1) >$ y $W =< (3, -2, 1, 0), (-3, 2, 0, 1) >$, entonces
$$U + W =< (1, 0, 3, -1), (0, 1, 2, -1), (3, -2, 1, 0), (-3, 2, 0, 1) > .$$

El conjunto $\{(1, 0, 3, -1), (0, 1, 2, -1), (3, -2, 1, 0), (-3, 2, 0, 1)\}$, generador de $U+W$, es una base de $\mathbb{R}^4$, ya que
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Con esto hemos demostrado que
$$\mathbb{R}^4 = U \oplus W.$$

Ejercicios.

1. Sea $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial,
$$U = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(-x) = -f(x)\}, \quad V = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(-x) = f(x)\}$$
subespacio de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

   a) Demostrar que $U \cap V = \{0\}$.

   b) Demostrar que $U + V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Sean $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x + 2y - z = 0\}$ y $U =< (1, -1, 2) >$. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

3. Sean
$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 3x + 2y - z + t = 0, \quad x + y - z = 0\}, \\ U &= < (1, 1, -1, 2), (0, 1, 3, 1) > \end{aligned}$$
Demostrar que $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

2.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base de V. De ahora en adelante consideremos que las bases son ordenadas, esto es, una base es ordenada si fijamos la posición en que se encuentran los vectores en la base.

Como $\mathcal{B}$ es una base de V, todo elemento de V es combinación lineal única de los elementos de la base, es decir
$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

Denotamos las coordenadas de v, con respecto a la base ordenada $\mathcal{B}$, por $[v]_{\mathcal{B}}$ la cual es una matriz de orden $n \times 1$ cuyos coeficientes son los escalares (en el orden establecido), es decir,

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 107 *Sea $\mathcal{B} = \{1 - x, 1 + 2x + x^2, 1 + x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Determinar las coordenadas de $v = 1$ y $v = a + bx + cx^2$, respecto a la base $\mathcal{B}$.*

Solución. Escribamos 1 en combinación lineal de $1 - x, \quad 1 + 2x + x^2, \quad 1 + x^2$.

$$\begin{aligned} 1 &= a(1-x) + b(1+2x+x^2) + c(1+x^2) \\ 1 &= (a+b+c)1 + (-a+2b)x + (b+c)x^2 \\ 1 &= a+b+c, \quad 0 = -a+2b, \quad 0 = b+c \\ a &= 1, \quad b = -1/2, \quad c = 1/2 \end{aligned}$$

Así,

$$[1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Ahora escribamos el vector $a+bx+cx^2$ en combinación lineal de $1-x, \quad 1+2x+x^2, \quad 1+x^2$.

$$\begin{aligned} a+bx+cx^2 &= \alpha(1-x) + \beta(1+2x+x^2) + \gamma(1+x^2) \\ a+bx+cx^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)1 + (-\alpha+2\beta)x + (\beta+\gamma)x^2 \\ a &= \alpha+\beta+\gamma, \quad b = -\alpha+2\beta, \quad c = \beta+\gamma. \end{aligned}$$

Para resolver el sistema, asociemos la matriz y escalonemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ -1 & 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}c - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a \end{bmatrix}$$

Así,

$$a+bx+cx^2 = (a-c)(1-x) + \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c\right)(1+2x+x^2) + \left(\frac{3}{2}c - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a\right)(1+x^2)$$

Por lo tanto,

$$\left[a+bx+cx^2\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a-c \\ \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \\ \frac{3}{2}c - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a \end{bmatrix}$$

Ejercicios.

1. Sea $\mathcal{D} = \{(1,1,-1),(2,1,1),(3,-1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

   Determinar:

   a) $[(1,2,3)]_{\mathcal{D}}$
   b) $[(x,y,z)]_{\mathcal{D}}$

2. Sea $\mathcal{B} = \{1-x, 2+x-x^2, 3x^2-x+1\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Determinar:

   a) $[1+x-x^2]_{\mathcal{B}}$
   b) $[ax^2+bx+c]_{\mathcal{B}}$

3. Sea $\mathcal{D} = \{(1,2,1),(1,3,2)\}$ una base de

$$\mathbb{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x-y+z=0\}$$

   a) Si $[u]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determinar u
   b) Si $[v]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix}$. Determinar v

4. Sea $\mathbb{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x-3y+5z=0\}$ y $\mathcal{A}$ una base de $\mathbb{U}$ tal que

$$[(1,-1,-1)]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad [(4,1,-1)]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   Determinar la base $\mathcal{A}$.

2.8. Producto tensorial

Otra de las operaciones que podemos estudiar entre espacios vectoriales es el producto tensorial con el cual podemos construir nuevos espacios vectoriales. Una de las nociones necesarias para poder entender el producto tensorial es el de Espacio Cuociente.

2.8.1. Espacio Cuociente

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. y U un subespacio vectorial de V, definamos la siguiente relación de equivalencia sobre V: dos elementos de V estan relacionados si y sólo si la diferencia de ellos pertenece a U, es decir,

$$u \sim v \Leftrightarrow u - v \in U$$

Podemos comprobar que $\sim$ cumple las propiedades:

(a) Refleja:

Como U es un espacio vectorial, luego

$$0 \in U \Leftrightarrow u - u \in U \Leftrightarrow u \sim u.$$

Por lo tanto,

$$(\forall u \in V)(u \sim u)$$

(b) Simétrica:

Sean $u, v \in V$, tales que $u \sim v$, luego $u - v \in U$ y como U es un espacio vectorial, entonces $(-1)(u - v) \in U$, pero

$$(-1)(u - v) = -u + v = v - u$$

por lo tanto $v - u \in U$ lo que equivale a decir que $v \sim u$.

Así hemos demostrado

$$(\forall u, v \in V)\,((u \sim v) \Rightarrow (v \sim u))$$

(c) Transitiva:

Sean $u, v, w \in U$ tales que $u \sim v$ y $v \sim w$, entonces $(u - v)$ y $(v - w) \in U$ y como U es un subespacio, la suma de ellos pertenece a U,

$$\begin{aligned} (u - v) + (v - w) &= u + ((-v + v) - w) \\ &= u - w \end{aligned}$$

luego $u - w \in U$ y por lo tanto $u \sim w$.

Es decir,

$$(\forall u, v \in V)\,[((u \sim v) \wedge (v \sim w)) \Rightarrow (u \sim w)]$$

Usando estas propiedades definimos la clase de equivalencia de $u \in V$, dada por

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \{v \in V \quad / \quad v \sim u\} \\ &= \{v \in V \quad / \quad v - u \in U\} \\ &= \{v \in V \quad / \quad v - u = w \in U\} \\ &= \{v \in V \quad / \quad v = u + w, \quad w \in U\} \\ &= \{u + w \in V \quad / \quad w \in U\} \\ &= u + U \end{aligned}$$

Finalmente definimos el conjunto cuociente V/U como el conjunto de todas las clases de equivalencia,

$$V/U = \{\overline{u} \quad / \quad u \in V\}$$

Observación. Note que los elementos de V/U son conjuntos. A continuación daremos una estructura de espacio vectorial a V/U.

a) Primero definamos la suma: dadas dos clases $\overline{u}, \overline{v}$, definimos $\overline{u}+\overline{v}$ como $\overline{(u+v)}$, es decir, sumamos los vectores y a continuación determinamos su clase. La definición anterior se basa en la siguiente propiedad.

$$u \sim u', v \sim v' \Rightarrow (u+v) \sim (u'+v')$$

la cual es fácil comprobar, basta notar:

$$\begin{aligned} u &\sim u', \quad v \sim v' \Rightarrow u - u' \in U, \quad v - v' \in U \\ &\Rightarrow (u-u') + (v-v') \in U \\ &\Rightarrow (u+v) - (u'+v') \in U \\ &\Rightarrow (u+v) \sim (u'+v') \end{aligned}$$

Esta propiedad nos permite escribir

$$\overline{u} = \overline{u'}, \quad \overline{v} = \overline{v'} \Rightarrow \overline{(u+v)} = \overline{(u'+v')}$$

b) Ahora definamos la multiplicación por escalar: dada una clase $\overline{u}$, y un escalar $a \in \mathbb{K}$, definimos $a \cdot \overline{u}$ como $\overline{(a \cdot u)}$, es decir primero multiplicamos el vector por el escalar y luego determinamos su clase.

La definición anterior se basa en la siguiente propiedad

$$u \sim u', a \in \mathbb{K} \Rightarrow au \sim au'$$

la cual también es fácil de comprobar,

$$\begin{aligned} u &\sim u', \quad a \in \mathbb{K} \Rightarrow u - u' \in U, \quad a \in \mathbb{K} \\ &\Rightarrow a(u-u') \in U, \quad a \in \mathbb{K} \\ &\Rightarrow (au - au') \in U, \quad a \in \mathbb{K} \\ &\Rightarrow au \sim au' \end{aligned}$$

Esta propiedad nos permite escribir

$$\overline{u} = \overline{u'}, \quad a \in \mathbb{K} \Rightarrow \overline{au} = \overline{au'}.$$

Definición 87 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y U un subespacio de V. Se define en el conjunto cuociente*

$$V/U = \{\overline{u} \quad / \quad u \in V\}$$

las operaciones

$$\begin{aligned} \overline{u} + \overline{v} &= \overline{u+v}, & u, v \in V \\ a \cdot \overline{u} &= \overline{a \cdot u}, & u \in V, \quad a \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Teorema 88 *Con las operaciones definidas anteriormente V/U es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

Ejemplo 108 *Sea* $U =< (1,1) >$ *subespacio de* $\mathbb{R}^2$. *Describir el espacio vectorial cuociente* $\mathbb{R}^2/U$.

Solución. Las clases o los vectores que pertenecen al conjunto cuociente estan dados por:

$$\begin{aligned}
\overline{(x,y)} &= \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (x',y') \sim (x,y)\} \\
&= \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (x',y') - (x,y) \in < (1,1) >\} \\
&= \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (x',y') - (x,y) = t(1,1), t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (x',y') = (x,y) + t(1,1), t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y) + t(1,1) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Geometricamente la clase de (x,y) corresponde a la recta cuyo vector director es $(1,1)$ y pasa por (x,y).

Dos ejemplos concretos de clase son:

$$\begin{aligned}
\overline{(0,1)} &= \{(0,1) + t(1,1) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad t \in \mathbb{R}\}. \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x = y - 1\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x - y = -1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{(1,2)} &= \{(1,2) + t(1,1) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad t \in \mathbb{R}\}. \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x - 1 = y - 2\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x - y = -1\} \\
&= \overline{(0,1)}
\end{aligned}$$

es decir, ambos vectores son iguales y representan la recta de pendiente 1 que pasa por el punto $(1,2)$.

La operatoria que transforma a este conjunto en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es:

$$\begin{aligned}
\overline{(x,y)} + \overline{(a,b)} &= \overline{(x+a, y+b)} \\
\alpha\overline{(x,y)} &= \overline{(\alpha x, \alpha y)}
\end{aligned}$$

En un ejemplo concreto tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{(1,2)} + \overline{(1,3)} &= \overline{(2,5)} \\
\alpha\overline{(1,2)} &= \overline{(\alpha, 2\alpha)}
\end{aligned}$$

Geométricamente la suma de los vectores $\overline{(1,2)}$ y $\overline{(1,3)}$ es la recta de pendiente 1 que pasa por el punto $(2,5)$.

Ejemplo 109 *Sea* $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x + y = 0, \quad x + z - w = 0\}$ *subespacio de* $\mathbb{R}^4$. *Describir el espacio cuociente* $\mathbb{R}^4/U$.

Solución. Las clases o los vectores que pertenecen al conjunto cuociente estan dados por:

$$\begin{array}{rcl}\overline{(x,y,z,w)} & = & \{(x',y',z',w')\in\mathbb{R}^4 \quad / \quad (x',y',z',w')\sim(x,y,z,w)\} \\ & = & \{(x',y',z',w')\in\mathbb{R}^4 \quad / \quad (x',y',z',w')-(x,y,z,w)\in U\}\end{array}$$

Para poder explicitar la clase de (x',y',z',w') necesitamos encontrar un conjunto generador de U, para ello resolvamos el sistema cuya matriz asociada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así obtenemos que $\{(-1,1,1,0),(1,-1,0,1)\}$ es un conjunto generador de U, .más aun una base de U. Como

$$\begin{array}{l} \quad (x',y',z',w')-(x,y,z,w)\in U \\ \iff (x',y',z',w')-(x,y,z,w)\in\langle(-1,1,1,0),(1,-1,0,1)\rangle \\ \iff (x',y',z',w')-(x,y,z,w)=a(-1,1,1,0)+b(1,-1,0,1), \quad a,b\in\mathbb{R} \\ \iff (x',y',z',w')=(x,y,z,w)+a(-1,1,1,0)+b(1,-1,0,1), \quad a,b\in\mathbb{R}\end{array}$$

Por lo tanto

$$\overline{(x,y,z,w)}=\{(x,y,z,w)+a(-1,1,1,0)+b(1,-1,0,1), \quad a,b\in\mathbb{R}\}$$

Dos ejemplos concretos de clases son:

$$\begin{array}{rcl}\overline{(0,1,1,2)} & = & \{(0,1,1,2)+a(-1,1,1,0)+b(1,-1,0,1), \quad a,b\in\mathbb{R}\} \\ & = & \{(b-a,a-b+1,a+1,b+2)\in\mathbb{R}^4 \quad / \quad a,b\in\mathbb{R}\}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\overline{(1,-1,1,0)} & = & \{(1,-1,1,0)+a(-1,1,1,0)+b(1,-1,0,1), \quad a,b\in\mathbb{R}\}. \\ & = & \{(b-a+1,a-b-1,a+1,b)\in\mathbb{R}^4 \quad / \quad a,b\in\mathbb{R}\}\end{array}$$

En un ejemplo concreto tenemos

$$\begin{array}{rcl}\overline{(0,1,2,1)}+\overline{(1,1,2,3)} & = & \overline{(1,2,4,4)} \\ \alpha\overline{(1,2,0,2)} & = & \overline{(\alpha,2\alpha,0,2\alpha)}\end{array}$$

2.8.2. Producto tensorial

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U,W dos subespacios vectoriales de V, consideremos el subespacio vectorial definido en el ejercicio 70.

$$S_f(U\times W,\mathbb{K})=\{g:U\times W\to\mathbb{K} \quad / \quad g \text{ tiene soporte finito}\}$$

el cual es un espacio vectorial con las operaciones de suma de funciones y multiplicación por escalar de una función.

Además una base de este espacio es $\{\delta_{(u,w)} \quad / \quad (u,w) \in U \times W\}$ donde $\delta_{(u,w)}$ es la función definida de la siguiente forma:

$$\delta_{(u,w)}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (u,w) = (x,y) \\ 0 & \text{si} \quad (u,w) \neq (x,y) \end{cases}$$

Este es un espacio de dimensión infinita ($U \times W$ tiene infinitos elementos).
Recuerde que una función g tiene soporte finito si y sólo si el cardinal de
$\{(u,w) \in U \times W \quad / \quad g(u,w) \neq 0\ \}$ es finito.

Observación. Los vectores del espacio $S_f(U \times W, \mathbb{K})$ son funciones que pueden describirse en forma análoga a los polinomios, es decir,

$$g = \sum g(u,w)\delta_{(u,w)}$$

donde $\delta_{(u,w)}$ juega el rol o papel de x^i en un polinomio y la suma es finita dado que g es de soporte finito.

En el espacio $S_f(U \times W, \mathbb{K})$, consideremos el subespacio generado por

$$\begin{aligned} A = \{&\delta_{(\alpha u,w)} - \alpha\delta_{(u,w)}, \quad \delta_{(u,\alpha w)} - \alpha\delta_{(u,w)}, \quad \delta_{(u+u',w)} - \delta_{(u,w)} - \delta_{(u',w)}, \\ &\delta_{(u,w+w')} - \delta_{(u,w)} - \delta_{(u,w')} \qquad / \qquad u,u' \in U, \quad w,w' \in W, \quad \alpha \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Con el subespacio generado por A, $\langle A \rangle$ construimos el espacio cuociente y así tenemos la siguiente definición.

Definición 89 *Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y U, W dos subespacios vectoriales de V, se define el producto tensorial de U y W, denotado por $U \otimes W$, al $\mathbb{K}$-espacio vectorial*

$$S_f(U \times W, \mathbb{K}) / \langle A \rangle$$

es decir,

$$U \otimes W = S_f(U \times W, \mathbb{K}) / \langle A \rangle$$

Notación. Los vectores de $U \otimes W$, son clases de funciones, en particular la clase de $\delta_{(u,w)}$ la denotamos por $u \otimes w$, es decir, $\overline{\delta_{(u,w)}} = u \otimes w$.

Con esta notación tenemos las siguientes propiedades.

Teorema 90 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, W dos subespacios vectoriales de V, entonces se tiene:*

1. $(\forall u \in U)\,(\forall w \in W)\,(\forall a \in \mathbb{K})\,((au) \otimes w = a\,(u \otimes w))$
2. $(\forall u \in U)\,(\forall w \in W)\,(\forall a \in \mathbb{K})\,(u \otimes (aw) = a\,(u \otimes w))$
3. $(\forall u, u' \in U)\,(\forall w \in W)\,((u + u') \otimes w = (u \otimes w) + (u' \otimes w))$
4. $(\forall u \in U)\,(\forall w, w' \in W)\,(u \otimes (w + w') = (u \otimes w) + (u \otimes w'))\,.$

Ejemplo 110 *Explicitar una base de* $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$.

Solución. Primero veamos algunos vectores de este espacio, por ejemplo:

$$2 \otimes 3, \quad -\pi \otimes \sqrt{5}, \quad e^2 \otimes \sin(3)$$

Usando las propiedades del teorema, tenemos

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta &= (\alpha \cdot 1) \otimes \beta \\ &= \alpha(1 \otimes \beta) \\ &= \alpha(1 \otimes (\beta \cdot 1)) \\ &= \alpha\beta(1 \otimes 1) \end{aligned}$$

con lo cual hemos podido comprobar que

$$\alpha \otimes \beta = \alpha\beta(1 \otimes 1)$$

generalizando el caso anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i &= \sum_i \alpha_i\beta_i(1 \otimes 1) \\ &= (\sum_i \alpha_i\beta_i)(1 \otimes 1) \\ &= \lambda(1 \otimes 1) \end{aligned}$$

Así, todo vector de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$, es combinación lineal de $1 \otimes 1$. Este vector es no nulo y genera a $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$, luego $\{1 \otimes 1\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$, y por lo tanto su dimensión es 1.

Ejemplo 111 *Explicitar una base de* $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$.

Solución. Primero veamos algunos vectores de este espacio, por ejemplo:

$$(2, 1) \otimes (1, 3); \quad (0, \pi) \otimes (\sqrt{5}, e^2)$$

Recordemos que la base canónica de $\mathbb{R}^2$ la denotamos por $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$. Usando propiedades del teorema anterior tenemos,

$$\begin{aligned} (a, b) \otimes (c, d) &= (ae_1 + be_2) \otimes (c, d) \\ &= (ae_1) \otimes (c, d) + (be_2) \otimes (c, d) \\ &= a(e_1 \otimes (c, d)) + b(e_2 \otimes (c, d)) \\ &= a(e_1 \otimes (ce_1 + de_2)) + b(e_2 \otimes (ce_1 + de_2)) \\ &= a(e_1 \otimes (ce_1)) + a(e_1 \otimes (de_2)) + b(e_2 \otimes (ce_1)) + b(e_2 \otimes (de_2)) \\ &= ac(e_1 \otimes e_1) + ad(e_1 \otimes e_2) + bc(e_2 \otimes e_1) + bd(e_2 \otimes e_2) \end{aligned}$$

con lo cual hemos podido comprobar que

$$(a,b)\otimes(c,d)=ac(e_1\otimes e_1)+ad(e_1\otimes e_2)+bc(e_2\otimes e_1)+bd(e_2\otimes e_2)$$

generalizando el caso anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_i (a_i,b_i)\otimes(c_i,d_i) &= \sum_i a_ic_i(e_1\otimes e_1)+a_id_i(e_1\otimes e_2)+b_ic_i(e_2\otimes e_1)+b_id_i(e_2\otimes e_2)\\ &= \sum_i a_ic_i(e_1\otimes e_1)+\sum_i a_id_i(e_1\otimes e_2)+\sum_i b_ic_i(e_2\otimes e_1)+\sum_i b_id_i(e_2\otimes e_2)\\ &= \lambda_{11}(e_1\otimes e_1)+\lambda_{12}(e_1\otimes e_2)+\lambda_{21}(e_2\otimes e_1)+\lambda_{22}(e_2\otimes e_2)\end{aligned}$$

Así, todo vector de $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$, es combinación lineal de

$$(e_1\otimes e_1),\quad (e_1\otimes e_2),\quad (e_2\otimes e_1),\quad (e_2\otimes e_2),$$

entonces obtenemos

$$\{e_1\otimes e_1,\quad e_1\otimes e_2,\quad e_2\otimes e_1,\quad e_2\otimes e_2\}$$

es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$.

Por lo anterior tenemos que el espacio vectorial $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$ tiene dimensión 4.

Ejercicios.

1. Explicitar una base de $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}^2$.
2. Explicitar una base de $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}$.
3. Explicitar una base de $\mathbb{R}^2\otimes M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Capítulo 3

Transformaciones lineales

3.1. Introducción

Entre espacios vectoriales V y W, sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, se pueden definir una gran variedad de funciones, nos interesa resaltar de estas funciones las que respetan la estructura de espacio vectorial, es decir, respetan la suma de vectores y también la multiplicación por un escalar.

Al considerar este tipo de funciones, uno de los mejores ejemplo que disponemos es la derivada como función de V en V, siendo V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de todas las funciones reales derivables. La función derivada respeta la suma y la multiplicación por escalar, esto es, dados f, g en V y α en $\mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= (f'+g')(x) \\ (af)'(x) &= (af')(x),\end{aligned}$$

así también, la integral mirada como función desde el $\mathbb{R}$-espacio vectorial W, de todas las funciones integrables en el intervalo $[a, b]$, en el el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}$ también cumple estas propiedades, es decir, dados f, g en W y α en $\mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b (\lambda f)(x)dx &= \lambda \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

3.2. Transformaciones Lineales

En este capítulo U, V, W denotan espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

Definición 91 *Sea $T: U \to V$, una función.*

Se dice que T es una transformación lineal *si y sólo si T satisface lo siguiente:*

i) *T respeta la suma, es decir,*

$$(\forall u, v \in U)(T(u+v) = T(u) + T(v))$$

ii) *T respeta la multiplicación por escalar*

$$(\forall a \in \mathbb{K})(\forall u \in U)(T(au) = aT(u))$$

Notación. El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se denota por $\mathcal{L}(V, W)$, es decir,

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \quad / \quad T \text{ es una transformación lineal}\}$$

Ejemplo 112 *Demostrar que la siguiente función*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (y, x) \end{array}$$

es una transformación lineal.

Solución. Veamos primero que T respeta la suma. Sean (x, y), (x', y') cualesquiera en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T((x, y) + (x', y')) &= T((x + x', y + y')) \\ &= (y + y', x + x') \\ &= (y, x) + (y', x') \\ &= T((x, y)) + T((x', y')) \end{aligned}$$

Ahora la multiplicación por escalar. Sea (x, y) cualesquiera en $\mathbb{R}^2$ y a en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(a(x, y)) &= T((ax, ay)) \\ &= (ay, ax) \\ &= a(y, x) \\ &= aT((x, y)) \end{aligned}$$

con lo cual hemos demostrado que T es una transformación lineal.

Ejemplo 113 *Demostrar que la siguiente función*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (2x + 3y, x - 3y) \end{array}$$

es una transformación lineal.

Solución. Veamos primero que T respeta la suma. Sean (x, y), (x', y') cualesquiera en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T((x, y) + (x', y')) &= T((x + x', y + y')) \\ &= (2(x + x') + 3(y + y'), (x + x') - 3(y + y')) \\ &= (2x + 2x' + 3y + 3y', x + x' - 3y - 3y') \\ &= (2x + 3y, x - 3y') + (2x' + 3y', x' - 3y') \\ &= T((x, y)) + T((x', y')) \end{aligned}$$

Ahora la multiplicación por escalar. Sea (x,y) cualesquiera en $\mathbb{R}^2$ y a en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
T(a(x,y)) &= T((ax,ay)) \\
&= (2ax+3ay, ax-3ay) \\
&= (a(2x+3y), a(x-3y)) \\
&= a(2x+3y, x-3y) \\
&= aT((x,y))
\end{aligned}$$

con lo cual hemos demostrado que T es una transformación lineal.

Ejemplo 114 *Demostrar que la siguiente función*

$$\begin{array}{cccc}
T: & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & ax^2+bx+c & \rightsquigarrow & (a-b, 2c+b)
\end{array}$$

es una transformación lineal.

Solución. Veamos primero que T respeta la suma. Sean ax^2+bx+c, y $a'x^2+b'x+c'$ cualesquiera en $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned}
T((ax^2+bx+c)+(a'x^2+b'x+c')) &= T((a+a')x^2+(b+b')x+(c+c')) \\
&= ((a+a')-(b+b'), 2(c+c')+(b+b')) \\
&= (a-b+a'-b', 2c+b+2c'+b') \\
&= (a-b, 2c+b)+(a'-b', 2c'+b') \\
&= T(ax^2+bx+c)+T(a'x^2+b'x+c')
\end{aligned}$$

Ahora la multiplicación por escalar. Sea ax^2+bx+c cualesquiera en $\mathbb{R}_2[x]$, y λ en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
T(\lambda\left(ax^2+bx+c\right)) &= T(\lambda ax^2+\lambda bx+\lambda c) \\
&= (\lambda a-\lambda b, 2\lambda c+\lambda b) \\
&= (\lambda(a-b), \lambda(2c+b)) \\
&= \lambda(a-b, 2c+b) \\
&= aT(ax^2+bx+c)
\end{aligned}$$

con lo cual hemos demostrado que T es una transformación lineal.

Proposición 92 *Sea T una función de U en V, entonces T es una transformación lineal si y sólo si se cumple que*

$$(\forall u,v\in U)(\forall a\in\mathbb{K})(T(u+av)=T(u)+aT(v))$$

Ejercicio 115 *Demostrar que la siguiente función*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (2x-y+z, x-y+z, x) \end{array}$$

es una transformación lineal.

Ejercicio 116 *Demostrar que la siguiente función*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x-2y+z, 2x+3y+2z) \end{array}$$

es una transformación lineal.

Ejemplo 117 *Hallar el conjunto de las preimágenes del vector nulo para la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (2x+3y+z, x-3y-z) \end{array}$$

Solución. Necesitamos determinar los vectores (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$T(x,y,z) = (0,0)$$

Evaluando T,

$$(2x+3y+z, x-3y-z) = (0,0)$$

es decir,

$$2x+3y+z=0, \quad x-3y-z=0$$

luego, utilizando la matriz asociada al sistema, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

por lo tanto,

$$x=0 \quad y+\frac{1}{3}z=0$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (0,-\frac{1}{3}z,z) \\ &= z(0,-\frac{1}{3},1) \end{aligned}$$

Así el conjunto de las preimágenes del vector nulo es el subespacio

$$\left\langle (0,-\frac{1}{3},1) \right\rangle.$$

Observación. Note que el resolver un sistema de ecuaciones lineales equivale a encontrar las preimágenes de un vector para una transformación lineal dada.

Teorema 93 *Sean U, V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, además sean $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ una base de U y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un subconjunto de V entonces existe una única transformación lineal T de U en V, tal que $T(u_i) = v_i$, $i = 1, ..., n$*

Observación: Dado un vector u de U, se tiene que

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

ya que $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ es una base de U, como la transformación del teorema anterior es lineal entonces tenemos

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Ejemplo 118 *Determinar T una transformacion lineal de $\mathbb{R}^2$ en*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x + y + z = 0\}$$

tal que $T(1, 0) = (1, 2, -3)$ y $T(1, 1) = (5, -3, -2)$.

Solución. Como $\{(1, 0), (1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y los vectores $(1, 2, -3)$ y $(5, -3, -2)$ pertenecen a U, entonces existe un única transformación lineal.

Explicitemos la transformación, para ello usemos la observación anterior. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, luego

$$(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$$

aplicando la transformación lineal obtenemos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T((x - y)(1, 0) + y(1, 1)) \\ &= (x - y)T(1, 0) + yT(1, 1) \\ &= (x - y)(1, 2, -3) + y(5, -3, -2) \\ &= (x + 4y, 2x - 5y, -3x + y) \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos la siguiente transformación lineal:

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (x + 4y, 2x - 5y, -3x + y) \end{array}.$$

Ejercicios.

Determinar si los siguientes funciones son transformaciones lineales. **JUSTIFIQUE.**

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, 3x + y)$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x + \sqrt{y^2})$.
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y^2, x)$
4. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x + |y|, x, y)$
5. $T : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(x) = \begin{bmatrix} x & 2x \\ \sqrt{2}x & x^2 \end{bmatrix}$
6. $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(x, y) = \begin{bmatrix} x + y & x - 3y \\ 2x & x - y \end{bmatrix}$

3.2.1. Kernel o Núcleo

El poder distinguir este conjunto formado por todas las preimágenes del vector nulo nos lleva a la siguiente definición.

Definición 94 *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se define el* Kernel *o* Núcleo *de la transformación lineal T, denotado por* $\operatorname{Ker} T$, *al conjunto de las preimágenes del vector nulo, es decir*

$$\operatorname{Ker} T = \{v \in V \quad / \quad T(v) = 0\}$$

Ejemplo 119 *Determinar el kernel de la siguiente transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \rightsquigarrow & (x - 2y + z, 2x + 3y + 2z) \end{array}$$

Solución. Como tenemos que

$$\operatorname{Ker} T = \{v \in V \quad / \quad T(v) = 0\}$$

reemplazando

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad T(x, y, z) = (0, 0)\big\} \\ &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad (x - 2y + z, 2x + 3y + 2z) = (0, 0)\big\} \\ &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x - 2y + z = 0, \quad 2x + 3y + 2z = 0\big\} \end{aligned}$$

para explicitar el $\operatorname{Ker} T$ debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo, para ello asociamos la matriz al sistema y determinamos su escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} T &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad x+z=0 \quad y=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad x=-z \quad y=0\right\}\\
&= \left\{(-z,0,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \langle(-1,0,1)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Ker} T = \langle(-1,0,1)\rangle\,.$$

Ejemplo 120 *Determinar el kernel de la siguiente transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc}
T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\
 & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x-2y-z,2x+3y+2z)
\end{array}$$

Solución. Como tenemos que

$$\operatorname{Ker} T = \{v\in V \quad / \quad T(v)=0\}$$

reemplazando

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} T &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad T(x,y,z)=(0,0)\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad (x-2y-z,2x+3y+2z)=(0,0)\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad x-2y-z=0 \quad 2x+3y+2z=0\right\}
\end{aligned}$$

para explicitar el $\operatorname{Ker} T$ debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo, para ello asociamos la matriz al sistema y determinamos su escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7}\\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Con lo cual tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} T &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad x+\frac{1}{7}z=0 \quad y+\frac{4}{7}z=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad x=-\frac{1}{7}z \quad y=-\frac{4}{7}z\right\}\\
&= \left\{(-\frac{1}{7}z,-\frac{4}{7}z,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\langle\left(-\frac{1}{7},-\frac{4}{7},1\right)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Ker} T = \left\langle\left(-\frac{1}{7},-\frac{4}{7},1\right)\right\rangle$$

Teorema 95 *Sea T una transformación lineal de U en V, es decir, $T \in \mathcal{L}(U,V)$ entonces*

$$\operatorname{Ker} T \leq U$$

Ejemplo 121 *En el ejemplo anterior tenemos la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x-2y-z, 2x+3y+2z) \end{array}$$

cuyo kernel es $\left\langle\left(-\frac{1}{7},-\frac{4}{7},1\right)\right\rangle$. Como el conjunto $\left\{\left(-\frac{1}{7},-\frac{4}{7},1\right)\right\}$ genera y es linealmente independiente, por lo tanto $\left\{\left(-\frac{1}{7},-\frac{4}{7},1\right)\right\}$ es una base del $\operatorname{Ker} T$*. Así tenemos que la dimensión del* $\operatorname{Ker} T$ *es* 1.

Definición 96 *Se define la* nulidad *de una transformación lineal T, como la dimensión del kernel de T, la cual denotamos por*

$$\operatorname{Nul}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T)$$

Otro de los elementos notables de una función es su recorrido, esto es, el conjunto de los posibles vectores que puede alcanzar esta función.

3.2.2. Imagen o Recorrido

Recordemos la definición de recorrido.

Definición 97 *Se define la* Imagen o Recorrido *de una transformación lineal T, esto es $T \in \mathcal{L}(U,V)$, como el conjunto de los vectores que tienen al menos una preimagen.*

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Rec}(T) = \{v \in V \quad / \quad (\exists u \in U)\,(T(u) = v)\}$$

Ejemplo 122 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (2x-y+z, x-y+z, x) \end{array}$$

Determinar la imagen de T.

Solución. Si recordamos el proceso que usamos en el cálculo en una variable, determinemos cuales vectores tienen preimagen.

Para ello, sean $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (a,b,c) \\ (2x - y + z, x - y + z, x) &= (a,b,c) \end{aligned}$$

Igualando coordenadas tenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} 2x - y + z &=& a \\ x - y + z &=& b \\ x &=& c \end{array}\right|$$

Ahora, resolvamos el sistema buscando la matriz asociada a él, y determinando su escalonada

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & -1 & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-c-b \end{bmatrix}$$

luego, un vector tiene preimagen si y sólo si el sistema es consistente (no necesitamos que la solución sea única), lo cual es equivalente a escribir

$$a - c - b = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right) (T(x,y,z) = (a,b,c))\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad a - c - b = 0\} \\ &= < (1,1,0), (1,0,1) > . \end{aligned}$$

Ejemplo 123 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x - 2y - z, 2x + 3y + 2z) \end{array}$$

Determinar la imagen de T.

Solución. Sean $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (a,b) \\ (x - 2y - z, 2x + 3y + 2z) &= (a,b) \end{aligned}$$

Igualando coordenadas tenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} x - 2y - z &=& a \\ 2x + 3y + 2z &=& b \end{array}\right|$$

Ahora, determinemos la matriz asociada a él, y su escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & a \\ 2 & 3 & 2 & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7}a + \frac{2}{7}b \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7}b - \frac{2}{7}a \end{bmatrix}$$

Así, un vector tiene preimagen si y sólo si el sistema es consistente. Como este sistema siempre tiene solución entonces,

$$\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2.$$

Teorema 98 *Sea T una transformación lineal de U en V, es decir $T \in \mathcal{L}(U,V)$, entonces*

$$\mathrm{Im}\, T \leq V.$$

Ejemplo 124 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (2x-y, x-3y, x) \end{array}$$

Determinar una base de $\mathrm{Im}\, T$*.*

Solución. Sean $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{array}{rcl} T(x,y) & = & (a,b,c) \\ (2x-y, x-3y, x) & = & (a,b,c) \end{array}$$

Igualando coordenadas tenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & a \\ x-3y & = & b \\ x & = & c \end{array}\right|$$

Ahora, determinemos la matriz asociada y su escalonada

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & -3 & b \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 2c-a \\ 0 & 0 & b+5c-3a \end{bmatrix}$$

un vector tiene preimagen si y sólo si el sistema tiene solución, lo cual es equivalente a

$$b + 5c - 3a = 0$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(T) & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \left(\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) (T(x,y) = (a,b,c))\} \\ & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad b+5c-3a = 0\} \\ & = & <(1,3,0),(0,-5,1)>. \end{array}$$

Es fácil probar que el conjunto $\{(1,3,0),(0,-5,1)\}$ es linealmente independiente, por lo tanto una base de $\operatorname{Im} T$.

Observación: En los anteriores desarrollos no hemos utilizado el hecho de que las funciones son transformaciones lineales, es decir, la propiedad

$$T(u+av)=T(u)+aT(v)$$

desarrollemos el ejemplo de nuevo teniendo presente este hecho.

Ejemplo 125 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (2x-y,x-3y,x) \end{array}$$

Determinar una base de $\operatorname{Im} T$.

Solución. Sea $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^2$, luego

$$(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$$

Aplicando la transfomación lineal tenemos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left(x(1,0)+y(0,1)\right) \\ &= xT(1,0)+yT(0,1) \end{aligned}$$

pero, $T(1,0)=(2,1,1)$ y $T(0,1)=(-1,-3,0)$.

Así,

$$T(x,y)=x(2,1,1)+y(-1,-3,0)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad \left(\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)(T(x,y)=(a,b,c))\right\} \\ &= \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad (a,b,c)=x(2,1,1)+y(-1,-3,0)\right\} \\ &= <(2,1,1),(-1,-3,0)>. \end{aligned}$$

Es fácil probar que el conjunto $\{(2,1,1),(-1,-3,0)\}$ es linealmente independiente, por lo tanto, $\{(2,1,1),(-1,-3,0)\}$ es otra base de $\operatorname{Im} T$.

Teorema 99 *Sea U un espacio vectorial, $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ y $T\in\mathcal{L}(U,V)$, entonces*

$$\operatorname{Im} T=\langle T(\mathcal{B})\rangle=\langle T(u_1),T(u_2),...,T(u_n)\rangle.$$

Definición 100 *Se define el* rango *de una transformación lineal T como el número entero positivo correspondiente a la dimensión del recorrido de T. Se denota este número por* $\operatorname{Rg} T$, *así tenemos que,*

$$\operatorname{Rg} T=\dim\operatorname{Im}(T)$$

Teorema 101 *Sea U un espacio vectorial de dimension finita y $T \in \mathcal{L}(U, V)$, entonces*

$$\dim U = \operatorname{Nul} T + \operatorname{Rg} T$$

Observación. En el ejemplo anterior tenemos que $\operatorname{Rg} T$ es igual a 2, y la dimensión del espacio de partida es 2, por lo tanto la dimensión del $\operatorname{Ker} T$ es 0, es decir

$$\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}.$$

3.2.3. Funciones biyectivas

Recordemos algunas propiedades que cumplen ciertas funciones.

Definición 102 *Sea T una transformación lineal de U en V.*

1. *Se dice que T es* inyectiva *si y sólo si*

$$(\forall u, v \in U)\,(T(u) = T(v) \Rightarrow u = v)$$

2. *Se dice que T es* epiyectiva *si y sólo si*

$$\operatorname{Im}(T) = V$$

3. *Se dice que T es* biyectiva *si y sólo si T es inyectiva y epiyectiva.*

Ejemplo 126 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (2x-y, x+3y, x+y) \end{array}$$

Demostrar que T es inyectiva.

Solución. Sean (x,y), $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{array}{rcl} T(x,y) & = & T(u,v) \\ (2x-y, x+3y, x+y) & = & (2u-v, u+3v, u+v) \end{array}$$

igualando coordenadas obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 2u-v \\ x+3y & = & u+3v \\ x+y & = & u+v \end{array}\right|$$

de otra forma obtenemos el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y-2u+v & = & 0 \\ x+3y-u-3v & = & 0 \\ x+y-u-v & = & 0 \end{array}\right|$$

Asociando la matriz del sistema y escalonando obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$x - u = 0, \quad y - v = 0$$

es decir,

$$x = u, \quad y = v$$
$$(x, y) = (u, v)$$

Con lo cual hemos demostrado que

$$(T(x, y) = T(u, v)) \Rightarrow ((x, y) = (u, v))$$

es decir, T es inyectiva.

Teorema 103 *Sea T una transformación lineal de U en V.*

1. *T es inyectiva si y sólo si* $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.
2. *T es epiyectiva si y sólo si* $\operatorname{Nul}(T) + \dim(V) = \dim(U)$.

Ejemplo 127 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (2x - y, x + 3y, x + y) \end{array}$$

Demostrar que T es inyectiva. ¿Es T epiyectiva?

Solución. Determinemos el kernel de T. Para ello, sean $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (0, 0, 0) \\ (2x - y, x + 3y, x + y) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

igualando coordenadas obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 0 \\ x + 3y & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{array}$$

Asociando la matriz al sistema y escalonando obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$x = 0, \quad y = 0$$

es decir,

$$\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$$

Con lo cual hemos probado que T es inyectiva.

Para determinar la epiyectividad de T, utilicemos que

$$\operatorname{Nul}(T) + \dim(V) = \dim(U)$$

En este caso tenemos

$$\operatorname{Nul}(T) + \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{R}^2)$$

Como $\operatorname{Nul}(T) = 0$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ y $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, entonces la igualdad no se cumple, por lo tanto, T no es epiyectiva.

Ejemplo 128 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (2x - y + z, x + 3y - z) \end{array}$$

Demostrar que T no es inyectiva. ¿Es T epiyectiva?

Solución. Determinemos el kernel de T. Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{array}{rcl} T(x,y,z) & = & (0,0) \\ (2x - y + z, x + 3y - z) & = & (0,0) \end{array}$$

igualando coordenadas obtenemos el siguiente sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 0 \\ x + 3y - z & = & 0 \end{array} \right|$$

Asociando la matriz al sistema y escalonando obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Así,

$$x = -\frac{2}{7}z, \quad y = \frac{3}{7}z$$

es decir,

$$\operatorname{Ker} T = \left\langle \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, 0 \right) \right\rangle$$

Con lo cual se prueba que T no es inyectiva.

Para determinar la epiyectividad de T, utilicemos el hecho que

$$\operatorname{Nul}(T) + \dim(V) = \dim(U)$$

En este caso tenemos

$$\mathrm{Nul}(T) + \dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Como $\mathrm{Nul}\,(T) = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ y $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ la igualdad se cumple, por lo tanto, T es epiyectiva.

Ejercicios.

1. Dada la función $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, x+3z) \end{array}$

   a) Demostrar que T es una transformación lineal
   b) Calcular una base del $\mathrm{Ker}(T)$
   c) Demostrar que T es epiyectiva

2. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x-y, x+2y-z, 2x-5y+z) \end{array}$$

   a) Determinar una base del $\mathrm{Ker}\,T$
   b) Determinar una base de la $\mathrm{Im}\,T$

3. Dada la transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ con } T(x,y,z) = (x-y, \quad 3x+y-2z, \quad 2x-4y+z)$$

   a) Determinar una base del $\mathrm{Ker}\,T$
   b) Determinar una base de la $\mathrm{Im}\,T$

4. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_2[x] & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & p(x) & \mapsto & \begin{bmatrix} p(1) & p'(0) \\ \int_0^1 p(x)dx & p(-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

   a) Demostrar que T es inyectiva
   b) Calcular una base $\mathrm{Im}(T)$

5. Dada la función $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y, x-2z) \end{array}$

   a) Demostrar que T es una transformación lineal
   b) Calcular una base del $\mathrm{Ker}(T)$

3.2.4. Álgebra de Transformaciones lineales

Sean $F, G \in \mathcal{L}(U,V)$, podemos definir la suma de las transformaciones lineales L y G por

$$\begin{array}{rccc} F+G: & U & \longrightarrow & V \\ & u & \rightsquigarrow & F(u)+G(u) \end{array}$$

Ahora probemos que esta nueva función, también es una transformación lineal. Para ello, sean $u, v \in U$ y $a \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (F+G)(u+av) &= F(u+av)+G(u+av) \\ &= F(u)+F(av)+G(u)+G(av) \\ &= F(u)+aF(v)+G(u)+aG(v) \\ &= F(u)+G(u)+aF(v)+aG(v) \\ &= (F+G)(u)+a(F+G)(v) \end{aligned}$$

así hemos probado que $F+G$ es una transformación lineal.

También podemos definir la multiplicación por escalar de una transformación lineal. Sean $F \in \mathcal{L}(U,V)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, definamos la multiplicación por el escalar α de la transformación lineal F del siguiente modo,

$$\begin{array}{rccc} \alpha F: & U & \longrightarrow & V \\ & u & \rightsquigarrow & \alpha \cdot F(u) \end{array}$$

Ahora probemos que esta nueva función es también una transformación lineal. Sean $u, v \in U$ y $a \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (\alpha F)(u+av) &= \alpha F(u+av) \\ &= \alpha (F(u)+F(av)) \\ &= \alpha F(u)+a\alpha F(v) \\ &= (\alpha F)(u)+a(\alpha F)(v) \end{aligned}$$

luego hemos verificado que αF es también una transformación lineal.

Observación. Note que no solamente hemos demostrado que las operaciones de suma y multiplicación por escalar son transformaciones lineales sino también que $\mathcal{L}(U,V)$ es un subespacio vectorial del conjunto $\mathcal{F}(U,V)$ de todas las funciones de U en V.

Teorema 104 *Sean U, V espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, entonces el conjunto $\mathcal{L}(U,V)$, de todas las transformaciones lineales de U en V, es un subespacio vectorial del conjunto $\mathcal{F}(U,V)$, de todas las funciones de U en V. Esto lo podemos expresar por*

$$\mathcal{L}(U,V) \leq \mathcal{F}(U,V)$$

Ejemplo 129 *Dadas las transformaciones lineales*

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (x-4y,2x+y,x) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cccc} G: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (2x-y,x-3y,y) \end{array}$$

Determinar una base de $\mathrm{Im}(F+G)$.

Solución. Explicitemos la función $F+G$, sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, luego

$$\begin{aligned} (F+G)(x,y) &= F(x,y)+G(x,y) \\ &= (x-4y,2x+y,x)+(2x-y,x-3y,y) \\ &= (3x-5y,3x-2y,x+y) \end{aligned}$$

Así,

$$(F+G)(x,y) = (3x-5y,3x-2y,x+y).$$

Para determinar la imagen de $F+G$ procedemos de la siguiente manera. Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y así

$$\mathrm{Im}(F+G) = \langle (F+G)(1,0),(F+G)(0,1) \rangle$$

Como $(F+G)(1,0) = (3,3,1)$ y $(F+G)(0,1) = (-5,-2,1)$, entonces

$$\mathrm{Im}(F+G) =< (3,3,1),(-5,-2,1) > .$$

Es fácil probar que el conjunto $\{(3,3,1),(-5,-2,1)\}$ es linealmente independiente, por lo tanto, $\{(3,3,1),(-5,-2,1)\}$ es una base.de $\mathrm{Im}(F+G)$.

3.2.5. Compuesta

Otra de las operaciones que aparece cuando se trabaja con funciones es la composición de funciones.

Definición 105 *Sean* $F \in \mathcal{L}(U,V)$ *y* $G \in \mathcal{L}(V,W)$. *Se define la función compuesta de* F *con* G *por*

$$\begin{array}{cccc} G \circ F: & U & \longrightarrow & W \\ & u & \rightsquigarrow & G(F(u)) \end{array}$$

Notación: Sean $F \in \mathcal{L}(V,V)$ entonces la compuesta de F consigo misma n veces se denota por F^n, es decir:

$$\begin{aligned} F \circ F &= F^2 \\ F \circ F \circ F &= F^3. \end{aligned}$$

Probemos que $G \circ F$, es también una transformación lineal. Sean $u, v \in U$ y $a \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
(G \circ F)(u + av) &= G(F(u + av)) \\
&= G(F(u) + F(av)) \\
&= G(F(u) + aF(v)) \\
&= G(F(u)) + G(aF(v)) \\
&= G(F(u)) + aG(F(v)) \\
&= (G \circ F)(u) + a(G \circ F)(v)
\end{aligned}$$

así hemos verificado que $G \circ F$ es una transformación lineal.

Ejemplo 130 *Dadas las siguientes transformaciones lineales*

$$\begin{array}{cccc}
F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & (x, y) & \rightsquigarrow & (x - 4y, 2x + y, x) \\
G: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & (x, y, z) & \rightsquigarrow & (2x - y - z, x - 3y + 2z)
\end{array}$$

Explicitar las funciones $F \circ G$ y $G \circ F$.

Solución. Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, luego

$$\begin{aligned}
(F \circ G)(x, y, z) &= F(G(x, y, z)) \\
&= F(2x - y - z, x - 3y + 2z) \\
&= (-2x + 11y - 9z, 5x - 5y, 2x - y - z)
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{array}{cccc}
F \circ G: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & (x, y, z) & \rightsquigarrow & (-2x + 11y - 9z,\ 5x - 5y,\ 2x - y - z)
\end{array}$$

Para explicitar $G \circ F$. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, luego

$$\begin{aligned}
(G \circ F)(x, y) &= G(F(x, y)) \\
&= G(x - 4y, 2x + y, x) \\
&= (-x - 9y,\ -3x - 7y)
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{array}{cccc}
G \circ F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & (x, y) & \rightsquigarrow & (-x - 9y,\ -3x - 7y)
\end{array}$$

Ejemplo 131 *Dadas las siguientes transformaciones lineales*

$$\begin{array}{cccc}
F: & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & ax^2 + bx + c & \rightsquigarrow & (a - b, 2a - 3c, b + 2c) \\
G: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & (x, y, z) & \rightsquigarrow & (4x - y - z, -3x + y + z)
\end{array}$$

Explicitar la transformación lineal $G \circ F$ y determinar una base del $\operatorname{Ker}(G \circ F)$

Solución. Sea $ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$, luego

$$\begin{array}{rcl}(G\circ F)\,(ax^2+bx+c) & = & G(F(ax^2+bx+c))\\ & = & G(a-b,2a-3c,b+2c)\\ & = & (2a-5b+c,-a+4b-c)\end{array}$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{rccc} G\circ F: & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & ax^2+bx+c & \rightsquigarrow & (2a-5b+c,-a+4b-c)\end{array}.$$

Para determinar el $\operatorname{Ker}(G\circ F)$, recordemos la definición, esto es,

$$\operatorname{Ker}(G\circ F)=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]\quad/\quad(2a-5b+c,-a+4b-c)=(0,0)\}.$$

Reescribiendo el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl}2a-5b+c & = & 0\\ -a+4b-c & = & 0\end{array}\right|$$

Determinemos la matriz asociada y posteriormente la escalonada reducida por fila.

$$\begin{bmatrix}2 & -5 & 1 & 0\\ -1 & 4 & -1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$$

luego obtenemos

$$a=\frac{1}{3}c,\quad b=\frac{1}{3}c,\ \text{con } c\in\mathbb{R}$$

Reemplazando

$$\begin{array}{rcl}\operatorname{Ker}(G\circ F) & = & \{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]\quad/\quad a=\frac{1}{3}c,\quad b=\frac{1}{3}c,\quad \text{con } c\in\mathbb{R}\}\\ & = & \{\frac{1}{3}cx^2+\frac{1}{3}cx+c\in\mathbb{R}_2[x]\quad/\quad \text{con } c\in\mathbb{R}\}\\ & = & \left\langle\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1\right\rangle.\end{array}$$

Ejemplo 132 *Dadas las siguientes transformaciones lineales*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (x+y,2x+4y,x)\end{array},\qquad \begin{array}{rccc} G: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (4x-y-z,-3x+y+z)\end{array}$$

Explicitar las funciones $F\circ G$ y $G\circ F$.

Solución. Sea $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, luego

$$\begin{array}{rcl}(F\circ G)\,(x,y,z) & = & F(G(x,y,z))\\ & = & F(4x-y-z,-3x+y+z)\\ & = & (x,-4x+2y+2z,4x-y-z)\end{array}$$

Así

$$\begin{array}{rccc} F\circ G: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x,-4x+2y+2z,4x-y-z) \end{array}$$

La otra compuesta la tenemos definida por

$$\begin{aligned} (G\circ F)(x,y) &= G(F(x,y)) \\ &= G(x+y,2x+4y,x) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rccc} G\circ F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (x,y) \end{array}$$

Definición 106 *Sea U un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. La transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} Id_U: & U & \longrightarrow & U \\ & u & \rightsquigarrow & u \end{array}$$

se llama función identidad *de U.*

Observación. En el ejemplo anterior tenemos que $G\circ F = Id_{\mathbb{R}^2}$, pero no tenemos $F\circ G = Id_{\mathbb{R}^3}$.

3.2.6. Inversa

Definición 107 *Sea $F\in\mathcal{L}(U,V)$, decimos que existe la* inversa *de F si y sólo si existe $G\in L(V,U)$ tal que $G\circ F = Id_U$, $\quad F\circ G = Id_V$.*

La notación para la función inversa es F^{-1}.

Proposición 108 *Sea $F:U\longrightarrow V$ una transformación lineal y $G:V\longrightarrow U$ una función tal que*

$$G\circ F = Id_U \quad y \quad F\circ G = Id_V$$

entonces G es una transformación lineal de V en U..

Demostración. Sean $u,v\in V$ $\;y\;$ $a\in\mathbb{K}$

$$\begin{aligned} G(u+av) &= G(Id_U(u)+aId_V(v)) \\ &= G(F(G(u))+aF(G(v))) \\ &= G(F(G(u))+F(aG(v))) \\ &= G(F(G(u)+aG(v))) \\ &= (G\circ F)(G(u)+aG(v)) \\ &= G(u)+aG(v). \end{aligned}$$

Observación. La proposición anterior afirma que dada una transformación lineal $F:U\longrightarrow V$ si determinamos la función inversa de F entonces ella es lineal.

Teorema 109 *Sea $F : U \longrightarrow V$ una transformación lineal. La transformación lineal inversa de F existe si y sólo si F es biyectiva.*

Ejemplo 133 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (2x-y+z, x-y+2z, x+z) \end{array}$$

1. *Demostrar que existe la inversa de T.*

2. *Explicitar $T^{-1}(x,y,z)$*

Solución. Para demostrar que T es biyectiva, determinemos el $\operatorname{Ker} T$.

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (0,0,0) \\ (2x-y+z, x-y+2z, x+z) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

igualando coordenadas obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 0 \\ x-y+2z &=& 0 \\ x+z &=& 0 \end{array}\right|$$

Asociando la matriz del sistema y escalonando obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

es decir,

$$\operatorname{Ker} T = \{(0,0,0)\}$$

Con lo cual, T es inyectiva.

Además, tenemos

$$\operatorname{Nul}(T) + \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Como $\operatorname{Nul}(T) = 0$, luego la igualdad se cumple por lo tanto T es epiyectiva y usando el teorema 109 la función inversa de T existe.

Para explicitar la función inversa de T, necesitamos resolver la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (a,b,c) \\ (2x-y+z, x-y+2z, x+z) &= (a,b,c) \end{aligned}$$

igualando coordenadas obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y+z & = & a \\ x-y+2z & = & b \\ x+z & = & c \end{array}\right|$$

Asociando la matriz del sistema y escalonando obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b-2a+3c \\ 0 & 0 & 1 & c-a+b \end{array}\right]$$

Así,

$$x=c, \quad y=b-2a+3c, \quad z=c-a+b$$

es decir,

$$\begin{array}{rcl} T(c,b-2a+3c,c-a+b) & = & (a,b,c) \\ (c,b-2a+3c,c-a+b) & = & T^{-1}(a,b,c) \end{array}$$

Con lo cual la función inversa de T es:

$$\begin{array}{rccc} T^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (z,y-2x+3z,z-x+y) \end{array}.$$

Definición 110 *Sea $F \in \mathcal{L}(U,V)$. Decimos que F es un* isomorfismo *si y sólo si F es una transformación lineal biyectiva.*

Ejemplo 134 *La transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (2x-y+z,x-y+2z,x+z) \end{array}$$

del ejemplo anterior es una función biyectiva, luego T es un isomorfismo.

Definición 111 *Sean U,V espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Decimos que U es* isomorfo *a V si y sólo si existe F un isomorfismo de U en V. Anotaremos esto por $U \simeq V$.*

Proposición 112 *Sean U,V espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. El espacio vectorial U es* isomorfo *a V si y sólo si* $\dim U = \dim V$.

Observación. Ser "isomorfo" es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. La Proposición 112 nos entrega una forma natural de parametrizar las clases de equivalencia que se definen por esta relación, esto es: $\mathbb{K}^n$ puede ser elegido como el representante de todo espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n.

Ejercicio 135 *Verifique que la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & (a,b,c) & \rightsquigarrow & ax^2+bx+c \end{array}$$

es un isomorfismo.

Lo afirmación anterior muestra que $\mathbb{R}^3$ *es isomorfo a* $\mathbb{R}_2[x]$.

Ejercicios.

1. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (-2x-y,3x+y) \end{array}$$

   a) Determinar $(T\circ T)(x,y)$
   b) Hallar, si existe $T^{-1}(a,b)$

2. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una transformación lineal

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x+2y+z,x-y+3z,-x+y+2z) \end{array}$$

   a) Hallar una base de $\mathrm{Im}(T)$.
   b) Demostrar que T es un isomorfismo.
   c) Calcular $T^{-1}(x,y,z)$.

3. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ & ax^2+bx+c & \rightsquigarrow & (a+c)\,x^2+(b+c)\,x+(a+b+2c) \end{array}$$

   a) Hallar una base $\mathrm{Im}(T)$.
   b) Demostrar que T es un isomorfismo.
   c) Calcular $T^{-1}(x)$.

4. Dada la transformación lineal de $\mathbb{R}-$espacios vectoriales

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}_3[x] & \to & \mathbb{C}^2 \\ & ax^3+bx^2+cx+d & \rightsquigarrow & ((a+d)+(b+d)\,i,c+(a+b+c+2d)\,i) \end{array}$$

a) Demostrar que T es un isomorfismo.

b) Calcular $T^{-1}(x)$.

c) Calcular $[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$

5. Dada la transformación lineal de $\mathbb{C}-$espacios vectoriales

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{C}^3 & \rightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x+2y+z, x+y+3z, x+y+2z) \end{array}$$

a) Demostrar que T es un isomorfismo.

b) Calcular $T^{-1}(x,y,z)$

c) Calcular $T(T(T(0,0,1)))$

3.3. Matriz asociada

Una manera de facilitar el trabajo con una transformación lineal es asociarle una matriz, para lo cual es necesario considerar un par de bases ordenadas. Decir que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ es una "base ordenada" para U significa que el conjunto $\{u_2, u_1, ..., u_n\}$ se considera como una base distinta para U (aunque desde un punto de vista de la Teoría de Conjuntos $\mathcal{B} = \{u_2, u_1, ..., u_n\}$).

Definición 113 *Sean U y V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, además $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, y $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ bases ordenadas de U y V respectivamente. Sea T una transformación lineal de U en V.*

Se define la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

denotada por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

donde $T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Observación.

a) Observe que la columna j-ésima de la matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ corresponde ser las coordenadas del vector $T(u_j)$ en la base ordenada $\mathcal{C}$, esto es $[T(u_j)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$.

b) Si la base $\mathcal{B}$ del espacio de partida es igual al del espacio de llegada, la matriz asociada a la transformación lineal se denota por $[T]_{\mathcal{B}}$.

Ejemplo 136 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (5x-2y+3z, x+4y-2z) \end{array}.$$

Determinar la matriz asociada a T en la base canónica de cada espacio.

Solución. Sean $\mathcal{C} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, y $\mathcal{C}' = \{(1,0), (0,1)\}$, las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Calculemos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (5,1) \\ T(0,1,0) &= (-2,4) \\ T(0,0,1) &= (3,-2) \end{aligned}$$

y escribamos cada vector en combinación lineal de la base $\mathcal{C}'$,

$$\begin{aligned} (5,1) &= 5(1,0) + 1(0,1) \\ (-2,4) &= -2(1,0) + 4(0,1) \\ (3,-2) &= 3(1,0) - 2(0,1) \end{aligned}$$

luego,

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 137 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (3x+2y, x-4y) \end{array}$$

Determinar $[F]_{\mathcal{C}}$, donde $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$.

Solución. Para determinar la matriz asociada a F en la base canónica, primero calculemos

$$\begin{aligned} F(1,0) &= (3,1) \\ F(0,1) &= (2,-4) \end{aligned}$$

Ahora expresemos cada vector como combinación lineal de los elementos de la base

$$\begin{aligned} (3,1) &= 3(1,0) + 1(0,1) \\ (2,-4) &= 2(1,0) - 4(0,1) \end{aligned}$$

Así,

$$[F]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Teorema 114 *Sea $T \in \mathcal{L}(U,V)$, con U y V espacios vectoriales de dimensión finita, entonces*

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [u]_{\mathcal{B}}$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de U y V respectivamente.

Ejemplo 138 *Sean $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $\mathcal{D} = \{(1,1),(0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente y T una transformación lineal tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Explicitar $T(x,y,z)$.

Solución. Por el teorema anterior tenemos

$$[T(u)]_{\mathcal{D}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} \cdot [u]_{\mathcal{B}}$$

Determinemos las coordenadas de (x,y,z) en la base $\mathcal{B}$.

$$a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(1,0,1) = (x,y,z)$$

igualando coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} a+c & = & x \\ a+b & = & y \\ a+b+c & = & z \end{array}\right|$$

y resolviendo el sistema mediante la matriz asociada, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x-z+y \\ 0 & 1 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y \end{bmatrix}$$

Así $[(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x-z+y \\ z-x \\ z-y \end{bmatrix}$, luego

$$\begin{array}{rcl} [T(x,y,z)]_{\mathcal{D}} & = & \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-z+y \\ z-x \\ z-y \end{bmatrix} \\ [T(x,y,z)]_{\mathcal{D}} & = & \begin{bmatrix} 2x-4z+6y \\ -2x+3z-4y \end{bmatrix} \end{array}$$

Con lo cual obtenemos

$$\begin{array}{rcl} T(x,y,z) & = & (2x-4z+6y)\,(1,1) + (-2x+3z-4y)\,(0,1) \\ & = & (2x-4z+6y, -z+2y) \end{array}$$

Ejemplo 139 *Sean* $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$ *y* $\mathcal{D} = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,2,3)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^3$ *y* T *una transformación lineal tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Determinar, sin explicitar $T(x,y,z)$, *una base para el* $\operatorname{Ker} T$.

Solución. Sea $u \in \operatorname{Ker} T$, luego $T(u) = 0$, por lo cual $[T(u)]_{\mathcal{D}} = 0$. Por el teorema anterior tenemos

$$[T(u)]_{\mathcal{D}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} \cdot [u]_{\mathcal{B}}$$

es decir

$$0 = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} \cdot [u]_{\mathcal{B}}$$

reemplazando tenemos

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema homogéneo, mediante la matriz, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$a = 0, \quad b = c$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} [u]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ c \end{bmatrix} \\ u &= 0(1,1,1) + c(0,1,1) + c(1,0,1) \\ &= (c,c,2c) = c\,(1,1,2) \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$\operatorname{Ker} T = \langle (1,1,2) \rangle .$$

Como $\{(1,1,2)\}$ es linealmente independiente, luego $\{(1,1,2)\}$ es una base del $\operatorname{Ker} T$.

Ejemplo 140 *Sean* $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $\mathcal{D} = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,2,3)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^3$ *y* T *una transformación lineal tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Determinar, sin explicitar $T(x,y,z)$, *una base para la* $\operatorname{Im} T$.

Solución. Sabemos, por el ejemplo anterior, que $\mathrm{Rg}(T)$ es igual a 2, luego basta encontrar dos vectores linealmente independientes de la $\mathrm{Im}\, T$. Como

$$[T(1,1,1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [T(0,1,1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [T(1,0,1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= 4(1,1,0) - 3(1,0,1) + 1(1,2,3) = (2,6,0) \\ T(0,1,1) &= 2(1,1,0) - 1(1,0,1) + 2(1,2,3) = (3,6,5) \\ T(1,0,1) &= -2(1,1,0) + 1(1,0,1) - 2(1,2,3) = (-3,-6,-5) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, T &= \langle \quad T(1,1,1), \quad T(0,1,1), \quad T(1,0,1) \quad \rangle \\ &= \langle (2,6,0)\,, \quad (3,6,5)\,, \quad (-3,-6,-5) \rangle \\ &= \langle (2,6,0)\,, \quad (3,6,5) \rangle\,. \end{aligned}$$

Además el conjunto $\{(2,6,0)\,, (3,6,5)\}$ es linealmente indepediente, por lo tanto $\{(2,6,0)\,, (3,6,5)\}$ es una base de $\mathrm{Im}\, T$.

Teorema 115 *Sean U, V y W tres espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ con $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ bases de U, V y W respectivamente. Si $T, L \in \mathcal{L}(U,V)$, $F \in L(V,W)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces:*

1. $[T + \alpha L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} + \alpha\, [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
2. $[F \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [F]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

Corolario 116 *Sea U un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, y $\mathcal{B}$ base de U. Si $T \in L(U,U)$, entonces*

$$[T \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^2$$

Teorema 117 *Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, además $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de U y V respectivamente. Si $T \in \mathcal{L}(U,V)$ entonces:*

1. *T es un isomorfismo si y sólo si $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ es regular.*
2. *Si T es un isomorfismo, entonces*

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$$

Ejemplo 141 *Sean* $\mathcal{B} = \{(1,1,-1),(0,2,-1),(1,0,1)\}$, $\mathcal{D} = \{(1,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^3$ *y* T *una transformación lineal tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que T *es un isomorfismo.*

Solución. Para demostrar que T es un isomorfismo basta calcular el determinante de $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ y comprobar que es distinto de 0.

Calculemos

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

por lo tanto la matriz es invertible, luego T es un isomorfismo.

Ahora, si queremos explicitar la transformación inversa, tenemos

$$[T^{-1}]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}\right)^{-1}$$

Reemplazando obtenemos

$$[T^{-1}]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -8 & -13 & 1 \\ -11 & -18 & 1 \end{bmatrix}$$

Necesitamos determinar las coordenadas de (x,y,z) en la base $\mathcal{D}$,

$$a(1,2,1) + b(1,3,2) + c(2,1,3) = (x,y,z)$$

igualando coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b+2c & = & x \\ 2a+3b+c & = & y \\ a+2b+3c & = & z \end{array}\right|$$

resolviendo el sistema mediante la matriz asociada, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & 1 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{5}{4}z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}y - \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}z \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y \end{bmatrix}$$

Así

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{5}{4}z \\ \frac{1}{4}y - \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}z \\ \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned}
\left[T^{-1}(x,y,z)\right]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -8 & -13 & 1 \\ -11 & -18 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{5}{4}z \\ \frac{1}{4}y - \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}z \\ \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y \end{bmatrix} \\
[T(x,y,z)]_{\mathcal{D}} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}z \\ \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}y + \frac{1}{2}z \\ \frac{7}{2}x - \frac{15}{2}y + \frac{1}{2}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}
T^{-1}(x,y,z) &= a'(1,1,-1) + b'(0,2,-1) + c'(1,0,1) \\
T^{-1}(x,y,z) &= \left(\frac{17}{4}x - \frac{33}{4}y + \frac{1}{4}z, \quad \frac{23}{4}x - \frac{47}{4}y + \frac{3}{4}z, \quad \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}y + \frac{1}{4}z\right).
\end{aligned}$$

3.3.1. Matriz Cambio de Base

Un caso particular lo tenemos cuando la transformación lineal es la función identidad de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial U, con una base $\mathcal{B}$, en U con otra base $\mathcal{C}$, en este caso se denomina matriz cambio de base a la matriz asociada a la transformación lineal Id_U, es decir, sea U un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de U. La transformación lineal identidad

$$\begin{array}{rccc} Id: & U & \longrightarrow & U \\ & u & \rightsquigarrow & u \end{array}$$

tiene asociada su matriz en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ denotada por

$$[Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Proposición 118 *Sea U un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ con $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de U entonces,*

$$\begin{aligned}
[Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} &= \left([Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} \\
[Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= I_n
\end{aligned}$$

Teorema 119 *Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, además $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de U, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ bases de V. Si $T \in \mathcal{L}(U,V)$ entonces*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [Id]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} \cdot [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Ejemplo 142 *Sean* $\mathcal{B} = \{(1,1,-1),(0,2,-1),(1,0,1)\}$, $\mathcal{D} = \{(1,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^3$ *y* T *una transformación lineal tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcular $[T]_{\mathcal{B}}$

Solución. Usando el teorema anterior

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [Id]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} \cdot [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\ &= [Id]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} \cdot I_3 \end{aligned}$$

necesitamos calcular $[Id]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$, para ello necesitamos resolver los siguientes sistemas

$$\begin{aligned} Id(1,2,1) &= a(1,1,-1) + b(0,2,-1) + c(1,0,1) \\ Id(1,3,2) &= a'(1,1,-1) + b'(0,2,-1) + c'(1,0,1) \\ Id(2,1,3) &= a''(1,1,-1) + b''(0,2,-1) + c''(1,0,1) \end{aligned}$$

para ellos tenemos la matriz ampliada asociada a los sistemas

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & 3 \end{array}\right]$$

Entonces tenemos

$$[(1,2,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}, \quad [(1,3,2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}, \quad [(2,1,3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

con lo cual obtenemos

$$[Id]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [Id]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{38}{3} & -\frac{29}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicios.

1. Sea $\mathcal{C} = \{(1,2,1),(2,1,1),(1,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que
$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$
   a) Determinar una base del $\operatorname{Ker} T$

   b) Determinar una base de la $\operatorname{Im} T$

2. Dado $\mathbb{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x - 3y + 5z = 0\}$ un espacio vectorial, $\mathcal{A}$ una base de $\mathbb{U}$ y $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Si
$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{U} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x-y, x-z) \end{array} \quad \text{y} \quad [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   Determinar la base $\mathcal{A}$.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique.

   a) Si $\mathcal{C} = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,2,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces
$$[(x,y,z)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -y + z \\ -x + 2y - z \end{bmatrix}$$
   b) Si $\mathcal{C} = \{(1,1,-1),(2,1,2),(3,-1,4)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces
$$[(x,y,z)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2x - 2y - z \\ -5x + 7y + 2z \\ 3x - 4y - z \end{bmatrix}$$
   c) Si $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (x-y, x-2y) \end{array}$ y $\mathcal{C} = \{(1,2),(2,1)\}$, entonces
$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
   d) Si $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (x-y, x-2y) \end{array}$ y $\mathcal{C} = \{(1,1),(2,1)\}$, entonces
$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   e) Si $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (2x+y, x+y) \end{array}$ y $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$, entonces
$$[T^2]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

f) Si $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (2x+y, x+y) \end{array}$ y $[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$, entonces

$$[T \circ L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

g) Si $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (2x+y, x+y) \end{array}$ y $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$, entonces

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

h) Si $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_1[x] & \to & \mathbb{R}_1[x] \\ & ax+b & \rightsquigarrow & bx-a \end{array}$ y $\mathcal{B} = \{1, x+2\}$, entonces

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

i) Si $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_1[x] & \to & \mathbb{R}_1[x] \\ & ax+b & \rightsquigarrow & -bx+a \end{array}$ y $\mathcal{B} = \{1, x+1\}$, entonces

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

j) Si $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ & ax^2+bx+c & \rightsquigarrow & (a+b)x^2-cx+a-b) \end{array}$ y $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x^2\}$, entonces

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Sea $\mathcal{C} = \{(1,2,1),(-2,1,1),(-1,1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

   a) Determinar una base del $\operatorname{Ker}(T)$

   b) Determinar una base del $\operatorname{Im}(T^2)$

5. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}$ =$\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Explicitar $T(x, y, z)$

b) Hallar una base del $\text{Ker}(T)$

c) Hallar una base $\text{Img}(T)$

6. Sea $\mathcal{C} = \{(1,2,1),(2,1,1),(1,1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Determinar una base del $\text{Ker}\, T$

b) Determinar una base del $\text{Ker}\, T^2$

7. Dado $\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x + 3y - 5z = 0\}$ un espacio vectorial, $\mathcal{A}$ una base de $\mathbb{U}$ y $\mathcal{C} = \{(1,1),(2,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Si

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{U} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x+y-z, 3x-y+2z) \end{array} \quad \text{y} \quad [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar la base $\mathcal{A}$.

8. Dado $\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x + 2y - 5z = 0\}$ un espacio vectorial, $\mathcal{A}$ una base de $\mathbb{U}$ y $\mathcal{C} = \{(1,1),(1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$.

Si

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{U} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x+y-z, 3x-y+2z) \end{array} \quad \text{y} \quad [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar la base $\mathcal{A}$.

9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{C}$ =$\{(1,2,1),(2,-1,1),(-1,2,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hallar una base del $\text{Ker}(T)$ y una base de la $\text{Im}(T)$.

10. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{C}$ =$\{(1,2,1),(2,-1,1),(-1,2,1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Además $\mathcal{B}'$=$\{(1,2),(2,-1)\}$ y $\mathcal{C}' = \{(1,0,2),(0,-1,1),(1,1,0)\}$. Calcular $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$.

11. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ una transformación lineal de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales y $\mathcal{B} = \{(1, i, 1), (1, -1, 1), (1, 1, i)\}$ una base ordenada de $\mathbb{C}^3$ y $\mathcal{C}$ =$\{(1, 2), (2, -1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{C}^2$ tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & i \end{bmatrix}$$
Hallar una base del Ker(T) y una base de la Im(T).

12. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ $T(x, y, z) = (2x + iz, x - y)$ una transformación lineal de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Determinar si existen bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^3$ y $\mathbb{C}^2$ respectivamente tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & i \end{bmatrix}$$

13. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1., 1, -1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}$ =$\{(1, 1, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$
    a) Hallar una base para la Im(T)
    b) Demostrar que T es un isomorfismo
    c) Calcular $T^{-1}(x, y, z)$

14. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x^2, 1\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{C}$ =$\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
    a) Hallar una base para la Im(T)
    b) Demostrar que T es un isomorfismo
    c) Calcular $T^{-1}(p(x))$
    d) Calcular $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

15. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{C}^2$ una transformación lineal de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathcal{B} = \{1 - x, x^2, x^3, 1\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{C}$ =$\{(1, i), (i, 1), (1, 1), (1, 0)\}$ una base ordenada de $\mathbb{C}^2$ tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que T es un isomorfismo

b) Calcular $T^{-1}(x, y)$

c) Calcular $[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$

16. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que T es un isomorfismo

b) Calcular $T^{-1}(x, y, z)$

c) Calcular $T(T(T(0, 0, 1)))$

3.4. Espacio Vectorial Dual

En 3.2.4 estudiamos en general el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathcal{L}(U, V)$, de todas las transformaciones lineales entre los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales U y V. Como el cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre $\mathbb{K}$ entonces, en particular, tenemos que el conjunto $\mathcal{L}(U, \mathbb{K})$, de todas las funciones lineales de U en $\mathbb{K}$, es un espacio vectorial.

Definición 120 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se denomina espacio* vectorial dual *de V el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathcal{L}(U, \mathbb{K})$. Usualmente se denota por V^*, así tenemos que*

$$V^* = \{\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ es lineal}\}$$

Un elemento φ en V^* se llama una forma lineal *o también recibe el nombre de* funcional lineal.

Ejemplo 143 *Si $V = \mathbb{R}^n$ entonces es claro que ϕ es un elemento de V^* si y solamente si existen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

En efecto, consideremos la base canónica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V. Como

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

y ϕ es lineal entonces

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \phi(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) \\ &= x_1\phi(e_1) + x_2\phi(e_2) + \cdots + x_n\phi(e_n) \end{aligned}$$

así tenemos que existen $a_i = \phi(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

Recíprocamente, es inmediato que una función del tipo

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en $\mathbb{R}$, es una forma lineal.

Ejemplo 144 *Sea $V = \mathbb{R}_n[x]$ y $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(p(x)) = p(0)$. Claramente se tiene que φ es una forma lineal. En efecto, dados $p(x)$ y $q(x)$, dos polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a n y α en $\mathbb{R}$ entonces,*

$$\begin{aligned} \varphi(p(x) + \alpha q(x)) &= (p + \alpha q)(0) \\ &= p(0) + \alpha q(0) \\ &= \varphi(p(x)) + \alpha\varphi(q(x)) \end{aligned}$$

Ejemplo 145 *Consideremos ahora el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f'(x)$ existe en todo $\mathbb{R}\}$. Definamos $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\Phi(f) = f'(\frac{1}{2})$. No es difícil probar que Φ es una forma lineal. En efecto, sean f, g en V y α en $\mathbb{R}$ entonces,*

$$\begin{aligned} \Phi(f + \alpha g) &= (f + \alpha g)'(0) \\ &= f'(0) + (\alpha f)'(0) \\ &= f'(0) + \alpha(f)'(0) \\ &= \Phi(f) + \alpha\Phi(g) \end{aligned}$$

Ejemplo 146 *Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f(t)dt$ existe$\}$. Definamos $\Psi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\Psi(f) = \int_a^b f(t)dt$$

Claramente $\Psi(f)$ esta en $\mathbb{R}$ y Ψ verifica las propiedades de linealidad por las propiedades usuales que tiene la integral.

Ejemplo 147 *Consideremos $V = M_n(\mathbb{R})$. La función traza, $\mathrm{Tr} : V \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual esta definida por*

$$\mathrm{Tr}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

para (a_{ij}) matriz de orden $n \times n$ es claramente lineal y así es un elemento del espacio vectorial dual de $M_n(\mathbb{R})$.

De la definición 113, en 3.3, se tiene que si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada de V y consideramos la base natural $\mathcal{C} = \{1\}$ de $\mathbb{K}$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 1, entonces para φ en V^* se tiene que $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ es una matriz de orden $1 \times n$ y como el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $M_{1\times n}(\mathbb{K})$, de todas las matrices de orden $1 \times n$, tiene dimensión n se tiene la siguiente.

Proposición 121 *Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n entonces el espacio vectorial dual V^* tiene dimensión n y por lo tanto V y V^* son espacios vectoriales isomorfos.*

Demostración. Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n entonces V tiene una base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Por otra parte, $\mathcal{C} = \{1\}$ es la base natural de $\mathbb{K}$, mirado éste como $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 1, entonces a cada φ en V^* se le asocia la matriz, de orden $1 \times n$, $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (a_1 a_2 \ldots a_n)$. Esta asociación es una función lineal (ver 1 de Teorema 115) la cual establece un isomorfismo entre V^* y $M_{1\times n}(\mathbb{K})$. Así tenemos que $\dim(V^*) = n$ y usando la Proposición 112 tenemos que V es isomorfo a V^*.

3.4.1. Base Dual

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ordenada del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y consideramos la base natural $\mathcal{C} = \{1\}$ de $\mathbb{K}$, mirado éste como $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 1.

Definamos las funciones $v_i^* : V \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por el Teorema 93, dado $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, base ordenada del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, la función $v_i^* : V \longrightarrow \mathbb{K}$ es lineal, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, y es única con la propiedad

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Proposición 122 *Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ordenada del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. El conjunto de formas lineales $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ es una base del espacio vectorial dual V^* y se tiene:*

1. *Dado cualquier v en V entonces*

$$v = v_1^*(v)v_1 + v_2^*(v)v_2 + \ldots + v_n^*(v)v_n$$

2. *Dado cualquier φ en V^* entonces*

$$\varphi = \varphi(v_1)v_1^* + \varphi(v_2)v_2^* + \ldots + \varphi(v_n)v_n^*$$

Definición 123 *Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ordenada del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. La base ordenada $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ del espacio vectorial dual V^* se denomina* base dual *de $\mathcal{B}$.*

Observación. La Proposición anterior tambien demuestra que la dimensión de V^* es n ya que da la base dual $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ para una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dada de V.

Ejemplo 148 *Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canónica de V. No es difícil ver que la base dual $\mathcal{C}^* = \{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ está dada por las formas lineales $e_i^* : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por*

$$e_i^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$$

para $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en V.

Ejemplo 149 *Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$ base de V. Para determinar la base dual $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$ debemos encontrar dos funcionales lineales de V^*:*

$$v_1^*(x,y) = a_1 x + b_1 y \quad y \quad v_2^*(x,y) = a_2 x + b_2 y$$

(sabemos que son de esa forma por el Ejemplo 143) de modo que

$$\begin{aligned} v_1^*(1,1) &= a_1 1 + b_1 1 = 1 \\ v_1^*(-1,1) &= a_1(-1) + b_1 1 = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v_2^*(1,1) &= a_2 1 + b_2 1 = 0 \\ v_2^*(-1,1) &= a_2(-1) + b_2 1 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto debemos resolver los sistemas:

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 + b_1 &= 1 \\ -a_1 + b_1 &= 0 \end{aligned} \right. \quad y \left\{ \begin{aligned} a_2 + b_2 &= 0 \\ -a_2 + b_2 &= 1 \end{aligned} \right.$$

Así tenemos que $a_1 = \frac{1}{2}$ y $b_1 = \frac{1}{2}$ y entonces $v_1^*(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Ahora, resolviendo el otro sistema tenemos que $a_2 = -\frac{1}{2}$ y $b_2 = \frac{1}{2}$ y entonces $v_2^*(x,y) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Con esto tenemos que $\mathcal{B}^* = \{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y; -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\}$ es la base dual de $\mathcal{B}$.

Sea $v = (1,3)$ en V, entonces

$$\begin{aligned} (1,3) &= v_1^*(1,3)v_1 + v_2^*(1,3)v_2 \\ &= 2(1,1) + 1(-1,1) \end{aligned}$$

y si, por ejemplo, tomamos $\phi(x,y) = 2x + 3y$ en V^* entonces

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(v_1)v_1^* + \phi(v_2)v_2^* \\ 2x + 3y &= 5(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) + 1(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \end{aligned}$$

3.4.2. Transformación Dual o Traspuesta

Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal. Si U^* y V^* son los respectivos espacios vectoriales duales de U y V entonces existe una forma natural de definir una transformación lineal $T^* : V^* \longrightarrow U^*$, asociada a la transformación lineal T, la cual sigue del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{T} & V \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

Sea φ una forma lineal de V^*, esto significa que $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ y φ es una transformación lineal. Del diagrama se observa que $\varphi \circ T : U \longrightarrow \mathbb{K}$ es ahora una forma lineal de U^* ($\varphi \circ T$ es una transformación lineal de U en $\mathbb{K}$ ya que es la compuesta de las transformaciones lineales φ y T). Con esto podemos definir $T^* : V^* \longrightarrow U^*$ por:

$$T^*(\varphi) = \varphi \circ T \ , \qquad\qquad (\varphi \in V^*)$$

Claramente T^* es lineal. En efecto, dado ϕ y φ en V^* y α en $\mathbb{K}$ se tiene que

$$\begin{aligned} T^*(\phi + \alpha\varphi) &= (\phi + \alpha\varphi) \circ T \\ &= (\phi \circ T) + (\alpha\varphi \circ T) \\ &= (\phi \circ T) + \alpha(\varphi \circ T) \\ &= T^*(\phi) + \alpha T^*(\varphi) \end{aligned}$$

Definición 124 *Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y U^*, V^* los respectivos espacios vectoriales duales. Se denomina* transformación dual o traspuesta *de la transformación lineal $T : U \longrightarrow V$ a la transformación lineal $T^* : V^* \longrightarrow U^*$ definida por $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$, para φ en V^*.*

Ejemplo 150 *Sean $U = \mathbb{R}^2$ y $V = \mathbb{R}^3$. Sea $T : U \longrightarrow V$ la transformación lineal definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x - 3y)$. Por lo visto en el ejemplo 143 es claro que $V^* = \{ax + by + cz \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $U^* = \{ax + by \mid a, b, \in \mathbb{R}\}$. Ahora, por la definición de transformación dual de T, tenemos que $T^* : V^* \longrightarrow U^*$ está definida por*

$$T^*(\varphi) = \varphi \circ T$$

para cualquiera $\varphi(x, y, z) = ax + by + cz$ en V^*. Por lo tanto

$$T^*(ax + by + cz) = (a + b + 2c)x + (a - b - 3c)y$$

la cual es una forma lineal en U^*.

Proposición 125 *Sean U, V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Sean $T : U \longrightarrow V$, $S : U \longrightarrow V$ y $R : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales, entonces se tiene*

1. $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$, *para cualquier α, β en $\mathbb{K}$.*

2. $(R \circ T)^* = T^* \circ R^*$

Proposición 126 *Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con bases finitas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente. Sean U^* y V^* los espacios vectoriales duales con $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{D}^*$ sus bases duales respectivas. Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal con matriz asociada $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$. Entonces, la matriz asociada, en las bases duales $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{D}^*$, de la transformación lineal dual $T^* : V^* \longrightarrow U^*$, $[T^*]_{\mathcal{D}^*}^{\mathcal{B}^*}$ es la traspuesta de la matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$. Es decir,*

$$[T^*]_{\mathcal{D}^*}^{\mathcal{B}^*} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}\right)^t$$

3.5. Diagonalización

El teorema 119 motiva encontrar una base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de modo que la matriz asociada a una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ sea diagonal.

De ahora en adelante, tan sólo por comodidad, diremos que T es un operador en V para referirnos a una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$. Así, $\mathcal{L}(V, V)$ es el conjunto de todos los operadores en V.

Definición 127 *Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y T en $\mathcal{L}(V, V)$. Se dice que el operador T es diagonalizable si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz diagonal.*

Observación. En general se dice que una matriz A en $M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si la transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $T_A(X) = AX$, es diagonalizable. (El vector X se esta considerando como vector columna con n filas)

Ejemplo 151 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (x + y, 3x - y) \end{array}$$

1. *Determinar la matriz asociada a F en la base canónica, es decir $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$*

2. *Determinar la matriz asociada a F en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -3)\}$*

Solución.

Para determinar la matriz asociada a F en la base canónica, primero calculemos

$$\begin{array}{rcl} F(1,0) & = & (1,3) \\ F(0,1) & = & (1,-1) \end{array}$$

Ahora expresemos cada vector como combinación lineal de los elementos de la base

$$\begin{array}{rcl} (1,3) & = & 1(1,0)+3(0,1) \\ (1,-1) & = & 1(1,0)-1(0,1) \end{array}$$

Así,

$$[F]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para la otra base procedemos de manera análoga. Primero calculamos

$$\begin{array}{rcl} F(1,1) & = & (2,2) \\ F(1,-3) & = & (-2,6) \end{array}$$

Ahora expresemos cada vector como combinación lineal de los elementos de la base

$$\begin{array}{rcl} (1,1) & = & 2(1,1)+0(1,-3) \\ (1,-3) & = & 0(1,1)-2(1,-3) \end{array}$$

Así obtenemos

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo, tenemos que en la base $\mathcal{B}$ la matriz asociada a F es una matriz diagonal.

Ejemplo 152 *Dada la matriz $A \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ y la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T_A: & M_{n\times 1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \\ & X & \rightsquigarrow & A\cdot X \end{array}$$

Demostrar que la matriz asociada a T_A en la base canónica $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, es

$$[T_A]_{\mathcal{C}} = A$$

Solución. Recordemos la propiedad de como obtener la columna j-ésima de un producto de matrices

$$c_j(A\cdot B) = A\cdot c_j(B)$$

con ella tenemos que si denotamos $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ entonces

$$\begin{aligned} T_A(E_i) &= A \cdot E_j \\ &= A \cdot c_j(I_n) \\ &= c_j\,(A \cdot I_n) \\ &= c_j(A) \end{aligned}$$

Luego obtenemos $T_A(E_i) = c_j(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$, es decir

$$[T_A(E_i)]_{\mathcal{C}} = c_j(A)$$

Así

$$[T_A]_{\mathcal{C}} = A.$$

Observación. Teniendo presente este ejemplo, decimos que la matriz A es diagonalizable o que T_A es diagonalizable.

Definición 128 *Sean V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y T en $\mathcal{L}(V,V)$.*

1. *Se dice que λ en $\mathbb{K}$ es un* valor propio *de T si y sólo si existe v en $V - \{0\}$ tal que $T(v) = \lambda v$.*
2. *Se dice que v en $V - \{0\}$ es un* vector propio *de T si y sólo si existe λ en $\mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v$.*

Ejemplo 153 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (x+y, 3x-y) \end{array}$$

Determinar todos los valores propios asociados a F.

Solución. Necesitamos resolver la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \lambda(x,y) \\ (x+y, 3x-y) &= \lambda(x,y) \\ (x+y-\lambda x, 3x-y-\lambda y) &= (0,0) \end{aligned}$$

La ecuación vectorial es equivalente al siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-\lambda x & = & 0 \\ 3x-y-\lambda y & = & 0 \end{array}\right|$$

reescribiéndolo obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} (1-\lambda)\,x+y & = & 0 \\ 3x+(-1-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right|$$

Como el sistema es homogéneo y buscamos una solución no trivial entonces el sistema debe tener infinitas soluciones. Por lo tanto el determinante de la matriz asociada debe ser cero.

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 3 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

Así, los únicos valores propios son 2 y -2.

Ejercicio 154 *Sea λ un valor propio asociado a la transformación lineal T, y*

$$V_\lambda = \{v \in V \quad / \quad T(v) = \lambda v\}$$

Demostrar que V_λ es un subespacio de V.

Definición 129 *Sea λ un valor propio asociado a la transformación lineal T en $\mathcal{L}(V,V)$. Se define el* espacio propio *V_λ como el conjunto de todos los vectores propios asociados a λ.*

Ejemplo 155 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (x+y, 3x-y) \end{array}$$

Determinar todos los espacios propios asociados a F, sabiendo que 2, -2 son los únicos valores propios.

Solución. Determinemos el espacio propio asociado al valor propio 2.

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad T(x,y) = 2(x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (x+y, 3x-y) = 2(x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (-x+y, 3x-3y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad -x+y = 0\} \\ &= < (1,1) > \end{aligned}$$

Para el otro valor propio procedemos de manera similar

$$\begin{aligned} V_{-2} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad T(x,y) = -2(x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (x+y, 3x-y) = -2(x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (3x+y, 3x+y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 3x+y = 0\} \\ &= < (1,-3) > \end{aligned}$$

Observación: Para poder determinar los valores propios asociados a una transformación lineal tenemos el siguiente resultado.

Teorema 130 *Sean U un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ una base de U y T en $\mathcal{L}(U,U)$ entonces, λ en $\mathbb{K}$ es un valor propio asociado a T si y sólo si $\left|[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n\right| = 0$.*

Ejemplo 156 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (2x-y+z, x-y+z, x) \end{array}$$

Determinar los valores propios de T.

Solución. El teorema anterior, nos permite escoger cualquier base del espacio vectorial, entonces sea $\mathcal{C} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Determinemos la matriz asociada a T en la base $\mathcal{C}$, para ello calculemos

$$\begin{array}{rcl} T(1,0,0) & = & (2,1,1) \\ T(0,1,0) & = & (-1,-1,0) \\ T(0,0,1) & = & (1,1,0) \end{array}$$

por lo tanto

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, λ es un valor propio de T si y sólo si

$$\begin{array}{rcl} \left|[T]_{\mathcal{C}} - \lambda I_3\right| & = & 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| & = & 0 \\ -(2-\lambda)(-1-\lambda)\lambda & = & 0 \end{array}$$

Así, los valores propios asociados a T son $0, -1$ y 2.

Ejemplo 157 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & ax^2+bx+c & \rightsquigarrow & (a+b)x^2+(b+c)x+(a+2b+c) \end{array}$$

Determinar los valores propios de T.

Solución. Sea $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$.

Determinemos la matriz asociada a T en la base $\mathcal{C}$, para ello

$$\begin{array}{rcl} T(1) & = & 1+x \\ T(x) & = & 2+x+x^2 \\ T\left(x^2\right) & = & 1+x^2 \end{array}$$

por lo tanto

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como λ es un valor propio de T si y sólo si

$$\begin{aligned} |[T]_{\mathcal{C}} - \lambda I_3| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ -\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 &= 0 \end{aligned}$$

Luego los valores propios asociados a T son $0, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Observación. Al determinante de los ejemplos anteriores podemos asignarle una variable, el valor propio, y transformarlo en un polinomio, el cual es totalmente independiente de la base elegida.

Proposición 131 *Sean U un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de U y T en $\mathcal{L}(U,U)$ entonces,*

$$|[T]_{\mathcal{B}} - xI_n| = |[T]_{\mathcal{C}} - xI_n|.$$

Demostración. Recordemos la relación entre $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{C}}$, esto es

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{C}} [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ [T]_{\mathcal{B}} &= \left([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} [T]_{\mathcal{C}} [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

además

$$\left([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} xI_n [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = x\left([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} I_n [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = xI_n$$

Usando estos dos resultados y las propiedades del determinante tenemos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} |[T]_{\mathcal{C}} - xI_n| &= \left|\left([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} [T]_{\mathcal{C}} [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} - xI_n\right| \\ &= \left|\left([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} [T]_{\mathcal{C}} [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} - \left([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} xI_n [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right| \\ &= \left|\left([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} ([T]_{\mathcal{C}} - xI_n) [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right| \\ &= \left|\left([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}\right| \cdot |[T]_{\mathcal{C}} - xI_n| \cdot \left|[Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right| \\ &= |[T]_{\mathcal{C}} - xI_n| \end{aligned}$$

con lo cual hemos demostrado la proposición.

Definición 132 *Sean U un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ una base de U y T en $\mathcal{L}(U,U)$. Se define el* polinomio característico *de T por*

$$P_T(x) = \left| [T]_{\mathcal{B}} - xI_n \right|.$$

Para el caso particular de la transformación lineal T_A, el polinomio característico se denota por $P_A(x)$, donde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Proposición 133 *Sean U un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y T en $\mathcal{L}(U,U)$. El escalar λ en $\mathbb{K}$ es un valor propio de T si y sólo si λ es una raíz del polinomio característico de T, $P_T(x)$.*

Ejemplo 158 *Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ base de V y T en $\mathcal{L}(V,V)$ tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determine el polinomio característico de T.

Solución. El polinomio característico esta definido por

$$\left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = x^2 - (a+d)\,x + ad - bc$$

Así tenemos

$$P_T(x) = x^2 - (a+d)\,x + ad - bc$$

Observación: Note que el coeficiente constante es el determinante de la matriz y el coeficiente de x corresponde a menos la traza o menos la suma de la diagonal.

Teorema 134 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$. Sea T en $\mathcal{L}(V,V)$ de modo que α y β sean raíces del polinomio característico $P_T(x)$.*

1. *Si la multiplicidad de α es r, entonces $1 \le \dim V_\alpha \le r$.*
2. *Si $\alpha \neq \beta$ entonces $V_\alpha \cap V_\beta = \{0\}$.*

Ejemplo 159 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (5x - y + 3z, -6x + 4y - 6z, -6x + 2y - 4z) \end{array}$$

Determinar los valores propios de T y los espacios propios asociados

Solución. Consideremos la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ y determinemos la matriz asociada a T.

Así obtenemos

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & -6 \\ -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ahora determinemos su polinomio característico dado por

$$P_T(x) = \begin{vmatrix} 5-x & -1 & 3 \\ -6 & 4-x & -6 \\ -6 & 2 & -4-x \end{vmatrix} = 4 + 5x^2 - 8x - x^3$$

Factorizando el polinomio característico, tenemos que $P_T(x) = -(x-1)(-2+x)^2$. Así los valores propios son: 1 y 2.

Usaremos la matriz asociada a la transformación para determinar los espacios propios, esto es

$$V_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad T(x,y,z) = \lambda(x,y,z)\}$$

Ahora, resolver la igualdad es equivalente a resolver

$$\begin{aligned} [T(x,y,z)]_{\mathcal{C}} &= [\lambda(x,y,z)]_{\mathcal{C}} \\ [T]_{\mathcal{C}}[(x,y,z)]_{\mathcal{C}} &= \lambda\,[(x,y,z)]_{\mathcal{C}} \\ ([T]_{\mathcal{C}} - \lambda I_3)\,[(x,y,z)]_{\mathcal{C}} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo cual debemos resolver un sistema homogéneo.

Determinemos el espacio propio asociado a 1. Reemplazando obtenemos la matriz del sistema

$$\begin{bmatrix} 5-1 & -1 & 3 & 0 \\ -6 & 4-1 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & -4-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, la escalonada reducida por fila es: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y con ello obtenemos

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

como $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= -\frac{1}{2}t(1,0,0) + t(0,1,0) + t(0,0,1) \\ &= t\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right). \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$V_1 = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right) \right\rangle.$$

Para el valor propio 2 procedemos de manera análoga, es decir,

$$\begin{bmatrix} 5-2 & -1 & 3 & 0 \\ -6 & 4-2 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & -4-2 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, la escalonada reducida por fila es: $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y con ello obtenemos

$$[(x, y, z)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

como $\mathcal{C}$ es la base canonica de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \left(\frac{1}{3}\alpha - \beta\right)(1, 0, 0) + \alpha(0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) \\ &= \alpha\left(-\frac{1}{3}, 1, 0\right) - \beta(-1, 0, 1). \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$V_2 = \left\langle \left(-\frac{1}{3}, 1, 0\right), (-1, 0, 1) \right\rangle.$$

Resumiendo:

Los valores propios son: 1 y 2 y los espacios propios son:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\langle \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right) \right\rangle, \text{ con } \dim V_1 = 1. \\ V_2 &= \left\langle \left(-\frac{1}{3}, 1, 0\right), (-1, 0, 1) \right\rangle, \text{ con } \dim V_2 = 2. \end{aligned}$$

Observación. Considere la base $\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right), \left(-\frac{1}{3}, 1, 0\right), (-1, 0, 1)\right\}$ de $\mathbb{R}^3$, con esta base obtenemos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema 135 *Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y T en $\mathcal{L}(V, V)$. El operador T es diagonalizable si y sólo si*

$$P_T(x) = (x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \ldots (x - \alpha_s)^{n_s}$$

en $\mathbb{K}$ y $\dim V_{\alpha_i} = n_i$, la multiplicidad α_i en $P_T(x)$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Ejemplo 160 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & ax^2+bx+c & \rightsquigarrow & (2a-b+4c)x^2+(2a+b)\,x+(2a+c) \end{array}$$

Determine una base en $\mathbb{R}_2[x]$ tal que la matriz de T en esta base sea una matriz diagonal.

Solución. Consideremos la base canónica $\mathcal{C}=\{1,x,x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y determinemos la matriz asociada a T.

Así obtenemos

$$[T]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ahora determinemos su polinomio característico dado por

$$P_T(x)=\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 4 & -1 & 2-x \end{vmatrix}=-4+x+4x^2-x^3$$

Factorizando el polinomio característico tenemos que $P_T(x)=-(x-1)(x-4)(x+1)$. Así los valores propios son: -1, 1 y 4, como cada raíz tiene multiplicidad 1 la transformación lineal es diagonalizable.

Ahora determinaremos la base. Para ello recordemos la definición de Espacio Propio,

$$V_\lambda=\left\{(ax^2+bx+c)\in\mathbb{R}_2[x] \quad / \quad ([T]_{\mathcal{C}}-\lambda I_3)\left[ax^2+bx+c\right]_{\mathcal{C}}=0\right\}$$

El primero de ellos es el Espacio Propio asociado a -1

Veamos la matriz del sistema

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 0 & 2 \\ 0 & 1-(-1) & 2 \\ 4 & -1 & 2-(-1) \end{bmatrix}$$

Así, la escalonada reducida por fila es: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y con ello obtenemos

$$[p(x)]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}$$

como $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} p(x) &= -t\cdot 1-t\cdot x+t\cdot x^2 \\ &= t\cdot\left(-1-x+x^2\right) \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$V_{-1}=\left\langle -1-x+x^2\right\rangle.$$

Para el valor propio 1 procedemos de manera análoga, es decir,

$$\begin{bmatrix} 1-(1) & 0 & 2 \\ 0 & 1-(1) & 2 \\ 4 & -1 & 2-(1) \end{bmatrix}$$

Así, la escalonada reducida por fila es: $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y con ello obtenemos

$$[p(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

como $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{4}t \cdot 1 + t \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ &= t \cdot \left(\frac{1}{4} + x\right) \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$V_1 = \left\langle \frac{1}{4} + x \right\rangle.$$

Para el valor propio 4 procedemos de manera análoga, es decir,

$$\begin{bmatrix} 1-(4) & 0 & 2 \\ 0 & 1-(4) & 2 \\ 4 & -1 & 2-(4) \end{bmatrix}$$

Así, la escalonada reducida por fila es: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y con ello obtenemos

$$[p(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t \\ \frac{2}{3}t \\ t \end{bmatrix}$$

como $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{2}{3}t \cdot 1 + \frac{2}{3}t \cdot x + t \cdot x^2 \\ &= t \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + x^2\right) \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$V_4 = \left\langle \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + x^2 \right\rangle.$$

Resumiendo:

Los valores propios son: -1, 1 y 4 y los espacios propios son:

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \left\langle -1 - x + x^2 \right\rangle, \text{ con } \dim V_{-1} = 1. \\ V_1 &= \left\langle \frac{1}{4} + x \right\rangle, \text{ con } \dim V_1 = 1. \\ V_4 &= \left\langle \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + x^2 \right\rangle, \text{ con } \dim V_4 = 1. \end{aligned}$$

Observación: Considere la base $\mathcal{B} = \left\{ -1 - x + x^2, \frac{1}{4} + x, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + x^2 \right\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$, con esta base tenemos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 161 *Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, base de V y T en $\mathcal{L}(V, V)$ tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Determine una base de V tal que la matriz asociada a T en esta base sea diagonal.

Solución. Como tenemos la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de V, determinemos su polinomio característico

$$\begin{aligned} P_T(x) &= \begin{vmatrix} 4-x & 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1-x & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-x & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3-x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4-x & 2 \\ -3 & -1-x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 4 & -3-x \end{vmatrix} \\ &= \left(2 - 3x + x^2\right)\left(-2 + x + x^2\right) \\ &= (x-1)^2 (x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Así tenemos que $P_T(x) = (x-1)^2 (x-2)(x+2)$ y los valores propios son: -2, 1 y 2.

Para determinar la base necesitamos encontrar una base de los Espacios Propios asociados a cada valor propio, es decir,

$$V_\lambda = \{u \in V \quad / \quad ([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_4)[u]_{\mathcal{B}} = 0\}$$

El primero de ellos es el Espacio Propio asociado al valor propio -2.

Veamos la matriz del sistema

$$\begin{bmatrix} 4-(-2) & 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1-(-2) & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-(-2) & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3-(-2) \end{bmatrix}$$

Así, la escalonada reducida por fila es: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y con ello obtenemos

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t \\ 0 \\ \frac{1}{4}t \\ t \end{bmatrix}$$

como $\mathcal{B}$ es una base de V

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4}t \cdot v_1 + \frac{1}{4}t \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + t \cdot v_4 \\ &= t \cdot \left(\frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + v_4 \right) \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$V_{-2} = \left\langle \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + v_4 \right\rangle.$$

Para el valor propio 1 procedemos de manera análoga, es decir,

$$\begin{bmatrix} 4-1 & 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3-1 \end{bmatrix}$$

Así, la escalonada reducida por fila es: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y con ello obtenemos

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\alpha \\ \alpha \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

como $\mathcal{B}$ es una base de V

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2}{3}\alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2 + \beta \cdot v_3 + \beta \cdot v_4 \\ &= \alpha \left(-\frac{2}{3}v_1 + v_2 \right) + \beta \left(v_3 + v_4 \right) \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$V_1 = \left\langle \left(-\frac{2}{3}v_1 + v_2\right),\ (v_3 + v_4)\right\rangle .$$

Para el valor propio 2 procedemos de manera análoga, es decir,

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1-2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3-2 \end{bmatrix}$$

Así, la escalonada reducida por fila es: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y con ello obtenemos

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como $\mathcal{B}$ es una base de V

$$\begin{aligned} u &= t \cdot v_1 - t \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \\ &= t \cdot (v_1 - v_2) \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$V_2 = \langle v_1 - v_2 \rangle .$$

Resumiendo:
Los valores propios son: -2, 1 y 2 y los espacios propios son:

$$\begin{aligned} V_{-2} &= \left\langle \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + v_4 \right\rangle, \text{ con } \dim V_{-2} = 1. \\ V_1 &= \left\langle \left(-\frac{2}{3}v_1 + v_2\right), (v_3 + v_4)\right\rangle, \text{ con } \dim V_1 = 2. \\ V_2 &= \langle v_1 - v_2 \rangle, \text{ con } \dim V_2 = 1. \end{aligned}$$

Observación. Considere la base $\mathcal{D} = \left\{\frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + v_4, -\frac{2}{3}v_1 + v_2, v_3 + v_4, v_1 - v_2\right\}$ de V, con esta base obtenemos que

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios.

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1.,1,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$, tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar.

2. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \quad T(x,y,z) = (x+z, x+y, y+z)$ una transformación lineal de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar.

3. Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal y
$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ una base ordenada de $M_2(\mathbb{R})$ tal que
$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
Sabiendo que el Polinomio Característico es $P_T(x) = x\,(x-4)\,(x-1)^2$
Determinar una base $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$, tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

4. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x-x^2\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar.

5. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que
$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
   a) Calcular el Polinomio Característico.
   b) Determinar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$, tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sea diagonal.
   c) Calcular $T^n(1-x^2)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

6. Sea $\mathcal{C} = \{(1,0,0,1),(1,0,1,2),(1,2,1,0),(1,1,2,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ y T una transformación lineal tal que
$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $P_T(x) = (x-1)^2 (x-2)(x-4)$.

Determine una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

3.6. Producto Escalar

Hasta aquí hemos estudiado funciones entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales U y V que tienen la propiedad de ser lineal. En la sección 2.8.2 trabajamos con el espacio de todas las funciones $g : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ con soporte finito. Ahora queremos ver que también es posible definir funciones $L : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ y exigir que sean lineales en cada variable, esto es L es una función bilineal. El ejemplo mas elemental es el producto entre dos elementos del cuerpo $\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & xy \end{array}$$

el cual verifica, para x, x', y, y', α en $\mathbb{R}$, las típicas propiedades de un producto:
- $(x+x')y = xy + x'y$
- $x(y+y') = xy + xy'$
- $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$

Siguiendo esta idea de producto entre números del cuerpo $\mathbb{R}$ podemos generalizar el concepto de producto para vectores en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V.

Definición 136 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Se dice que la función $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una* forma bilineal sobre V *si dados v, v', v'' en V y α en $\mathbb{R}$ verifica:*

1. $F(v + v', v'') = F(v, v'') + F(v', v'')$

2. $F(v, v' + v'') = F(v, v') + F(v, v'')$

3. $F(\alpha v, v') = F(v, \alpha v') = \alpha F(v, v')$

Observación. La definición anterior es un caso particular de la definición general de función bilineal, definición que verifica las mismas propiedades que las dadas anteriormente pero el conjunto de partida es $U \times V$ y el conjunto de llegada es W, siendo los tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales cualesquiera. Las funciones bilineales que nos interesan, en esta sección, son aquellas que el conjunto de partida es $V \times V$ y el conjunto de llegada es siempre el cuerpo $\mathbb{R}$ y es debido a esto que reciben el nombre de formas bilineales sobre V.

Vamos a denotar, en lo que sigue, por $\mathfrak{Bil}(V, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las formas bilineales sobre V. Se deja como ejercicio verificar que el conjunto $\mathfrak{Bil}(V, \mathbb{R})$, con las operaciones de suma de dos funciones bilineales y producto de un número real por una función bilineal, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ejemplo 162 *Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(X,Y) = x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_1y_2 - \frac{1}{3}x_2y_2$$

para $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$. Se deja como ejercicio probar que F así definida es lineal en la primera variable y lineal en la segunda variable.

Ejemplo 163 *Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ y $T : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$T(A,B) = \mathrm{Tr}(AB^t)$$

para A y B en V, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. Por definición $T(A,B)$ es un elemento de $\mathbb{R}$ y claramente es bilineal. En efecto:
$\mathrm{Tr}((A+C)B^t) = \mathrm{Tr}(AB^t) + \mathrm{Tr}(CB^t)$
$\mathrm{Tr}(A(C+B)^t) = \mathrm{Tr}(AC^t) + \mathrm{Tr}(AB^t)$
$\mathrm{Tr}((\alpha A)B^t) = \mathrm{Tr}(A(\alpha B)^t) = \alpha\,\mathrm{Tr}(AB^t)$

Ejemplo 164 *Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $E : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$E(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

para $X = (x_1, x_2, \ldots .x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Se deja como ejercicio probar que es bilineal y además verificar las propiedades adicionales:
- $E(X,Y) = E(Y,X)$
- $E(X,Y) = 0$, *para todo Y en $\mathbb{R}^n$, entonces $X = \overrightarrow{0}$*
- $E(X,X) \geq 0$

El último ejemplo, si lo miramos en los espacios vectoriales reales $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, se tienen los ejemplos clásicos de producto escalar entre dos vectores y los conceptos de ortogonalidad, norma de un vector y distancia entre dos vectores.

Definición 137 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Se dice que una forma bilineal sobre V, $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, es un* producto escalar sobre V *si verifica:*

1. *F es simétrica,*

$$F(v,v') = F(v',v) \qquad\qquad (\forall\ v, v' \in V)$$

2. *F es no degenerada,*

$$F(v,v') = 0,\ \text{para todo } v' \text{ en } V,\ \text{entonces } v = \overrightarrow{0}$$

3. *F es definida positiva,*

$$F(v,v) \geq 0 \qquad\qquad (\forall\ v \in V)$$

Usualmente, si F es un producto escalar sobre V se acostumbra a escribir $\langle v, v'\rangle$ o simplemente $v \cdot v'$ en vez de $F(v, v')$.

Definición 138 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\langle\ ,\ \rangle$ un producto escalar sobre V. El par $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ se denomina* espacio euclídeo.

Ejemplo 165 *Se deja como ejercicio probar que las siguientes formas bilineales sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V respectivo es un producto escalar.*

(a) $V = \mathbb{R}^n$ *y* $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

para $X = (x_1, x_2, \ldots . x_n)$ *e* $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

(b) $V = M_2(\mathbb{R})$ *y* $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^t)$$

para A y B en V, siendo B^t la traspuesta de la matriz B.

(c) $V = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ | f$ *es continua en* $[0,1]\}$ *y* $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

para f, g en V.

(d) $V = \mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, n\}$ *y* $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

para $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *y* $q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ *en V.*

Definición 139 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclideo. Se dice que los vectores v y v' de V son* ortogonales o perpendiculares *si $\langle v, v'\rangle = 0$. Usualmente, si v y v' son perpendiculares se denota por $v \perp v'$*

Ejemplo 166 *Si* $V = \mathbb{R}^3$ *y* $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

para $X = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $Y = (y_1, y_2, y_3)$. *Los vectores* $(1, -1, 2)$ *y* $(2, 1, 0)$ *son perpendiculares.*

Ejemplo 167 $V = \{f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ es continua en } [-1, 1]\}$ *y* $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

para f, g *en* V. *Los vectores* $f(t) = t$ *y* $g(t) = t^2$ *son perpendiculares.*

3.6.1. Norma

Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto escalar sobre V entonces, como $\langle v, v\rangle \geq 0$ para cualquier v enV, la expresión $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ es un número real bien definido.

Definición 140 *Sea* V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y* $\langle\ ,\ \rangle$ *un producto escalar sobre* V. *Se define la* norma *de un vector* v *en* V *por*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Proposición 141 *Sea* V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espacio euclídeo. Sean* v *y* v' *en* V *y* α *en* $\mathbb{R}$ *entonces se verifican las siguientes propiedades.*

1. $\|v\| = 0$ *si y solamente si* $v = \overrightarrow{0}$

2. $\|\alpha v\| = |\alpha|\, \|v\|$

3. *La desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$|\langle v, v'\rangle| \leq \|v\|\, \|v'\|$$

4. *La desigualdad triangular:*

$$\|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$$

Observación. Es inmediato ver que en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, el concepto de ortogonalidad de dos vectores corresponde a la idea natural de perpendicularidad de dos vectores y el concepto de norma de un vector corresponde a la longitud del vector. Debería ser claro, de estos dos ejemplos clásicos, el por qué un espacio vectorial V con un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ recibe el nombre de espacio euclídeo.

Proposición 142 *(Teorema de Pitágoras) Sea* V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espacio euclídeo. Si* v *y* v' *son dos vectores perpendiculares en* V *entonces se tiene que*

$$\|v + v'\|^2 = \|v\|^2 + \|v'\|^2$$

Proposición 143 *(Ley del paralelógramo) Sea* V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial,* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espacio euclídeo y* v, v' *dos vectores cualesquiera en* V. *Entonces se tiene que*

$$\|v + v'\|^2 + \|v - v'\|^2 = 2\,\|v\|^2 + 2\,\|v'\|^2$$

3.6.2. Bases Ortogonales

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclídeo. Si v y v' son vectores en V perpendiculares entonces es claro que ellos son linealmente independiente, mas aún se tiene la siguiente situación general.

Proposición 144 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclídeo. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares ($\langle v_i, v_j\rangle = 0$ apenas $i \neq j$) entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para V.*

Demostración. Claramente $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente ya que si

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$$

entonces, para cualquier v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, v_i\rangle = \left\langle \overrightarrow{0}, v_i \right\rangle = 0$$

y así, por linealidad, obtenemos que

$$\alpha_i \langle v_i, v_i\rangle = 0$$

y como $\langle v_i, v_i\rangle \geq 0$ entonces $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora, como la dimensión de V es n entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V.

Observación. Es fácil probar que dado $v \neq \overrightarrow{0}$ en un espacio euclídeo $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ entonces

$$\frac{v}{\|v\|}$$

es un vector de norma (o longitud) 1.

En general un vector no nulo de norma igual a 1 se le denomina *vector unitario*.

Teorema 145 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Todo espacio euclídeo $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimensión finita n admite una base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de vectores unitarios mutuamente perpendiculares.*

Demostración. Como la dimensión de V es n entonces existe una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V. Construyamos los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1 \\
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' \\
v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' \\
&\vdots \\
v_n' &= v_n - \frac{\left\langle v_n, v_{n-1}'\right\rangle}{\left\langle v_{n-1}', v_{n-1}'\right\rangle} v_{n-1}' - \cdots\cdots - \frac{\langle v_n, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1'
\end{aligned}$$

Este proceso es llamado *Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt* y nos asegura que el conjunto $\{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ es un conjunto de n vectores de V mutuamente perpendiculares y, aplicando la proposición anterior, una base de V formada por vectores perpendiculares entre ellos.

Finalmente, para obtener la base buscada debemos construir

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|},\ u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}, \ldots\ldots, u_n = \frac{v_n'}{\|v_n'\|}$$

y así $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es la base de vectores unitarios mutuamente perpendiculares.buscada.

Ejemplo 168 *Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $\{(2,1),(1,2)\}$ una base de V. Usando el proceso de Gram-Schmidt elegimos $v_1' = (2,1)$ y construimos*

$$\begin{aligned} v_2' &= (1,2) - \frac{\langle (1,2),(2,1)\rangle}{\langle (2,1),(2,1)\rangle}(2,1) \\ v_2' &= (1,2) - \frac{4}{5}(2,1) \\ v_2' &= \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right) \end{aligned}$$

y así $\left\{(2,1), \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)\right\}$ es una base ortogonal de V. Ahora la base ortogonal formada por vectore unitarios es:

$$\left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{45}}, \frac{6}{\sqrt{45}}\right) \right\}$$

Ejercicios.

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   $$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

   para $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$. Construya una base de vectores unitarios y mutuamente ortogonales de $\mathbb{R}^3$ a partir de la base $\mathcal{B} = \{(1,-2,1), (-3,1,0), (0,1,0)\}$. Esto es lo que se llama ortonormalizar la base $\mathcal{B}$.

2. Sea $V = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [0,1]\}$ y $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   $$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

   para f, g en V. Si U es el subespacio de V generado por los vectores $f(t) = t$ y $g(t) = t^2$. Encuentre una base ortonormal para U.

Capítulo 4

Programación Lineal

4.1. Introducción

Se llama Programación Lineal al procedimiento empleado para resolver, una gran cantidad de problemas de máximo y mínimo (optimización), los cuales están con restricciones de tipo lineal en las incógnitas, que pueden ser ecuaciones o inecuaciones.

La fase de formulación del análisis de problemas es lo que tiene mayor trascendencia en la práctica en los problemas de programación lineal. Sin embargo solamente nos dedicaremos a la solución de ellos una vez planteado.

Algunos de los conceptos necesarios de conocer para familiarizarse con el lenguaje de programación lineal son:

Definición 146 *Se llama* Función Objetivo*, a la función de la cual queremos determinar su máximo o mínimo*

Observación. Por ejemplo, se puede mencionar:

El administrador de una cartera: maximizar los créditos de la inversión;

Un gerente de producción: satisfacer la demanda con el mínimo costo de producción;

Una aerolínea: encontrar un plan de asignación de personal a un costo mínimo;

Una compañía petrolera: maximizar las utilidades.

En todos estos ejemplos hay una cantidad que se desea maximizar o minimizar.

Ejemplo 169 *Una persona tiene un problema de utilidades al producir dos tipos de productos. Suponga que x_i es la cantidad producida de producto i, y w_i es la ganancia unitaria del producto i, con $i = 1, 2$. Luego la función ganancia está dada por*

$$w_1x_1 + w_2x_2$$

Definición 147 *El conjunto* restricciones *o* sujeto a *es el conjunto donde tiene sentido o está definida la función objetivo.*

Observación. Por ejemplo,

Para el administrador de cartera: sus decisiones de inversión están restringidas por la cantidad de su capital y por los reglamentos de la bolsa de valores.

Para el gerente de planta: sus decisiones están restringidas por la capacidad de la planta y por la disponibilidad de recursos.

La asignación de personal y la planeación de vuelos de la línea aérea están restringidos por las necesidades de mantenimiento y por el número de empleados disponibles.

La decisión de una compañía petrolera de usar cierto tipo de petróleo crudo en la producción de gasolina está restringida por las características de ésta. (El octanaje o el antidetonante).

Ejemplo 170 *Una persona tiene un problema de presupuesto en la empresa, si dispone de un capital de \$ B a distribuir entre dos bienes diferentes. Suponga que x_i es la cantidad asignada a la actividad i, con $i = 1, 2$. Luego la restricción del problema esta dada por*

$$x_1 + x_2 \leq B,$$

Definición 148 *La* Forma Estándar *de un problema de programación lineal es:*

$$\max\left(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n\right)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$$

donde b_i, c_i y a_{ij} son constantes reales fijas, $b_i \geq 0$, x_i son valores reales a determinar.

Observación. Podemos escribir la formulación del problema anterior de forma estándar, usando la notación matricial, esto es: máx (cx^t),

$$cx^t$$

donde $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, sujeto a:

$$Ax^t = b$$

donde $A = (a_{ij})$, y

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, ..., n,$$

donde c y x son vectores n-dimensional, A es una matriz de orden $m \times n$ y b es una matriz de orden $m \times 1$. Las componentes de x son todas positivas, denotada por la desigualdad $x \geq 0$, asumiendo que esa notación es para cada una de las componentes del vector x.

El problema de programación lineal finalmente se escribe,

$$\begin{array}{ll} & \text{máx}(cx^t) \\ \text{Sujeto a} & Ax^t = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

4.2. Transformación a la Forma Estándar

No todos los problemas de programación lineal vienen expresados en la forma estándar, sin embargo éstos se pueden convertir en la forma estándar, es aquí donde aparecen nuevos conceptos, simples de definir

4.2.1. Variable de Holgura

Suponga que tenemos, que una de las restricciones está dada por una desigualdad lineal "menor o igual que", como por ejemplo:

Considérese la desigualdad lineal en n variables dada por

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b_1$$

En este caso se define la variable s_1 por:

$$s_1 = b_1 - (a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n)$$

Llamada Variable de Holgura, de tal manera que la desigualdad inicial es equivalente a:

$$\begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + s_1 & = & b_1 \\ s_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Entonces se pueden introducir variables o incógnitas no negativas para convertir las desigualdades en ecuaciones.

Ejemplo 171 *Escribir el siguiente sistema de desigualdades lineales como un sistema de ecuaciones lineales con variables de holgura:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\leq 125 \end{aligned}$$

Solución. Se define las variables de holgura por

$$s_1 = 10 - (3x_1 + 2x_2 + 5x_3) = 10 - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

y

$$s_2 = 125 - (3x_1 + 4x_2 + 6x_3) = 125 - 3x_1 - 4x_2 - 6x_3$$

Entonces, las desigualdades lineales iniciales, se transforman en

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_1 &= 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + s_2 &= 125 \end{aligned}$$

Sujeta a

$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0.$$

es decir,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_1 &= 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + s_2 &= 125 \\ s_1 &\geq 0, s_2 \geq 0. \end{aligned}$$

4.2.2. Variable excedente

Suponga que tenemos que una de las restricciones está dada por una desigualdad lineal "mayor o igual que", como por ejemplo:

Considérese la desigualdad lineal en n variables dada por

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b$$

En este caso se define la variable

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n - b$$

La Variable Excedente nos permite establecer que lo anterior es equivalente a:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n - y_1 = b$$

donde $y_1 \geq 0$. De esta forma un problema de desigualdades lineales pasa a ser una igualdad lineal.

Ejemplo 172 *Escribir el siguiente sistema de desigualdades lineales como un sistema de ecuaciones lineales con variables excedentes:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 12 \end{aligned}$$

Solución. Se definen las variables excedentes por

$$y_1 = 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 10 = 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 10$$

y

$$y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 12 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 12$$

Entonces, las desigualdades lineales iniciales, se transforman en

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - y_1 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - y_2 &= 12 \end{aligned}$$

Sujeta a

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

es decir,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - y_1 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - y_2 &= 12 \\ y_1 &\geq 0, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Observación. En las anteriores situaciones hemos resuelto el problema de traducir desigualdades en igualdades introduciendo nuevas variables no negativas. Aún nos falta examinar el caso en que las otras variables no tengan restricción alguna.

4.2.3. Variables Libres (Primer método)

Suponga por ejemplo, que no existe la restricción sobre la variable x_1 por lo que dicha variable es libre de tomar valores positivos o negativos, entonces se escribe:

$$x_1 = w_1 - r_1,$$

donde se establece necesariamente que $w_1 \geq 0$ y $r_1 \geq 0$. Si se substituye $w_1 - r_1$ por x_1 en la ecuación original, se conserva la linealidad de las restricciones y se requiere que todas las variables sean positivas. Entonces el problema se expresa en una variable más.

4.2.4. Variables Libres (Segundo método)

Otro enfoque para convertir a la forma estándar, cuando NO se presenta la restricción $x_1 \geq 0$, es eliminar x_1 junto con una de las ecuaciones de restricción. Para ello se toma una de las m ecuaciones del sistema de ecuaciones original, que tenga el coeficiente de $x_1 \neq 0$. Por ejemplo: suponga que $a_{i1} \neq 0$, en

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - y_i = b_i.$$

Entonces x_1 se puede despejar en términos de las otras variables más una constante. Al reemplazar esta expresión por x_1 en el sistema de ecuaciones original, se tiene un nuevo problema, pero expresado en una variable menos. Como resultado de esta operación se obtiene un problema lineal estándar con una ecuación y una variable menos.

Ejemplo 173 *Considere el siguiente problema de programación lineal*

$$\max\,(x_1 + 3x_2 + 4x_3)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 &\geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Cambiarlo a un problema de programación lineal en forma estandar.

Solución. Como x_1 no tiene restricción, se despeja de la primera ecuación y se obtiene:

$$x_1 = -2x_2 - x_3 + 5.$$

Al sustituir esto en la función objetivo se obtiene el siguiente problema, que es equivalente a:

$$\max\,(x_2 + 3x_3 + 5)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 &\geq 0, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

el cuál esta en la forma estándar.

Ejemplo 174 *Al realizar un estudio en una fábrica de muebles, se obtienen los siguientes datos:*

Cada silla para su fabricación necesita de 4 horas de trabajo y 4 metros de tabla.

Cada mesa para su fabricación necesita 3 horas de trabajo y 10 metros de tabla.

El fabricante dispone de 660 metros. de madera y un equipo de trabajadores capaz de proporcionar 380 horas de trabajo.

Se ha determinado que hay una utilidad de \$3000 por cada silla vendida y \$6000 por cada mesa vendida.

Suponiendo que los materiales necesarios (como clavos o barniz) se disponen en cantidades suficientes.

Modele el problema de programación lineal, en forma estándar

¿Cuántas mesas y sillas se deben producir para maximizar las utilidades? (suponiendo que se vende todo lo producido)

Solución. Agrupemos los datos:

	silla	mesa	Disponible
Madera en metros	4	10	660
Mano de obra en horas	4	3	380
Utilidades netas por unidad	3000	6000	

Supongamos que x es el total de sillas fabricadas e y el número total de mesas producidas por la fábrica. Como se requieren 4 metros de madera para hacer una silla, hacen falta $4x$ metros de madera para hacer x sillas. Similarmente se requieren $10y$ metros de madera para producir y mesas. Por lo que la primera restricción se puede expresar algebraicamente por medio de la desigualdad lineal:

$$4x + 10y \leq 660$$

De igual manera se obtiene la desigualdad lineal que representa la mano de obra:

$$4x + 3y \leq 380$$

Estas dos desigualdades representa dos de las restricciones en este problema. Existen dos restricciones adicionales, ya que la fábrica no puede tener cantidades negativas de sus productos, por lo que se debe cumplir que:

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0$$

La ganancia obtenida G cuando se producen x sillas e y mesas se expresa:

$$G = 3000x + 6000y$$

Juntando toda esta información, se puede enunciar un problema de programación lineal:

$$\text{máx}(G) = \text{máx}\,(3000x + 6000y)$$

Sujeto a

$$\begin{array}{rcl} 4x + 10y & \leq & 660 \\ 4x + 3y & \leq & 380 \\ x & \geq & 0, y \geq 0 \end{array}$$

En este problema la función lineal mostrada $G = 3000x + 6000y$ es la Función Objetivo. Cualquier punto del conjunto definido por las restricciones se llama **Solución Factible**. Nuestro problema consiste en encontrar el punto (o los puntos) en el conjunto de restricciones en el cual la función objetivo toma su valor máximo.

Para resolver este problema primero graficamos el conjunto de las restricciones, que es el conjunto solución de las desigualdades, y que se muestra en el gráfico a continuación.

Consideramos las rectas $3000x + 6000y = d$, para los distintos valores de la constante d. Cada una de estas rectas son paralelas y la ganancia en ellas es constante. Para ver por qué, considérese la recta $3000x + 6000y = 30000$ para cada punto (x, y) que se encuentre en esta recta y en el conjunto definido por las restricciones, el fabricante obtiene una utilidad de \$30,000.

Algunos puntos son: $(10, 0)$ (representa solamente 10 sillas), $(6, 2)$ (6 sillas y 2 mesas) y $(0, 5)$ (solamente 5 mesas). Por lo que podemos graficar muchas rectas de ganancia constantes:

Todas las rectas de utilidades constantes son paralelas entre sí y las utilidades aumentan al aumentar el intersecto. Cada nueva línea entre mayor el intersecto se produce más utilidades.

Entonces nuestro objetivo es determinar el intersecto mayor sin salirnos del conjunto de restricción.

De la figura se ve que la "última" recta de ganancia constante es la línea que intersecta al conjunto de las restricciones en un solo punto $(65, 40)$. Esto quiere decir que se obtienen las máximas utilidades cuando se fabrican 65 sillas y 40 mesas. Lo que produce una utilidad de: $3000 * 65 + 6000 * 40 = 435000$, es decir, \$435,000.

La forma estandar del problema de programción lineal esta dada por:

$$\text{máx}\,(3000x + 6000y)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x + 10y + s_1 &= 660 \\ 4x + 3y + s_2 &= 380 \\ x, y, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Observación: En el caso particular de este problema se pudo recurrir a una técnica gráfica llamada "método gráfico" que nos permitió resolverlo. Este método muestra lo que pasa, pero es poco práctico, ya que se requiere de la elaboración de gráficas muy precisas para obtener la solución.

Además, sólo se puede emplear en problemas en los que intervengan dos variables, pues las gráficas en dimensiones tres son más complicadas de visualizar y no se pueden utilizar en dimensión mayor.

Ejercicio 175 *Una industria produce dos tipos de productos A_1, A_2. Existen restricciones de los recursos: mano de obra, materia prima y maquinaria. Se sabe que para producir una unidad del producto A_1, el dinero gastado en los recursos es, en pesos, 5, 10 y 4 respectivamente. En el caso del segundo producto las cantidades son 6, 20 y 4.*

El dinero disponible para cada uno de los tres recursos es, respectivamente, 15.000, 20.000 y 6.000 pesos. La ganancia por cada unidad del producto A_1 es 3 pesos, y por cada unidad del producto A_2 es 4 pesos. Suponemos que en el mercado nuestros productos no tienen competencia.

Determinar las cantidades a producir, x_1 y x_2, de los productos A_1 y A_2, respectivamente, a fin de obtener el máximo beneficio.

Ejercicio 176 *Un chacarero tiene a su disposición 100 hectáreas de tierra, 160 días-hombre para cultivarlo y 1.100 pesos para invertir. Desea sembrar dos cultivos, uno de los cuales requiere un día-hombre por hectárea y produce un beneficio de 40 pesos por hectárea; el otro cultivo requiere de 4 días-hombre por hectárea y produce un beneficio de 120 pesos por hectárea. El cultivo 1 requiere una inversión de 10 pesos por hectárea y el cultivo 2 requiere de 20 pesos por hectárea. Se desea saber cuántas hectáreas de cada cultivo habrá que plantar para obtener el beneficio máximo.*

4.3. Conjuntos Convexos

Para poder justificar algunos resultados que permiten resolver los problemas de programación lineal en un número arbitrario de variables, es necesario definir los siguientes conceptos.

Definición 149 *Un conjunto C en E^n es* convexo *si y sólo si para toda $x_1, x_2 \in C$ y todo número real α, $0 < \alpha < 1$, el punto $\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C$.*

Observación. Todos los puntos del segmento de recta que une a estos dos puntos pertenece al conjunto, noción vital de la definición.

Teorema 150 *El conjunto*

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

restricción de un problema de programación lineal es un conjunto convexo.

Demostración. Sean $x, y \in M$, por definición de conjunto factible tenemos que $x \geq 0$, $y \geq 0$

Como $x, y \in M$ tenemos que

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Ay &= b \end{aligned}$$

Debemos probar que $\alpha x + (1-\alpha)\, y \in M$, para ello

$$\begin{aligned} A\left(\alpha x + (1-\alpha)\, y\right) &= A\left(\alpha x\right) + A\left((1-\alpha)\, y\right) \\ &= \alpha Ax + (1-\alpha)\, Ay \\ &= \alpha b + (1-\alpha)\, b \\ &= \alpha b + b - \alpha b \\ &= b \end{aligned}$$

Falta demostrar que $\alpha x + (1-\alpha)\, y > 0$, verifiquémoslo por coordenadas. Sean x_i, y_i las coordenadas i-ésima de x y y respectivamente, por lo tanto

$$\begin{aligned} x_i &> 0, y_i > 0 \\ \alpha x_i &> 0, (1-\alpha) y_i > 0 \\ \alpha x_i + (1-\alpha) y_i &> 0 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto de soluciones M es *convexo.*

Definición 151 *Se llama* punto extremo *de un conjunto convexo M a aquellos puntos que no se encuentran estrictamente dentro del segmento de recta que une otros dos puntos del conjunto.*

Es decir, x es un punto extremo de un conjunto convexo M, si y sólo si dados dos puntos distintos x_1 y x_2 en M tales que

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2$$

implica $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

Teorema 152 *Dado el conjunto*

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

restricción de un problema de programación lineal y la función

$$f(x) = cx, \quad c \neq 0$$

Si f alcanza un máximo local en p entonces p es un punto extremo de M.

Demostración. Supongamos que p no es un punto extremo, luego sean $x_1, x_2 \in M$ y $a \in]0,1[$, tales que

$$\begin{aligned} p &= (1-a)x_1 + ax_2 \\ cp &= c\left((1-a)x_1 + ax_2\right) \\ cp &= (1-a)cx_1 + acx_2 \end{aligned}$$

con lo cual el valor de cp está entre los valores de cx_1 y cx_2, pero f alcanza un máximo local en p por lo tanto

$$cp = cx_1; \quad cp = cx_2$$

lo cual es una contradicción.

Observación. La interpretación de este teorema, nos motiva a encontrar todos los puntos extremos de una conjunto convexo.

Además note que si una función alcanza en más de un punto su valor máximo, también hay un punto extremo donde alcanza ese valor.

Teorema 153 *Dado el conjunto*

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} \mid Ax^t = b, x \geq 0\right\} \neq \phi$$

restricción de un problema de programación lineal entonces M tiene un punto extremo.

Demostración. Sea x un elemento en M como

$$Ax^t = b$$

por lo tanto tenemos

$$\sum_{i=1}^{m} x_i C_i(A) = b$$

reordenando y escogiendo los índice de tal manera, que los primeros k coeficientes son no nulo

$$\sum_{i=1}^{k} y_i a_i(A) = b$$

Supongamos que el conjunto $\{a_1(A), a_2(A), ...a_k(A)\}$ es linealmente dependiente.

Por lo tanto existen $\widetilde{z}_i$ en los reales, no todos negativos, tales que

$$\lambda \sum_{i=1}^{k} \widetilde{z}_i a_i(A) = 0$$

y volviendo a la enumeración original, reordenando, sumando y completando los otros coeficientes con cero obtenemos

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - \lambda z_i) C_i(A) = b$$

de esta última suma podemos notar que si $\lambda > 0$ entonces:

i) Algunos coeficientes se mantienen positivos (si $z_i = 0$).

ii) Otros coeficientes aumentan su valor cuando $z_i < 0$, es decir mantienen su signo positivo.

iii) Otros coeficientes disminuyen su valor cuando $z_i > 0$, con ellos escogemos el valor dado por

$$\lambda = \text{mín} \left\{ \frac{x_i}{z_i} \quad / \quad z_i > 0 \right\}$$

con lo cual al menos uno de los coeficientes se anula, por lo tanto al repetir el proceso obtenemos que existe un elemento x de M tal que el conjunto de las columnas de la matriz A con coeficientes de x distinto de cero $\{C_i(A) \mid x_i \neq 0\}$, forma un conjunto linealmente independiente.

A continuación demostraremos que este x, es un punto extremo de M.

Sean $y, z \in M$, luego $y \geq 0, z \geq 0$, además

$$Ay = b \quad Az = b$$

tal que $x = ay + (1 - \alpha) z$, igualando los coeficientes, obtenemos

$$x_i = ay_i + (1 - \alpha) z_i$$

como x tiene algunos coeficientes cero por lo tanto y, z también tienen los mismos coeficientes iguales a ceros, es decir considerando solamente los coeficientes distintos de cero, tenemos la siguiente combinación lineal

$$\sum_{i=1}^{m} (ay_i + (1 - a)z_i) \, C_i(A) = b$$

como las columnas son linealmente independientes, el sistema admite a lo más una solución, luego todas las que hemos encontrado son iguales.

Por lo tanto, dado $a, b \in [0, 1]$, cualesquiera

$$\begin{aligned} ay_i + (1 - a)z_i &= by_i + (1 - b)z_i \\ (a - b)y_i &= (a - b)z_i \\ y_i &= z_i \end{aligned}$$

Así obtenemos que $y = z$, con lo cual obtenemos que x es un punto extremo.

Corolario 154 *Dado el conjunto*

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid Ax^t = b, x \geq 0 \right\} \neq \phi$$

restricción de un problema de programación lineal entonces M tiene un número finito de puntos extremos.

Corolario 155 *Dado el conjunto*

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} \mid Ax^t = b, x \geq 0\right\} \neq \phi$$

restricción de un problema de programación lineal entonces $G = cx^t$ *tiene un punto donde alcanza el máximo y el mínimo.*

Ejemplo 177 *Tenemos del ejemplo 154 que el conjunto de restricción es*

$$\begin{aligned} 4x + 10y &\leq 660 \\ 4x + 3y &\leq 380 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Transformando en la forma estándar tenemos que

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 660 \\ 380 \end{bmatrix}$$

los puntos extremos se obtienen como solución única de columnas linealmente independientes, la única posibilidad es tomar solamente dos columnas y así obtenemos los siguientes puntos extremos

$$(0, 0, 660, 380); (0, 66, 0, 182); (95, 0, 280, 0); (65, 40, 0, 0); (0, 0, 0, 0)$$

Luego basta evaluar la función $G = 3000x + 6000y$ en los puntos extremos obtenemos:

$$\begin{aligned} G(0, 0, 660, 380) &= 0; \quad G(0, 66, 0, 182) = 396{,}000; \\ G(0, 0, 0, 0) &= 0; \quad G(95, 0, 280, 0) = 285{,}000; \\ G(65, 40, 0, 0) &= 435{,}000. \end{aligned}$$

Así se obtiene que el máximo se alcanza en $x = 65$ e $y = 40$.

4.4. Método del Simplex

Es un algoritmo capaz de generar a partir de un punto extremo, nuevos puntos extremos donde la función alcanza cada vez mejores valores, hasta llegar a una que no puede ser mejorada.

El Método del Simplex se basa en que el valor optimal de un problema de programación lineal, siempre se alcanza en un punto extremo, lo que corresponde a la demostración del teorema 136. Al comprender que basta con considerar soluciones factibles básicas (puntos extremos), se seleccionan varias bases o conjuntos linealmente independientes maximales y se calculan las correspondientes soluciones básicas. La lógica para la elección sistemática de nuevas bases implica de nuevo los coeficientes de costo relativo.

El método del simplex se puede esquematizar de la siguiente manera:

Primer Paso: Matriz asociada a un problema de programación lineal.

Dado el problema de programación lineal en forma estandar

$$\max(cx^t)$$

donde $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, sujeto a:

$$Ax^t = b$$

con $A = (a_{ij})$, además

$$x \geq 0,$$

Le asociamos la siguiente matriz

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -c & -z \end{array}\right] \text{ o bien } \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -c & 0 \end{array}\right]$$

Nos referiremos a los coeficientes de la última fila, como *indicadores* o *pesos* de la función objetivo.

Segundo Paso: Elección de la columna.

Las columnas a pivotear son las que tienen indicadores negativos, ya que ellas son las únicas que pueden hacer que el máximo aumente, además algún elemento de esa columna debe ser necesariamente positivo, en caso contrario significará que el conjunto es no acotado luego no tiene máximo.

Tercer Paso: Elección de la posición de pivoteo.

El Método del Simplex, supone que la matriz ya está pivoteada y a partir de ella se tiene una solución particular del sistema perteneciente al conjunto de restricción, es decir un punto extremo

$$\left[\begin{array}{c|c} A' & b' \\ \hline -c' & -z' \end{array}\right]$$

Si hemos escogido la columna q para pivotear, de acuerdo a lo exigido en el segundo paso.

Sea t tal que

$$\frac{b'_t}{a'_{tq}} = \min\{\frac{b'_i}{a'_{iq}} \quad / \quad a'_{iq} > 0\}$$

Con lo cual, podemos pivotear en la posición (t, q), la elección de t no siempre es única.

Terminada la instancia de pivotear volvemos a repetir el proceso a partir del paso dos, hasta obtener que todo los indicadores son no negativos.

En este caso, el valor optimal de la función es el coeficiente de la posición $(m + 1, n + 1)$.

Ejemplo 178 *Consideremos el siguiente sistema, el cuál corresponde exclusivamente al conjunto restricción*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Una solución particular del sistema o un punto extremo es

$$x = (0, 0, 0, 4, 3, 1)$$

Supóngase que se decide pivotear sobre la primera columna. Para determinar cuál es la posición adecuada, se calculan las tres razones:

$$\frac{4}{2} = 2, \quad \frac{3}{1} = 3, \quad \frac{1}{-1} = -1$$

y se selecciona la menor no negativa. Esto nos indica que 2 *es nuestro elemento en la posición* $(1, 2)$, *Así obtenemos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

y nuestro nuevo punto extremo es,

$$x = (2, 0, 0, 0, 1, 3)$$

donde se ha pasado de una solución básica a otra.

Ejemplo 179 *Maximizar*

$$w = 3x + 4y$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 12 \\ 2x + 3x &\leq 21 \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Solución. Para convertir el problema a la forma estándar necesitamos incorporar las variables de holgura

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 12 \\ 2x + 3y + t = 21 \\ x, y, z, t \geq 0 \end{array}\right| \quad \text{con } w = 3x + 4y$$

La matriz asociada al problema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 21 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & -w \end{bmatrix}$$

en la primera columna tenemos indicadores negativos, para escoger cuál es la posición en la que vamos a pivotear, miremos los cuocientes y calculemos el mínimo

$$\text{mín}\left\{\frac{12}{1},\frac{21}{2}\right\}=\frac{21}{2}$$

con lo cuál procedemos a escalonar en la posición $(2,1)$. Obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -w+\frac{63}{2} \end{bmatrix}$$

Para comprender de mejor manera lo que hemos realizado, recuperemos el sistema que define el conjunto restricción , esto es:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}y+z-\frac{1}{2}t=\frac{3}{2} \\ x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}t=\frac{21}{2} \\ x,y,z,t\geq 0 \end{array}\right|$$

Despejando x de la segunda ecuación obtenemos

$$x=\frac{21}{2}-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}t$$

reemplacemos en la función objectivo

$$\begin{aligned} w &= 3\left(\frac{21}{2}-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}t\right)+4y \\ w &= \frac{63}{2}-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

y como todas la variables son positivas, el valor solamente puede disminuir, con lo cuál obtenemos que el valor máximo es $\frac{63}{2}$ y lo alcanza en $x=\frac{3}{2},\ \ y=0$

Ejemplo 180 *Maximizar*

$$w=3x+5y$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x+2y &\leq 12 \\ 2x+3x &\leq 21 \\ x,y &\geq 0. \end{aligned}$$

Solución. Traduciremos el problema de programación lineal a la forma estándar, de modo que pueda aplicarse el procedimiento simplex,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 21 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \left.\begin{array}{l} x+2y+z=12 \\ 2x+3y+t=21 \\ x,y,z,t\geq 0 \end{array}\right| \quad \text{con } w=3x+5y$$

la solución inicial es $(0,0,12,21)$, en la primera columna miremos los cuocientes y calculemos el mínimo

$$\text{mín}\left\{\frac{12}{1},\frac{21}{2}\right\}=\frac{21}{2}$$

luego procedemos a escalonar de la posición $(2,1)$. Así tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{63}{2} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{array}{r|} \frac{1}{2}y+z-\frac{1}{2}t=\frac{3}{2} \\ x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}t=\frac{21}{2} \\ x,y,z,t\geq 0 \\ \hline \end{array}$$

despejando x de la segunada ecuación y reemplando esta sustitución en la función

$$\begin{aligned} w &= 3\left(\tfrac{21}{2}-\tfrac{3}{2}y-\tfrac{1}{2}t\right)+5y \\ w &= \tfrac{63}{2}+\tfrac{1}{2}y-\tfrac{3}{2}t \end{aligned}$$

en este caso el valor puede seguir aumentando, y la solución que tenemos es $(\frac{21}{2},0,\frac{3}{2},0)$

Realicemos la búsqueda sobre la segunda variable, ya que ella puede seguir aumentando

$$\text{mín}\left\{\frac{3/2}{1/2},\frac{21/2}{1/2}\right\}=\text{mín}\{3,21\}=3$$

Escalonemos usando la posición $(2,1)$, tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 33 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{array}{r|} y+2z-t=3 \\ x-\dfrac{3}{2}z+2t=6 \\ x,y,z,t\geq 0 \\ \hline \end{array}$$

el punto que tenemos ahora es $(6,3,0,0)$, reemplacemos en la función a maximizar, así

$$\begin{aligned} w &= \frac{63}{2}+\frac{1}{2}(3-2z+t)-\frac{3}{2}t \\ w &= 33-z-t \end{aligned}$$

como todas la variables son positivas, obtenemos que el máximo valor es 33 y lo alcanza en $x=6, y=3$.

Ejemplo 181 *Tenemos del ejemplo 154 que el conjunto de restricción es*

$$\begin{aligned} 4x+10y &\leq 660 \\ 4x+3y &\leq 380 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

y la función objetivo $w=3000x+6000y$. Transformando a la forma estándar y asociando la matriz tenemos,

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 & 0 & 660 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 380 \\ -3000 & -6000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivotendo en la la posición $(2,1)$ *obtenemos*

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & -1 & 280 \\ 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 95 \\ 0 & -3750 & 0 & 750 & 285000 \end{bmatrix}$$

Para continuar el proceso pivoteamos en la posción $(1,2)$, *y tenemos*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 40 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{28} & 1 & 65 \\ 0 & 0 & \frac{3750}{7} & \frac{1500}{7} & 435000 \end{bmatrix}$$

Así se obtiene que el máximo se alcanza en $x = 65$ *y* $y = 40$, *y su valor máximo es* \$435,000.

Ejemplo 182 *Maximizar*

$$z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Solución. Para convertir el problema a la forma estándar de modo que pueda aplicarse el procedimiento simplex, multiplicamos la función objetivo por menos uno e introducimos tres variables de holgura no negativas x_4, x_5, x_6, con lo que resulta lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La aplicación del criterio de selección de una columna sobre la que pivotear, demuestra que cualquiera de las tres columnas proporciona una solución mejorada. En cada una de estas columnas, el elemento pivote adecuado se determina calculando las razones

$$\frac{y_{i0}}{y_{ij}}$$

y seleccionando la positiva más pequeña.

Sólo es necesario determinar un pivote permitido y en general no hay por qué calcularlos todos. Sin embargo, para hacer cálculos a mano en problemas de esta magnitud, se podrían analizar los posibles pivotes y seleccionar uno que minimice la cantidad de división necesaria. Para este ejemplo se elige 1. de la posición $(1,2)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En la tercera columna tenemos que el indicador es negativo, escogemos para pivotear la posición $(3,2)$

$$\begin{bmatrix} \boxed{5} & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ -7 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo sigue aumentando y se puede pivotar en la posición $(1,1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{27}{5} \end{bmatrix}$$

Como la última fila tiene solamente elementos no negativos, se deduce que la solución correspondiente a la última tabla es optimal.

Por lo tanto,

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{5}, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 4$$

es la solución óptima con un valor correspondiente a la función objetivo de $\frac{27}{5}$.

Ejemplo 183 *Encontrar todos los pivotes o apoyos de la tabla simplex inicial.*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix}$$

Solución. Primero, obsérvese que hay tres indicadores negativos, es decir, por lo menos tres pivotes.

En la primera columna hay dos componentes positivos, así que formamos los cocientes:

$$\frac{y_{10}}{y_{11}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y_{20}}{y_{21}} = \frac{2}{3}$$

como $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{3}$, luego el pivote de la primera columna está en la posición $(1,1)$.

En la segunda columna hay solamente un coeficiente positivo, luego el pivote está en la posición $(2,2)$.

En la tercera columna, formemos los cocientes:

$$\frac{y_{10}}{y_{13}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{y_{20}}{y_{23}} = \frac{2}{2} = 1$$

Así, el pivote esta en la posición $(3,2)$.

A continuación tenemos marcados los posibles pivotes

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & \boxed{4} & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & \boxed{3} & 2 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix}$$

Con lo que concluye el ejercicio.

Ejemplo 184 *En el ejercicio anterior, encontramos el pivote en la tercera columna. Usar éste, para dar inicio al método del simplex de modo de localizar el valor optimal.*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix}$$

Solución. Pivotenado en la posición pedida tenemos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{7}{2} & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{9}{8} & 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{8} & 0 & -z+\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Ahora permanecen dos indicadores negativos.

Luego, para escoger la posición de la primera columna, veamos los cuocientes

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

Pivoteamos desde la posición $(1,1)$ y obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & -2 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} & 0 & -z+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La única columna, que tiene indicador negativo es la segunda y en ella encontramos un solo pivote, que esta en la posición $(2,2)$, pivoteando esta posición tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -z+\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Tenemos nuevamente un indicador negativo en la quinta columna, y un solo pivote positivo, pivoteando desde la posición $(5,1)$ obtenemos

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 & 13 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & \frac{36}{5} & 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{29}{4} & 0 & \frac{3}{4} & -z+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Con ello, tenemos que el valor máximo lo alcanzamos en $(0,2,0,0,3,0)$ y este valor es $\frac{3}{2}$.

Ejemplo 185 *Encontrar todos los pivotes de la matriz asociada a un problemna de programación lineal.dada por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix}$$

Solución. Hay indicadores positivos en las columnas 1,2 y 5.

En la primera columna hay dos elementos positivos, realizando los cocientes:

$$\frac{y_{10}}{y_{11}} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{y_{40}}{y_{41}} = \frac{3}{1} = 3$$

ya que $2 < 3$, el pivote es 1 en la posición $(1,1)$.

En la segunda columna hay tres componentes positivas, formamos los cocientes:

$$\frac{y_{10}}{y_{12}} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{y_{20}}{y_{22}} = \frac{2}{2} = 1, \quad \frac{y_{30}}{y_{32}} = \frac{1}{5}$$

como $\frac{1}{5}$ es el mínimo cociente, el pivote es 5 en la posición $(3,2)$.

En la quinta columna hay cuatro componentes positivos, formamos los cocientes:

$$\frac{y_{10}}{y_{15}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y_{20}}{y_{25}} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{y_{30}}{y_{35}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y_{40}}{y_{45}} = \frac{3}{2}$$

El menor cociente es $\frac{1}{2}$, y hay dos cocientes con este valor. Por lo tanto, en la posición $(1,5)$ y en la posición $(3,5)$ estan los posibles pivotes.

Volvemos a dibujar la tabla, con los pivotes marcados:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 4 & \boxed{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & \boxed{5} & 0 & 1 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

y con esto finaliza el ejercicio.

Ejemplo 186 *Determinar el máximo optimal del problema de programación lineal dado por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

Solución. Pivotenado en la posición $(1,1)$ obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -z+2 \end{bmatrix}$$

Así obtenemos, que el máximo valor es 2 y se alcanza en $(2,0,0,0,0,0,2,3,1)$

Ejemplo 187 *La siguiente es una tabla terminal de un problema de programación lineal:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -z+20 \end{bmatrix}$$

Solución. Como todos los indicadores son no negativos, se ve que z alcanza un valor máximo de 20 en el punto

$$(3,0,1,2,0,0,0,1)$$

La explicación de este resultado lo tenemos en la última ecuación de la matriz, dada por:

$$0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{2}x_6 + x_7 + 0x_8 = -z + 20$$

o bien:

$$x_2 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{2}x_6 + x_7 = -z + 20$$

y así

$$z = 20 - \left(x_2 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{2}x_6 + x_7 \right)$$

$$z = 20 - x_2 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - x_7$$

Como todas las variables son no negativas, se tiene que

$$-x_2 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - x_7 \leq 0$$

entonces $z \leq 20$. Observe que $z = 20$ cuando $x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$. Las primeras cuatro ecuaciones de la tabla terminal se leen:

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 + \frac{1}{3}x_5 + x_6 + 2x_7 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 + x_7 &= 3 \\ x_3 + x_6 + x_7 &= 1 \\ 3x_2 + 2x_5 + 4x_7 + x_8 &= 2 \end{aligned}$$

Como $x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$, estas ecuaciones se reducen a:

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 \\ x_1 &= 3 \\ x_3 &= 1 \\ x_8 &= 2 \end{aligned}$$

Así se ve que z alcanza su máximo de 20 en $(3, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 2)$.

Ejercicios.

1. Determine los pivotes de la tabla simplex inicial dada:

   a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -z \end{bmatrix}$

2. Escriba la matriz asociada a la forma estándar para el problema programación lineal y encierre los posibles pivotes:

   a)
   $$\text{máx}\,(2x_1 + x_2)$$
   sujeto a:
   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   b)
   $$\text{máx}\,(x_1 - x_2)$$
   sujeto a:
   $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 7 \\ 5x_1 + 8x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   c)
   $$\text{máx}\,(4x_1 - 3x_2)$$
   sujeto a:
   $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 14 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

d)

$$\text{máx}\,(3x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

e)

$$\text{máx}\,(2x_1 + x_2 + 3x_3)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

f)

$$\text{máx}\,(x_1 + x_2 - 3x_3)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Utilice el procedimiento simplex para resolver y realizar una representación gráfica del problema en el espacio x_1, x_2.

a)

$$\text{máx}\,(-x_1 + x_2)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\text{máx}\,(x_1 + x_2)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\text{máx}\,(4x_1 + 5x_2)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

d)

$$\text{máx}\,(5x_1 + 8x_2)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq \frac{5}{2} \\ x_2 &\leq \frac{3}{2} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Resolver los siguientes problemas de programación lineal.

a)

$$\text{máx}\,(x_1 + 2x_2 + x_3)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\text{máx}\,(5x_1 + x_2 + 3x_3)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ 4x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\text{máx}\,(x_1 + 2x_2 + 2x_3)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

d)

$$\text{máx}\,(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

e)

$$\text{máx}\,(x_1 - x_2 + x_3)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

f)

$$\text{máx}\,(5x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 6x_4)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &\leq 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 3 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_4 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Capítulo 5

Ejercicios

5.1. Matrices

1. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   a) Describir los vectores filas y los vectores columnas de A y B.

   b) Hallar $A + B$, $-2B$,$A - B$, $A - 2B$, $B - A$

2. En cada uno de los siguientes casos determinar $(AB)C$ y $A(BC)$

   a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. Sea $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

   a) Determinar el orden de XA y comparar con las filas o columnas de A.

   b) Si $X = [0 \,..,0\ 1\ 0 \,...\, 0]$ donde 1 aparece en la posición $(1, i)$ Determinar el orden de XA y AX^t, comparar con las filas o columnas de A, con A en M_n.

4. Calcule los productos matriciales AB y BA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifique directamente la distributividad a la derecha

$$(A+B)C = AC + BC$$

¿Se cumple la distributividad a la izquierda para estas tres matrices? Justifique.

6. Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

   a) Verifique que $AB = BA = 0; \quad AC = A \quad$ y $\quad CA = C$

   b) Use los resultados de (a) para comprobar que

$$\begin{aligned} ACB &= CBA, \\ A^2 - B^2 &= (A-B)(A+B), \\ (A+B)^2 &= (A-B)^2 = A^2 + B^2 \end{aligned}$$

7. Dadas las matrices en M_3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinar X en M_3 tal que

$$2A + 3X = (\frac{1}{2}C).(\frac{2}{3}B)$$

8. Dadas las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Hallar $D = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ de manera que $A + B - D = 0$.

9. Si A en M_3 efectuar los productos

   a) $A \cdot D\,[c_1, c_2, c_3]\,; \quad D\,[c_1, c_2, c_3] \cdot A$

   b) $D\,[c_1, c_2, c_3] \cdot A \cdot D\,[d_1, d_2, d_3]$

   c) $A \cdot DS\,[c_1, c_2, c_3]\,; \quad DS\,[c_1, c_2, c_3] \cdot A$

   d) $DS\,[d_1, d_2, d_3] \cdot A \cdot DS\,[c_1, c_{2,} c_3]$

   ¿Cómo quedan los productos en a) y c) si $c_1 = c_2 = c_3 = 1$?

   La misma pregunta anterior para b) y d) en los casos $c_i = d_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad c_i = d_i = 1, \quad i = 1, 2, 3$

10. Sea $A \in M_3$ efectuar los siguientes productos

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \cdot A; \qquad A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}; r \neq 0, r$ en $\mathbb{R}$

    b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A; \qquad A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A, \qquad A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; k$ en $\mathbb{R}$.

11. Exprese $B = \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ x+5u & y+5v & z+5w \\ u & v & w \end{bmatrix}$ como producto matricial de

    $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}$ y matrices del tipo (a) ,(b),y (c) del ejercicio anterior.

12. Si $\begin{array}{l} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{array}$ y $\begin{array}{l} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = z_1 + 3z_2 \end{array}$

    compruebe que :

    $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

13. Una matriz se dice idempotente si y sólo si $A^2 = A$

    a) Pruebe que

       $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ es idempotente.

    b) Demuestre que si A es idempotente, $B = I_n - A$ es idempotente y $AB = BA = 0$

14. Pruebe que no existe una matriz B tal que $AB = BA = I_2$ con $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

15. Determinar todas las matrices A de orden 2×2 con coeficientes reales, tales que cumplan $A^2 = 0$

16. Determinar todas las matrices A de orden 2×2 con coeficientes reales, tales que cumplan $A^2 = I$

17. Se dice que una matriz A es involutiva si y sólo si $A^2 = I_n$

    a) Verifique que $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ son matrices involutivas.

    b) Demuestre que si A es una matriz involutiva entonces $\frac{1}{2}(I_n + A)$ y $\frac{1}{2}(I_n - A)$ son idempotentes y $\frac{1}{2}(I_n + A) \cdot \frac{1}{2}(I_n - A) = 0$

18. Si $A = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$. Calcular A^k, para $k = 1, 2, 3$.

19. Sea $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Hallar todas las potencias N^k con k entero positivo.

20. Demuestre por inducción que

    a) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix}$

    b) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{bmatrix}$

21. En mecánica cuántica a veces se usan las llamadas matrices de Spin de Pauli.

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \text{ con } i^2 = -1$$

    Muestre que dos matrices cualesquiera de ellas "anticonmuta" $(AB = -BA)$.

22. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n, con

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i + 1 \\ 0 & j \neq i + 1 \end{cases}.$$

    Pruebe que $A^n = 0$ y $A^{n-1} \neq 0$.

23. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ compruebe que $A^3 - 2A^2 - 9A = 0$ pero $A^2 - 2A - 9I \neq 0$.

24. Sea $p(x) = -(x+2)(x^2+3x), \quad q(x) = x+2, \quad r(x) = x^2+3x, \quad s(x) = x+3.$

    Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$, Calcular $p(A), q(A), r(A), s(A)$.

25. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

    Determinar $(A+B)^t; \quad A^t + B^t; \quad A + A^t; \quad B + B^t.$

26. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

    a) Determinar $(AB)^t; \quad B^tA^t; \quad AA^t; \quad A^tA.$

    b) Verifique que $AA^t; \quad A^tA$ son simétricas.

    c) Verifique que $(AB)^t = B^tA^t$.

27. Si $X, Y \in M_{n\times 1}$, y $A \in M_{n.}$ efectúe los productos $X^tY, \quad XY^t, \quad X^tAY.$

28. Mostrar que toda matriz de orden n es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

29. Si $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Hallar la parte simética y antisimétrica de A

30. Si $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Determinar una matriz simétrica tal que

$$[x, y, z]\, B\, [x, y, z]^t = [x, y, z]\, A\, [x, y, z]$$

31. Sea $A \in M_n$ y $G = A^tA$. Demostrar que G es simétrica y los coeficientes de la diagonal son no negativos.

32. Determine si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones. Justifique adecuadamente en cada caso.

    a) El producto de matrices triangulares es triangular.

    b) El producto de matrices triangulares del mismo orden es triangular del mismo orden.

    c) Cada matriz antisimétrica tiene la diagonal principal igual a cero.

    d) Para toda matriz $A \in M_n$. Si $A^4 = 0$ entonces $A = 0$.

    e) El producto de matrices simétricas del mismo orden es simétrica.

f) Para toda matriz $A \in M_n$ se tiene $A^tA = AA^t$.

g) Para toda matriz $A \in M_n$ se tiene $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica.

h) Para toda matriz $A \in M_n$ con $A \neq 0$ entonces existe B tal que $AB = I_n$.

i) Para toda matriz $A \in M_n$ se tiene

$$x^tAx = (x^tAx)^t = \frac{1}{2}x^t(A + A^t)x \text{ con } x \in M_{n\times 1}.$$

j) Toda matriz triangular estricta es "nilpotente" esto es, hay una potencia de ella que se hace 0.

k) Si A y B son matrices de orden n y $AB = 0$ entonces $A = 0$ ó $B = 0$.

l) Si A, B son matrices de orden $n \times m$ entonces existe una única matriz X de orden $n \times m$ tal que

$$\alpha A + \beta X = B \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0.$$

33. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{7}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$

Además. Calcular $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, $(A^2)^{-1}$, $(ABA)^{-1}$.

34. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

a) Expresar A como producto de matrices elementales.

b) Hallar la forma Escalonada Reducida por Filas correspondiente a A.

c) Determinar el $Rg(A)$.

35. Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$,

a) Expresar A como producto de matrices elementales.

b) Hallar la forma Escalonada Reducida por Filas correspondiente a A.

c) Determinar el $Rg(A)$.

36. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, encontrar una matriz E de modo que $EA = B$ en los siguientes casos

a) $B = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

c) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$.

37. Encuentre una matriz P regular tal que $PA = B$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

.

a) ¿ A y B son regulares?

b) Encuentre la inversa de P, si existe.

38. ¿Cuáles de las siguientes matrices son equivalentes por filas?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 12 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

39. Determinar mediante Operaciones Elementales por Filas la inversa de las siguientes matrices, si existe.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & -21 & -28 & -2 \\ -6 & 2 & 16 & 10 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 1 & -9 \end{bmatrix}$

40. ¿Para qué valores de x e y las matrices. $\begin{bmatrix} 4 & x & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & y \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ son equivalente por filas?

41. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Hallar una matriz P regular tal que $A = PE$, donde E es la forma Escalonada Reducida por Filas correspondiente a A.

42. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 & 24 \\ 1 & 3 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

    a) ¿ Es $A \longrightarrow B$?

    b) ¿ Es $A \underset{F}{\longrightarrow} B$?

    c) ¿ Es $A \underset{C}{\longrightarrow} B$?

43. Sea A una matriz regular de orden n.

    a) Demostrar que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

    b) Si A es simétrica entonces A^{-1} es simétrica.

44. Sea $D[a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}]$, con $a_{ii} \neq 0$ para todo i. Demostrar que A es invertible y encontrar su inversa.

45. Demostrar que si T es triangular inferior y regular entonces T^{-1} es Triangular Inferior.

46. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Resuelva la siguiente ecuación matricial en X.

$$XB(A + A^2) - (XB - B^2)A - B^2 A = A.$$

47. Sean A y X matrices simétricas. Determine X tal que se cumpla la igualdad.

$$(A^t X^t)^{-1} - (X^t A^{-1})^{-1} + (X^{-1} A^t)^t = I_n \quad \text{donde } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

48. Determinar mediante Operaciones Elementales Filas ó Columnas los valores de a y b para que la matriz A sea regular, en cada caso.

    a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

49. Sea $\alpha \neq 0$ y A una matriz cuadrada de orden n tal que $3A^2 + 7A + \alpha I_n = 0$. Probar que A es regular y Hallar A^{-1}.

50. Sabiendo que la inversa de A es $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y que la inversa de AB es $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Calcular B.

51. Si A es regular entonces todas las potencias de A son regulares y para todo natural n se tiene
$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n.$$
(Ayuda: Use Inducción)

52. Pruebe con un contraejemplo que son falsas las siguientes afirmaciones

 a) A, B, C en M_n, A singular entonces
$$AB = AC \Rightarrow B = C$$
 b) Si A, B son regulares de orden n entonces $A + B$ es regular.

 c) Si $A, B, A + B$ son regulares, entonces
$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$$
 d) Si A, B son regulares de orden n entonces
$$AB = BA \text{ ó } (AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$
 e) Si A, B, C son de orden n, B regular y $AB = C$ entonces
$$A = B^{-1}C$$
 f) Si A, B, C son de orden n, B regular y $ABC = I_n$ entonces
$$AC = B^{-1}$$
 g) Si A, B matrices tal que $A \to B$ entonces $A \underset{F}{\to} B$

 h) Si A, B matrices tal que $A \to B$ entonces $A \underset{C}{\to} B$

 i) Toda matriz diagonal es invertible.

53. Calcular los siguientes determinante:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

54. Calcule los siguientes determinantes usando propiedades:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \\ 5 & 2 & 6 & -7 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

55. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} sen\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -sen\alpha \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} tg\alpha & -1 \\ 1 & tg\alpha \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & sen(\alpha+\beta) & 1 \\ \cos(\alpha+\beta) & sen(\alpha+\beta) & 1 \\ \cos(\alpha+\gamma) & sen(\alpha+\gamma) & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{bmatrix}$$

56. Verificar que los siguientes determinantes son nulos:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{bmatrix}; \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{bmatrix}$$

Ayuda (a): efectúe $F_{32}(1)$

Ayuda (b): $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1, \quad \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$ y efectúe $F_{31}(1)$

57. Probar que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

58. Demostrar que

a) $\det \begin{bmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{bmatrix} = -2(x^3+y^3)$

b) $\det \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{bmatrix} = x^2 z^2$

59. De las siguientes matrices ¿cuáles son invertibles?

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Para aquella que lo sea encuentre su inversa por el método de la adjunta.

60. ¿Para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & a \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es invertible?

61. Calcule por el método de la adjunta la inversa de las siguientes matrices regulares:

a) $\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

62. Pruebe que $|rA| = r^n |A|$, si A es matriz de orden n y r un escalar real.

63. Pruebe que si $T = [t_{ij}]$ es una matriz triangular, entonces

$$|T| = t_{11} \cdot t_{22}.......t_{nn} = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$$

64. (a) Pruebe que $A \cdot (Adj(A)) = 0$ cuando A es singular y dar un ejemplo.

(b) Pruebe que $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$ con A de orden n y dar un ejemplo.

65. Pruebe con un contraejemplo que son falsas las siguientes afirmaciones:

a) El cofactor de a_{32} para

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ es 60 ó 342.

b) Si A es cuadrada entonces $|-A| = -|A|$.

c) Si A, B matrices entonces $|AB| = |A||B|$.

d) Si $AA^t = I_n$ entonces $|A| = 1$ con A de orden n.

66. Sean $f(t), g(t)$ funciones al menos dos veces derivables.

Sea $h(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$ probar que $h'(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f''(t) & g''(t) \end{vmatrix}$.

67. Sean x_1, x_2, x_3 escalares reales. Probar que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Probar por inducción que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j)$$

Este determinante es conocido con el nombre de determinante de Vandermonde y se denota por V_n.

68. Pruebe que si A, B son ambas de orden n y $AB = I_n$ entonces ambas matrices son regulares, $A^{-1} = B$ y $BA = I_n$ (Ayuda: use determinante)

69. Probar que si A, B son matrices cuadradas, no necesariamente del mismo tamaño, y C de orden adecuado, entonces:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

Ayuda: Usar inducción sobre el orden de A, y operaciones elementales filas.

70. Probar que si A, B son matrices cuadradas, no necesariamente del mismo tamaño, C y D de orden adecuado, entonces si A es regular,

$$\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = |A|\,\left|B - DA^{-1}C\right|$$

Ayuda: premultiplique por $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -DA^{-1} & I \end{bmatrix}$ la matriz $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$.

71. Sea $$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & -15 & 8 & 7 & 8 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 12 & -9 & 4 & 9 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 13 & 3 & 5 & 18 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule $|H|$. Ayuda: use ejercicios anteriores.

72. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^4$,(cuidado son cuatro variables)

 a) $10x - y = 0$.
 b) $x + y + \frac{1}{2}z = 1$.
 c) $-x + 3y + 2z - w = 3$.
 d) $x + \frac{3}{4}y = \frac{9}{7}$.

73. Si anotamos S_i la solución de cada una de las ecuaciones anteriores. Determine el conjunto $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$.

74. ¿ Son equivalentes (en cada caso) los dos sistemas de ecuaciones lineales siguientes ?. Si es asi demuéstrelo.

 a) $\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}$ y $\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}$

 b) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 & = & 0 \end{array}$ y $\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array}$

75. Dar un ejemplo (en caso que sea posible) de:

 a) Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tenga solución.
 b) Un sistema de una ecuación lineal con cinco incógnitas que no tenga solución.
 c) Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas de solución única.

76. Hallar todas las soluciones del sistema $AX = 0$ por el método de la escalonada y por el método de Cramer. Siendo A en cada caso, una de las siguientes matrices:

 a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

 b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \\ \frac{-7}{3} & 2 & \frac{-8}{3} \end{bmatrix}$

 c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

 d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$e)\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

77. Si $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Hallar todas las soluciones de $AX = 3X$ y todas las soluciones de $AX = 2X$ donde $X = (x_1, x_2, x_3)^t$.

78. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones (si es posible). En cada caso escriba primero la matriz del sistema y la matriz ampliada.

$$a)\ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ -x_2 + 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$b)\ \begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 & = & 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 & = & 1 \end{array}$$

$$c)\ \begin{array}{lcl} x_1 - 3x_2 + x_3 & = & -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$d)\ \begin{array}{lcl} 2x - y - z & = & 4 \\ 3x + 4y - 2z & = & 11 \\ 3x - 2y + 4z & = & 11 \end{array}$$

$$e)\ \begin{array}{lcl} x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = & 5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 & = & -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 & = & 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & 5 \end{array}$$

$$f)\ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$g)\ \begin{array}{lcl} x + 2y + z & = & 5 \\ 3x + z + 2u & = & 9 \\ 4x - y - z + u & = & -5 \\ -y - z + u & = & 7 \end{array}$$

79. Encuentre la solución general del sistema, utilizando dos métodos distintos:

$$\left.\begin{array}{lcl} x+y+z+w & = & 2 \\ x+2z-3w & = & -1 \\ -x+2y+z-w & = & 3 \\ x+y-4 & = & z \end{array}\right|$$

80. Resuelva simultáneamente, hallando la forma Escalonada reducida por fila de $[A \mid K_1 \mid K_2 \mid K_3]$, los tres sistemas lineales siguientes:

$AX = K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $AX = K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$; $AX = K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

81. Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 9 \\ 8 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \end{bmatrix} = I_4$

Usando el procedimiento del ejercicio anterior. Note que si $A, X, Y \in M_n$ entonces

$$AX = [AC_1(X) \mid AC_2(X) \mid ... \mid AC_n(X)] = Y = [C_1(Y) \mid C_2(Y) \mid ... \mid C_n(Y)]$$

82. Discutir según los valores de a, b, c, λ, la existencia y en cada caso determinar las soluciones de los siguientes sistemas lineales:

a) $\left.\begin{array}{lcl} ax+y+z & = & 0 \\ x+ay+z & = & 0 \\ x+y+az & = & a \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{lcl} \lambda x-y+z & = & a \\ x+y-2z & = & b \\ x-y+z & = & c \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{lcl} 2x-y-3z & = & 3 \\ 3x+y-5z & = & 0 \\ 4x-y+z & = & a \\ x+3y-13z & = & b \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{lcl} ax-3y+5z & = & 4 \\ x-ay+3z & = & 2 \\ 9x-7y+8az & = & 0 \end{array}\right|$

83. Calcular el valor de $a \in \mathbb{R}$, de modo que el sistema tenga infinitas soluciones

$$\left.\begin{array}{lcr} x-y+2z &=& 1\\ ax+y-z &=& 0\\ 2x+y-3z &=& -1 \end{array}\right|$$

84. En el sistema $\left.\begin{array}{lcr} mx+y-z &=& 0\\ 2x+my+z &=& 0\\ y+mz &=& 0 \end{array}\right|$

   a) ¿Cual es el determinante principal del sistema ?
   Determine $m \in \mathbf{R}$ tal que:

   b) El sistema sea inconsistente.

   c) El sistema tenga única solución. En tal caso determínela.

   d) El sistema tenga varias soluciones. En tal caso determínelas.

85. Dado el sistema $\left.\begin{array}{rcr} x_1-x_2+(4a^2+1)x_3 &=& b\\ x_2+(3-a)x_3 &=& 0\\ 2x_1-x_2+(7-a)x_3 &=& -2 \end{array}\right|$

   Hallar condiciones para a y b de tal manera que el sistema:

   a) Tenga única solución, en cada caso determínela.

   b) No tenga solución.

   c) Tenga varias soluciones, en cada caso determínelas.

86. Considerar el sistema $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 6 & -1\\ 6 & 4 & a \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1\\ 4\\ c\\ b \end{bmatrix}$

   Hallar $a, b, c \in \mathbb{R}$, para los cuales se tiene:

   a) El sistema es inconsistente.

   b) El sistema tiene única solución. Determínela.

   c) El sistema tiene infinitas soluciones. En cada caso determínelas. ¿Que ecuaciones dependen linealmente de las otras?

87. Hallar $t \in \mathbb{R}$, tal que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & -2 & t \end{bmatrix}$ sea singular.

   ¿Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ el sistema $AX = \begin{bmatrix} t\\ 1\\ 1-t \end{bmatrix}$, tiene solución?

88. Resuelva el sistema de ecuaciones y halle condiciones en las constantes a, b reales para que tenga única, ninguna o infinitas soluciones.

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

89. Para los siguientes sistemas, determine los valores de $a, \lambda \in \mathbb{R}$, de modo que

i) El sistema tenga única solución, determínela.

ii) El sistema tenga más de una solución, determínelas.

iii) El sistema tenga solución vacía.

a) $\left.\begin{array}{lcl} (1-\lambda)x + \lambda z & = & 1 \\ (1-\lambda)y + \lambda z & = & a \\ \lambda x + (1-\lambda)y & = & 1 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{lcl} \lambda x + y + z & = & 1 \\ x + \lambda y + z & = & \lambda \\ x + y + \lambda z & = & \lambda^2 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{lcl} (\lambda+3)x + y + z & = & \lambda \\ \lambda x + (\lambda-1)\, y + z & = & 1 \\ 3\,(\lambda+1)\, x + \lambda y + (\lambda+3)z & = & \lambda+1 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{lcl} x - z & = & 1 \\ -x + 3y & = & a \\ 2x + \lambda y + z & = & 1 \end{array}\right|$

e) $\left.\begin{array}{lcl} x_1 + x_3 + 4\lambda^2 x_3 & = & a + x_2 \\ x_2 + 3x_3 & = & \lambda x_3 \\ 2x_1 + 7x_3 + 2 & = & x_2 + \lambda x_3 \end{array}\right|$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1-a \end{bmatrix}$

90. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique en cada caso.

a) El número de variables independientes de un sistema $AX = B$ con $A \in M_{m\times n}$ es $n - Rg(A)$.

b) Si el sistema $AX = C$ es consistente, $A \in M_{3\times 4}$; $C = (1, 2, s)^t$ y $Rg(A) = 2$, entonces $s = 0$.

c) Si el sistema $AX = C$ es consistente, $A \in M_{3\times 4}$; $C = (8, -7, s)^t$ y $Rg(A) = 3$, entonces $s \neq 0$.

d) $Rg(A) = Rg(A^t)$ para toda $A \in M_{m\times n}$.

e) Si $A \in M_{m\times n}$ y $Rg(A) < m$ entonces $AX = 0$ tiene solución no trivial.

f) Si $A \neq 0$ y $A \in M_{3\times 4}$ y $P \in M_3$ y $PA = 0_{3\times 4}$ entonces P no es regular.

g) Si $A \in M_3$ entonces el sistema $AX = 0$ tiene solución no trivial ($X \neq 0$) si y sólo si A es singular.

h) Una matriz de rango 1 es aquella donde toda fila es múltiplo de la primera fila.

i) Si $A \in M_3$ y $|A| = 0$, el sistema $AX = B$ con $B \neq 0$ no tiene solución.

j) Si $A \in M_n$ y $|A| = 0$ entonces $AX = B$ con $B \neq 0$ no tiene solución única (es decir, no tiene o tiene infinitas soluciones).

91. Pruebe que si $A \xrightarrow{F} B$ entonces los sistemas homogéneos $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen el mismo conjunto solución.

92. Demuestre que la afirmación siguiente es falsa (basta dar un contraejemplo).

    Si $A \xrightarrow{F} B$ entonces los sistemas $AX = C$ y $BX = D$ tienen el mismo conjunto solución.

93. Sea $A \in M_{n\times p}$. ¿Bajo qué condiciones sobre el número de filas no nulas de la matriz Escalonada Reducida por Filas de A, el sistema $AX = 0$ tiene solución única $(0, 0, ..., 0)^t$?

94. Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas. E la forma Escalonada Reducida por Filas de A con r filas no nulas y $n > m > r$.

    a) ¿Cuántas ecuaciones son dependientes?

    b) ¿Tiene solución el sistema?

    c) ¿Cuántas variables libres tiene el sistema?

95. Demuestre que el sistema de ecuaciones lineales $AX = Y$ es equivalente a $[A \mid Y]\left[\frac{X}{-1}\right] = 0$ o $[A \mid I_n]\left[\frac{X}{-Y}\right] = 0$.

96. Encontrar $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$ sea solución del sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} ax + 3by + 4cz & = & 5 \\ x + 3cy + 4bz & = & 6 \\ x + y + 5cz & = & 7 \end{array}\right|$$

97. En cada caso, encuentre un sistema de ecuaciones homogéneo $AX^t = 0$ de modo que los siguientes vectores sean soluciones de dicho sistema.

    a) $x_1 = (1, 0, 0), \quad x_2 = (0, 1, 0), \quad x_3 = (0, 0, 1)$

    b) $x_1 = (1, 1)$

    c) $x_1 = (1, 1, 0) \quad x_2 = (0, 1, 1)$

    d) $x_1 = (0, 0, 1, 1) \quad x_2 = (-1, 1, 8, 6)$

e) $x_1 = (1,2,3) \quad x_2 = (7,3,-1)$

98. En cada caso, encuentre un sistema de ecuaciones $BX = C^t$ de modo que:

a) $C = (1,7,5)$ y el sistema tenga las soluciones indicadas en 97 a).

b) Idem a) y el sistema tenga las soluciones indicadas en 97 b).

c) Idem a) y el sistema tenga las soluciones indicadas en 97 c).

d) Idem a) y el sistema tenga las soluciones indicadas en 97 e).

e) $C = (1,0,7,-5)$ y el sistema tenga las soluciones indicadas en 97 d).

f) $C = (0,1,0,1)$ y $X_1 = (-1,-3,2,1)^t, X_2 = (-1,0,4,9)^t$ sean soluciones del sistema.

g) $C = (-3,2)$ y $X_1 = (-1,1)^t, X_2 = (1,0)^t$ sean soluciones del sistema.

99. Encuentre un sistema de ecuaciones $BX = C$ de modo que C es solución particular del sistema (I) y la solución del sistema $BX = C$ contiene a la solución del sistema (II):

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 &=& 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &=& 1 \end{array}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

5.1.1. Ejercicios complementarios

A continuación presentamos una selección de problemas, incluidos en certamenes.

1. Sean $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Demuestre que si $AB = I_n$ y $CA = I_n$ entonces $B = C$.

b) Demuestre que si $A \xrightarrow{F} B$ entonces $A^t \xrightarrow{C} B^t$.

2. Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar la inversa de cada una, si existe.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix}$. Determine para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ existe A^{-1}, encuéntrela usando transformaciones elementales filas.

4. Probar que la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$ es invertible si y sólo si a, b, c son números reales distintos.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

   a) Calcular A^k para todos los valores posibles del entero k.

   b) Sea $B = I_3 + A$. Calcular B^{21}.

6. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.
   Determinar $X \in M_3(\mathbb{R})$ tal que
   $$2A + 3X = \left(\frac{1}{2}C\right)\left(\frac{2}{3}B\right).$$

7. Mediante operaciones elementales filas u operaciones elementales columnas, determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$, sea invertible y calcular A^{-1}.

8. Calcule $\begin{vmatrix} x+1 & x^2-1 & 2x+2 & 0 \\ 1 & x-1 & y & y \\ x & x^2-x & 5 & 5 \\ 1 & 1-x & y & y+z \end{vmatrix}$.

9. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En cada caso justifique adecuadamente.

   a) Si la matriz A es antisimétrica entonces $A + A^t = 0$.

   b) A y B invertibles entonces $A + B$ es invertible.

   c) Toda matriz A de orden n tal que $A \cdot A^t = I_n$ cumple $|A| = 1$ ó $|A| = -1$.

   d) $A \to I_n$ entonces existen matrices P y Q invertibles tal que $A^{-1} = QP$.

   e) El producto de matrices triangulares es triangular.

   f) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.

   g) Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ y $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ entonces $X^t \cdot AX = \frac{1}{2}X^t(A^t + A)X$.

   h) Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

   i) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ entonces $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$.

   j) Si A, B son matrices del mismo orden e invertibles y $A \to B$ entonces $A^{-1} \to B^{-1}$.

10. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, donde $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$.

    a) Exprese A como producto de matrices elementales.

    b) Calcule la inversa de cada una de las matrices elementales obtenidas en (a).

    c) Calcule A^{-1}.

11. Calcule usando sólo las propiedades de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

12. Encuentre, si existe, la inversa de la matriz A, utilizando dos métodos diferentes. Justifique su respuesta en ambos casos.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

13. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Usando operaciones elementales:

    a) Determinar A^{-1}.

    b) Exprese A^{-1} como producto de matrices elementales.

14. Obtener B si $(B^{-1}A)^t - (B^tA)^{-1} = I$ siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

    Si $B \xrightarrow{F} A$ mediante las operaciones siguientes:

$$F_{14}, \quad F_{42}(1), \quad F_{62}(1), \quad F_{36}(-1), \quad F_{35}(-1), \quad F_{15}(2), \quad F_{16}(1),$$

    en forma secuencial. Calcular $\det(B)$.

16. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

    a) Pruebe que A es invertible.

    b) Encuentre A^{-1}, por el método de la adjunta.

17. a) Usando operaciones elementales filas determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & a \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, sea invertible.

    b) Encuentre todas las matrices $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, tales que $A^2 = 0_2$.

18. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

    a) Probar que A es invertible.

    b) Encuentre por el método de la adjunta, la inversa de A.

19. Demuestre usando propiedades que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & p+r & p+q \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

20. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

    a) Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ y $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ entonces $X^t A X = \frac{1}{2} X^t (A^t + A) X$.

    b) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $A^2 = I$ entonces $A = I$.

    c) Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A \neq 0, B \neq 0$. Si $AB = 0$ entonces $|A| = 0$ o $|B| = 0$.

    d) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $A^n = 0_n$ entonces A es singular.

    e) Si $A \longrightarrow A_1$ y $B \longrightarrow B_1$ entonces $AB \longrightarrow A_1 B_1$.

    f) Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

21. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

    a) Determinar la matriz Escalonada Reducida por Fila de A.

b) ¿La matriz A es equivalente por fila con B?

22. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & * & * & -1 & * & 3 \\ -2 & * & * & 2 & * & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & * & * & p & * & 0 \\ 2 & * & * & -q & * & -1 \end{bmatrix}$ dos matrices de orden 2×6. Se sabe que A es equivalente por fila a B. Justificando adecuadamente, determine $p, q \in \mathbb{R}$.

23. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertible y $U \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $U^t A U = A$.

    a) Pruebe que U es invertible.

    b) ¿Es U^t invertible?

    c) Si U^t es invertible, encuentre $\left|(U^t)^{-1}\right|$.

24. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Resuelva la ecuación

$$3AX - I_3 X = A^t B X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

25. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix}$. Determinar el conjunto

$$C = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad \left|\left(A^{-1}\right)^t\right| \neq 0. \right\}$$

26. Justificando, determine si es Verdadera o Falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

    a) Si A y B son matrices de orden n entonces $|AB| = |A|\,|B|$.

    b) Si A es una matriz regular de orden n entonces $|Adj A| = |A|^{n-1}$.

    c) Si A es una matriz cuadrada entonces $|-A| = -|A|$.

    d) Si $AX = C_1$ y $BX = C_2$ y $A \xrightarrow{F} B$ entonces las dos ecuaciones matriciales tienen el mismo conjunto solución cuando $C_1 \xrightarrow{F} C_2$.

27. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Usando operaciones elementales:

    a) Determine A^{-1}.

    b) Exprese A^{-1} como producto de matrices elementales.

28. Sean $A = \begin{bmatrix} * & * \\ 1 & -2 \\ x & y \\ * & * \\ * & * \\ -1 & 3 \\ * & * \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} * & * \\ 1 & -2 \\ x & y \\ * & * \\ * & * \\ -1 & 3 \\ * & * \end{bmatrix}$.

    Se sabe que A es equivalente por columna a B.Justificando adecuadamente determine x e y.

29. Sea $A = \begin{bmatrix} 17 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 9 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

    a) Pruebe que A es invertible.

    b) Determine A^{-1} por el método de la adjunta.

30. Sean $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & -8 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & -1 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Demuestre que B y C son equivalentes por fila.

31. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$,

    a) Encuentre, si existe, la inversa de A.

    b) Utilice el resultado obtenido en (a) para resolver el sistema

$$\begin{array}{rcl} u - 4v & = & 0 \\ u + 2v + w & = & 0 \\ 5u - 3v + 3w & = & 0 \end{array}.$$

32. En el espacio de las matrices $M_2(\mathbb{R})$,

    a) Determine el conjunto de todas las matrices que conmutan con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    b) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $A^2 + I_2 - A = 0$. Demuestre que A es regular y encuentre su inversa.

33. Determine las condiciones del parámetro λ para que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \end{bmatrix}$ sea invertible. Calcule A^{-1}

34. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En cada caso justifique adecuadamente.

    a) Sea $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = (-1)^{i-j}$, entonces A es una matriz simétrica.
    b) Sea $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $b_{ij} = i - j$, entonces B es una matriz antisimétrica.
    c) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0_n$. Si A tiene una fila nula, entonces A no es invertible.
    d) Si A es simétrica entonces $A \cdot A^t = A^t \cdot A$ y A^n $(n \in \mathbb{N})$ es simétrica.

35. Calcular mediante el uso de las propiedades del determinante el valor de:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & x+2 \\ 2 & x+2 & x \\ x+2 & x & 2 \end{vmatrix}$$

36. Resuelva el sistema siguiente, según los valores de λ :

$$\left.\begin{array}{rcl} (\lambda+3)x + y + 2z & = & \lambda \\ \lambda x + (\lambda-1)y + z & = & 1 \\ 3(\lambda+1)x + \lambda y + (\lambda+3)z & = & \lambda+1 \end{array}\right|$$

37. Según los parámetros λ y μ analizar el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z & = & 1 \\ x + \lambda y + z & = & \mu \\ x + y + \lambda z & = & 2\mu \end{array}\right|$$

    De modo que:

    a) Tenga única solución. Determínela.
    b) Tenga solución vacía.
    c) Tenga infinitas soluciones. Determínelas.

38. Determine condiciones sobre los parámetros a, b, c y λ en $\mathbb{R}$ de modo que el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z & = & a \\ x + \lambda y + z & = & b \\ x + y + \lambda z & = & c \end{array}\right|$$

    a) Tenga solución vacía.
    b) Tenga infinitas soluciones, en cuyo caso resuelva el sistema.
    c) Tenga una única solución. Determínela.

39. Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z + w & = & 0 \\ x & = & y+1 \end{array}\right|$$

a) Encontrar el conjunto solución.

b) Determine una solución particular del sistema.

40. Determine los valores de $c \in \mathbb{R}$, si es posible, de modo que el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+cz & = & 0 \\ 3x+4y+2z & = & 0 \\ 2x+3y-z & = & 0 \end{array}\right|$$

a) Tenga única solución. Determínela.

b) No tenga solución.

41. Sean a , λ parámetros reales y el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1+x_3+4\lambda^2x_3 & = & a+x_2 \\ x_2+3x_3 & = & \lambda x_3 \\ 2x_1+7x_3+2 & = & x_2+\lambda x_3 \end{array}\right|$$

Determinar la(s) condiciones de a y λ para que el sistema

a) Tenga solución única.

b) No tenga solución.

c) Tenga infinitas soluciones.

d) En (c) determinar las soluciones en función de a y λ. Además dé dos ejemplos numéricos de tales soluciones.

42. Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que el sistema siguiente tenga solución única, infinitas soluciones o no tenga solución. Justifique y determine las soluciones en cada caso:

$$\left.\begin{array}{lcl} (1+\alpha)x+2y-z & = & 0 \\ x+(2+\alpha)y+z & = & \beta-\alpha-1 \\ 2x-2y-2z & = & \beta+1 \end{array}\right|$$

43. Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} (1-\lambda)x+\lambda z & = & 1 \\ (1-\lambda)y+\lambda z & = & a \\ x+(1-\lambda)y & = & 1 \end{array}\right|$$

Analizarlo según $\lambda, a \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga:

a) Solución única. Exprese esta solución.

b) Solución vacía.

c) Solución infinita. Determine el conjunto solución.

44. Dados los siguientes sistemas:

a)
$$\left.\begin{array}{rcl} ax+by+z & = & 1 \\ x+aby+z & = & b \\ x+by+az & = & 1 \end{array}\right|$$

b)
$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 1 \\ -x-3y+z & = & b \\ x+cz & = & 0 \\ x-2y+2z & = & a \end{array}\right|$$

Hallar $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que los sistemas tengan única solución, infinitas soluciones o no tengan soluciones. En los casos que haya solución determínelas.

45. Dado el sistema
$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + (4a^2+1)x_3 & = & b \\ x_2 + (3-a)x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + (7-a)x_3 & = & -2 \end{array}\right|$$

Hallar condiciones para $a, b \in \mathbb{R}$ de tal manera que el sistema tenga:

a) Única solución.
b) Infinitas soluciones, determínelas.
c) Solución vacía.

46. Resolver según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, el sistema:
$$\left.\begin{array}{lcl} x+ay+a^2z & = & 1 \\ x+ay+abz & = & a \\ bx+a^2y+a^2bz & = & a^2b \end{array}\right|.$$

47. Dado el siguiente sistema:
$$\left.\begin{array}{lcl} ax+y & = & b \\ x+ay & = & 1 \\ -x+y+az & = & 2 \end{array}\right|$$

Hallar condiciones para $a, b \in \mathbb{R}$ de tal manera que el sistema tenga:

a) Única solución.
b) Infinitas soluciones, determínelas.
c) Solución vacía.

48. Dado el siguiente sistema:
$$\left.\begin{array}{lcl} \lambda x+y+z+w & = & 1 \\ x+\lambda y+z+w & = & 1 \\ x+y+\lambda z+w & = & 1 \\ x+y+z+\lambda w & = & 1 \end{array}\right|$$

a) Determine los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga única solución. Deje expresada la solución usando Cramer.

b) Determine los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga infinitas soluciones. Encuéntrelas.

49. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y-z+3u & = & 1 \\ 2x+3y-z+5u+w & = & 0 \\ 3x+z-u & = & 1 \\ 5x+3y+4u+w & = & a-b \\ x+y+2u+w & = & a+b \end{array}\right|$$

a) Encuentre valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema es consistente. Determine el conjunto solución.

b) ¿Existen valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que la solución sea única?. Justifique.

50. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{lcl} x+\lambda z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ \lambda x+y+2z & = & 3 \end{array}\right|$$

Determinar $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema:

a) Tenga única solución. Determínela.

b) Tenga solución vacía.

51. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{lcl} 2x-y+3z & = & -3 \\ x+ay-z & = & 6 \\ x-y+2z & = & b \end{array}\right|$$

a) Calcular $a, b \in \mathbb{R}$ para que $(1, 2, -1)$ sea una solución.

b) Calcular $a, b \in \mathbb{R}$ para que el sistema:

1) Tenga única solución. Determínela.
2) Tenga solución vacía.
3) Tenga infinitas soluciones. Indique el conjunto solución.

c) Escribir una solución para $a = 2, b = -3$.

5.2. Espacios Vectoriales

1. Sea $V = \mathbb{R}^2$, y considere las siguientes operaciones:

a) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2) \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

b) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$
$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0) \quad \alpha \in \mathbb{R}$.
¿En cada caso, es V con estas operaciones un espacio vectorial real?.

2. Sea $V = \mathbb{R}^n$, en V se definen las siguientes operaciones:
$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n)$
$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (-\alpha x_1, ..., -\alpha x_n) \quad \alpha \in \mathbf{R}$.
¿Qué propiedades de espacio vectorial cumple V con estas operaciones?

3. Demostrar que los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de los espacios dados:

a) $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x + y = 0\} \qquad V = \mathbb{R}^2$
b) $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x + y = z\} \qquad V = \mathbb{R}^3$
c) $U_3 = \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad a, b \in \mathbb{R}\} \qquad V = \mathbb{R}^3$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$?

a) $U_1 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad x_1 = 0\}$
b) $U_2 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad x_1 + 3x_2 = x_3\}$
c) $U_3 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad x_1 = x_2\}$
d) $U_4 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad x_1 x_2 = 0\}$
e) $U_5 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad x_2 \in \mathbb{Q}\}$
f) $U_6 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}$
g) $U_7 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \sin x_1 = 0\}$
h) $U_8 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad e^{x_2} + e^{x_3} = 4\}$.

5. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = k\}$. Demostrar que U es un subespacio vectorial si y sólo si $k = 0$.

6. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de M_n son subespacios vectoriales de M_n?

a) El conjunto de las matrices regulares.
b) $C(B) = \{A \in M_n \quad / \quad AB = BA\}$.
c) El conjunto de las matrices singulares.
d) El conjunto de las matrices simétricas.
e) El conjunto de las matrices antisimétricas.
f) $\{A \in M_n \quad / \quad A^2 = A\}$.

7. ¿Por qué la solución del siguiente sistema de ecuaciones no es un espacio vectorial?

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\ 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = & 3 \\ x_1 - 2x_2 & = & -1 \end{array}\right|$$

8. Demostrar que los siguientes subconjuntos de M_3 son subespacios vectoriales de M_3

   a) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad / \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

   b) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f & d \\ c & b & a \end{bmatrix} \quad / \quad a, b, c, d, f \in \mathbb{R} \right\}.$

9. Decida cuales de los siguientes subconjuntos de funciones, con las operaciones suma y producto por un escalar usuales, son espacios vectoriales. Justifique.

   a) El conjunto de polinomios de grado n incluyendo el polinomio nulo.

   b) El conjunto de polinomios de grado menor que n incluyendo el polinomio nulo.

   c) El conjunto de las sucesiones con coeficientes en $\mathbb{R}$.

   d) El conjunto de las funciones cuya $n-$ésima derivada es continua en el intervalo $[a, b]$.

   e) El conjunto de las funciones cuyo codominio es $]-\infty, 10^8]$.

10. Sea $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f \text{ es función}\}$ ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de funciones son subespacios de V?

    a) $\left\{f \in V \quad / \quad f(x^2) = (f(x))^2\right\}$

    b) $\{f \in V \quad / \quad f(0) = f(1)\}$

    c) $\{f \in V \quad / \quad f(3) = 1 + f(-5)\}$

    d) $\{f \in V \quad / \quad f(-1) = 0\}$

    e) $\{f \in V \quad / \quad f \text{ es continua}\}$

11. Demostrar que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$ son:

    a) $\{(0, 0)\}$

    b) $\mathbb{R}^2$

    c) $\{\alpha(x, y) \quad / \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$ para $(x, y) \neq 0$.

12. Dados $E = \{(2a, a) \quad / \quad a \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(b, b) \quad / \quad b \in \mathbb{R}\}$ ¿Cuáles de los siguientes son subespacios de $\mathbb{R}^2$? E, B, $E \cap B$, $E \cup B$.

13. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V tal que $W_1 \cup W_2$ sea también un subespacio. Demostrar que uno de los subespacios W_i para $i = 1, 2$ está contenido en el otro.

14. Encuentre una combinación lineal de los vectores u_i, que expresen v en los siguientes casos:

    a) $u_1 = (1, 2, -3) \qquad u_2 = (-1, -3, 2) \qquad v = (1, 1, -4)$
    b) $u_1 = 2x - 1 \qquad u_2 = -\frac{1}{2}x + 1 \qquad v = x$
    c) $u_1 = (1, -2, 3) \qquad u_2 = (4, -2, 4) \qquad v = (1, 1, 1)$
    d) $u_1 = 1 - 2i \qquad u_2 = 3i + 2 \qquad u_3 = i - 1 \qquad v = 1 - 5i$
    e) En este caso, con la condición que todos los escalares sean diferentes de cero, $u_1 = (1, 2, 0) \qquad u_2 = (2, -2, 0) \qquad u_3 = (-1, 1, 0) \qquad u_4 = (0, 1, 1) \qquad v = (1, 1, 0)$

15. Demostrar que $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ es combinación lineal de $(1, 1, 1, 1)$; $(2, 3, 1, 0)$ y $(-2, 1, 4, 1)$ si y sólo si $a + c = b + d$.

16. Demostrar que $\begin{bmatrix} 18 & \frac{13}{6} \\ 8 & -18 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{6} \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

17. Demostrar que $\sin^2 x$ y $\cos^2 x$ son combinación lineal de 1 y $\cos 2x$.

18. Demostrar que $x^2 + x + 1$ es combinación lineal de $1, x - 2, (x + 2)^2$.

19. Determinar si los siguientes conjuntos son linealmente independiente o linealmente dependiente:

    a) $\{2\}$
    b) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$
    c) $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$
    d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
    e) $\{1, x, xe^x\}$
    f) $\{1, x, x \sin x\}$.

20. Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$

$$e_1 = (1, 0, 0, 0); \quad e_2 = (0, 1, 0, 0); \quad e_3 = (0, 0, 1, 0); \quad e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

    Sean

$$\begin{aligned} x &= e_1 + 2e_2 + \alpha e_3 + e_4 \\ y &= e_1 + e_2 + 2e_3 + \beta e_4 \qquad \text{con} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z &= e_2 + \beta e_3 \end{aligned}$$

a) Determinar α y β para que x, y, z sean linealmente dependiente

b) ¿Qué vector es combinación lineal de los otros dos?

21. Determinar si los siguientes conjuntos son linealmente independiente o linealmente dependiente:

 a) $A = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ subconjunto de $\mathbb{R}[x]$

 b) $B = \{1, (x-1), x(x-1), x^2(x-1), ..., x^{n-1}(x-1)\}$ subconjunto de $\mathbb{R}[x]$

 c) $C = \{a, \quad a+bx, \quad a+bx+cx^2, \quad a+bx+cx^2+dx^3\}$ subconjunto de $\mathbb{R}[x]$, donde a, b, c, d son constantes no nulas.

22. Probar que si dos vectores son linealmente dependiente, entonces uno de ellos es múltiplo escalar del otro.

23. Sea V un espacio vectorial real, demostrar que:

 a) Si dos vectores v_1 y v_2 son linealmente independiente, entonces $v_1 + v_2$ y $v_1 - v_2$ también lo son.

 b) Si tres vectores v_1, v_2 y v_3 son linealmente independiente, entonces $v_1 + v_2, \quad v_2 + v_3, \quad v_3 + v_1$ también lo son.

24. Demostrar que los vectores $(3+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ y $(7, 1+2\sqrt{2})$ en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependiente, sobre $\mathbb{R}$, pero linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$.

25. Determine el subespacio generado por los siguientes vectores:

 a) $u_1 = (-1, 2, 1), \quad u_2 = (2, 1, 3)$

 b) $u_1 = (-1, 1, 2), \quad u_2 = (0, 1, 0), \quad u_3 = (2, 4, 1)$

 c) $1, \quad x-2, \quad x^2 - 2x + 1; \quad$ como subespacio de $\mathbb{R}[x]$

 d) $u_1 = x + 1, \quad u_2 = x^2 + 1 \quad$ como subespacio de $\mathbb{R}[x]$.
 Encuentre en los casos anteriores un sistema de ecuaciones cuyo conjunto solución corresponda a los subespacios generados.

26. Determinar cuáles de los siguientes vectores pertenecen al subespacio indicado:

 a) $(4, 7, 6), \quad (2, 9, 4), \quad (2, 0, 5), \quad (0, 0, 1)$ en el subespacio generado por $(1, 2, 1)$ y $(2, 3, 4)$

 b) $x^2 - x + 3, \quad 4x^3 - 3x + 5, \quad x^4 + 1, \quad x - 5$ en el subespacio generado por $x^3 + 2x^2 + 1, \quad x^3 - 2, \quad x^3 + 1$

27. Demostrar que los siguientes conjuntos generan el mismo subespacio vectorial de las funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, $F([a, b], \mathbb{R})$

$$\left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x\right\} \qquad \{1, \sin 2x, \cos 2x\}$$

28. Sean $A \in M_{m\times n}$ y $H = \{X \in \mathbb{R}^n \quad / \quad AX = C\}$. Suponga que $\{X_1, ..., X_q\}$ es una base de $\ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \quad / \quad AX = 0\}$, y sea $X_p \in H$. Pruebe que
$\langle H\rangle = \langle X_1, ..., X_q, X_p\rangle$.

29. Sean
$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad 3x_1 = 2x_2 = x_3\} \\ B &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x_3 = 2\} \\ C &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x_1 = x_2 - x_3\} \\ D &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x_1 = 1\} \end{aligned}$$
Hallar explícitamente los subespacios generados por los conjuntos dados, es decir, $\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle$.

30. Sean V un espacio vectorial real y $A, B \subset V$ entonces se cumple:

    a) $A \leq V$ si y sólo si $A = \langle A\rangle$.
    b) A no es subespacio de V si y sólo si $A \neq \langle A\rangle$.
    c) $\langle\langle A\rangle\rangle = \langle A\rangle$.
    d) $\langle A\rangle = \langle B\rangle$ si y sólo si B genera a $\langle A\rangle$ y A genera a $\langle B\rangle$.
    e) A genera a $\langle B\rangle$ y B genera a $\langle C\rangle$ entonces A genera a $\langle C\rangle$.

31. Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio V entonces probar que:

    a) $W_1 + W_2 \leq V$
    b) $W_1 \cup W_2 \subset W_1 + W_2$.
    c) $W_1 + W_2$ es el más pequeño espacio que contiene a W_1 y W_2
    d) $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2\rangle$.
    Ayuda (c): Sea U espacio que contiene a $W_1 \cup W_2$, mostrar que $W_1 + W_2 \subset U$.

32. Sean A y B subconjuntos no vacios de un espacio vectorial V. ¿ Es válida la siguiente igualdad?
$$\langle A\rangle \cap \langle B\rangle = \langle A \cup B\rangle$$

33. Sean $U = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\rangle$; $\quad V = \langle (1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 0, 0)\rangle$.

    a) Encuentre un sistema de ecuaciones que describa al espacio U. Idem para V.
    b) Determine una base de $U \cap V$
    c) Determine un sistema de ecuaciones que describa al espacio $U \cap V$

34. Dado el espacio $V = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \quad / \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ c & b & a \end{bmatrix} \right\}$. Determine un conjunto generador de V.

35. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.Justifique su respuesta:

a) $(\forall A, B \subset V)\,(A \neq B \Longrightarrow \langle A\rangle \neq \langle B\rangle)$.

b) $(\forall A, B \subset V)\,(\langle A\rangle = \langle B\rangle \Longrightarrow A = B)$

c) $(\forall A, B \subset V, x \in V)\,(\langle A \cup \{x\}\rangle = A \Longleftrightarrow x \in A)$.

d) Si A es linealmente independiente y el cardinal de A es igual a $\dim(V)$ entonces A es una base de V.

36. Sean $A = \{(1,-1,2),(3,0,1)\}$; $B = \{(-1,2,3),(3,3,-4),(2,1,-1)\}$. ¿Generan A y B el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$?. Justifique.

37. Sea $V = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \ \ / \ \ x + 13z - 9u = 0 = y + 3z - 2u\}$

a) Demuestre que V es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

b) Demuestre que $\{(9,2,0,1),(-13,-3,1,0)\}$ es una base de V.

38. Determine condiciones sobre $a,b,c \in \mathbb{R}$, tal que el vector (a,b,c) pertenezca al espacio generado por $(2,1,0),(1,-1,2),(0,3,-4)$.

39. Encuentre una base para el subespacio solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^5$.

a) $\left.\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 0\\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4 &=& 0\\ x_1+x_3 &=& 0 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{rcl} x_2+x_3+x_4 &=& 0\\ 5x_1+x_3-x_4 &=& 0 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3-x_5 &=& 0\\ x_2+x_3-x_5-2x_4 &=& 0\\ x_1-x_5+x_4 &=& 0 \end{array}\right|$

40. Sean
$$\begin{array}{rcl} A &=& \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \ / \ \ 3x_1 = 2x_2 = x_3\}\\ B &=& \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \ / \ \ x_3 = 2\}\\ C &=& \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \ / \ \ x_1 = x_2 - x_3\}\\ D &=& \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \ / \ \ x_1 = 1\} \end{array}$$

a) Hallar una base para $\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle$.

b) Hallar un espacio complementario para cada uno de los espacios anteriores.

c) Muestre que existe más de un espacio complementario para cada espacio de a).

41. Probar que :

a) Si $ad - bc \neq 0$ entonces $\{(a,b),(c,d)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$.

b) El conjunto $\{1, i\}$ no es base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, pero sí lo es de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. $(i^2 = -1)$.

c) Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $A \subset V$ tal que $0 \in A$ entonces A es linealmente dependiente.

d) Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $z \in V$, $z \neq 0$ entonces $\{z\}$ es linealmente independiente.

e) Muestre mediante un ejemplo que unión de conjuntos linealmente independiente no necesariamente es linealmente independiente .

42. Dados $v_1 = (1, -1, 2, -3)$; $v_2 = (-2, 3, -1, 1)$; $v_3 = (0, -1, -3, 5)$; $v_4 = (-1, 4, 7, -12)$ en $\mathbb{R}^4$. Encontrar un subconjunto maximal linealmente independiente de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y extenderlo a una base de $\mathbb{R}^4$.

43. Sea $T = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, un subespacio de $\mathbb{R}^4$ entonces :

a) Hallar una base de T.

b) Calcule la dimensión de T

44. Sea $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \leq \mathbb{R}^4$. Pruebe que $\dim(H) = 3$.

¿Es válido la siguiente afirmación?

Si $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ entonces $\dim(H) = 3$.

45. Sea $B = \{x, y\}$ una base del espacio vectorial V y $u = ax + by$; $v = cx + dy$. ¿Qué condiciones deben cumplir los escalares a, b, c, d de modo que $\{u, v\}$ sea una base de V ?

46. Sean V y W espacios vectoriales reales tales que $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ con bases $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ respectivamente. Se definen las siguiente operaciones en $V \times W = \{(v, w) \quad / \quad v \in V, w \in W\}$ dadas por

$$\begin{aligned} (v, w) + (y, z) &= (v + y, w + z) \qquad (v, y \in V; w, z \in W) \\ \alpha(v, w) &= (\alpha v, \alpha w) \qquad (\alpha \in \mathbf{R}; v \in V; w \in W) \end{aligned}$$

a) Demostrar que $V \times W$ con estas operaciones es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

b) El conjunto $\{(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m)\}$ es una base de $V \times W$.

47. Sean $W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad A = \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix} \right\}$ y $V = \left\{ B \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix} \right\}$ subespacios de $M_2(\mathbb{R})$. Encuentre una base para W y otra para V.

48. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique:

a) Si H genera a V entonces existe una base B de V tal que $B \subseteq H$.

b) Si $H \subset V$ y $Card(H) < \dim(V)$ entonces H es linealmente independiente.

c) Si A es linealmente independiente y $Card(A) = \dim(V)$ entonces A es una base de V.

d) La dimensión de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial es 1.

e) $\dim_{\mathbb{R}}(M_{3\times 2}(\mathbb{R})) = 6$

f) Una base para el espacio $\mathbb{R}_5[x]$ es $\{1+x, x+x^2, x^2+3x^3, x^3+4x^4, x^4+5x^5, -x^5\}$

g) $S = \{X \in \mathbb{R}^n / B_{m\times n} \cdot X^t = b_{m\times 1} \neq 0_{m\times 1}\}$ y $h_0 \in S$ entonces $S = \{h_0 + w / w \in \ker(B)\}$

49. Considere $f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}), \quad f_3(x) = \cos x$. Sea $S = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$

   a) Determine si $\{f_1, f_2, f_3\}$ es linealmente independiente.

   b) Determine una base para S y calcule $\dim(S)$.

   c) Sea $f(x) = 5\sin x - 2\cos x$. Calcule las coordenadas de f respecto a la base anterior.

50. Sean $B_1 = \{(1,-1,0),(0,-1,2)\}, \quad B_2 = \{(1,-1,2),(3,-5,4)\}$ y W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por B_1.

   a) Probar que B_2 es base de W.

   b) Si $X = (x,y,z) \in W$. Hallar $[X]_{B_1}, [X]_{B_2}$.

   c) Hallar las coordenadas de los vectores en ambas bases, si es posible, sino justifique: $(1,0,0), \quad (0,0,1), \quad (4,-7,6), \quad (3,-2,-2)$.

51. Si
$$4\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},$$
   entonces debe cumplirse que: $a = 4, \quad b = 3, \quad c = 1$, ¿es verdadera la afirmación anterior? Justifique su respuesta.

52. Considerar las dos bases siguientes de $\mathbb{R}^3$

   $B = \{(1,1,1),(0,2,3),(0,2,-1)\}$ y $B' = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$

   a) Hallar las coordenadas de $v = (3,5,-2)$ respecto a cada una de las bases.

   b) Hallar la matriz P cuyas columnas son precisamente los vectores coordenadas de los vectores de la base B respecto a la base B'. Denotamos a esta matriz por $[Id]_B^{B'}$.

   c) Verificar que $P \cdot [X]_B = [X]_{B'}$.

53. Demostrar que los vectores

$$v_1 = (1,1,0,0)\,, \quad v_2 = (0,0,1,1)\,, \quad v_3 = (1,0,0,4)\,, \quad v_4 = (0,0,0,2)\,,$$

forman una base de $\mathbb{R}^4$. Hallar las coordenadas de cada uno de los vectores de la base canónica respecto de la base ordenada $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

54. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ donde

$$v_1 = (1,0,-1), \quad v_2 = (1,1,1), \quad v_3 = (1,0,0).$$

¿Cuáles son las coordenadas del vector (a,b,c) en la base ordenada B?

55. Sean $\alpha = (x_1, x_2)$ y $\beta = (y_1, y_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$$

   a) Demostrar que $B = \{\alpha, \beta\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
   b) Hallar las coordenadas del vector (a,b) en la base ordenada $B = \{\alpha, \beta\}$. (Las condiciones impuestas a α, β dicen geométricamente que α y β son perpendiculares y de longitud 1).

56. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$, es decir, el espacio de todas las funciones polinomiales de la forma $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ con $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dados $t \in \mathbb{R}$ fijo y

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = x + t, \quad g_3(x) = (x+t)^2.$$

   a) Demostrar que $B = \{g_1, g_2, g_3\}$ es una base de V.
   b) Si $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. ¿Cuáles son las coordenadas de f en esta base B?

57. Sea V un espacio vectorial real generado por las filas de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Hallar una base para V.
   b) ¿Qué vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ son elementos de V?
   c) Si $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V$, ¿Cuáles son sus coordenadas en la base elegida en la parte (a)?

58. Sean U, W los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

$$U = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad a+b+c=0\right\}; \quad W = \left\{(0,0,d) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad d \in \mathbb{R}\right\}$$

Demostrar que $\mathbb{R}^3 = U + W$, ¿$\mathbb{R}^3 = U \oplus W$?

59. Sean $U = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}\}$ y
$W = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = -f(-x), \quad x \in \mathbb{R}\}$ subespacios vectoriales de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Demostrar que $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U \oplus W$.

60. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T &= \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad / \quad A = A^t\right\} \\ S &= \left\{B \in M_n(\mathbb{R}) \quad / \quad B = -B^t\right\}. \end{aligned}$$

Demostrar que $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus T$.

61. Dado $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x = y, \quad z = w\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Hallar W subespacio vectorial (complementario) de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

62. Sean
$$\begin{aligned} A &= \langle (2, 3, 6, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle \\ B &= \langle (1, 0, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle \\ C &= \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle \\ D &= \langle (1, 1, 0) \rangle \end{aligned}$$

   a) Hallar un espacio complementario a los espacios A, B, C, D.
   b) Muestre que existe más de un complementario por cada espacio de (a).

63. Dados $U = \{(x, y, z) \quad / \quad x + y + z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$ y
$W = \{(x, y, z, w) \quad / \quad x = y, \quad z = w\} \leq \mathbb{R}^4$,

   a) Encontrar a lo menos un espacio complementario de U y uno de W.
   b) Clasificar todos los subespacios vectoriales complementarios de U en $\mathbb{R}^3$.

64. Sean

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x - y = 0, \quad z + t = 0\right\}, \\ V_2 &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad 2x + 3y = -(t - z)\right\}, \end{aligned}$$

subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$. Determinar

   a) una base para $V_1 + V_2$.
   b) una base para $V_1 \cap V_2$.
   c) ¿Cuáles son las dimensiones de estos subespacios vectoriales?

65. Sean $W = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad A = \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}\right\}$ y $V = \left\{B \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}\right\}$ subespacios de $M_2(\mathbb{R})$. Hallar $\dim(W_1 + W_2)$ y $\dim(W_1 \cap W_2)$, exhibiendo las respectivas bases.

66. Sean $V = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{array}{lcl} x+y+z+w & = & 0 \\ x-y+2z+3w & = & 0 \\ 2x+3z+w & = & 0 \end{array} \right\}$ y

$W = \langle (1,1,1,1), (-2,1,0,1) \rangle$,

  a) Hallar $\dim(V)$, $\dim(W)$, $\dim(V \cap W)$.
  b) Hallar $V + W$ ¿Es suma directa $V + W$ de V y W?

67. Sean $T = \langle 1 - x + 2x^2 - 3x^3, -2 + 3x - x^2 + x^3, x + 3x^2 - 5x^3, 1 + 5x^2 - 8x^3 \rangle$ y

$S = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \quad / \quad \begin{array}{lcl} 2a+b+c & = & 0 \\ 3a-2b+c-d & = & 0 \end{array} \right\}$, subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$.

Hallar bases y dimensiones de T, S, $T \cap S$, $T + S$.

68. Sea $U = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \quad / \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ c & b & a \end{bmatrix} \right\} \leq M_3(\mathbb{R})$. Determine W subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{R})$ tal que $U \oplus W = M_3(\mathbb{R})$.

69. Dados $U_1 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ y $U_2 = \left\{ B \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \right\}$ subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$. ¿Es $M_2(\mathbb{R})$ suma directa de U_1 y U_2?.

5.2.1. Ejercicios complementarios

A continuación presentamos una selección de problemas incluidos en diversos tipos de controles semestrales.

1. Sea $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x^2 - y^2 = 0\}$. ¿ Es H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

2. Hallar, si es posible (si no justifique), una matriz $B \in M_3(\mathbb{R})$ de rango 2 tal que la tercera fila no sea combinación lineal de las dos primeras filas. Justifique su ejemplo.

3. Sean

$$V = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{array}{lcl} x+y+z+w & = & 0 \\ x-y+2z+3w & = & 0 \\ 2x+3z+4w & = & 0 \end{array} \right\}$$

y W el espacio generado por los vectores $(1,1,1,1)$ y $(-2,1,0,1)$ en $\mathbb{R}^4$.

  a) Hallar $\dim(V)$, $\dim(W)$, $\dim(V \cap W)$.
  b) Hallar una base de $V + W$. ¿Es $V + W$ suma directa de V y W?

4. Dada $B = \{(1,a,2), (0,1,a), (1,0,1)\}$ subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Determinar las condiciones para $a \in \mathbb{R}$ de tal forma que B sea una base de $\mathbb{R}^3$.

5. Sea $U = \langle (1,0,1),(0,1,0),(2,-1,2)\rangle$,

    a) ¿Es $B = \{(0,2,0),(-1,1,-1)\}$ una base de U?
    b) Determine las coordenadas del vector $v = (-1,3,-1)$ en la base $B' = \{(1,0,1),(0,1,0)\}$.
    c) ¿Es posible determinar coordenadas del vector $v = (-1,3,-1)$ respecto de B?

6. Dados los subespacios

$$\begin{array}{rcl} V & = & \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{array}{rcl} x+2y-z-w & = & 0 \\ x-y-2z+w & = & 0 \end{array} \right\}, \\ W & = & \langle (1,0,1,1),(1,1,1,2),(0,1,0,1)\rangle \end{array}$$

    a) Hallar $\dim(V)$, $\dim(W)$, $\dim(V\cap W)$.
    b) Hallar una base de $V+W$.
    c) ¿Es $V+W$ suma directa de V y W?

7. Sea $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad 2kx+3y=0, \quad z=k\}$. ¿Para que valores de $k\in\mathbb{R}$, W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?.

8. Sean $A = \{(1,-1,2),(3,0,1)\}$ y $B = \{(-1,-2,3),(3,3,-4),(2,1,-1)\}$. ¿Generan A y B el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?. Justifique.

9. Sea

$$V = \left\{ (x,y,z,u)\in\mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{array}{rcl} x+13z-9u & = & 0 \\ y+3z-2u & = & 0 \end{array} \right\}$$

    a) Demuestre que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
    b) Demuestre que $\{(9,2,0,1),(-13,-3,1,0)\}$ es una base de V.

10. Sean $U = \langle (1,0,0),(0,4,2)\rangle \leq \mathbb{R}^3$ y $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad x=z=2y\} \leq \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$U\oplus W = \mathbb{R}^3.$$

11. Determine si cada una de las siguientes proposiciones, es verdadera o falsa,justificando con una demostración o un contraejemplo según corresponda.

    a) $A = \{x^3-2x^2+x+1, \quad x^2+7, \quad 2x-5\} \subset \mathbb{R}_3[x]$ es un conjunto linealmente independiente.
    b) $\langle u,v,w\rangle = \langle u,v\rangle \Longrightarrow \{u,v,w\}$ es un conjunto linealmente dependiente.
    c) $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad x+y=0 \quad ó \quad z-2y=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

12. Sea $D_4 = \{A\in M_4(\mathbb{R}) \quad / \quad A \text{ es matriz diagonal}\}$

    a) Demuestre que D_4 es un subespacio vectorial de $M_4(\mathbb{R})$

b) Encuentre una base para D_4, y demuestre que efectivamente es base.

c) ¿Cuál es la dimensión de D_4?

d) ¿Cuáles son las coordenadas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ en la base que usted escogió en b)?

13. Sean V un espacio vectorial real y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V,además $v_1' = v_1 + 2v_2 + 3v_3$; $\quad v_2' = 2v_1 - v_2 + v_3$; $\quad v_3' = -v_1 + v_2 - 3v_3$

    a) Pruebe que $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ es una base para V.

    b) Encuentre $[id]_{B'}^{B}$.

    c) Si $v = v_1' + \frac{1}{2}v_2' - \frac{1}{3}v_3'$. Encuentre $[v]_B$.

14. Sean

$$\begin{aligned} W &= \langle (1,2,1), (-19,18,-11), (3,-1,2) \rangle , \\ V &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad -\frac{x}{13} = \frac{y}{9} = -\frac{z}{8} \right\} \end{aligned}$$

Hallar $\dim(W)$, $\quad \dim(V)$, $\quad \dim(V \cap W)$.

15. Sean U y W los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \quad / \quad 4x + y - z - u = 0; \quad 3x - 2z - u = 0 \right\}, \\ W &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \quad / \quad x + 4y + z - u = 0; \quad 2x - y + 2z + u = 0 \right\} \end{aligned}$$

¿Es $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$?.Justifique su respuesta.

16. Sean U, V, W los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x + y + z = 0 \right\} \\ W &= \{ (0,0,z) \quad / \quad z \in \mathbb{R} \} \\ V &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x = z \right\} \end{aligned}$$

    a) Pruebe que

        1) $\mathbb{R}^3 = U + V$

2) $\mathbb{R}^3 = U + W$.

b) ¿En cuál o cuáles de los casos anteriores la suma es suma directa?. Justifique.

17. Dado el subespacio vectorial

$$U = \left\{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x = z + u; \quad y = 2z - u; \quad z = 3x + 2y + 5u\right\}$$

a) Determine una base para U

b) Encuentre $\dim(U)$.

18. Sean U, V subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$U = \langle (2, -1, 3) \rangle \quad \text{y} \quad V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x + ky + z = 0\right\}$$

¿Para que valores de $k \in \mathbb{R}$, se tiene $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$?

19. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

a) $A = \{(1, 2), (-1, 3), (2, 1)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

b) Dados

$$\begin{aligned} U &= \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x] \quad / \quad b - a + c = 0\right\}, \\ V &= \langle x + 1 \rangle, \end{aligned}$$

subespacios vectoriales de $\mathbb{R}[x]$ entonces $\quad \mathbb{R}_2[x] = U \oplus V$.

c) Sean

$$\begin{aligned} B &= \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}, \\ B' &= \{(2, 1, 0), (1, 0, 1), (4, 2, 1)\} \end{aligned}$$

bases de $\mathbb{R}^3$. Entonces $[id]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

20. Verifique:

a) El conjunto $\quad P = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad A + A^t = 0\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ de dimensión 1.

b) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de $V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.
Además determine las coordenadas de $u = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -19 & -7 \end{bmatrix}$ en base B es decir $[u]_B$.

21. Sea $U = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] \quad / \quad a - b - c - d = 0\}$

a) Verificar que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Hallar una base de U.

c) Determinar la $\dim(U)$.

22. a) Pruebe que el conjunto $A = \{f : [0,3[\to \mathbb{R} \quad / \quad f \text{ es constante}\}$ es un subespacio de $V = \{f : [0,3[\to \mathbb{R} \quad / \quad f \text{ es función}\}$.

    b) Determine todos los vectores $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que pertenezcan al espacio generado por $(2,1,0), (1,-1,2), (0,3,-4)$.

    c) Sea

$$W = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \quad / \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ c & b & a \end{bmatrix}, a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}$$

    Hallar base y dimensión de W.

23. Sean $U = \{x^2(ax-b) \quad / \quad a,b \in \mathbb{R}\}$ y $V = \{cx(1-x)+d \quad / \quad c,d \in \mathbb{R}\}$ subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$.

    a) Determinar una base de $U \cap V$.

    b) Determinar una base de $U + V$.

    c) ¿Es $\mathbb{R}_3[x] = U \oplus V$?. Justifique.

24. Sean los subespacios V y W definidos por:

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad kx + y - sz = 0\right\} \text{ y } W = \left\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad y + z = 0; x = 0\right\}$$

    Determinar $s, k \in \mathbb{R}$ para que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

25. Sean $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ base de W subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $[Id]_B^C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

    a) Determinar el conjunto C, base de W.

    b) ¿Están los vectores $(1,1,3), (-2,3,4)$ y $(0,0,1)$ en W?. Justifique.

    c) Para los vectores de la parte b), determinar las coordenadas en la base C cuando sea pertinente.

26. a)¿Para que valores de $k \in \mathbb{R}$ los vectores $v_1 = (k, 1-k, 0)$, $v_2 = (2k-1, 0, k+2)$, $v_3 = (0, k, -k)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

    b) Desde el conjunto de valores de k ,(a),dé un ejemplo de base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

27. Sean

$$\begin{aligned} V &= \{A \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad A \text{ es matriz triangular inferior}\}, \\ D &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad / \quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ subespacio de } V, \\ H &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad / \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\} \text{ subespacio de } V. \end{aligned}$$

Determinar si $V = D \oplus H$.Justifique.

28. Dado $W = \langle B_1 \rangle$ con $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

   a) Mostrar que ambas B_1 y $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ son bases de W.

   b) Hallar las coordenadas de $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en base B_1 y en base B_2, cuando proceda.

   c) Hallar las coordenadas de $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ en las bases B_1 y B_2 cuando proceda.

29. Hallar la ecuación del plano π, que pasa por la intersección de las rectas:

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad / \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ L_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad / \quad \mu \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

y es perpendicular a la recta determinada por la intersección de los planos:

$$\pi_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 3x - y + z = 0 \right\} \text{ y } \pi_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x + y - z = 0 \right\}.$$

30. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

   a) Si $B = \{x_1, x_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}^2$, $B' = \{x_1, x_2, x\}$ también es base de $\mathbb{R}^2$.

31. Dado $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x = y; \quad y = -z\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, encuentre U subespacio de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$. Además, determine una base y ecuaciones para las coordenadas del subespacio U.

32. Dados los vectores $u = (1,-1,2)$ y $v = (2,1,0)$ determine dos vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbb{R}^3$ tales que simultáneamente cumplan las condiciones siguientes:

    a) $x = \alpha v$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$,

    b) $u = x + y$,

    c) las coordenadas de y verifiquen la ecuación $2y_1 + y_2 = 0$.

33. En $M_2(\mathbb{R})$:

    a) Demuestre que $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad / \quad a + b + c = 0 \right\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

    b) Complete una base para $M_2(\mathbb{R})$ a partir del conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

34. Sean:

    a) los vectores $v = (-2,3,2,-2)$, $\quad u_1 = (0,1,2,0)$, $\quad u_2 = (1,0,-2,1)$ en $\mathbb{R}^4$, estudie si $v \in \langle u_1, u_2 \rangle$.

    b) el conjunto $A = \{(2,1,0),(1,k,3),(0,2,-4)\}$, determine los valores de k para que el conjunto A sea linealmente independiente.

35. Dado $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$,

    a) Demuestre que B es base de $\mathbb{R}^3$.

    b) Determine condiciones sobre el vector (a,b,c) para que al reemplazar cualquier vector de B por (a,b,c), el conjunto siga siendo una base.

36. Dados

$$
\begin{aligned}
U &= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{array}{rcl} x + y &=& z \\ y + z &=& w \end{array} \right\}, \\
W &= \langle (1,2,0,0),(1,3,1,1),(2,3,-1,-1) \rangle
\end{aligned}
$$

    a) Determine $\dim(W)$.

    b) Encuentre una base para $U + W$ y otra para $U \cap W$.

    c) ¿Es $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$?.

37. Sean

$$\begin{aligned} V &= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{array}{lcl} x+y+z &=& 0 \\ x+y+2z+3w &=& 0 \end{array} \right\}, \\ W &= \langle (-1,1,0,1), (-2,1,1,-1) \rangle \end{aligned}$$

a) Hallar una base para $V+W$.

b) Hallar una base para $V \cap W$.

c) Determine $U \leq \mathbb{R}^4$, tal que $U \oplus (V+W) = \mathbb{R}^4$.

38. Sean

$$\begin{aligned} V &= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{array}{lcl} x+2y-z+2w &=& 0 \\ 3x-y+z+w &=& 0 \end{array} \right\}, \\ W &= \langle (1,-2,1,0), (0,4,0,-2) \rangle \end{aligned}$$

a) Hallar una base para $V+W$.

b) Obtener una base para $V \cap W$.

c) Determine $U \leq \mathbb{R}^4$, tal que $U \oplus (V+W) = \mathbb{R}^4$.

39. Sean $B_1 = \{(1,-1,0),(0,-1,2)\}$ y $B_2 = \{(1,-2,2),(3,-5,4)\}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ y $W = \langle B_1 \rangle \leq \mathbb{R}^3$.

a) Probar que B_2 es base de W.

b) Sabiendo que B_1 es base de W, encontrar $[Id]_{B_1}^{B_2}$ y $[Id]_{B_2}^{B_1}$.

c) Hallar las coordenadas en ambas bases (si es posible, si no justifique) de los vectores $(1,0,0)$ y $(4,-7,6)$.

40. Dado $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x=y, \quad z=w\} \leq \mathbb{R}^4$.Hallar W subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

41. Sea

$$W = \left\langle x^3-2x^2+4x+1, \quad 2x^3-3x^2+9x-1, \quad x^3+6x-5, \quad 2x^3-5x^2+7x+5 \right\rangle$$

a) Hallar una base para W.

b) Determine $\dim(W)$.

42. Sea $A = \{(1,-1,2),(0,1,-1),(1,0,1)\}$

a) Encuentre $\langle A \rangle$.

b) ¿Qué condiciones debe satisfacer un vector (x,y,z) para que pertenezca al subespacio generado por A.

c) Encuentre una base y la dimensión para $\langle A \rangle$.

5.3. Transformaciones Lineales

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales?

   a) $T(x_1, x_2) = (1 + x_1,\ x_2)$
   b) $T(x_1, x_2) = (x_2,\ x_1)$
   c) $T(x_1, x_2) = (x_1^2,\ x_2)$
   d) $T(x_1, x_2) = (\sin x_1,\ x_2)$
   e) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0)$

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones define una transformación lineal, de $\mathbb{R}[x]$ en $\mathbb{R}[x]$?

   a) $T(p(x)) = (p(x))^2$
   b) $T(p(x)) = p(x+1) - p(x)$
   c) $T(p(x)) = 3(p(x) - p(0))$

3. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformación lineal?

   a) $$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+3y, 4x+5y) \end{array}$$

   b) $$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}_4[x] & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 & \longmapsto & \begin{bmatrix} a_3 & a_2 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix} \end{array}$$

   c) $$\begin{array}{rccc} G: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \left((x+y+z)^2, 2x+3y\right) \end{array}$$

   d) $$\begin{array}{rccc} H: & M_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_3(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & X \cdot A - A \cdot X \end{array} \quad \text{donde } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   e) $$\begin{array}{rccc} I: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 + y \end{array}$$

   f) $$\begin{array}{rccc} J: & \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n+1}[x] \\ & p(x) & \longmapsto & \int_0^x p(t)dt \end{array}$$

   g) $$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[x] \\ & p(x) & \longmapsto & p'(x) \end{array}$$

   h) $$\begin{array}{rccc} L: & M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto & \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Dados $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (2, -1)$, $v_3 = (-3, 2)$ y $w_1 = (1, 0)$, $w_2 = (0, 1)$, $w_3 = (1, 1)$. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$?. en caso afirmativo defínala.

5. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que $T(1, 1, 1) = (1, 0, 2)$, $T(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$, $T(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$. Calcular $T(x, y, z)$.

7. Describir explícitamente la transformación lineal G de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $G(1, 0) = (a, b)$, $G(0, 1) = (c, d)$.

8. Sean T y H transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definidas por $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ y $H(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

   a) Describir T y H geométricamente

   b) Hallar explícitamente $(T + H)$, $H \circ T$, $T \circ H$, T^2, H^2.

9. Describa el efecto geométrico de las siguientes transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$:

   a) $f(x, y) = \frac{1}{2}(x - 3y, 3x + y)$

   b) $f(x, y) = (2x + y, -y)$

   c) $f(x, y) = (x + y, x + y)$

   d) $f(x, y) = (y, x)$

   e) $f(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ con $\beta \in \mathbb{R}$ fijo.

10. Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T(1,1,1,1) &= (7,2,3), \quad T(1,1,1,0) = (6,1,7), \\ T(1,1,0,0) &= (4,1,5), \quad T(1,0,0,0) = (1,0,1) \end{aligned}$$

   a) Hallar $T(x, y, z, w)$

   b) Encontrar el conjunto de las preimágenes de $(7, 1, 8)$.

   c) Determinar del conjunto anterior, el o los vectores cuya suma de sus coordenadas es 1.

11. Dada la función $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z, w) = (x + y, z - w, x + w)$$

   a) Probar que F es una transformación lineal

   b) Hallar una base para $\ker(F)$ y una base para $\mathrm{Im}(F)$.

c) Calcule dimensiones del núcleo e imagen de F.

d) ¿Es F inyectiva? ¿Es F sobreyectiva?. Justifique.

12. Dada la función $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z, w) = (x - y + z, y + z - w)$$

a) Probar que F es una transformación lineal

b) Hallar una base para $\ker(F)$ y una base para $\mathrm{Im}(F)$.

c) Calcule dimensiones del núcleo e imagen de F.

d) ¿Es F inyectiva? ¿Es F sobreyectiva?. Justifique.

13. Sea $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Si $Rg(T) = r$, pruebe que:

a) $r = m$ si y sólo si T es sobreyectiva.

b) $r = n$ si y sólo si T es inyectiva.

c) Si $r = n = m$ entonces T es un isomorfismo.

14. Sea $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definido por $T(x, y) = x - y$

a) Hallar una base para $\ker(T)$ y una para $\mathrm{Im}(T)$

b) ¿Cuáles son las preimágenes de $1, -1, 0$?

15. Sean $f, g \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(X) = (f(X), g(X)) \qquad\qquad X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

a) Demostrar que $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$

b) Dadas las funciones $f(x_1, ..., x_n) = x_1$ y $g(x_1, ..., x_n) = x_n$. Determine una base para $\ker(T)$ y para $\mathrm{Im}(T)$, además calcule $Nul(T)$ y $Rg(T)$.

c) Dadas las funciones $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 5x_2 + 2x_3$ y $g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3$. Determine una base para $\ker(T)$ y para $\mathrm{Im}(T)$, además calcule $Nul(T)$ y $Rg(T)$.

16. Sea $T(X) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ una transformación lineal.

a) Hallar las preimágenes de $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) De una base para $\ker(T)$ y otra para $\mathrm{Im}(T)$.

c) ¿$\ker(T) \simeq \operatorname{Im}(T)$?. En caso afirmativo, muestre un isomorfismo.

17. Dada la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ definida por

$$\begin{array}{rcl} T(1,0,0) & = & 2e_1 + 3e_2 - e_4 \\ T(0,1,0) & = & -e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ T(0,0,1) & = & e_2 + 4e_3 + e_4 \end{array}$$

donde $C_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$:

a) Hallar $T(x,y,z)$.

b) Encontrar una base para $\ker(T)$ y otra para $\operatorname{Im}(T)$.

c) ¿Los vectores

$$(1,1,-2,-1)\,, \quad (1,0,-1,0)\,, \quad (-1,-1,2,1)$$

pertenecen a la imagen de T?. En caso afirmativo, indique las coordenadas de estos vectores en la base dada en (b).

d) Las mismas preguntas anteriores para la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ definida por

$$\begin{array}{rcl} T(1,1,1) & = & e_1 - e_2 + e_3 \\ T(1,1,0) & = & e_1 - e_2 + e_4 \\ T(1,0,0) & = & e_2 - e_3 + e_4 \end{array}$$

18. Sea $D : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p(x) \longmapsto D(p(x)) = p'(x)$, (donde $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$).

a) Demostrar que D es transformación lineal.

b) ¿Es D un isomorfismo?

19. Considere las siguientes funciones, y resuelva (i), (ii), (iii) para cada una de ellas:

a) Sean

$$\begin{array}{rcl} U & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x+y+z=0\right\} \\ W & = & \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x=y, z=w\right\}. \end{array}$$

Se define $T : U \longrightarrow W$ por

$$\begin{array}{rcl} T(-1,1,0) & = & (1,1,0,0) \\ T(-1,0,1) & = & (0,0,1,1) \end{array}$$

y además

$$T(a(-1,1,0) + b(-1,0,1)) = a(1,1,0,0) + b(0,0,1,1).$$

con $v = (3,3,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

b) Sean

$$\begin{array}{rcl} U & = & \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad 3x_1 = 2x_2 = x_3 \right\} \\ W & = & \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x_1 = x_2 - x_3 \right\}. \end{array}$$

Se define $T : U \longrightarrow W$ por

$$T(2,3,6,0) = (1,1,0) \qquad T(\alpha(2,3,6,0)) = (\alpha, \alpha, 0)$$

con $v = (4,6,2)$.

c) Sean

$$\begin{array}{rcl} U & = & \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \quad / \quad \underline{\begin{array}{lcl} 2a + b + c & = & 0 \\ 3a - 2b + c- & = & 0 \end{array}} \Bigg| \right\} \\ W & = & \left\langle 1 - x + 2x^2 - 3x^3; -2 + 3x - x^2 + x^3; 1 + 5x^2 - 8x^3 \right\rangle. \end{array}$$

Se define $T : U \longrightarrow W$ por

$$\begin{array}{rcl} T(\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^3) & = & -2 + 3x - x^2 + x^3 \\ T(\frac{1}{2} + x^2 + \frac{5}{2}x^3) & = & 1 + 5x^2 - 8x^3 \end{array}$$

y además

$$T\left(a\left(\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^3\right) + b\left(\frac{1}{2} + x^2 + \frac{5}{2}x^3\right)\right) = a\left(-2 + 3x - x^2 + x^3\right) + b\left(1 + 5x^2 - 8x^3\right)$$

con $v = x + 3x^2 - 5x^3$.

d) Sean

$$\begin{array}{rcl} U & = & \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x - y + 2z + 3w = 0 \right\}, \\ W & = & \langle (1,1,1,1), (-2,1,0,1), (3,1,1,0) \rangle. \end{array}$$

Se define $T : U \longrightarrow W$ por

$$\begin{array}{rcl} T(-3,1,2,0) & = & (1,1,1,1) \\ T(7,0,-5,1) & = & (-2,1,0,1) \\ T(1,2,-1,1) & = & (0,3,2,3) \end{array}$$

y además

$$T(\alpha(-3,1,2,0) + \beta(7,0,-5,1) + \gamma(1,2,-1,1)) = \alpha(1,1,1,1) + \beta(-2,1,0,1) + \gamma(0,3,2,3)$$

con $v = (-1,2,1,2)$.

e) Sean

$$\begin{aligned} U &= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad \begin{array}{lcl} x+y+z+w &=& 1 \\ w &=& 2 \end{array} \right\}, \\ W &= \left\langle x^3, x^2, x, 1 \right\rangle. \end{aligned}$$

Se define $T : U \longrightarrow W$ por

$$\begin{aligned} T(3,0,-4,2) &= x \\ T(-1,1,-1,2) &= x^2 \end{aligned}$$

y además

$$T(\alpha(3,0,-4,2) + \beta(-1,1,-1,2)) = \alpha x + \beta x^2$$

con $v = 1 + x^2$.

f) Sean

$$U = \left\langle x^2, x, 1 \right\rangle, \quad W = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x = z \right\}.$$

Se define $T : U \longrightarrow W$ por

$$\begin{aligned} T(x^2+x+1) &= (0,2,0,-1) \\ T(x-1) &= (1,-1,1,3) \\ T(x^2-1) &= (1,1,-1,2) \end{aligned}$$

y además

$$T\left(a\left(x^2+x+1\right) + b\left(x-1\right) + c\left(x^2-1\right)\right) = a(0,2,0,-1) + b(1,-1,1,3) + c(1,1,-1,2)$$

con $v = (3,1,3,0)$.

Donde,

1) Determine si es transformación lineal.
2) Encuentre $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$, si es posible.
3) Determine el conjunto de las preimágenes del vector v que se indica en cada caso.

20. Sea $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ una transformación lineal donde $B = \{(0,0,1), (0,2,1), (3,2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, $C = \{(1,-3), (2,-5)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, y se tiene $[T]_B^C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -12 & -8 \end{bmatrix}$

a) Hallar $\ker(T)$, sin calcular $T(x_1,x_2,x_3)$ en coordenadas canónicas.

b) Determinar $T(x_1,x_2,x_3)$ en coordenadas canónicas.

c) ¿Es válida la siguiente igualdad?

$$[T(x_1,x_2,x_3)]_C = [T]_B^C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

d) Hallar $Nul(T)$ y $Rg(T)$ sin hallar $\text{Im}(T)$.

e) Hallar una base para la $\text{Im}(T)$.

21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$f(1,-1) = (3,7,-1), \quad f(2,-5) = (-1,0,5)$$

a) Hallar bases B y C de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, tal que

$$[f]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) ¿Son únicas estas bases?

c) Hallar una base de $\ker(f)$ y una de $\text{Im}(f)$.

d) Calcular $Nul(f), \quad Rg(f), \quad f(1,2), \quad f(0,1)$.

e) Explicita los conjuntos siguientes, $\{X \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad f(X) = (2,4,7)\}$ y $\{X \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad f(X) = (2,6,$

22. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ definida por la matriz

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $B = \{(1,-1,0), (-1,1,-1), (1,0,0)\}$

a) Probar que $T^2 = T$.

b) Hallar una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ respecto de la cual la matriz de T sea

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Hallar una base del subespacio imagen de T y otra del $\ker(T)$.

23. Determine una transformación lineal perteneciente a $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ que transforma los vectores $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ en los vectores $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0,0,1)$ respectivamente. Encuentre la inversa de esta transformación lineal.

24. Sea $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definida por $T(x,y) = (-y, x)$

a) Determinar $[T]_B^B$ donde $B = \{(1,2), (1,-1)\}$.

b) Demostrar que si D es cualquier base de $\mathbb{R}^2$ y $[T]_D^D = A$ entonces $a_{12}a_{21} \neq 0$.

25. Sea $T : M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot X$

   a) ¿T es un isomorfismo?

   b) Hallar bases B, C de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B^C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ¿Puede ser $B = C$?

   c) Hallar $\ker(T)$, $\operatorname{Im}(T)$, $Nul(T)$ y $Rg(T)$.

26. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x, y, z) = 2x - 3y + z$

   a) Demostrar que T es una transformación lineal.

   b) Encontrar $[T]_B^{B'}$ donde $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y $B' = \{2\}$.

   c) Encontrar una base para $\ker(T)$ y una para $\operatorname{Im}(T)$.

   d) Determine $Nul(T)$, $Rg(T)$.

27. Sean $B = \{(1,1,0),(2,0,1),(1,1,3)\}$ base de $\mathbb{R}^3$; $B' = \{(2,1),(1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tal que $[F]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   a) Determine $F(1,-1,2)$.

   b) Determine $\ker(F)$, $\operatorname{Im}(F)$, $Nul(F)$ y $Rg(F)$.

28. Considere $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x + y + z + w = 0\}$

   a) Demuestre que W es isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

   b) Encuentre la matriz asociada al isomorfismo definido en (a).

29. Dada la función

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2) \end{array}$$

   Encuentre la matriz asociada a la transformación lineal inversa de T, respecto a las siguientes bases

   a) Bases canónicas.

   b) $\mathcal{C}$ base canónica y $B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$.

   c) $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B' = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

30. Sean

$$\begin{array}{lll} T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \text{tal que} & T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1), \\ T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{tal que} & T_2(x, y, z) = (x + y + z, x - y), \\ T_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{tal que} & T_3(x, y) = (-x, y). \end{array}$$

   Determine:

a) $T_2 \circ T_1$

b) $T_3 \circ T_2 \circ T_1$

c) $T_2 \circ T_1 + T_3$

d) $(T_2 \circ T_1 - 3T_3)^{-1}$, si existe.

31. Hallar la imagen, rango, kernel y nulidad para la transformación lineal nula y la transformación lineal identidad.

32. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (x+y,0,0)$. Demostrar que $Nul(T) + Rg(T) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

33. Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$T(x,y,z,w) = (x + 2y - z + 4w, \quad 2x + 4y + 3z + 5w, \quad -x - 2y + 6z - 7w)$$

a) ¿Qué condiciones deben cumplir $r,s,t \in \mathbb{R}$ para que el vector $(r,s,t) \in \mathrm{Im}(T)$? ¿Cuál es el rango de T?

b) ¿Qué condiciones deben cumplir $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ para que el vector $(a,b,c,d) \in \ker(T)$? ¿Cuál es la nulidad de T?

34. Sean $f,g \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(X) = (f(X), g(X))$ donde $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

a) Determine $[T]_{C_n}^{C_2}$ donde C_n y C_2 son las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

b) Si $f(x,y,z) = -x+5y+2z$ y $g(x,y,z) = 2x-3y+3z$. Dar explícitamente $[T]_{C_3}^{C_2}$.

35. Encontrar el valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (\lambda x + 2y + z, \lambda x + y, y + z)$ tenga como kernel al conjunto $\{(0,0,0)\}$.

36. Si $\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x+y, y) \end{array}$; $\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, y+z) \end{array}$

Determine $\ker(T \circ L)$.

37. Sea V el espacio vectorial de todas las matrices de orden 2, con coeficientes reales. Sean $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fija y $T(A) = AB - BA$.

a) Demostrar que T es una transformación lineal de V en V.

b) Hallar una base de $\mathrm{Im}(T)$ y otra de $\ker(T)$.

38. Dar un ejemplo de una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = \langle(4,-7,5)\rangle$ e $\mathrm{Im}(T) = \langle(2,-1,1), (-1,3,2)\rangle$. Si no existe, justifique.

39. Sea $D : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $D(p(x)) = p'(x)$, (la función derivada), $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B'' = \{1, x, x^2\}$ bases de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente. Determine $[D]_{B'}^{B''}$.

40. Describa explícitamente una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que tenga como imagen el subespacio generado por el conjunto $\{(1, 0, -1), (1, 2, 2)\}$.

41. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(W) = W$ para todo subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ con $\dim(W) = 1$. Demostrar que $T(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}- \{0\}$.

42. Defina tres transformaciones lineales entre los espacios vectoriales soluciones de los siguientes sistemas homogéneos:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ z &=& 2x-y \end{array}\right| \qquad \text{y} \qquad \left. x+y = 0 \right|,$$

Determine el kernel y la imagen de cada una de ellas.

43. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 2 y sea B una base ordenada de V. Si $T \in L(V, V)$ y $[T]_B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Demuestre que $T^2 - (a + d)T + (ad - bc)I_V = 0$.

44. Defina una transformación lineal T que sea inyectiva desde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y\}$ a $\mathbb{R}^2$. Encontrar $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

45. Responda justificando en cada caso:

   a) ¿Existen funciones sobreyectivas de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$?
   b) ¿Existen transformaciones lineales sobreyectivas de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$?
   c) ¿Existen transformaciones lineales sobreyectivas de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$?
   d) ¿Existen funciones inyectivas de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$?
   e) ¿Existen funciones inyectivas de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$?
   f) ¿Existen transformaciones lineales inyectivas de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$?
   g) ¿Existen transformaciones lineales inyectivas de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$?.

46. Sea T una transformación lineal sobre $\mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$. ¿Es T invertible?. De serlo, hallar una expresión para T^{-1}.

47. Sea $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $G(x, y) = (2x + y, y - x)$. Encontrar los valores $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $G - \alpha I$ es no invertible.

48. Sean V, W espacios vectoriales reales y $T : V \longrightarrow W$ un isomorfismo. Probar que $T^{-1} : W \longrightarrow V$ es también un isomorfismo.

49. Sea $W_1 = \{X \in \mathbb{R}^5 \quad / \quad 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 0\}$. Hallar $\dim_{\mathbb{R}}(W_1)$.

    Sea $W_2 = \{X \in \mathbb{C}^5 \quad / \quad 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 0\}$. Hallar $\dim_{\mathbb{K}}(W_2)$.

    a) ¿W_1 es isomorfo a W_2?

    b) Sea $W_3 = \{X \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 0\}$. ¿Es W_3 isomorfo a W_1.

50. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{bmatrix} x+7y & 5y \\ -10y & x-7y \end{bmatrix} \end{array}$$

    a) Demostrar que T es inyectiva.

    b) Hallar una base de la imagen de T.

51. Dada una transformación lineal T sobre $\mathbb{R}^3$ definida por

    $T(x,y,z) = (3x,\ x-y,\ 2x+y+z)$. Demostrar que

$$(T^2 - Id) \circ (T - 3Id) = 0$$

52. Encuentre transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ con las siguientes propiedades:

    a) $T^2 = I; \quad T \neq I$

    b) $T \neq 0; \quad T^2 \neq 0; \quad T^3 = 0$

53. Pruebe que si T es una transformación lineal de rango 1 de V en V, entonces $T^2 = cT$ para algún escalar c.

54. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = e_2; \quad T(e_2) = e_3;$

    $T(e_3) = 0$ donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

    Muestre que T y T^2 no son la función nula, pero $T^3 = 0$.

55. Generalización del ejercicio anterior. Sean V un espacio vectorial de dimensión n y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de V.

    Por el teorema Fundamental del Algebra Lineal existe una única transformación lineal sobre V tal que

$$T(v_j) = \begin{cases} v_{j+1} & \text{si} \quad j = 1, ..., n-1 \\ 0 & \text{si} \quad j = n \end{cases}$$

    a) ¿Cuál es la matriz de T en la base ordenada B?

    b) Demostrar que $T^n = 0$ pero que $T^{n-1} \neq 0$.

56. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$\begin{array}{ccc} (1,0,1) & \longmapsto & (1,1,1) \\ (0,1,0) & \longmapsto & (1,1,0) \\ (0,1,1) & \longmapsto & (1,0,0) \end{array}$$

   a) Demuestre que T es biyectiva.

   b) Encuentre $T^{-1}(x,y,z)$ mediante tres métodos distintos.

57. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de modo que $\ker(T) = \langle (1,0,1) \rangle$; $T(0,1,0) = (1,1,1)$; $\quad T(0,1,1) = (1,1,0)$,

   a) Determine $T(x,y,z)$

   b) Determine el conjunto de las preimágenes del vector $(0,0,1)$ cuyas componentes sumen 0.

58. Dada $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, donde

$$B_1 = \{(1,1,2),(0,1,1),(-1,0,0)\}\,, \quad B_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$$

   a) Encuentre $T(1,3,1)$ sin calular $T(x,y,z)$

   b) Determine $T^{-1}(x,y,z)$, si existe.

   c) Encuentre $[T]_{B_3}^{B_4}$ sin calcular $T(x,y,z)$, donde

$$B_3 = \{(0,1,2),(1,1,1),(0,1,0)\}\,, \quad B_4 = \{(1,1,0),(1,-1,1),(1,0,0)\}$$

59. Encuentre los valores propios de las matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

60. Dada la matriz $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

   a) Encuentre el polinomio característico de A.

   b) Determine los valores propios de A.

61. Dada la matriz $\quad A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$,

a) Halle el polinomio característico de A usando operaciones filas y columnas.

b) Determine los valores propios de A.

62. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

a) Determine los valores propios de A.

b) Halle los espacios propios asociados a cada valor propio.

c) Exhiba una base para cada uno de los espacios propios o espacios característicos.

63. Pruebe que una matriz y su traspuesta tienen el mismo polinomio característico.

64. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

a) ¿Es A diagonalizable?

b) Determine la matriz diagonal B similar a A.

65. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

a) ¿Es A diagonalizable?

b) Si lo es, determine la matriz diagonal B similar a A. Si no explique por qué.

66. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,

a) Determine los valores propios de A.

b) Usando (a). decida si A es diagonalizable.

67. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Encuentre una matriz P que diagonalice a A.

68. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

Encuentre una matriz P que diagonalice a A.

69. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,

a) Encuentre los valores propios de A.

b) ¿Es A diagonalizable?

c) ¿Se verifica en general que una matriz es diagonalizable cuando los valores propios son repetidos?

d) Si A es diagonalizable, encuentre una matriz P que diagonalice a A.

70. Sean $A \in M_2(\mathbb{R})$y u, v vectores propios de A con valores propios α, β respectivamente tal que $\alpha \neq \beta$. Entonces A es diagonalizable y $B = \{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad \text{donde } P = [Id]_B^{C_2} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}.$$

Pruebe la proposición anterior.

71. Probar que: 0 es un valor propio de $A \in M_n(\mathbb{R})$ si y sólo si A es singular.

72. Si $Spec(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ pruebe que la matriz

$$B = k_m A^m + k_{m-1}A^{m-1} + ... + k_1 A + k_0 I$$

tiene valores propios $\beta_i = \sum_{j=0}^{m} k_m \lambda_i^j$.

73. Sea $D(f) = f'$ (la función derivada), como D es una transformación lineal de $C^\infty([0,1])$. Pruebe que $f(x) = ce^{\lambda x}$ son los únicos vectores propios de D. (Ayuda: Use $(e^{-\lambda x} g(x))' = 0$ si y sólo si $D(g) = \lambda g$)

74. De un contraejemplo a la siguiente proposición: Si x_i es valor propio de T_i $(i = 1, 2)$, entonces $x_1 + x_2$ es valor propio de $T_1 + T_2$.

75. Si v es un vector propio de T, probar que también lo es de $p(T)$ donde $p(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$.

76. Sea $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ una transformación lineal tal que $D(x^k) = kx^{k-1}$. Hallar el polinomio característico de D, los valores propios y los espacios propios de D.

77. Pruebe que los valores propios de una matriz A de orden n regular son $\frac{1}{\lambda_i}$ si $Spec(A^{-1}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

78. Pruebe que A regular implica que AB es similar a BA.

79. Pruebe que similaridad es una relación de equivalencia en el conjunto $M_n(\mathbb{R})$.

80. Si es posible, diagonalice en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$ las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -i & 0 \\ i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{bmatrix}$.

81. Pruebe que

    a) Una matriz simétrica tiene todos sus valores propios reales.

    b) Una matriz antisimétrica tiene todos sus valores propios complejos con parte real nula.

    c) Una matriz cuadrada A y ortogonal ($A^{-1} = A^t$) tiene todos sus valores propios igual a 1.

82. Si $c_1(x)$ es el polinomio característico de A_1 y $c_2(x)$ lo es de A_2. ¿Cuál es el polinomio característico de $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$? ¿idem para $\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$?

83. Para $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ encuentre el polinomio característico $p_A(x)$. Verifique directamente que $p_A(A) = 0$. Use el resultado anterior para expresar A^{-1}, A^3, A^4 y A^5 como polinomios en A de grado menor o igual a 2.

84. ¿Cuántos vectores propios que sean linealmente independientes tiene J?, donde

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

85. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. ¿Cuál es el polinomio característico de la transformación lineal identidad sobre V? ¿Cuál es el polinomio característico de la transformación lineal nula?

86. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. ¿En qué condiciones para a, b y $c \in \mathbb{R}$ es A diagonalizable?

5.3.1. Ejercicios complementarios

A continuación presentamos una selección de problemas, incluidos en certamenes

1. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ se tiene $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = Ax$. ¿Es T un isomorfismo?. Si lo es, definir $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Justifique.

2. Sea $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ con $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ basede $\mathbb{R}^2$. Dada $[T]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ entonces determinar:

   a) $\ker(T)$. ¿Está $(1, 2, -3)$ ó $(2, 3, 2)$ en $\ker(T)$?. Justifique.

   b) $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ en base canónica.

   c) $Nul(T), Rg(T)$.

   d) $\mathrm{Im}(T)$ ¿Está $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ó $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ó $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\mathrm{Im}(T)$?

   e) bases B_1, B_2 de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente, tal que:

   $$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\ker(T) = \langle (1, 2, 1), (0, 1, 1) \rangle$ y $T(1, 0, 1) = (4, 12)$.

4. Sea la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(1, 2) = (1, 4)$ y $F(0, 1) = (2, 8)$. Determinar:

   a) Si F es una transformación lineal.

   b) $F(x, y)$ y $[F]_C^C$ siendo C la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

   c) $\ker(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$. ¿Es F sobreyectiva?. Justifique.

   d) ¿$(15, 60)$ y $(-3, 4)$ son vectores de $\mathrm{Im}(F)$?. Justifique.

5. Sea $\dot{D} : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una función definida por $D(p(x)) = \dfrac{d}{dx}(p(x))$. Dados los conjuntos $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B_2 = \{1, x, x^2\}$ entonces:

   a) Demostrar que D es una transformación lineal.

   b) Demostrar que B_1 y B_2 son bases de$\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente.

   c) Determinar $[D]_{B_1}^{B_2}$.

d) ¿Es D un isomorfismo?

6. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ una función definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a, b, c)$. Sea $B = \{1, x, x^2 - 1\}$

   a) Demuestre que T es una transformación lineal.

   b) Demuestre que B es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

   c) Calcule $[T]_B^C$ donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   d) ¿Es T un isomorfismo?. Justifique su respuesta.

7. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4, 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4, -x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4)$

   a) ¿Que condiciones deben cumplir $r, s, t \in \mathbb{R}$ tal que $(r, s, t) \in \mathrm{Im}(T)$?, ¿Cuál es el rango de T?

   b) ¿Que condiciones deben cumplir $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $(a, b, c, d) \in \ker(T)$?, ¿Cuál es la nulidad de T?

8. Sean $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ y $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tales que:

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + z + t) \text{ y } g(x, y, z) = (2x + 3y, x - 2z),$$

   a) Probar que $g \circ f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$.

   b) Hallar la matriz asociada a esta transformación lineal, $g \circ f$, respecto de las bases canónicas.

   c) Verifique si se cumple una de las siguientes afirmaciones:

$$[g \circ f] = [g]\,[f] \quad \text{ó} \quad [g \circ f] = [f]\,[g]\,.$$

9. Sea $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definida por $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$

   a) Determine $[f]_C$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   b) Determine $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

   c) Encuentre una base de $\ker(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

   d) Determine $Nul(f)$ y $Rg(f)$.

10. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ tal que $f(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + (2a - b + c)$

   a) Pruebe que f es una transformación lineal.

   b) ¿Es f epiyectiva?, justifique.

   c) ¿Es f inyectiva?, justifique.

11. Sean $B = \{(1,2,3),(0,1,0),(1,1,0)\}$ y $B' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $B'' = \{(2,1),(0,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Consideremos, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(1,2,3) = (0,0,7); \quad f(0,1,0) = (0,2,0); \quad f(1,1,0) = (1,1,1)$$

y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $[g]_{B'}^{B''} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Encuentre $[g \circ f]_{B}^{B''}$.

12. Sean $B = \{(1,3,0),(0,1,0),(1,5,2)\}$ y $B' = \{(-5,9,6),(0,1,1),(1,5,4)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $f \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ tal que $[f]_{B}^{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    a) Demuestre que f es un isomorfismo.
    b) Determine $[f^{-1}]_{B'}^{B}$.
    c) Encuentre $f^{-1}(-6,8,6)$.

13. Sean $f : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $f(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a-c & 2a+b \end{bmatrix}$, y $B = \{x^2+x+1, 2x^2-3, x\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ base de $M_2(\mathbb{R})$. Encuentre $[f]_{B}^{B'}$.

14. Sea $f \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ tal que $f(X) = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 16 \\ -4 & 3 & -4 \\ -20 & 0 & -17 \end{bmatrix} X$ para $X \in \mathbb{R}^3$.

    a) Encuentre una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_B$ sea diagonal. Obtenga $[f]_B$.
    b) Encuentre una matriz P, invertible tal que $[f]_B = P^{-1} \begin{bmatrix} 19 & 0 & 16 \\ -4 & 3 & -4 \\ -20 & 0 & -17 \end{bmatrix} P$.

15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y \\ x+y & y-z \end{bmatrix}$.

    a) Encuentre $\ker(f)$.
    b) Halle una base de $\mathrm{Im}(f)$.
    c) Sean $B = \{(1,0,1),(2,1,-1),(1,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y B' la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$. Encuentre $[f]_{B}^{B'}$.

16. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$F(1,0,0) = (0,1,2); \quad F(0,1,0) = (0,0,3); \quad F(0,0,1) = (0,0,0).$$

Dada Id la transformación identidad de $\mathbb{R}^3$, determinar:

a) $(Id - F)(x, y, z)$
b) $\mathrm{Im}(Id - F)$
c) $\ker(Id - F)$
d) $Rg(Id - F)$
e) $Nul(Id - F)$.

17. Sean $T : \mathbb{R}_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \{1, x+1, x^2, x^3 - 1\}$ base de $\mathbb{R}_3[x]$.

   a) Calcule $[T]_B^{B'}$ donde $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$.
   b) ¿Es T un isomorfismo?. Justifique.

18. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función lineal tal que :

$$T(1, 0, 1) = (2, -1, 0); \quad T(0, 1, 2) = (0, 1, 1); \quad T(1, 1, 1) = (2, 0, 1),$$

   a) Determinar $T(x, y, z)$, donde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   b) Determinar una base de $\mathrm{Im}(T)$ y $Rg(T)$.
   c) Determinar una base de $\ker(T)$ y $Nul(T)$.
   d) ¿Están $(2, 2, 3), (1, 0, 1), (4, 3, 7)$ en $\mathrm{Im}(T)$?. Justifique.

19. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x + 2y, 3x - 2y)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[g]_{C_2}^{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ con C_2 base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{(2, 1), (1, 2)\}$,

   a) ¿Es f una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$?
   b) ¿Es $f \circ g$ un isomorfismo de $\mathbb{R}^2$?

20. Sea $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$ tal que $B = \{(2, -1), (-1, 0)\}$ y $B' = \{(1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente. Además sea $[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Hallar $[T]_{C_2}^{C_4}$ donde C_2, C_4 son las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente.
   b) Determinar una base de $\ker(T)$ y $Nul(T)$.
   c) Determinar una base de $\mathrm{Im}(T)$ y $Rg(T)$.

21. Considere la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i < j \\ a_{ii} & \text{si} \quad i = j \\ a_{ij} & \text{si} \quad i > j \end{cases}$. Demuestre que $Spec(A) \subset \mathbb{R}$.

22. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique :

    a) $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y B, B' bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente tal que $n > m$, entonces $\left([T]_B^{B'}\right)^{-1} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.
    b) $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ entonces existe $v \neq 0$ en $\mathbb{R}^4$ tal que $T(v) = 0$.
    c) $f \in L(V, V), f$ es inyectiva y B es una base de V entonces $f(B)$ es una base de V.
    d) Sea $A \in M_3(\mathbb{R}), t = 5$ valor propio de A y $X \in M_{1\times 3}(\mathbb{R})$ es un vector propio correspondiente, entonces $AX = 5X$.

23. Dadas las siguientes afirmaciones, determine cuáles de ellas son verdaderas y cuáles falsas. Justifique en cada caso:

    a) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, B = \{(1, 2), (2, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y C la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $[F]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ entonces $F(x, y) = \left(\dfrac{2y + x}{3}, \dfrac{-y}{3}, \dfrac{5y + x}{3}\right)$.
    b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x + y - z = 0\}$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ entonces $\{(1, 0, -1)\}$ es una base de U.
    c) Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V y $g \in L(V, W)$ es inyectiva entonces $\{g(v_1), g(v_2), g(v_3)\}$ es una base para $\mathrm{Im}(g)$.
    d) Sea $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x_1 = x_2; x_3 = x_4\}$ entonces $\dim(A) = 2$ y $A = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$.

24. Sea $\{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$f(1, 1, 1) = (1, -3, 0); \quad f(0, 1, 0) = (-5, 0, 1); \quad f(0, 0, -1) = (-4, -3, 1).$$

    Determinar:

    a) $f(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
    b) $[f]_C$ donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
    c) Una base para $\ker(f)$ ¿Es f inyectiva?
    d) $Rg(f)$ ¿Es f epiyectiva?

25. Sea $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, z, w) = (x - y + z, y + z - w)$

    a) Probar que F es una transformación lineal.

b) Hallar una base para $\ker(F)$ y una base para $\operatorname{Im}(F)$.

c) Calcule las dimensiones de $\ker(F)$ e $\operatorname{Im}(F)$. ¿Es F inyectiva?, ¿Es F sobreyectiva?.

26. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\begin{array}{lcl} F(1,0,-1) & = & (1,-1) \\ F(0,1,1) & = & (1,1) \\ F(1,2,0) & = & (1,0) \end{array}$

    a) Demuestre que F es una transformación lineal.

    b) Calcule $F(x,y,z)$.

    c) Determine un conjunto generador de $\ker(F)$ y calcule su dimensión.

    d) ¿Es F sobreyectiva?. Justifique.

27. Dadas las siguientes afirmaciones, determine cuáles de ellas son verdaderas y cuáles falsas. Justifique en cada caso:

    a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformación lineal, v_1, v_2, v_3 vectores linealmente independientes, entonces $f(v_1), \quad f(v_2), \quad f(v_3)$ son también vectores linealmente independientes.

    b) Sean $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R}), \quad b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ vector dado que es combinación lineal de las columnas de A, $\quad Rg(A) = 2$ entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución única.

    c) Sean $T : V \to W$ una transformación lineal y $\dim(V) = n, \quad \dim(W) = m$ tal que $Rg(T) = n$ entonces T es inyectiva.

    d) Sean $V = \langle (0,1,1), (1,-1,0) \rangle, \quad W = \langle (1,0,1), (0,0,1) \rangle$ y $T : V \to W$ tal que $[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Luego, si $v = (2,-1,1)$ en V entonces $[T(v)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

28. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Encontrar una base (si es posible) que diagonalice A.

29. Diagonalizar $A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. (es decir, hallar $P \in M_3(\mathbb{R})$ regular tal que $P^{-1}AP$ es matriz diagonal).

30. Si es posible diagonalice la matriz $\quad A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ -6 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

31. Dada la matriz $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

a) Determine el polinomio característico de A.

b) Determine el espectro de A, $(Spec(A))$.

c) Encuentre los espacios generados por los vectores propios.

d) ¿Es A diagonalizable?

32. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine:

a) El polinomio característico de A.

b) $Spec(A)$.

c) Los espacios propios de A.

d) ¿Es A diagonalizable?.

33. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine:

a) El polinomio característico de A.

b) $Spec(A)$.

c) Los espacios propios de A.

d) ¿Es A diagonalizable?.

34. Dada la matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, se sabe que $Spec(B) = \{-1, 1, 3\}$.

a) Determine los espacios asociados a cada valor propio y las dimensiones de ellos.

b) ¿Es B diagonalizable?.