FISICA 2

Autor: Hugo Medina Guzmán
Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú
Agosto 2009

PRESENTACIÓN

Me agradó saber que Hugo Medina Guzmán estaba por publicar un texto sobre Física. Había dos razones suficientes para este sentimiento. Por un lado, tenía curiosidad de saber lo que podría aportar un texto más de Física sobre los otros ya disponibles. Por otro lado, conozco de la larga carrera de Hugo Medina como cultor de la enseñanza de [a Física, y tenía curiosidad de ver cómo este compromiso como docente y experiencia se manifestarían en su texto. Tuve la suerte de conocer al Ing. José Castro Mendívil en su taller, donde desplegó una destacada labor en el diseño y construcción de equipo de laboratorio para la enseñanza de la Física. Considero que Hugo es un digno discípulo del Ing. Castro Mendívil e igualmente ha dedicado una fracción considerable de su tiempo a la docencia, y al diseño y construcción de equipo de laboratorio para resaltar los conceptos básicos de la Física.
He revisado el contenido de este texto y veo con gran satisfacción que su autor utiliza un enfoque muy acertado. Toma como punto de partida una observación experimental y a partir de allí desarrolla los conceptos físicos que permiten interpretar esta observación utilizando la formulación matemática más sencilla. Todo esto lo hace con el detalle suficiente de manera que el lector pueda seguir el argumento lógico con facilidad. Considero que éste es un gran aporte de este texto. Este enfoque contrasta con textos que enfatizan la formulación matemática y dejan al alumno huérfano de una orientación para aplicarla a una realidad física concreta.
El contenido de temas de la Física General que son desarrollados en este texto se ajusta al programa de estudios de la PUCP. El desarrollo de cada tema incluye ejemplos bien seleccionados que son desarrollados con un detalle muy esmerado. Al final de cada capítulo se incluye un conjunto de preguntas y problemas propuestos; se incluye las respuestas. Algunos problemas plantean configuraciones complejas pero que contienen ciertas propiedades de simetría que permiten su reducción a configuraciones sencillas. Al final del texto encontramos un listado de referencias bibliográficas a un buen número de textos de Física General que han servido de consulta al autor.
En general, considero que este texto constituye una representación gráfica de la obra cotidiana que Hugo ha venido desarrollando durante su carrera docente y, por lo tanto, es un aporte muy valioso para la comunidad académica y público en general.

Lima, julio de 2007

Jorge A. Bravo Cabrejos, Ph. D.
Profesor Principal
Facultad de Ciencias Físicas, U.N.M.S.M.

PRÓLOGO

Los estudiantes a menudo se preguntan por qué llevan un curso de Física. La mejor razón por la que se estudia Física es porque proporciona un método coherente y lógico para comprender el mundo que nos rodea; una persona que comprende lo que sucede a su alrededor, es capaz de convivir en su entorno de manera racional y efectiva. Sin embargo, en ocasiones los estudiantes ignoran el potencial que tiene la Física para explicar el entorno en términos fáciles de entender;

Este libro tiene por objeto brindar a los estudiantes de la Física General una ayuda para dominar los principios físicos que son la base de la tecnología moderna. En éste libro se asume que los estudiantes tienen una base de álgebra, geometría, y trigonometría. Es mucho más compacto que los libros de texto tradicionales, proporciona muchos ejemplos trabajados y pide resolver problemas

Este libro será útil también como texto para una persona que repasa o que consolida su conocimiento de la Física.

La discusión y las explicaciones narrativas son suficientemente claras y completas para poder utilizar el libro o como texto, o como suplemento a un texto más amplio.

La forma de aprender la física es trabajar realmente con problemas. Al usar este libro, el estudiante debe ser activo. Debe intentar trabajar cada uno de los problemas y los ejemplos. Debe mirar las soluciones solamente si no logra dar con el camino a su solución.

Los ejemplos en este libro están trabajados exhaustivamente, de modo que puedan servir como modelos para el propio trabajo de los estudiantes. En este sentido se considera que los estudiantes se benefician al observar los cálculos realizados en más de una manera, por lo que se han incluido varios métodos para efectuar los cálculos.

Además, se tuvo especial cuidado en incluir problemas y preguntas que combinan el material del capítulo en cuestión, con material de capítulos anteriores. Tales problemas y preguntas destacan el hecho importante de que diversas áreas de la Física se manifiestan de manera simultánea en el mundo real. Además, este método de temas múltiples proporciona una manera para que los estudiantes repasen lo estudiado y ayuda a mejorar la habilidad para resolver problemas.

El diseño gráfico es de gran importancia, y para mejorar su función se ha intentado enfocar solamente una idea principal en cada figura en lo posible. Por consiguiente, las figuras del libro a menudo se dividen en dos o más partes, para evitar la confusión de mezclar varias ideas en la misma figura.

Los profesores conocen la importancia de los diagramas de cuerpo libre cuando utilizan la segunda ley de movimiento de Newton, y todos los estudiantes aprenden de ellos a medida que estudian Física. Tales diagramas se utilizan en todo el libro, no solamente en los primeros capítulos en los que se presenta y aplica la segunda ley de Newton. Por ejemplo, cuando se analiza la relación en las oscilaciones, también entre la presión y profundidad en un fluido, el análisis se simplifica considerablemente por medio de un diagrama de cuerpo libre. De manera semejante, cuando se deduce la expresión para la rapidez de una onda transversal en una cuerda, un diagrama de cuerpo libre es muy útil.

Cifras significativas. A lo largo de todo el libro se siguen los procedimientos normales para las cifras significativas.

Se espera que el esfuerzo en la elaboración de este libro sea de utilidad tanto para los estudiantes como para los profesores. Toda opinión al respecto será bienvenida.

Hugo Medina Guzmán
Lima Perú

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece primeramente a los estudiantes, quienes han contribuido bastante en la elaboración de este libro a través de su influencia en el establecimiento de las técnicas y principios de enseñanza y a los profesores que con sus sugerencias y revisiones a las separatas de los capítulos hicieron notar puntos que necesitaban una mayor aclaración.

Hugo Medina Guzmán

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. Elasticidad
Esfuerzo y deformación. Régimen elástico y plástico, Módulos de elasticidad y tipos de esfuerzo y deformación: Deformación por tracción o compresión longitudinal, Módulo de Young, ley de Hooke, aplicaciones: deformación por peso, aceleración y área variable. Deformación lateral, módulo de Poisson Deformación por cizalladura o corte módulo de cizalladura Deformación volumétrica módulo de compresibilidad. Fuerza elástica y Energía elástica.

CAPÍTULO 2. Movimiento oscilatorio
Movimiento oscilatorio: definición y características Ecuación y ley del movimiento oscilatorio: Movimiento armónico simple lineal y angular. Movimiento armónico simple. Movimiento armónico amortiguado: subamortiguado, sobreamortiguado y crítico. Movimiento armónico amortiguado forzado. Resonancia, aplicaciones.

CAPÍTULO 3. Movimiento ondulatorio y ondas
Movimiento ondulatorio, definición, características, y tipos de ondas: por la naturaleza de la perturbación, por la dirección de la perturbación, por la dirección de la propagación. Descripción matemática de la propagación de una onda unidimensional. Función de onda: onda viajera, ecuación de onda y velocidad de propagación: ondas en una cuerda, ondas transversales y longitudinales en una barra, ondas sonoras en un tubo con aire. Fenómenos ondulatorios: reflexión de ondas. Principio de superposición de ondas: 1.-ondas iguales viajando en la misma dirección, superposición constructiva o destructiva. 2.-ondas iguales viajando en sentidos opuestos, ondas estacionarias: en una cuerda finita y en un tubo o caja acústica finita. Modos de vibración y armónicos. 3.-ondas de diferente frecuencia viajando en el mismo espacio, pulsaciones. Interferencia de ondas (sonoras y electromagnéticas). Interferencia entre dos fuentes separadas en el espacio con la misma fase, diferencia de camino. Sonido: intensidad, efecto Doppler, ondas de choque.

CAPÍTULO 4. Mecánica de fluidos
Concepto, tipos de fluido, características. Densidad, peso específico y presión. Hidrostática: Variación de la presión con la profundidad en un fluido en reposo. Principios de Pascal. Empuje y flotación: Principio de Arquímedes. Barómetro y manómetro simple. Aplicaciones: superficies planas y translación de fluidos. Tensión superficial. Dinámica de Fluidos: Flujo de fluido ideal Ecuación de continuidad, caudal o gasto. Ecuación de Bernoulli. Aplicaciones: medidor de Venturi y tubo de Pitot. Viscocidad y ley de Stokes.

CAPÍTULO 5. Termodinámica
Sistemas Termodinámicos: Variables termodinámica macroscópicas. Ley cero de la Termodinámica y equilibrio Térmico. Temperatura y escalas Dilatación térmica: Dilatación Lineal, superficial y volumétrica. Fatiga térmica. Calor y trabajo: Definición de Calor, Equivalente mecánico del calor, calor específico. Fases de la materia: cambios de estado. Procesos de Transferencia de calor: por conducción por convección, por radiación**.** Teoría Cinética de gases Ideales: Definición de un gas Ideal. Ecuación de estado de un gas ideal, curvas Isotérmicas. Energía Interna de un Gas Ideal: Trabajo realizado por un gas. Primera Ley de La Termodinámica. Procesos Termodinámicos: isocórico, isobárico, isotérmico y adiabático. Calor específico de un gas a volumen constante y a presión constante. Procesos reversibles e irreversibles. Ciclos termodinámicos. Máquinas termodinámicas. Eficiencia y segunda ley de la termodinámica. Ciclo de Carnot.

CAPÍTULO 1

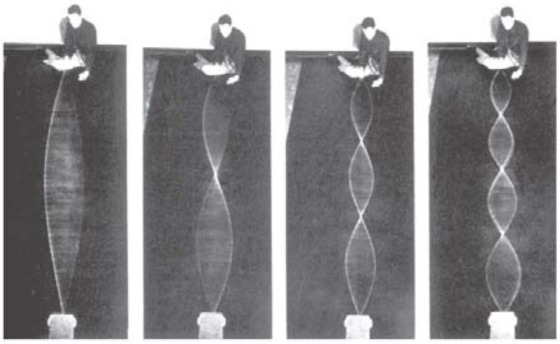
Elasticidad

CAPÍTULO 2

MOVIMIENTO OSCILATORIO

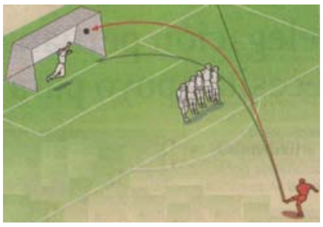
CAPÍTULO 3

Movimiento ondulatorio y ondas



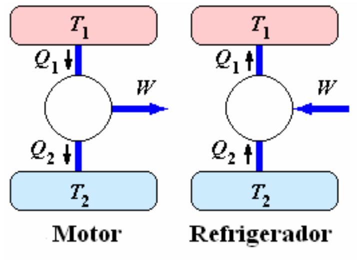
CAPÍTULO 4

Mecánica de fluidos



CAPÍTULO 5

Termodinámica



BIBLIOGRAFÍA

THEORETICAL PHYSICS, Mechanics of particles, rigid and elastic bodies, fluids and heat flow. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)

THEORETICAL PHYSICS,Thermodinamics, electromagnetism,waves, and particles. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)

The Feynman LECTURES ON PHYSICS. Volumenes I, II y III. Richard P.Feynman, Robert B. Leighton. California Institute of Technology, Matthew Sands, Stanford University. Addison – Wesley Publishing Company (1964)

CORRIENTES, CAMPOS Y PARTÍCULAS. Francis Bitter. Massachussets Institute of Technology. Editorial Reverté S. A. (1964).

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA MECÁNICA, MATERIA Y ONDAS. Uno Ingard, William L. Kraushaar. Editorial Reverté. (1966).

FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Arthur F. Kip. University of California. Mc Graw – Hill Book Company (1967)

CIENCIA FÍSICA Orígenes y principios Robert T. Langeman, Universidad Vanderbilt. UTEHA, (1968)

PROBLEMS IN ELEMENTARY PHYSICS. B. Bukhotsev, V: Krivchenkov, G. Myakishev, V.Shalnov. Mir Publishers. Moscow (1971)

PROBLEMES DE PHYSIQUE COMMENTES. Tomos I y II Hubert Lumbroso. Mason et Cie, París. (1971)

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. Luis L. Cantú. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Editorial Limusa Mexico (1973)

FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y LA SALUD. Simon G. G. MacDonald / Desmond M. Burns University of Dundee. Fondo educativo interamericano. (1975)

MECÁNICA NEWTONIANA, MIT Physics course. A. P. French. Editorial Reverté. (1974).

FÍSICA I y II. Solomon Gartenhaus. Purdue University. INTERAMERICANA. (1977)

TEACHING TIPS. A guidebook for the beginning College Teacher. Wilbert J. McKeachie (University of Michigan). Seventh edition D. C. Heath and Company (1978)

FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA. Alan H. Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (1978)

GENERAL PHYSICS WITH BIOSCIENCE ESSAYS. Jerry B. Marion. University of Maryland. John Wiley & Sons Inc. (1979)

Física general II: Teoría Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. QC 21 M19 (Biblioteca PUCP) (1979)

Física general II: Problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 111 M364 (Biblioteca PUCP) (1979)

Física general I: problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 104 M364 (Biblioteca PUCP) (1981)

FÍSICA PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. 1 y 2. John P. McKelvey, Clemson University – Howard Grotch, Pennsilvania State University. HARLA. Mexico. (1981)

Física 3: electricidad y magnetismo para estudiantes de ciencias e ingeniería Hugo Medina Guzmán, FIS 141 M36 (Biblioteca PUCP) (1982)

EXPLORING PHYSICS Concepts and applications. Roger W. Redding North Texas State University, Stuart Kenter, Wadsworth Publishing Company (1984)

PROBLEMAS DE FISICA. J. Aguilar Peris, Universidad Complutense de Madrid - J. Casanova Colas, Facultad de Ciencias de Valladolid. Alambra (1985)

PROBLEMAS DE FISICA. dirigido por S. Kósel. Editorial Mir Moscú. (1986)

PROBLEMAS DE FISICA Y COMO RESOLVERLOS. Clarence E. Benett Maine University. CECSA (1986)

PHYSICS for Engineering and Science. Michael E. Browne, Ph. D. (professor of Physics University of Idaho. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1988)

FÍSICA: VOLUMEN 1. Mecánica, ondas y termodinámica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).

FÍSICA: VOLUMEN 2. Electricidad, magnetismo y óptica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).

PROBLEMAS DE FISICA. dirigido por O. Ya. Sávchenko. Editorial Mir Moscú. (1989)

MECÁNICA. Berkeley physics course – volumen 1. Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman. Editorial Reverté SA. (1992).

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Berkeley physics course – volumen 2. Edward M.Purcell. Editorial Reverté SA. (1992).

FÍSICA. Tomos I y II Tercera edición revisada (Segunda edición en español), Raymond S: Serway, James Madison University, Mcgraw-Hill, (1993)
PROBLEMAS DE FISICA Santiago Burbano de Ercilla, Enrique Burbano de Ercilla, Carlos Gracia Muñoz, XXVI edición, Zaragoza, MIRA editores (1994)
ONDAS. Berkeley physics course – volumen 3. Frank S. Crawford, Jr. Editorial Reverté SA. (1994).
FÍSICA Para las ciencias de la vida, David Jou Mirabent Universidad autónoma de Barcelona, Joseph Enric Llebot Rabagliati, Universidad de Girona, Carlos Pérez garcía, Universidad de Navarra. Mcgraw-Hill, (1994)
Física uno Hugo Medina Guzmán, FIS 104 M365 (Biblioteca PUCP) (1995)
APPLIED PHYSICS. Arthur Beiser, Ph. D. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1995)
TEACHING INTRODUCTORY PHTSICS A Sourcebook. Clifford E: Swartz (State University of New York, Stony Brook) and Thomas Miner (Associate Editor The Physics Teacher 1972 – 1988). ATP Press – Springer. (1996)
TEACHING INTRODUCTORY PHYSICS Arnold Arons University of Washington JOHN WILEY & SONS, INC. (1997)
FÍSICA John Cutnell / Kenneth W. Johnson. Southern Illinois University. LIMUSA (1998)
FÍSICA EN LA CIENCIA Y EN LA INDUSTRIA. A . Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (2000)
FÍSICA CONTEMPORANEA Edwin Jones.– Richard Childers, University of South Carolina. Mcgraw-Hill, (2001)
PROBLEMAS Y CUESTIONES DE FISICA. Atanasio Lleó, Begoña Betete, Javier Galeano, Lourdes Lleó, Ildefonso Ruiz – Tapiador. Universidad Politécnica de Madrid. Ediciones Mundi – prensa (2002)
The PHYSICS of every day phenomena. A conceptual introduction to Physics. W. Thomas Griffith, Pacific University. Mcgraw-Hill, (2004)
FÍSICA UNIVERSITARIA. Francis W.Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young (Carnegie Mellon University) y Roger A. Freedman (University of California. Santa Barbara) Volumen 1, Volumen 2. Undecima edición. Pearson - Addison Wesley (2004)
FIVE EASY LESSONS Strategies for successful Physics teaching. Randall D. Knight California Polytechnic State University, San Luis Obispo. Addison Wesley (2004)
FUNDAMENTALS OF PHYSICS. David Halliday (Univ. of Pittsburgh), Robert Resnick (Rensselaer Polytechnic Institute), Jearl Walker (Cleveland State Univ.). 7th Edition (2005)

CAPÍTULO 1. Elasticidad

INTRODUCCIÓN

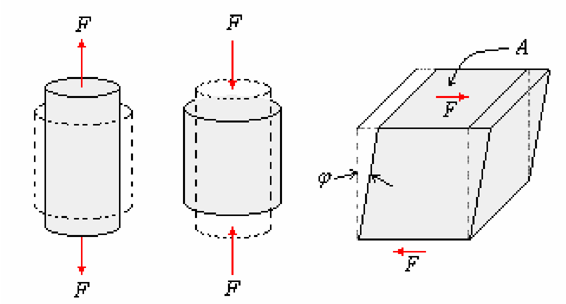
Hasta ahora en nuestro estudio de mecánica hemos asumido que los cuerpos son indeformables; esto no es cierto, aunque se justifica cuando los efectos de las deformaciones carecen de importancia.

En este capítulo trataremos sobre los cambios de forma producidos en un cuerpo cuando está bajo la acción de una fuerza, esto es, en el sentido del comportamiento de los materiales bajo la acción de diversos esfuerzos, iniciándonos en la técnica del diseño.

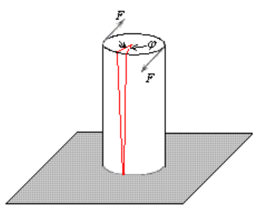
PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

Muchos materiales cuando están en servicio están sujetos a fuerzas o cargas. En tales condiciones es necesario conocer las características del material para diseñar el instrumento donde va a usarse de tal forma que los esfuerzos a los que vaya a estar sometido no sean excesivos y el material no se fracture. El comportamiento mecánico de un material es el reflejo de la relación entre su respuesta o deformación ante una fuerza o carga aplicada.

Hay tres formas principales en las cuales podemos aplicar cargas: Tensión, Compresión y Cizalladura.



Además en ingeniería muchas cargas son torsionales en lugar de sólo cizalladura.

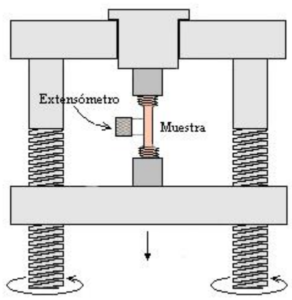


ENSAYO DE TENSIÓN Y DIAGRAMA DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN. El ensayo de tensión se utiliza para evaluar varias propiedades mecánicas de los materiales que son importantes en el diseño, dentro de las cuales se destaca la resistencia, en particular, de metales y aleaciones.

En este ensayo la muestra se deforma usualmente hasta la fractura incrementando gradualmente una tensión que se aplica uniaxialmente a lo largo del eje longitudinal de la muestra. Las muestras normalmente tienen sección transversal circular, aunque también se usan especimenes rectangulares.

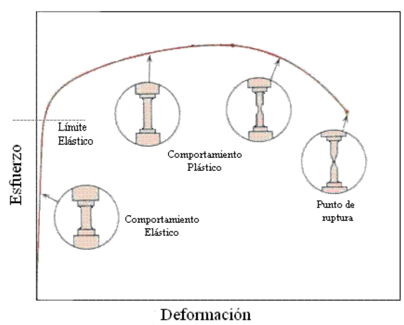
Muestra típica de sección circular para el ensayo de tensión - deformación

Durante la tensión, la deformación se concentra en la región central más estrecha, la cual tiene una sección transversal uniforme a lo largo de su longitud. La muestra se sostiene por sus extremos en la máquina por medio de soportes o mordazas que a su vez someten la muestra a tensión a una velocidad constante. La máquina al mismo tiempo mide la carga aplicada instantáneamente y la elongación resultante (usando un extensómetro). Un ensayo de tensión normalmente dura pocos minutos y es un ensayo destructivo, ya que la muestra es deformada permanentemente y usualmente fracturada.



Ensayo tensión – deformación

Sobre un papel de registro, se consignan los datos de la fuerza (carga) aplicada a la muestra que está siendo ensayada así como la deformación que se puede obtener a partir de la señal de un extensómetro. Los datos de la fuerza pueden convertirse en datos de esfuerzo y así construirse una gráfica tensión – deformación.



Gráfica típica tensión vs deformación

DEFORMACIÓN ELÁSTICA Y PLÁSTICA

Cuando una pieza se somete a una fuerza de tensión uniaxial, se produce una deformación del material. Si el material vuelve a sus dimensiones originales cuando la fuerza cesa se dice que el material ha sufrido una DEFORMACIÓN ELASTICA. El número de deformaciones elásticas en un material es limitado ya que aquí los átomos del material son desplazados de su posición original, pero no hasta el extremo de que tomen nuevas posiciones fijas. Así cuando la fuerza cesa, los átomos vuelven a sus posiciones originales y el material adquiere su forma original.
Si el material es deformado hasta el punto que los átomos no pueden recuperar sus posiciones originales, se dice que ha experimentado una DEFORMACIÓN PLASTICA.

DIFERENCIA ENTRE LOS CUERPOS ELASTICOS Y LOS INELASTICOS. Los cuerpos elásticos son los cuerpos que después de aplicarles una fuerza vuelven a su forma normal mientras que los inelásticos tienen su grado de elasticidad muy bajo y si los deforman no vuelven a su forma original.

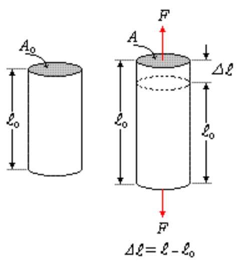
LEY DE HOOKE.
En la parte de comportamiento elástico se cumple la Ley de Hooke. Robert Hooke fue el primero en enunciar esta relación con su invento de un volante de resorte para un reloj. En términos generales, encontró que una fuerza que actúa sobre un resorte produce un alargamiento o elongación que es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza.

$$F = -k\Delta\ell$$

El signo menos es porque la fuerza es en oposición a la deformación.
La constante de la proporcionalidad k varía mucho de acuerdo al tipo de material y recibe el nombre de constante del resorte o coeficiente de rigidez.

$k = \dfrac{F}{\Delta\ell}$, sus unidades son $\dfrac{\text{N}}{\text{m}}$.

ESFUERZO Y DEFORMACIÓN UNITARIA.
Esfuerzo. Consideremos una varilla cilíndrica de longitud ℓ_0 y una sección transversal de área A_0 sometida a una fuerza de tensión uniaxial F que alarga la barra de longitud ℓ_0 a ℓ, como se muestra en la figura.



Por definición, El esfuerzo S en la barra es igual al cociente entre la fuerza de tensión uniaxial media F y la sección transversal original A_0 de la barra.

$S = \dfrac{F}{A_0}$, sus unidades son $\dfrac{N}{m}$.

Deformación unitaria: Por definición, la deformación unitaria originada por la acción de una fuerza de tensión uniaxial sobre una muestra metálica, es el cociente entre el cambio de longitud de la muestra en la dirección de la fuerza y la longitud original.

$\delta = \dfrac{\ell - \ell_0}{\ell} = \dfrac{\Delta\ell}{\ell}$, la deformación unitaria es una magnitud adimensional

En la práctica, es común convertir la deformación unitaria en un porcentaje de deformación o porcentaje de elongación
% deformación = deformación x 100 % = % elongación

MODULO ELASTICO O DE ELASTICIDAD.
A la constante de proporcionalidad, podemos escribir la ley de Hooke en su forma general.

$$\text{Módulo Elástico} = \frac{esfuerzo}{deformación}$$

Para el caso de Deformación por tracción o compresión longitudinal

El esfuerzo es $S = \dfrac{F}{A}$, la deformación unitaria es

$$\delta = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

El módulo elástico es conocido como el MODULO DE YOUNG.

$$Y = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell} = \frac{S}{\delta}$$

TABLA I
Módulo de elasticidad o módulo de Young.

Nombre	Módulo de elasticidad Y 10^{10} N/m^2
Aluminio	6,8
Cobre	10,8
Oro	7,6
Hierro, fundido	7,8
Plomo	1,7
Nickel	20,6
Platino	16,7
Plata	7,4
Latón	4,6
Acero	20,0

Ejemplo 1. Los ortodoncistas usan alambres de bajo módulo de Young y alto límite elástico para corregir

la posición de los dientes mediante arcos tensores. ¿Por qué?

Solución.

Bajo módulo de Young para que sea relativamente fácil deformarlo elásticamente para montar los arcos en los dientes. La tensión deberá ser menor que la tensión de fluencia del material, de ahí que el límite elástico tenga que ser alto, ya que si el arco se deforma plásticamente, su deformación es irreversible y por lo tanto, no estará tensionando los dientes para corregir su posición transversal se convierte en un paralelogramo.

Ejemplo 2. De un alambre de cobre de 1,5 m de longitud y 2 mm de diámetro se cuelga un peso de 8 kg. Se pregunta:

a) ¿Hemos rebasado el límite de elasticidad?

b) ¿Se romperá el alambre?

c) En caso de ser negativas las preguntas anteriores, ¿cuál es su alargamiento?

Módulo de Young = $12\text{x}10^{10}$ N/m^2

Límite de elasticidad de $3\text{x}10^7$ a $12\text{x}10^7$ N/m^2

Límite de ruptura de $20\text{x}10^7$ a $50\text{x}10^7$ N/m^2

Solución.

a) y b) La sección del alambre es:

$A = \pi r^2 = 3{,}14\ \text{mm}^2 = 3{,}14\text{x}10^{-6}\ \text{m}^2$

La fuerza que corresponde a cada m^2 de sección es:

$$\frac{F}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{8\times 9{,}8}{3{,}14\times 10^{-6}}$$

$$= 2{,}49\times 10^7\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

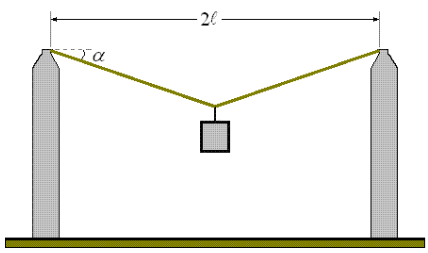
Que no llega ni al límite inferior de elasticidad ni al de ruptura.

$$\text{c)}\ \Delta l = \frac{Fl}{YA} = \frac{8\times 9{,}8\times 1{,}5}{12\times 10^{10}\times 3{,}14\times 10^{-6}}$$

$$= 0{,}0003\ \text{m}$$

$$= 0{,}3\ \text{mm}$$

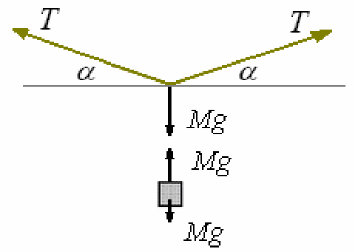
Ejemplo 3. Entre dos columnas fue tendido un alambre de longitud 2 ℓ . En el alambre, exactamente en el centro, fue colgado un farol de masa *M*. El área de la sección transversal del alambre es *A*, el módulo de elasticidad es *Y*. Determinar el Angulo α, de pandeo del alambre, considerándolo pequeño.



Solución.

Para encontrar la tensión del hilo.

Por condición de equilibrio:



Suma de fuerzas verticales:

$$\sum F_y = 0$$

$$2T\text{sen}\alpha - Mg = 0 \ \Rightarrow$$

$$T = \frac{Mg}{2\text{sen}\alpha}\ .$$

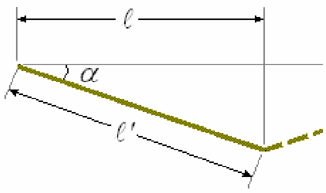
Por la ley de Hooke deducimos que

$$T = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)YA$$

Igualando:

$$\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)YA = \frac{Mg}{2\text{sen}\alpha}$$

De la figura siguiente:



$$\ell' = \frac{\ell}{\cos\alpha} \ \ \text{y} \ \ \ell' = \ell + \Delta\ell$$

De aquí:

$$\frac{\ell}{\cos\alpha} = \ell + \Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1$$

Luego

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)YA = \frac{Mg}{2\text{sen}\alpha}$$

Para ángulos pequeños tenemos que

$\text{sen}\alpha \approx \alpha$ y

$$\cos\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\left(\alpha/2\right) \approx 1 - \alpha^2/2\ .$$

Reemplazando obtenemos

$$\left(\frac{1}{1 - \dfrac{\alpha^2}{2}} - 1\right)YA = \frac{Mg}{2\alpha}$$

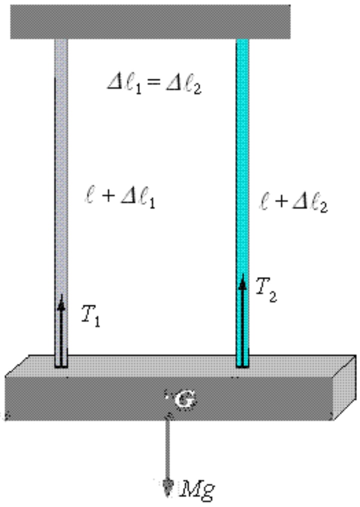
$$\Rightarrow \left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)-1\right]YA = \frac{Mg}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{2}YA = \frac{Mg}{2\alpha} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{Mg}{YA}$$

Finalmente

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Mg}{YA}}$$

Ejemplo 4. Se cuelga una viga de 2000 kg de dos cables de la misma sección, uno de aluminio y otro de acero. Al suspenderla, ambos cables se estiran lo mismo. Calcular la tensión que soporta cada uno. Módulos de Young: acero = 20x10^{10} N/m^2, aluminio =7x10^{10} N/m^2



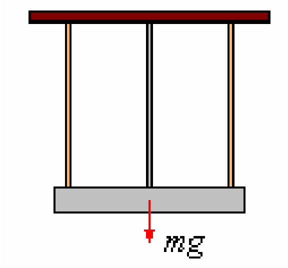
Solución.
Si los cables inicialmente tienen igual longitud y la viga finalmente está horizontal, ambos cables han experimentado el mismo alargamiento:

Como $\Delta\ell = \dfrac{F\ell}{YA}$, $\dfrac{\ell T_1}{Y_1 A} = \dfrac{\ell T_2}{Y_2 A}$ de aquí

$$\frac{T_1}{7} = \frac{T_2}{20}$$

Donde el subíndice 1 se refiere al aluminio y el 2 al acero.
Por estar el sistema en equilibrio:
$T_1 + T_2 = Mg$ = 2 000 x 9,8 N
De ambas
T_1 = 5 081,5 N T_2 = 14 517,5 N

Ejemplo 5. Una barra homogénea, de masa m = 100 kg, está suspendida de tres alambres verticales de la misma longitud situados simétricamente.
Determinar la tensión de los alambres, si el alambre del medio es de acero y los otros dos son de cobre. El área de la sección transversal de todos los alambres es igual.
El módulo de Young del acero es dos veces mayor que el del cobre.



Solución.
Partiendo de los conceptos de simetría, es evidente que el alargamiento de los hilos será igual.
Designemos este alargamiento por $\Delta\ell$.
De acuerdo con la ley de Hooke, la tensión del hilo de acero es

$F_a = \dfrac{AY_a}{\ell}\Delta\ell$ y la del hilo de cobre, es

$$F_c = \frac{AY_c}{\ell}\Delta\ell$$

De donde concluimos que la relación de las tensiones es igual a la relación de los módulos de elasticidad correspondientes:

$$\frac{F_c}{F_a} = \frac{Y_c}{Y_a} = \frac{1}{2}.$$

En equilibrio
$2F_c + F_a = mg$.
Por consiguiente,

$F_c = \dfrac{mg}{4}$ = 250 N y $F_a = 2F_c$ = 500 N.

Ejemplo 6. Una columna de hormigón armado se comprime con una fuerza P. Considerando que el módulo do Young del hormigón Y_{ha}, es 1/10 del de hierro Y_h y que el área de la sección transversal del hierro es 1/20 de la del hormigón armado, encontrar qué parte de la carga recae sobre el hormigón.

Solución.
Basándonos en la ley de Hooke, escribimos

$F_{ha} = \left(\dfrac{\Delta\ell}{\ell}\right)A_{ha}Y_{ha}$ y

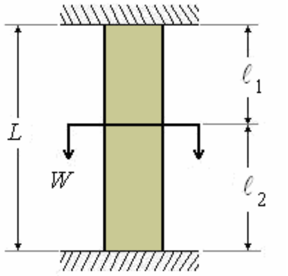
$$F_h = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)A_h Y_h = = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\frac{A_{ha}}{20}10Y_{ha}$$

De allí deducimos que $\dfrac{F_{ha}}{F_h} = 2$.

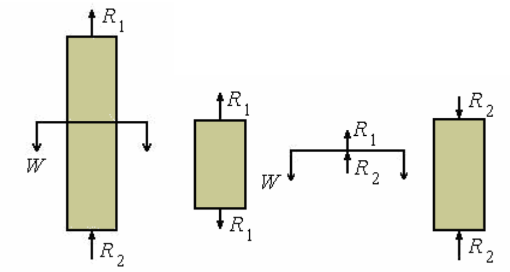
De este modo, 2/3 del peso recae sobre el hormigón armado y 1/3, sobre el hierro.

Ejemplo 7. Un peso W se encuentra sujeto entre dos barras de peso despreciable, de las mismas características pero de diferente longitud y como se muestra en la figura. Los extremos de las barras

están ligados al peso y a los apoyos, los cuales son indeformables.
Encontrar las reacciones que se producen en los apoyos.



Solución.
Diagramas del cuerpo libre del conjunto y de las partes:



Por equilibrio estático, $\sum F_y = 0$:

$R_1 + R_2 - W = 0$ (1)

Geométricamente, tiene que cumplirse que los alargamientos sean iguales:

$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2$

Por elasticidad

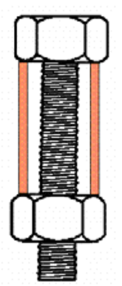
$$\frac{R_1\ell_1}{AY} = \frac{R_2\ell_2}{AY} \Rightarrow$$

$R_1\ell_1 = R_2\ell_2$ (2)

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$R_1 = \frac{\ell_2}{L}W \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{\ell_1}{L}W$$

Ejemplo 8. Un perno de acero se enrosca en un tubo de cobre como muestra la figura. Encontrar las fuerzas que surgen en el perno y en el tubo debido al hacer la tuerca una vuelta, si la longitud del tubo es ℓ, el paso de rosca del perno es h y las áreas de la sección transversal del perno y del tubo son iguales a A_a, y A_c respectivamente

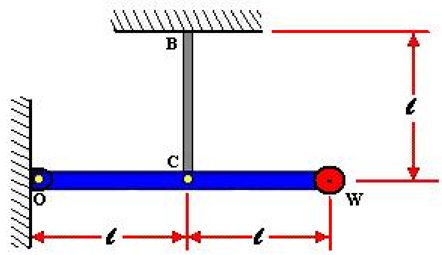


Solución.
Bajo la acción de la fuerza de compresión F, el tubo disminuye en $F\ell / AY$. y bajo la acción de la fuerza de extensión F, el perno se alarga en el valor $F\ell / A_aY_a$. La suma $F\ell / A_aY_a + F\ell / A_cY_c$ es igual al desplazamiento de la tuerca a lo largo del perno:

$F\ell / A_aY_a + F\ell / A_cY_c = h$, de donde:

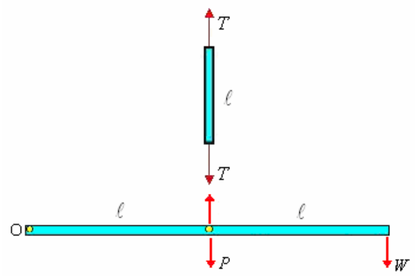
$$F = \frac{h}{\ell}\left(\frac{A_aY_aA_cY_c}{A_aY_a + A_cY_c}\right).$$

Ejemplo 9. Viga horizontal sostenida mediante un tirante. En el sistema mostrado en la figura, ¿cuánto bajará el peso W respecto a la posición en la cual el tensor no estaba deformado?



La barra es indeformable y de peso P.
El tensor BC es de peso despreciable, área A y módulo de elasticidad Y.

Solución.

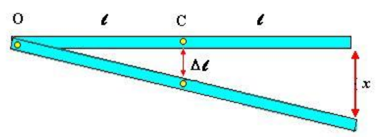


Por equilibrio estático, $\sum \tau_o = 0$

$T\ell - P\ell - W2\ell = 0$

$T - P - 2W = 0$

$T = P + 2W$ (1)



Geométricamente, considerando que el giro que se produce es pequeño, podemos escribir:

$x = 2\Delta\ell$

Por elasticidad, el estiramiento $\Delta\ell$ del tensor es:

$$\Delta\ell = \frac{T\ell}{AY}$$

Luego,

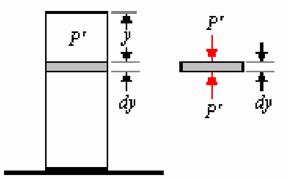
$$x = \frac{2T\ell}{AY} \qquad (2)$$

Reemplazando la expresión (1) en (2):

$$x = \frac{2(P + 2W)\ell}{AY}$$

Ejemplo 10. Deformaciones no uniformes por peso propio.
Determinar la deformación producida en una barra debido a su peso propio de una barra del largo *L*, sección *A*, módulo de elasticidad *Y* y densidad ρ .

Solución.
El elemento diferencial dy soporta el peso P' de la porción de barra de longitud y que está sobre él.



$$P' = m'g = \rho V'g = \rho Ayg$$

Siendo la longitud de la barra *L*, su deformación será ΔL , la deformación del elemento diferencial dy debido al peso P', será $d(\Delta L)$.

$$d(\Delta L) = \frac{P'dy}{YA} = \frac{\rho Ag}{YA} ydy$$

$$= \frac{\rho g}{Y} ydy$$

Luego

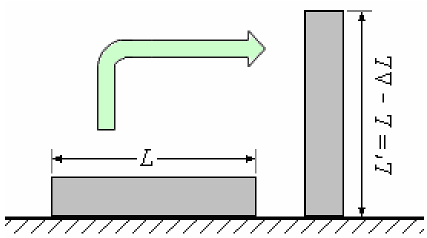
$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \frac{\rho g}{Y}\int_0^L ydy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho g L^2}{Y} = \frac{1}{2}\frac{(\rho gAL)L}{AY}$$

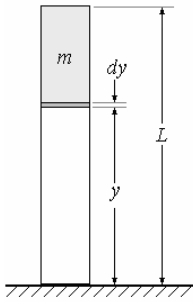
o $\Delta L = \dfrac{1}{2}\dfrac{(\text{Peso Total})\times L}{AY}$

Observamos que esta deformación es igual a la mitad de la deformación que se produciría, como sí, el peso estuviera concentrado en el extremo superior.

Ejemplo 11. Una barra de masa *M*, módulo *Y*, sección A y altura *L* está sobre el piso. Determine la deformación que sufre la atura de la barra por peso propio. Considere que la densidad lineal de la barra varía según $\rho_\ell = \kappa y$, (κ es constante e *y* la altura medida desde el piso).
Datos: *M*, *Y*, *A*, *L* y κ .



Solución.



El elemento de columna *dy* es deformado por el peso de la masa *m*.

$$d(\Delta L) = \frac{mg\,dy}{YA}$$

Cálculo de *m*.

$$dm = \rho_\ell dy = \kappa ydy \Rightarrow$$

$$m = \int_y^L \kappa ydy = \kappa \left.\frac{y^2}{2}\right|_y^L$$

$$= \frac{\kappa}{2}\left(L^2 - y^2\right)$$

Luego:

$$d(\Delta L) = \frac{\kappa g}{2YA}\left(L^2 - y^2\right)dy$$

Integrando

$$\Delta L = \int_0^L d(\Delta L) = \frac{\kappa g}{2YA}\int_0^L \left(L^2 - y^2\right)dy$$

$$\Delta L = \frac{\kappa g}{2YA}\left(L^2 y - \frac{y^3}{3}\right)_0^L$$

$$= \frac{\kappa g}{2YA}\left(L^3 - \frac{L^3}{3}\right) = \frac{\kappa g L^3}{3YA}$$

Como la masa total es

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \kappa ydy = \kappa \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^L$$

$$= \kappa \frac{L^2}{2}$$

$$\Delta L = \frac{2M}{\kappa L^2}\frac{\kappa g L^3}{3YA} = \frac{2MgL}{3YA}$$

Ejemplo 12. Hállese la longitud que ha de tener un hilo de alambre, de densidad 8,93 y módulo de rotura 1020,4 kg/cm^2 para que se rompa por su propio peso.

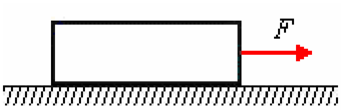
Solución.
1020,4 kg/cm^2 = 1 020,4x9,8 N/cm^2 =10^8 N/m^2;
ρ = 8930 kg/m^3.
Para que el hilo se rompa, su peso ha de ser por lo menos de 10^8A N, siendo A la sección.
O sea:

$$P = mg = A\ell\rho g = 10^8 A$$

Es decir:

$$\ell = \frac{10^8 A}{A\rho g} = \frac{10^8}{8930x9{,}8} = 1143{,}6 \text{ m}$$

Ejemplo 13. Deformaciones por aceleración
Una barra uniforme de acero (Longitud L, área de sección recta A densidad ρ, módulo de young Y) se halla sobre un plano horizontal exento de rozamiento y se tira de ella con una fuerza constante F.
¿Cuál es el alargamiento total de la barra a consecuencia de la aceleración?

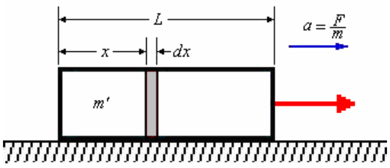


Solución.
a) Sea m la masa total de la barra

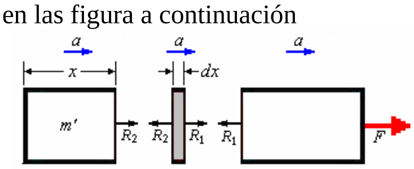
$$m = \rho AL$$

Tomemos un elemento diferencial dx, cuya masa es dm

$$dm = \rho Adx$$



Hagamos los diagramas del cuerpo libre de los tres sectores.
La fuerza sobre cada uno de los tres sectores se indica en las figura a continuación



El elemento diferencial dm se mueve con aceleración a debido a la fuerza (R_1 –R_2)
Y la fuerza que lo estira es R_2. Por lo tanto su deformación será un diferencial de ΔL esto es $d(\Delta L)$:

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dx}{YA} \text{ y } \Delta L = \int_0^L d(\Delta L)$$

Como $R_2 = m'a$, $m' = \rho Ax$ y

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho AL}, \text{ tenemos:}$$

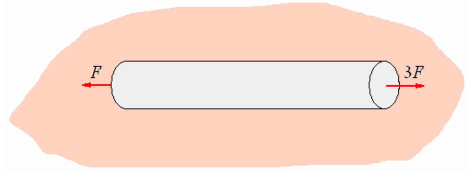
$$R_2 = (\rho Ax)\left(\frac{F}{\rho AL}\right) = F\frac{x}{L}$$

$$d(\Delta L) = \frac{F}{YAL}xdx, \text{ y}$$

$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \int_{x=0}^{x=L} \frac{F}{YAL}xdx$$

De donde $\Delta L = \frac{1}{2}\frac{FL}{YA}$

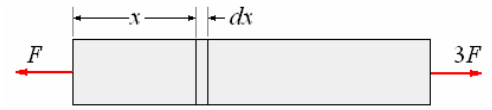
Ejemplo 14. Se tiene una columna de largo L, sección transversal A, densidad ρ, módulo de elasticidad Y. Se jala cobre un piso liso de la manera como se muestra en la figura. Calcule cuanto estira el cuerpo.



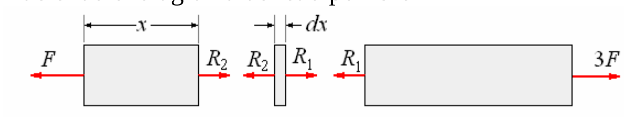
Solución.
Primer método.
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

$$3F - F = ma \Rightarrow a = \frac{2F}{m} = \frac{2F}{\rho AL}$$



Haciendo el diagrama del cuerpo libre



El elemento diferencial es estirado por la fuerza R_2.

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dx}{AY}$$

Cálculo de R_2:

$$R_2 - F = m'a$$

$$\Rightarrow R_2 = F + m'a = F + \rho Ax\frac{2F}{\rho AL}$$

$$= F + 2F\frac{x}{L}$$

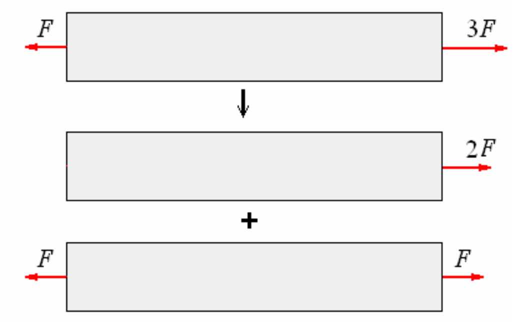
$$d(\Delta L) = \frac{F}{AY}\left(1 + \frac{2x}{L}\right)dx$$

$$\Delta L = \frac{F}{AY}\int_0^L \left(1 + \frac{2x}{L}\right)dx = \frac{F}{AY}\left(x + \frac{x^2}{L}\right)\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{2FL}{AY}$$

Segundo método.
El sistema de fuerzas puede ser desdoblado en dos partes cuyas deformaciones parciales sumadas hacen

el efecto total, tal como se muestra en la figura siguiente:



La primera parte es la deformación de un cuerpo jalado por la fuerza 2F:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2}\frac{(2F)L}{YA} = \frac{FL}{YA}$$

La segunda parte es la deformación de un cuerpo sujeto a la tensión F:

$$\Delta L_2 = \frac{FL}{YA}$$

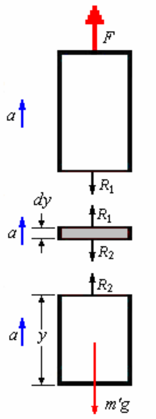
La deformación total es la suma de las deformaciones parciales:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{FL}{YA} + \frac{FL}{YA}$$

$$= \frac{2FL}{AY}$$

Ejemplo 15. Si la barra se jala hacia arriba con una fuerza F ($F > mg$). ¿Cuál es el alargamiento total de la barra?

Solución.



El elemento diferencial dm se mueve con aceleración a debido a la fuerza ($R_1 - R_2$)

Y la fuerza que lo estira es R_2. Por lo tanto su deformación será un diferencial de ΔL esto es $d(\Delta L)$:

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dy}{YA} \text{ y } \Delta L = \int_0^L d(\Delta L)$$

Como

$$R_2 - m'g = m'a \Rightarrow R_2 = m'(g + a),$$

$$m' = \rho Ay \text{ y } a = \frac{F - mg}{m} = \left(\frac{F}{\rho AL} - g\right),$$

Tenemos:

$$R_2 = (\rho Ay)\left(\frac{F}{\rho AL}\right) = F\frac{y}{L}$$

$$d(\Delta L) = \frac{F}{YAL} ydy \text{, y}$$

$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \frac{F}{YAL}\int_0^L ydy$$

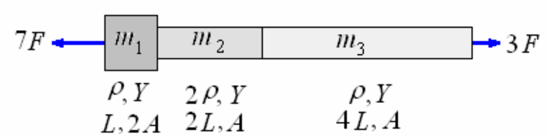
De donde

$$\Delta L = \frac{1}{2}\frac{FL}{YA}$$

Ejemplo 16. Para la barra compuesta mostrada determine:

a) Su aceleración.

b) La deformación de cada una de sus tres partes y su deformación total.



Solución.

a) $m_1 = 2\rho LA$, $m_2 = 4\rho LA$ y $m_3 = 2\rho LA$

Aplicando la segunda ley de Newton:

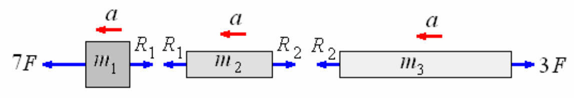
$$\sum F = ma \Rightarrow 3F - 7F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$\Rightarrow -4F = 10\rho LAa$$

$$\Rightarrow a = -\frac{0{,}4F}{\rho LA}$$

El conjunto se mueve hacia la izquierda.

b) La figura siguiente muestra los diagramas del cuerpo libre de cada uno de los elementos del conjunto.



Tomando como positivo hacia la izquierda.

Cálculo de R_2:

$$R_2 - 3F = m_3 a \Rightarrow$$

$$R_2 = 3F + m_3 a$$

$$= 3F + (4\rho LA)\left(\frac{0{,}4F}{\rho LA}\right)$$

$$= 4{,}6F$$

Cálculo de R_1:

$$R_1 - R_2 = m_2 a \Rightarrow$$

$$R_1 = R_2 + m_2 a$$

$$= 4{,}6F + (4\rho LA)\left(\frac{0{,}4F}{\rho LA}\right)$$

$= 5{,}2F$

Deformación de 3.

La deformación por fuerza es debido a $3F$:

$$\Delta L_3 = \frac{3F4L}{YA} = 12\frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza $R_2 - 3F = 1{,}6\,F$

$$\Delta L'_3 = \frac{1{,}6F4L}{2YA} = 3{,}2\frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 3:

$$\Delta L_{3Total} = 12\frac{FL}{YA} + 3{,}2\frac{FL}{YA} = 15{,}2\frac{FL}{YA}$$

Deformación de 2.

La deformación por fuerza es debido a R_2:

$$\Delta L_2 = \frac{R_2 2L}{YA} = 9{,}2\frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza

R_1 - R_2 = $5{,}2\,F - 4{,}6\,F = 0{,}6\,F$

$$\Delta L'_2 = \frac{0{,}6F2L}{2YA} = 0{,}6\frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 2:

$$\Delta L_{2Total} = 9{,}2\frac{FL}{YA} + 0{,}6\frac{FL}{YA}$$

$$= 9{,}8\frac{FL}{YA}$$

Deformación de 1.

La deformación por fuerza es debido a R_1:

$$\Delta L_1 = \frac{R_1 L}{Y2A} = 2{,}6\frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza $7F$- R_1 = $1{,}8\,F$

$$\Delta L'_1 = \frac{1{,}8FL}{2Y2A} = 0{,}45\frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 1:

$$\Delta L_{1Total} = 2{,}6\frac{FL}{YA} + 0{,}45\frac{FL}{YA}$$

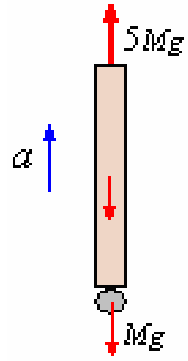
$$= 3{,}05\frac{FL}{YA}$$

Deformación total del conjunto.

$$\Delta L_{Total} = 15{,}2\frac{FL}{YA} + 9{,}8\frac{FL}{YA} + 3{,}05\frac{FL}{YA}$$

$$= 28{,}05\frac{FL}{YA}$$

Ejemplo 17. Una barra vertical de longitud L, masa M, sección transversal A y módulo de Young Y, tiene soldada en su extremo inferior una masa puntual M. Si la barra se eleva verticalmente mediante una fuerza vertical $5Mg$ (g = gravedad), aplicada en el extremo superior de la barra. Hallar la deformación longitudinal de la barra.

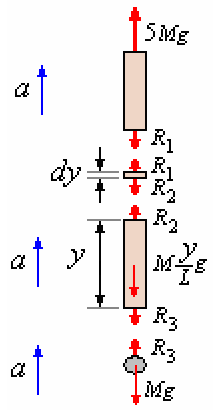


Solución.

Para calcular la aceleración de la barra aplicamos:

$$\sum F_y = ma_y$$

$$5Mg - Mg - Mg = 2Ma \Rightarrow a = \frac{3}{2}g$$



Tomemos un elemento diferencial de la barra dy

Aplicando la segunda ley de Newton al elemento de longitud x:

$$R_2 - R_3 - \left(M\frac{y}{L}\right)g = \left(M\frac{y}{L}\right)a$$

$$R_2 - R_3 = M\frac{y}{L}(g + a)$$

$$R_2 - R_3 = M\frac{y}{L}\left(g + \frac{3}{2}g\right) = \frac{5Mg}{2L}y \qquad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la masa puntual:

$$R_3 - Mg = Ma = M\frac{3}{2}g \Rightarrow$$

$$R_3 = Mg + M\frac{3}{2}g = \frac{5}{2}Mg \qquad (2)$$

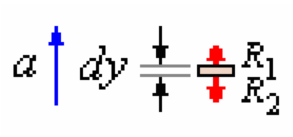
Reemplazando (2) en (1):

$$R_2 - \frac{5Mg}{2} = \frac{5Mg}{2L}y$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{5}{2}Mg\left(1 + \frac{y}{L}\right)$$

Primer método.

Comenzando con la deformación del elemento diferencial y luego integrar para toda la longitud.



El elemento diferencial se deforma $d(\Delta L)$ debido a la reacción R_2, $(R_1 - R_2)$ le da la aceleración $a = \frac{3}{2}g$, luego:

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dy}{YA} = \frac{\frac{5}{2}Mg\left(1+\frac{y}{L}\right)dy}{YA}$$

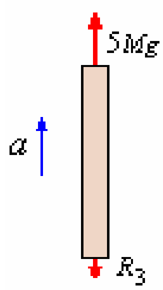
$$= \frac{5Mg}{2YA}\left(1+\frac{y}{L}\right)dy$$

Integrando:

$$\Delta L = \frac{5Mg}{2YA}\int_0^L \left(1+\frac{y}{L}\right)dy = \frac{5Mg}{2YA}\left(L+\frac{L^2}{2L}\right)$$

$$= \frac{15MgL}{4YA}$$

Segundo método.
Comenzando con la deformación la los efectos de las fuerzas en los extremos de la barra.
Nota: En R_3 ya está considerado el peso de la masa puntual M colocada en el extremo inferior de la barra.



Deformación de la barra por $5Mg$:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2}\frac{5MgL}{YA} = \frac{5MgL}{2YA}$$

Deformación de la barra por R_3:

$$\Delta L_2 = \frac{1}{2}\frac{5MgL}{2YA} = \frac{5MgL}{4YA}$$

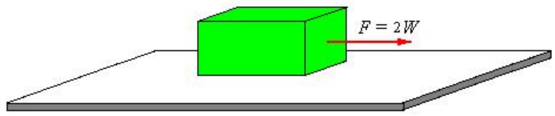
Deformación total: $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$

$$\Delta L = \frac{5MgL}{2YA} + \frac{5MgL}{4YA}$$

$$= \frac{15MgL}{4YA}$$

Aquí no se considera el efecto del peso propio por separado, porque en el cálculo de R_2 ya está considerado.

Ejemplo 18. Un cubo como se muestra en la figura de peso "W" arista "L" módulo de Young "Y" es arrastrado sobre un plano liso, con una fuerza $F = 2W$.
a) Hallar la deformación longitudinal unitaria cuando el plano es horizontal.
b) Hallar la deformación de la dimensión paralela al plano, cuando el bloque sube sobre el plano que esta inclinado 37º.



Solución.
a)

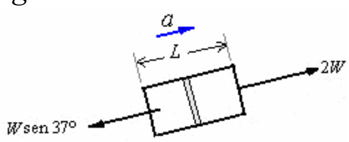
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}\frac{2W}{YL^2} = \frac{W}{YL^2}$$

b)
Resuelto por integración.
Calculo de la aceleración.

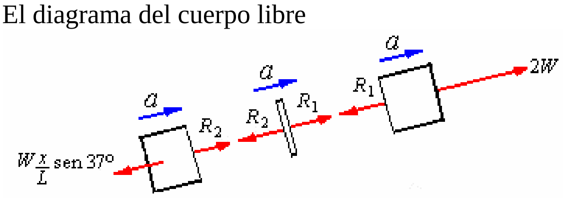
$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$2W - W\text{sen}37^\circ = \frac{W}{g}a \Rightarrow 2W - 0{,}6W = \frac{W}{g}a$$

$$\Rightarrow a = 1{,}4g$$



El diagrama del cuerpo libre



Cálculo de R_2:

$$R_2 - W\frac{x}{L}\text{sen}37^\circ = \frac{W}{g}\frac{x}{L}a \Rightarrow$$

$$R_2 = W\frac{0{,}6x}{L} + \frac{W}{g}\frac{x}{L}1{,}4g = 2W\frac{x}{L}$$

El elemento diferencial se deforma $d\Delta L$:

$$d\Delta L = \frac{R_2 dx}{YL^2} = \frac{2W}{YL^3}xdx$$

Para hallar ΔL integramos desde $x = 0$ hasta $x = L$.

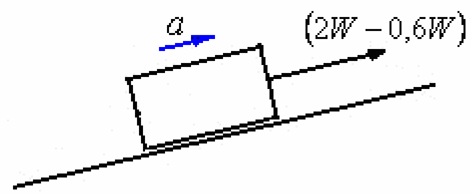
$$\Delta L = \int d\Delta L = \frac{2W}{YL^3}\int_0^L xdx = \frac{W}{YL}$$

La deformación es:

$$\Delta L = \frac{W}{YL}$$

Resuelto directamente usando resultados conocidos.

Estiramiento debido a la aceleración:



Calculo de la aceleración.

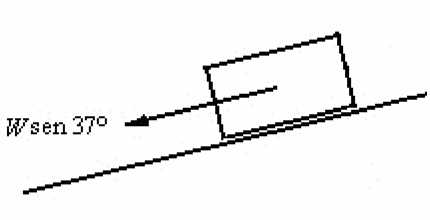
$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$2W - W\text{sen}37^{\circ} = \frac{W}{g}a \Rightarrow 2W - 0{,}6W = \frac{W}{g}a$$

$$\Rightarrow a = 1{,}4g$$

$$\Delta L_a = \frac{1}{2}\frac{(2W - 0{,}6W)L}{YL^2} = \frac{0{,}7W}{YL}$$

Estiramiento debido al peso:



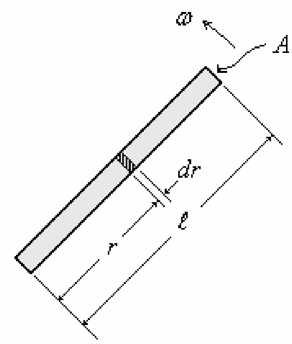
$$\Delta L_p = \frac{1}{2}\frac{0{,}6WL}{YL^2} = \frac{0{,}3W}{YL}$$

Estiramiento total:

$$\Delta L = \frac{0{,}7}{YL} + \frac{0{,}3W}{YL} = \frac{W}{YL}$$

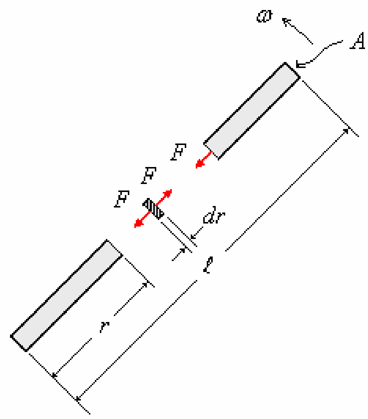
Ejemplo 19. **Deformación debido a la rotación**

Una barra de longitud ℓ, área A, densidad ρ y módulo de Young Y gira con velocidad angular ω constante sobre una mesa horizontal sin fricción y pivotado en uno de sus extremos. Determinar el alargamiento producido. ¿Cuál será el esfuerzo máximo?

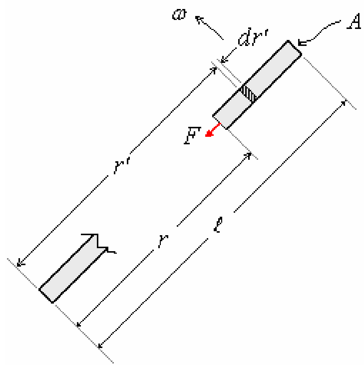


Solución.

El elemento diferencial se alarga $d(\Delta\ell)$, debido a la fuerza centrípeta producida por la masa restante hacia el extremo opuesto al pivote.



Parte 1: Cálculo de la fuerza total sobre una sección transversal a la distancia r del pivote.



Debido a la aceleración centrípeta se tiene una fuerza:

$$dF = (dm)a_c = (dm)\omega^2 r$$

$$dm = \rho A dr'$$

$$dF = (\rho A dr')\omega^2 r' = \rho A\omega^2 r' dr'$$

Integrando:

$$F = \int_r^{\ell} \rho A\omega^2 r' dr' = \rho A\omega^2 \int_r^{\ell} r dr$$

$$F = \frac{1}{2}\rho A\omega^2\left(\ell^2 - r^2\right)$$

Parte 2: Cálculo del alargamiento

El alargamiento del elemento dr es:

$$d(\Delta\ell) = \frac{Fdr}{YA}$$

Y el alargamiento total será:

$$\Delta\ell = \int_r^{\ell}\frac{Fdr}{YA} = \frac{\rho A\omega^2}{2YA}\int_r^{\ell}\left(\ell^2 - r^2\right)dr$$

$$\Delta\ell = \frac{\rho\omega^2}{2Y}(\ell^3 - \frac{\ell^3}{3}) = \frac{1}{3}\frac{\rho\omega^2\ell^3}{Y}$$

Ejemplo 20. Una barra de hierro de 100 mm^2 de sección y 50 cm de longitud gira alrededor de uno de sus extremos con una velocidad angular uniforme de ω radianes por segundo. Se pide cuál debe ser esta velocidad para que la barra se rompa por la tracción que origina la fuerza centrífuga, sabiendo que el material de que está hecha se rompe por tracción cuando se le carga con 30 kg por mm^2.

Solución.

Se romperá cuando

F_c = (30x9,8) x100 = 29400 N.

Llamando dm a un elemento de masa situado a la distancia x del eje de giro, será:

$$dF_c = dm\omega^2 x = \rho dV\omega^2 x = \rho\omega^2 Axdx$$

Integrando:

$$F_c = \int_0^{0,5} \rho\omega^2 Axdx = \frac{1}{2}\rho\omega^2 Ax^2$$

$$= \frac{1}{2}(7800)\omega^2\left(100\times 10^{-6}\right)\left(0,5^2\right)$$

Luego:

$$\frac{1}{2}(7800)\omega^2\left(100\times 10^{-6}\right)\left(0,5^2\right) = 29400$$

Por tanto:

$$\omega^2 = \frac{2\times 29400}{1950\times 10^{-4}} = 301538, \text{ o sea}$$

$$\omega = \sqrt{301538} = 549 \text{ rad/s}.$$

Ejemplo 21. Determinar el máximo valor admisible de la velocidad lineal de rotación de un anillo fino de plomo, si la resistencia del plomo tiene el límite de rotura P =2000 N/cm^2 y la densidad ρ = 11,3 g/cm^3.

Solución.

Durante la rotación del anillo, en éste surge una tensión $T = mv^2/2\pi r$ .Para el anillo fino $m = 2\pi rS\rho$, donde S es la sección transversal del anillo. Por lo tanto, $T/S = \rho v^2$.

De allí el valor de la velocidad máxima es $v = \sqrt{\dfrac{P}{\rho}} \approx$ 41 m/s.

Ejemplo 22. Una barra homogénea de cobre de 1 m de longitud gira uniformemente alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos.

¿A qué velocidad de rotación se romperá la barra?

Densidad del cobre $\rho = 8600\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, Esfuerzo de rotura del cobre $S_r = 2,45\times 10^8\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

Solución.

La fuerza centrífuga que actúa sobre la barra en este caso es

$$F = \int_0^\ell r\omega^2 dm$$

Donde ℓ es *la* longitud de]a barra, ω es la velocidad angular de la rotación; r, la distancia que hay desde el elemento de masa dm hasta el eje de rotación. Para una barra homogénea $dm = \rho Adr$, siendo ρ la densidad de la sustancia que forma *la* barra y A, su sección. Integrando, obtenemos

$$F = \frac{\rho A\omega^2\ell^2}{2}$$

De donde el número límite de revoluciones por segundo será

$$S_r = \frac{F}{A} = \frac{\rho\omega^2\ell^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2S_r}{\rho\ell^2}},$$

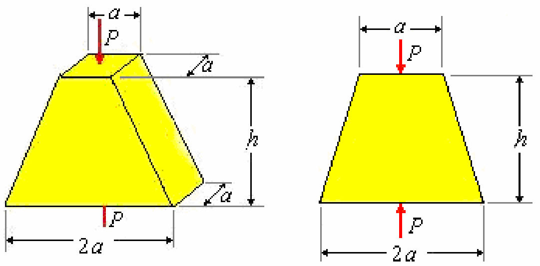
reemplazando valores;

$$\omega = \sqrt{\frac{2\left(2,45.10^8\right)}{(8600)(1)^2}} = 239\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

o $\dfrac{239}{2\pi} = 38 \text{ rev/s}$

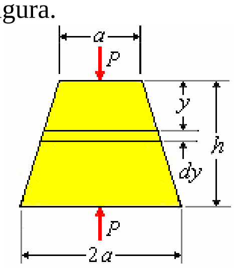
Deformaciones no uniformes por área variable.

Ejemplo 23. Calcular cuánto se comprime el bloque mostrado en la figura, cuando se le aplica una fuerza P. Módulo de elasticidad Y.



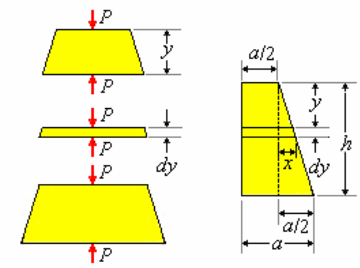
Solución.

Tomemos un elemento diferencial dy tal como se muestra en la figura.



Según muestra el diagrama del cuerpo libre del elemento diferencial, es comprimido por la fuerza P. Este elemento disminuye su longitud $d(\Delta h)$, siendo Δh la disminución de longitud de h debido a la fuerza P.

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{YA}$$



Usando las figuras anteriores

$A = a(a+2x)$ y $x = \dfrac{a}{2h}y$ reemplazando

obtenemos;

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{Ya(a+\frac{a}{h}y)} \text{ o } d(\Delta h) = \frac{Phdy}{Ya^2(h+y)}$$

Luego, como

$$\Delta h = \int_0^h d(\Delta h) = \int_0^h \frac{Phdy}{Ya^2(h+y)}$$

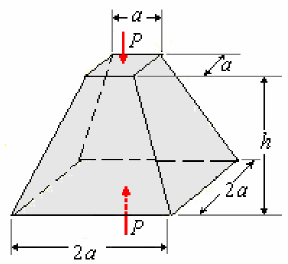
Integrando

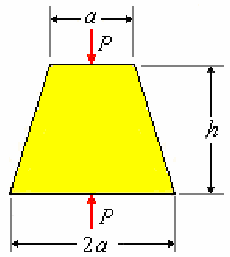
$$\Delta h = \frac{Ph}{Ya^2}\ln(h+y)\Big|_0^h = \frac{Ph}{Ya^2}\ln 2$$

El bloque se comprime $\Delta h = 0{,}692\dfrac{Ph}{Ya^2}$

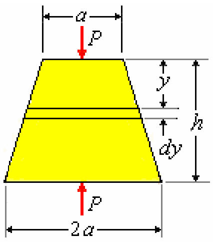
Ejemplo 24. Una pirámide truncada de bases cuadradas de lados ”a” y “$2a$” respectivamente de altura h y modulo elástico Y se somete en la dirección axial a una fuerza de compresión P, Determine la deformación que sufre la altura por acción de la fuerza P.

Solución.



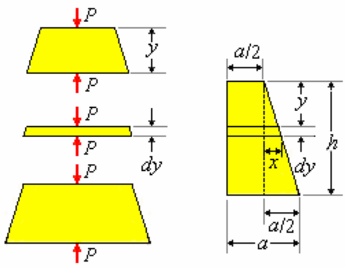


Tomemos un elemento diferencial dy tal como se muestra en la figura.



Según muestra el diagrama del cuerpo libre del elemento diferencial, es comprimido por la fuerza P. Este elemento disminuye su longitud $d(\Delta h)$, siendo Δh la disminución de longitud de h debido a la fuerza P.

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{YA}$$



Usando las figuras anteriores

$A = (a+2x)^2$ y $x = \dfrac{a}{2h}y$ reemplazando

obtenemos;

$$d(\Delta h) = \frac{Ph^2dy}{Ya^2(h+y)^2}$$

Luego, como

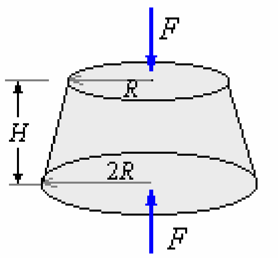
$$\Delta h = \int_0^h d(\Delta h) = \int_0^h \frac{Ph^2dy}{Ya^2(h+y)^2}$$

Integrando

$$\Delta h = \frac{Ph}{2Ya^2}$$

El bloque se comprime $\Delta h = \dfrac{1}{2}\dfrac{Ph}{Ya^2}$

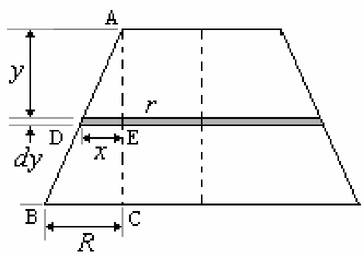
Ejemplo 25. Determine la deformación debido a la fuerza F, sin considerar el peso. El sólido mostrado de modulo elástico Y tiene altura H y bases circulares de radios R y $2R$



Solución.

$$d(\Delta H) = \frac{Fdy}{Y\pi r^2},\ r = R + x$$

En los triángulos ABC y ADE:



$$\frac{y}{R} = \frac{x}{H} \Rightarrow x = \frac{R}{H}x$$

$$d(\Delta H) = \frac{Fdy}{Y\pi(R+x)^2} = \frac{F}{\pi Y}\frac{dy}{\left(R + \frac{R}{H}x\right)^2}$$

$$= \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}(H+x)^{-2}dy$$

$$\Delta H = \int \Delta H = \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}\int_0^H (H+x)^{-2}dy$$

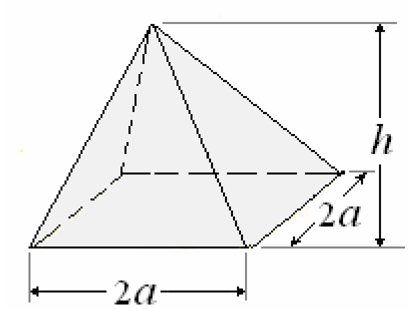
$$= \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}\left[\frac{(H+x)^{-1}}{-1}\right]_0^H$$

$$\Delta H = \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}\left[\frac{1}{2H}\right] = \frac{FH}{2\pi R^2 Y}$$

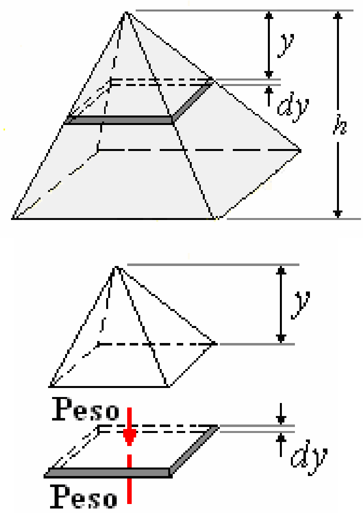
Deformaciones no uniformes por peso propio y área variable.

Ejemplo 26. Determine la deformación que sufre la altura de la Gran pirámide de Keops en Egipto debido a su propio peso, sabiendo que posee una altura de 147 m, su base es cuadrada de lado 230 m y que fue construida con bloques de piedra caliza y granito con módulo de Young = 35 x 10^9 N/m^2 y densidad = 2400 kg / m^3.

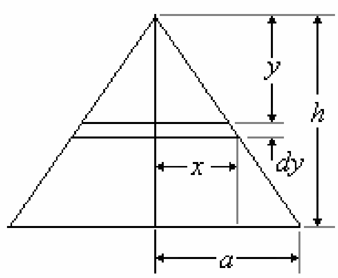
Solución.



Tomemos un elemento diferencial dy, tal como de indica en la figura



Este elemento sufre una acortamiento $d(\Delta h)$, debido al peso de la porción de pirámide que soporta (de altura y, radio base de lado $2x$).



El peso que soporta es: $\text{Peso} = \rho g(\frac{1}{3}4x^2 y)$ el área de su base es: $A_x = 4x^2$

$$d(\Delta h) = \frac{\rho g 4x^2 ydy}{3Y4x^2} = \frac{\rho g}{3Y}ydy$$

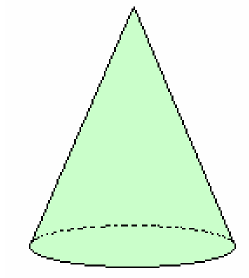
Integrando desde $y = 0$ hasta $y = h$

$$\Delta h = \int_0^h \frac{\rho g}{3Y}ydy = \frac{\rho g}{3Y}\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^h = \frac{1}{2}\frac{\rho g h^2}{3Y}$$

Como el Peso total es $\frac{\rho g A h}{3}$, obtenemos:

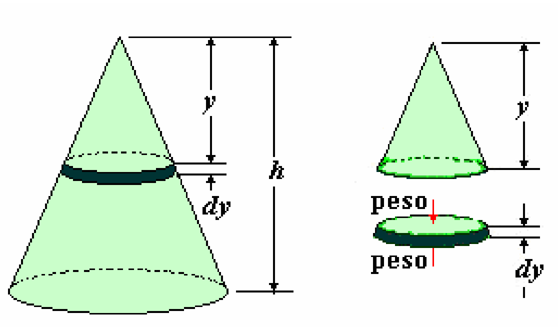
$$\Delta h = \frac{1}{2}\frac{(\text{Peso total})h}{Y(\text{Area base})}$$

Ejemplo 27. Encontrar cuanto se comprime el cono de altura h y base de área A debido a su propio peso. El cono esta hecho de un material de densidad ρ y módulo de elasticidad Y.

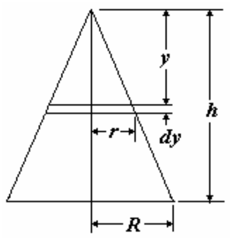


Solución.

Tomemos un elemento diferencial dy, tal como de indica en la figura



Este elemento sufre una acortamiento $d(\Delta h)$, debido al peso de la porción de cono que soporta (de altura y, radio de la base r).



El peso que soporta es: $peso = \rho g(\frac{1}{3}\pi r^2 y)$ el

área de su base es: $A = \pi r^2$

$$d(\Delta h) = \frac{\rho g \pi r^2 y dy}{3Y\pi r^2} = \frac{\rho g}{3Y} y dy$$

Integrando desde $y = 0$ hasta $y = h$

$$\Delta h = \int_0^h \frac{\rho g}{3Y} y dy = \frac{\rho g}{3Y} \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^h = \frac{1}{2}\frac{\rho g h^2}{3Y}$$

Como el Peso total es $\rho g A h/3$, obtenemos:

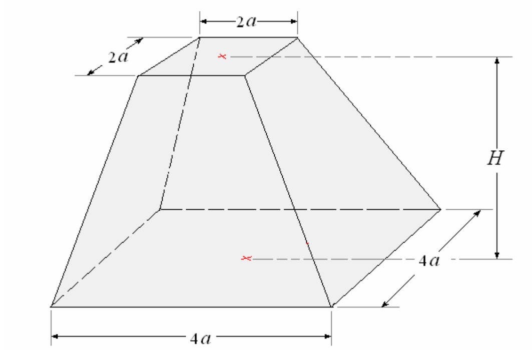
$$\Delta h = \frac{1}{2}\frac{(\text{Peso total})h}{Y(\text{Area base})}$$

Ejemplo 28. En la figura se muestra un tronco recto de pirámide regular de base cuadrada. Determinar cuánto se comprime el sólido homogéneo debido a su peso propio.

Datos: Densidad = ρ, gravedad = g, módulo de Young = Y

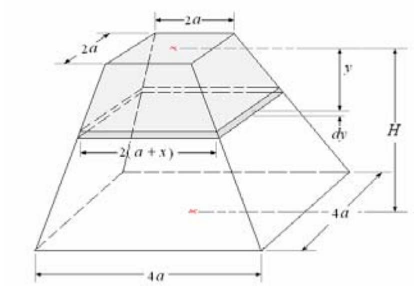
Lado de la base menor = $2a$; lado de la base mayor = $4a$

Altura del tronco de pirámide regular = H



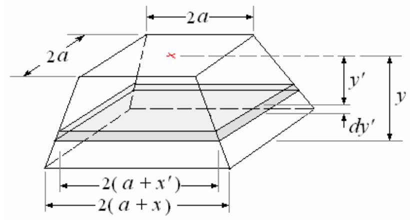
Solución.

Para determinar cuánto se comprime el sólido tomamos un elemento diferencial dy y vemos cuanto se comprime por efecto del peso de la parte tronco de pirámide que está sobre él (la parte de altura y en el dibujo).



Cálculo del peso de la de la parte tronco de pirámide que está sobre el elemento diferencial.

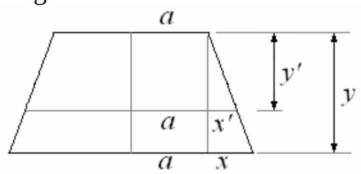
Para esto tomamos un elemento diferencial de altura dy' y lo integramos desde $x = 0$ hasta $x = x'$.



El peso del elemento diferencial es:

$$dP = \rho g dV = \rho g 4(a + x')^2 dy'$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$$y' = \frac{y}{x}x' \text{ y } dy' = \frac{y}{x}dx' :$$

$$dP = 4\rho g \frac{y}{x}(a + x')^2 dx'$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = x'$:

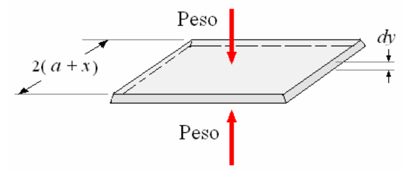
$$P = \int dP = 4\rho g \frac{y}{x}\int_0^{x'} (a + x')^2 dx'$$

$$= 4\rho g \frac{y}{x}\frac{(a + x')^3}{3}\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{4\rho g y}{3x}\left[(a + x)^3 - a^3\right]$$

El elemento diferencial se comprime:

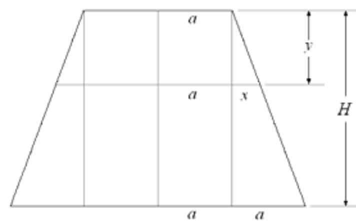
$$d(\Delta H) = \frac{Pdy}{YA} \ , \ A = (2a + 2x)^2 = 4(a + x)^2$$



Reemplazando:

$$d(\Delta H) = \frac{4\rho g y}{3Yx}\frac{\left[(a + x)^3 - a^3\right]}{4(a + x)^2}dy$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$$y = \frac{H}{a}x\ ,\ dy = \frac{H}{a}dx:$$

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\frac{\left[(a+x)^3 - a^3\right]}{(a+x)^2}dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\left[a + x - a^3(a+x)^{-2}\right]dx$$

Integrando desde x = 0 hasta x = a:

$$\Delta H = \int d(\Delta H)$$

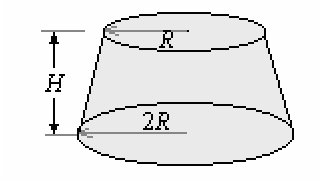
$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\int_0^a \left[a + x - a^3(a+x)^{-2}\right]dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\left[ax + \frac{x^2}{2} + \frac{a^3}{(a+x)}\right]_0^a$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\left(a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - a^2\right)$$

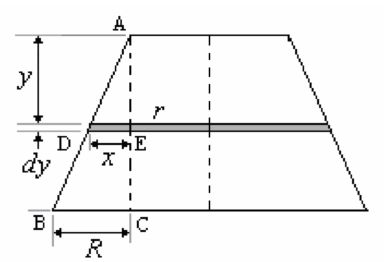
$$= \frac{1}{3}\frac{\rho g H^2}{Y}$$

Ejemplo 29. Determine la deformación que sufre la altura debido al peso propio
El sólido mostrado tiene peso F, modulo elástico Y, altura H y bases circulares de radios R y 2R

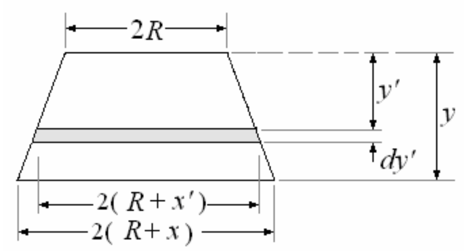


Solución.

Para determinar cuánto se comprime el sólido tomamos un elemento diferencial dy y vemos cuanto se comprime por efecto del peso de la parte tronco de cono que está sobre él (la parte de altura y en el dibujo).



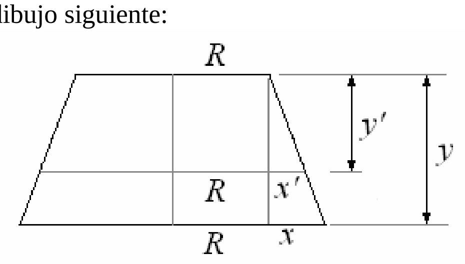
Cálculo del peso P de la de la parte tronco de cono que está sobre el elemento diferencial.
Para esto tomamos un elemento diferencial de altura dy' y lo integramos desde x = 0 hasta x = x'.



El peso del elemento diferencial es:

$$dP = \rho g dV = \rho g \pi (R + x')^2 dy'$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$$y' = \frac{y}{x}x' \text{ y } dy' = \frac{y}{x}dx':$$

$$dP = \rho g \pi \frac{y}{x}(R + x')^2 dx'$$

Integrando desde x = 0 hasta x = x':

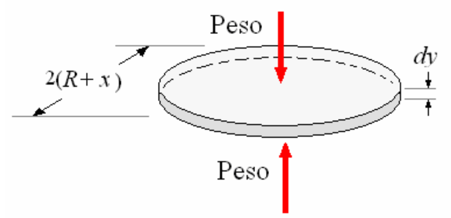
$$P = \int dP = \rho g \pi \frac{y}{x}\int_0^{x'} (R + x')^2 dx'$$

$$= \rho g \pi \frac{y}{x}\frac{(R+x')^3}{3}\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{\rho g \pi y}{3x}\left[(R+x)^3 - R^3\right]$$

El elemento diferencial se comprime:

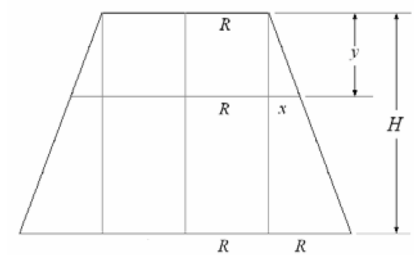
$$d(\Delta H) = \frac{Pdy}{YA}\ ,\ \ A = \pi(R+x)^2$$



Reemplazando:

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g \pi y}{3Yx}\frac{\left[(R+x)^3 - R^3\right]}{\pi(R+x)^2}dy$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$y = \frac{H}{R}x$, $dy = \frac{H}{R}dx$:

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\frac{\left[(R+x)^3 - R^3\right]}{(R+x)^2}dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\left[R + x - R^3(R+x)^{-2}\right]dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = R$:

$$\Delta H = \int d(\Delta H)$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\int_0^R \left[R + x - R^3(R+x)^{-2}\right]dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\left[Rx + \frac{x^2}{2} + \frac{R^3}{(a+x)}\right]_0^R$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\left(R^2 + \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} - R^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\rho g H^2}{Y}$$

El peso del tronco de cono es:

$$F = \frac{1}{3}\pi(2R)^2(2H)\rho g - \frac{1}{3}\pi(R)^2(H)\rho g$$

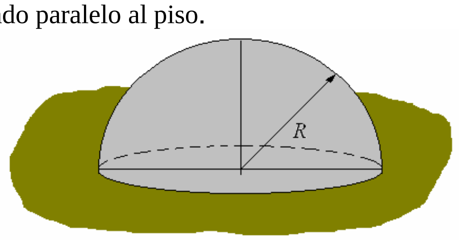
$$= \frac{1}{3}\pi R^2 H\rho g(8-1) = \frac{7}{3}\pi R^2 H\rho g$$

Luego

$$\Delta H = \frac{F}{\frac{7}{3}\pi R^2 H\rho g}\frac{1}{3}\frac{\rho g H^2}{Y}$$

$$= \frac{FH}{7\pi R^2 Y}$$

Ejemplo 30. Un hemisferio (mitad de una esfera sólida) de densidad ρ , radio R y modulo de Young Y esta sobre el piso descansando sobre su base circular determine cuanto se deforma por acción de su propio peso.
Sugerencia: Calcule la deformación de una porción diferencial del hemisferio formada por un disco delgado paralelo al piso.



Solución.

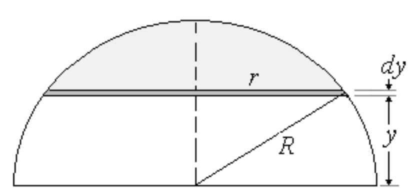
Vamos a considerar un elemento diferencial de área $A = \pi r^2$, altura dy

Donde $r^2 = (R^2 - y^2)$

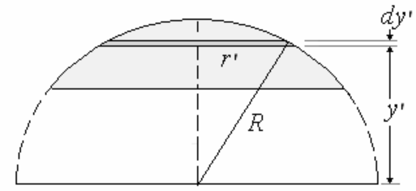
El elemento diferencial soporta el peso P de la parte de hemisferio que está sobre él.

De tal manera que se deforma:

$$d(\Delta R) = \frac{P_{(y)}dy}{YA}$$



Cálculo de $P_{(y)}$



Peso del elemento diferencial

$$dP_{(y)} = \rho\pi g\left(R^2 - y'^2\right)dy'$$

El peso $P_{(y)}$ de la porción de hemisferio es:

$$P_{(y)} = \rho\pi g\int_y^R (R^2 - y'^2)dy' =$$

$$\rho g\pi\left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3}\right)$$

Ahora la deformación total Integrando

$$d(\Delta R) = \frac{P_{(y)}dy}{YA} :$$

$$d(\Delta R) = \frac{g\pi\left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3}\right)dy}{Y\pi\left(R^2 - y^2\right)}$$

$$\Delta R = \rho g\pi\frac{1}{Y}\int_0^R\left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\frac{dy}{(R^2 - y^2)}$$

$$= \frac{\rho g}{Y}\int_0^R \frac{\left(\frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3}R^2 y\right) + \left(-\frac{1}{3}R^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)}{\left(R^2 - y^2\right)}dy$$

$$= \frac{\rho g}{Y}\int_0^R \frac{\frac{2R^2}{3}(R-y) - \frac{y}{3}\left(R^2 - y^2\right)}{(R-y)(R+y)}dy$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\int_0^R \left[\frac{2R^2}{(R+y)} - y\right]dy$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\left[2R^2\ln(R+y) - \frac{y^2}{2}\right]_0^R$$

$$= \frac{\rho g R^2}{3Y}\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{0{,}30\rho g R^2}{Y}$$

La altura del hemisferio disminuye

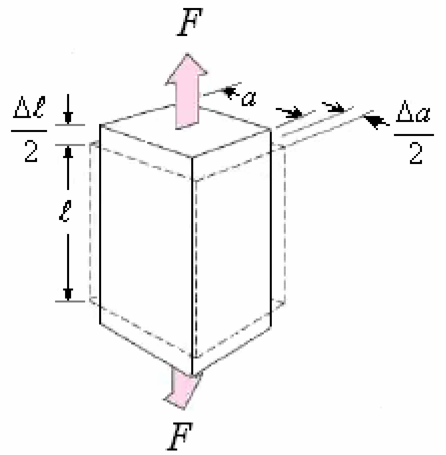
$\Delta R = \dfrac{0{,}30\rho g R^2}{Y}$ Debido al peso propio

DEFORMACION LATERAL MODULO DE POISSON

Adicionalmente, cuando estiramos un bloque en una dirección éste se contrae en las dimensiones perpendiculares al estiramiento, la contracción de las caras laterales es en la misma proporción para el ancho (a) y el alto (h). Por ejemplo, la contracción Δa en el ancho es proporcional al ancho a y también a $\dfrac{\Delta \ell}{\ell}$, lo que resumimos en la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma\frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Donde σ es otra constante del material conocida como **el módulo de Poisson.**



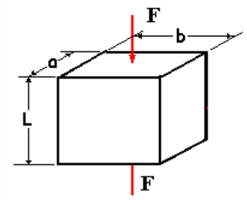
Como valores aproximados para algunos materiales se puede tomar:

0,28 para hierro y acero, 0,5 para caucho y 0,25 para vidrio.

Las dos constantes Y y σ especifican completamente las propiedades de un material homogéneo isotrópico.

Nombre	Módulo de Poisson σ Sin dimensiones
Aluminio	0,34
Acero	0,28
Cobre	0,35
Oro	0,41
Hierro, fundido	0,28
Plomo	0,33
Nickel	0,30
Platino	0,38
Plata	0,37
Latón	0,33

Ejemplo 31. El paralelepípedo de la figura está hecho de un material con módulo de Young Y, y constante poisson σ. ¿Cuál es el valor de $\Delta V/V$?



Solución.

Debido a la compresión ocasionada por la fuerza F:

$\dfrac{\Delta L}{L} = -\dfrac{F}{YA}$ y como $\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta L}{L}$

Obtenemos: $\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{F}{YA}$

Como $\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{\Delta L}{L} + \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}$

Reemplazando

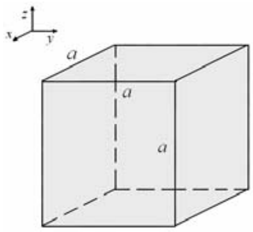
$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{F}{YA} + \sigma\frac{F}{YA} + \sigma\frac{F}{YA}$$

Finalmente:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{F}{YA}(1-2\sigma)$$

Ejemplo 32. Al cubo de la figura de lado 50cm se le aplica dos pares de fuerzas F_x=100 N y F_y=50 N obteniendo como resultado que la longitud en el eje x aumenta en 0,01% y la longitud en el eje y disminuye en 0,006%.

a) Determine si el esfuerzo en x,y es de tracción o compresión.
b) Determine el módulo de Young y la constante de Poisson.



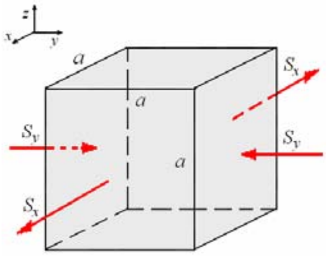
Solución.

a) $S_x = \dfrac{100}{(0{,}5)^2}$ = 400 N/m^2, $S_y = \dfrac{50}{(0{,}5)^2}$ = 200 N/m^2

$$\frac{\Delta a_x}{a} = \frac{0{,}01}{100} = 1\times 10^{-4},$$
$$\frac{\Delta a_y}{a} = -\frac{0{,}006}{100} = -6\times 10^{-5}$$

Haciendo un análisis de los cambios de longitudes:
El esfuerzo en x es mayor y la longitud en x aumenta mientras que en y disminuye, siendo el esfuerzo en y menor, se puede concluir que el esfuerzo en x es de tracción y el esfuerzo en y es de compresión.

b) El paralelepípedo esta sujeto a esfuerzo por cuatro caras, como se muestra en la figura siguiente:



Sea S el esfuerzo sobre cada una de las caras laterales.

La deformación del lado horizontal a_x es:

$$\frac{\Delta a_x}{a} = \frac{400}{Y} + \sigma\frac{200}{Y} = 1\times 10^{-4} \qquad (1)$$

La deformación del lado horizontal a_y es:

$$\frac{\Delta a_y}{a} = -\frac{200}{Y} - \sigma\frac{400}{Y} = -0{,}6\times 10^{-4} \qquad (2)$$

Restando (1) + (2)/2, obtenemos:

$$\frac{400}{Y} - \frac{100}{Y} = 0{,}7\times 10^{-4} \Rightarrow \frac{300}{Y} = 0{,}7\times 10^{-4}$$
$$\Rightarrow Y = \frac{300}{0{,}7\times 10^{-4}} = 4{,}28 \text{ x } 10^6 \text{ N/m}^2$$

Reemplazando el valor de Y en (1):

$$\frac{400}{4{,}28\times 10^6} + \sigma\frac{200}{4{,}28\times 10^6} = 1\times 10^{-4} \Rightarrow$$
$$4 + 2\sigma = 4{,}28$$
$$\Rightarrow \sigma = 0{,}14$$

Ejemplo 33. a) Calcule la deformación volumétrica durante la extensión elástica de una barra cilíndrica sometida a tracción axial. El material es isótropo y la deformación se supone pequeña.
b) ¿Para qué valor del módulo de Poisson, el alargamiento ocurre sin cambio de volumen?
c) El módulo de Poisson de la mayoría de metales es aprox. 0,3. El del corcho, aprox. 0,0 y el del caucho cercano a 0,5. ¿Cuáles son las deformaciones volumétricas de esos materiales al someterlos a una compresión elástica $\varepsilon < 0$?

Solución.

a) Para la altura $\frac{\Delta h}{h} = \frac{S}{Y}$, para el diámetro

$$\frac{\Delta D}{D} = -\sigma\frac{\Delta h}{h} = -\sigma\frac{S}{Y}$$

El cambio de volumen es $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta D}{D} =$

$\frac{S}{Y} - 2\sigma\frac{S}{Y} = \frac{S}{Y}(1-2\sigma)$, por lo tanto

$$\Delta V = \frac{S}{Y}(1-2\sigma)V = \frac{S}{Y}(1-2\sigma)\frac{\pi D^2 h}{4}$$

b) ΔV es igual a cero cuando $(1-2\sigma) = 0 \Rightarrow$
$\sigma = 0{,}5$

c) Para la mayoría de metales con un valor de σ aproximado a 0,3:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1-2(0{,}3)] = 0{,}4\frac{S}{Y}$$

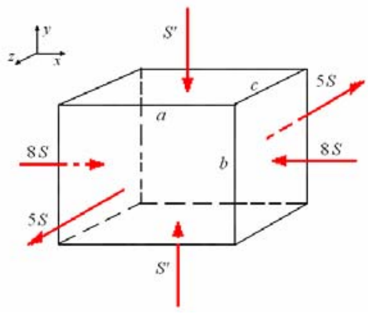
Para el corcho, con un valor de σ aproximado a 0,0:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1-2(0{,}0)] = \frac{S}{Y}$$

Para el caucho, con un valor de σ aproximado a 0,5:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1-2(0{,}5)] = 0{,}0$$

Ejemplo 34. El sólido de la figura está sometido a los esfuerzos de compresión y tracción mostrados en las direcciones x y z, respectivamente. Determine cual será el esfuerzo (S') en la dirección y, tal que la deformación unitaria en esa dirección sea nula.
Datos: S = esfuerzo, Y = módulo de Young, σ = módulo de Poisson.



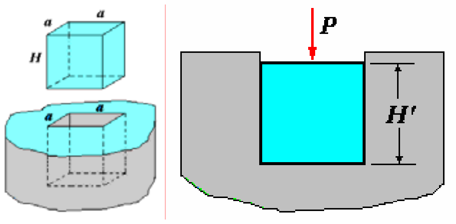
Solución.

	$\frac{\Delta a}{a}$	$\frac{\Delta b}{b}$	$\frac{\Delta c}{c}$
Por $-8S$ en el eje x	$\frac{-8S}{Y}$	$\frac{\sigma 8S}{Y}$	$\frac{\sigma 8S}{Y}$
por - S' en el eje y	$\frac{\sigma S'}{Y}$	$-\frac{S'}{Y}$	$\frac{\sigma S'}{Y}$
Por $5S$ en el eje z	$-\frac{\sigma 5S}{Y}$	$-\frac{\sigma 5S}{Y}$	$\frac{5S}{Y}$
Deformación total		$\frac{1}{Y}(3\sigma S - S')$	

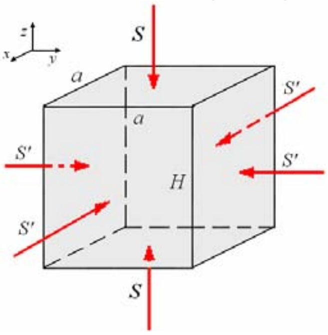
Para que la deformación unitaria en la dirección y sea nula, se debe cumplir:

$$\frac{1}{Y}(3\sigma S - S') = 0 \Rightarrow 3\sigma S - S' = 0 \Rightarrow$$
$$S' = 3\sigma S$$

Ejemplo 35. Se tiene el paralelepípedo mostrado en la figura que encaja perfectamente en una caja rígida. Luego de encajo el paralelepípedo se coloca un peso *P* sobre éste, tal que lo aplasta uniformemente, la caja impide las expansiones laterales.
a) ¿Cuál es el esfuerzo sobre las paredes laterales?
b) ¿Cuál es el cambio en la altura $\Delta H = H - H'$ del paralelepípedo?



Solución.
El paralelepípedo esta sujeto a esfuerzo por sus seis caras, como se muestra en la figura siguiente:



Sea *S* el esfuerzo sobre la cara superior e inferior y *S'* el esfuerzo sobre cada una de las caras laterales.
La deformación del lado *a* es:

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S}{Y} \quad (1)$$

La deformación del lado *H* es:

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + 2\sigma\frac{S'}{Y} \quad (2)$$

a) Como la longitud *a* no cambia, $\Delta a = 0$.
De la ecuación (1):

$$-\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S}{Y} = 0 \Rightarrow S' = \frac{\sigma}{(1-\sigma)}S$$

Siendo $S = \dfrac{P}{a^2}$

$$\Rightarrow S' = \frac{\sigma P}{(1-\sigma)a^2}$$

b) De la ecuación (2):

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + 2\sigma\frac{S'}{Y} \Rightarrow$$
$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)}\frac{S}{Y} \Rightarrow$$
$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y}\left[1 - \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)}\right] \Rightarrow$$
$$\Delta H = -\frac{P}{Ya^2}\left[1 - \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)}\right]H$$

Ejemplo 36. Hallar el valor del módulo de Poisson para el cual el volumen de un alambre no varía al alargarse.
Solución.
$\dfrac{\Delta r}{r} = \sigma\dfrac{\Delta \ell}{\ell}$, de aquí el módulo de Poisson

$\sigma = \dfrac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}}$, siendo *r* el radio del alambre y ℓ su longitud. El volumen de dicho alambre antes de estirarlo es $V_1 = \pi r^2 \ell$ y su volumen después de estirado es $V_2 = \pi(r - \Delta r)^2(\ell + \Delta\ell)$
Si el volumen no varió con el alargamiento, tendremos que $\pi r^2 \ell = \pi(r-\Delta r)^2(\ell + \Delta \ell)$. Y abriendo los paréntesis y despreciando las magnitudes Δr y $\Delta \ell$ al cuadrado, hallamos que

$\pi r^2 \ell = 2\pi r \Delta r \ell$, de donde $\dfrac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, luego

σ = 0,5.

Ejemplo 37. Hallar la variación relativa de la densidad de una barra de cobre cilíndrica al ser comprimida por una presión p = 9810 Pa. Para el cobre tómese un módulo de Poisson σ = 0,34.
Solución.

La densidad de la barra antes de ser comprimida es

$\rho_1 = \dfrac{m}{V_1}$ donde $V_1 = \pi r^2 \ell$. La densidad de la barra después de comprimida será $\rho_2 = \dfrac{m}{V_2}$,

siendo $V_2 = \pi(r + \Delta r)^2(\ell - \Delta\ell)$. Por consiguiente la variación de la densidad será

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = m\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{m\Delta V}{V_2 V_1}$$

Como .la compresión no es muy grande, aproximadamente se puede tomar $V_2 V_1 = V_1^2$

Se puede considerar que $\Delta\rho = \dfrac{m\Delta V}{V_1^2}$.

Entonces la variación elativa de la densidad $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1}$. Hallemos pues la variación de volumen $\Delta V = \pi r^2\ell - \pi(r+\Delta r)^2(\ell - \Delta\ell)$.

Abriendo los paréntesis y despreciando los cuadrados de las magnitudes Δr y $\Delta\ell$, obtenemos que $\Delta V = V_1\left(\dfrac{\Delta\ell}{\ell}\right)(1-2\sigma)$, .donde σ es el módulo de Poisson. Por lo tanto $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1} = \dfrac{\Delta\ell}{\ell}(1-2\sigma)$. Pero como por la ley de Hooke $\dfrac{\Delta\ell}{\ell} = \dfrac{p_n}{Y}$, tendremos que en definitiva

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{p_n}{Y}(1-2\sigma).$$

En nuestro caso $p_n = 9{,}81\times 10^3\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$,

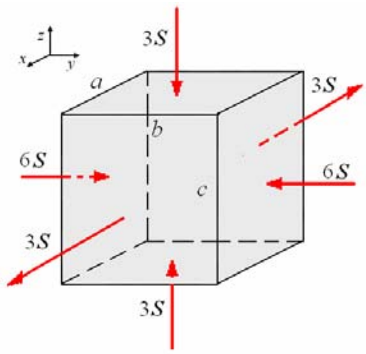
$Y = 1{,}18\times 10^{11}\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$ y σ = 0,34. Poniendo estos datos obtenemos que $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1} = 0{,}027\,\%$..

Ejemplo 38. El sólido de la figura (lados *a*, *b* y *c*) está sometido a los esfuerzos de compresión y tensión mostrados.

Determine la deformación volumétrica unitaria, $\Delta V / V$.

Datos:

S = esfuerzo, *Y* = módulo de Young, σ = módulo de Poisson.



Solución.

Deformación de cada uno de los lados:

	Deformación de *a*
Por 3*S* en el eje *x*	$\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{3S}{Y}$
Por -6*S* en el eje *y*	$\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$
Por -3*S* en el eje *y*	$\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\dfrac{\Delta a}{a}\right)total = \dfrac{3S}{Y}(1+3\sigma)$

	Deformación de *b*
Por 3*S* en el eje *x*	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$
Por -6*S* en el eje *y*	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\dfrac{6S}{Y}$
Por -3*S* en el eje *y*	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\dfrac{\Delta b}{b}\right)total = -\dfrac{6S}{Y}$

	Deformación de *c*
Por 3*S* en el eje *x*	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$
Por -6*S* en el eje *y*	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$
Por -3*S* en el eje *y*	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\dfrac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\dfrac{\Delta c}{c}\right)total = \dfrac{3S}{Y}(-1+\sigma)$

Consolidado

	Deformación de *a*	Deformación de *b*	Deformación de *c*
Por 3*S* en el eje *x*	$\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{3S}{Y}$	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$
Por -6*S* en el eje *y*	$\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\dfrac{6S}{Y}$	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$
Por -3*S* en el eje *y*	$\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\dfrac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\dfrac{\Delta a}{a}\right)total = \dfrac{3S}{Y}(1+3\sigma)$	$\left(\dfrac{\Delta b}{b}\right)total = -\dfrac{6S}{Y}$	$\left(\dfrac{\Delta c}{c}\right)total = \dfrac{3S}{Y}(-1+\sigma)$

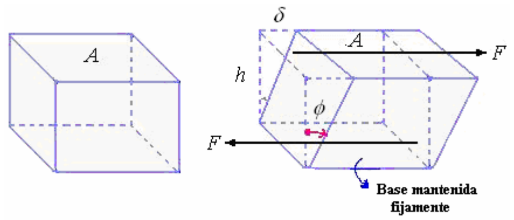
$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\Delta a}{a}\right)total + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)total + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)total$$

$$= \frac{3S}{Y}(4\sigma) - \frac{6S}{Y} = \frac{6S}{Y}(2\sigma - 1)$$

DEFORMACIÓN POR CIZALLADURA O CORTE. MODULO DE CIZALLADURA O RIGIDEZ.

Deformación por cizalladura

Ya hemos estudiado el módulo de elasticidad Y de un material, es decir, la respuesta del material cuando sobre él actúa una fuerza que cambia su volumen (aumentando su longitud). Ahora, examinaremos la deformación por cizalladura en el que no hay cambio de volumen pero si de forma. Definimos el esfuerzo como *F*/*A* la razón entre la fuerza tangencial al área *A* de la cara sobre la que se aplica. La deformación por cizalla, se define como la razón $\Delta x/h$, donde Δx es la distancia horizontal que se desplaza la cara sobre la que se aplica la fuerza y *h* la altura del cuerpo, tal como vemos en la figura.



Cuando la fuerza *F* que actúa sobre el cuerpo es paralela a una de las caras mientras que la otra cara permanece fija, se presenta otro tipo de deformación denominada de cizalladura en el que no hay cambio de volumen pero si de forma. Si originalmente el cuerpo tiene forma rectangular, bajo un esfuerzo cortante la sección transversal se convierte en un paralelogramo.

El módulo de cizalladura o de rigidez G es una propiedad mecánica de cada material

Siendo pequeños los ángulos de desplazamiento podemos escribir

$$Deformación = \frac{\delta}{h} = \tan\phi \approx \phi$$

$$G = \frac{esfuerzo}{deformación} = \frac{F/A}{\delta/h} = \frac{S_t}{\phi}$$

La ley de Hooke para la deformación por cizalladura se puede escribirla de modo siguiente:

$$S_t = G\phi$$

El módulo de cizalladura G es característico de cada material

Nombre	Módulo de rigidez *G* 10^{10} N/m^2
Aluminio	2,5
Cobre	4,3
Oro	3,5
Hierro, fundido	3,2
Plomo	0,6
Nickel	7,4
Acero	7,5
Latón	1,7

Ejemplo 39. Un cubo de gelatina de 30 cm de arista tiene una cara sujeta mientras que a la cara opuesta se le aplica una fuerza tangencial de 1 N. La superficie a la que se aplica la fuerza se desplaza 1 cm.
a) ¿Cuál es el esfuerzo de corte?
b) ¿Cuál es la deformación de corte?
c) ¿Cuál es el módulo de corte?

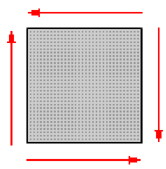
Solución.

a) $S_t = \frac{F}{A} = \frac{1}{(0{,}30)^2} = 11{,}11 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

b) $\delta = \frac{\Delta x}{h} = \frac{1}{30} = 0{,}033$

c) $G = \frac{S_t}{\delta} = \frac{11{,}11}{0{,}033} = 333{,}33$

Ejemplo 40. Un cubo de acero de 5 cm de arista se halla sometido a 4 fuerzas cortantes, de 1200 kg, cada una, aplicadas en sentidos opuestos sobre caras opuestas. Calcule la deformación por cizalladura.



Solución.

$G_{\text{Acero al carbono}} = 8 \times 10^9$ N/m^2

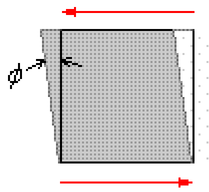
$$G = \frac{esfuerzo}{deformación} = \frac{F/A}{\delta/h} = \frac{S_t}{\phi}$$

$$S_t = \frac{F}{A} = \frac{(1200(9{,}8))}{(0{,}05)^2} = 4{,}704 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

Consideremos solamente las fuerzas horizontales, estas producen una deformación ϕ, como se muestra en la figura

$$\phi = \frac{S_t}{G} = \frac{4{,}704 \times 10^6}{8 \times 10^9} = 0{,}588 \times 10^{-3}$$

radianes

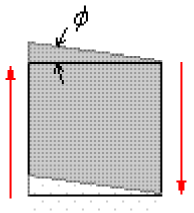


La cara que se muestra queda como un rombo con ángulos $\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$

Consideremos ahora solamente las fuerzas verticales, estas producen una deformación también ϕ, como se muestra en la figura

$$\phi = \frac{S_t}{G} = \frac{4{,}704 \times 10^6}{8 \times 10^9} = 0{,}588 \times 10^{-3}$$

radianes

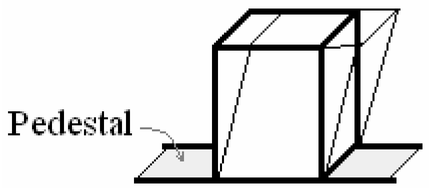


El cubo se deforma en el plano del papel y toma la forma de un rombo con ángulos $\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2} + 2\phi\right)$

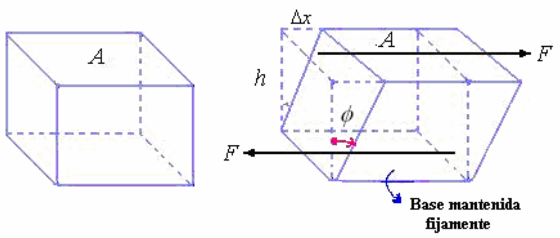
Ejemplo 41. Una estatua se encuentra soldada a un pedestal de latón, que se muestra en la figura. Al producirse un movimiento sísmico se observa un desplazamiento lateral de la cara superior del pedestal de 0,25mm.

Calcular:

a) El esfuerzo de corte.
b) La magnitud de la fuerza producida por el movimiento sísmico.
El pedestal de latón tiene una altura de 1m y una sección cuadrada de 0,5m de lado.
El módulo de Young del latón es 3,5x10^{10} Pa
Módulo de rigidez G del latón es 1,7 x10^{10} N/m^2



Solución.
Desplazamiento lateral de la cara superior del pedestal de 0,25mm.



a) El esfuerzo de corte.

$$\delta = \frac{\Delta x}{h} = \frac{0,25\times10^{-3}}{1,00} = 0,25\times10^{-3}$$

$$G = \frac{S_t}{\delta} \Rightarrow$$

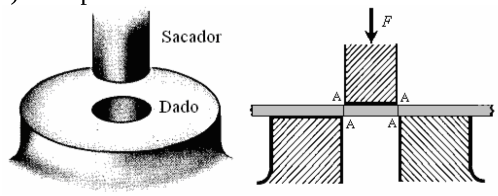
$S_t = G\delta$ = (1,7 x 10^{10})(0,25 x10^{-3})
= 0,425 x 10^7 N/m^2

b) La magnitud de la fuerza producida por el movimiento sísmico.

$$S_t = \frac{F}{A} \Rightarrow$$

$F = S_t A$ = (0,425 x 10^7)(0,5^2)
= 2,65 x 10^5 N

Ejemplo 42. El acero promedio requiere, típicamente, un esfuerzo de 3,45 x 10^8 N/m^2 para la ruptura por cizalladura. Determine la fuerza requerida para perforar un agujero del diámetro 2,5 cm en una placa de acero de ¼ de pulgada (6,25 mm) de espesor.

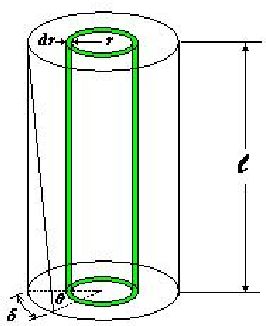


Solución.
La circunferencia de un círculo del diámetro D = 2,5 cm es $C = \pi D = 7,85x10^{-2}\,\text{m}$, El área del borde del disco cortado AAAA es el producto de la circunferencia C por el espesor del material, esto es $\left(6,25\times10^{-3}\right)\left(7,85\times10^{-2}\right) = 49,06\times10^{-5}\text{m}^2$.
Una fuerza de la magnitud F se ejerce en el sacador, el esfuerzo de corte (fuerza por unidad de área) a través del borde es $S = \frac{F}{A} \Rightarrow$

$F = S.A = \left(3,45\times10^8\right)\left(49,06\times10^{-5}\right)$
= 1,69 x 10^5 N. La hoja de acero se corta por cizalladura cuando el esfuerzo llega a ser igual 3,45 x 10^8 N/m^2, es decir, cuando F = 1,69 x 10^5 N.
Esta es la fuerza de 1,69 x 10^5 N, equivalente a 17,3 toneladas es requerida para perforar el agujero de 2,5 cm de diámetro El sacador y los dados son operados por una máquina conocida como prensa; en este caso uno tendría que utilizar una prensa con una capacidad de 20 toneladas o más.

Ejemplo 43. Calcular el módulo de rigidez del material en función a las características geométricas de un alambre (longitud ℓ y radio R) y del torque aplicado.

Manteniendo el extremo superior fijo aplicamos un torque τ que gira al extremo inferior un ánguloθ. Consideremos una capa diferencial cilíndrica de material concéntrica con el eje, de radio interior r y de espesor dr, como se muestra en la figura.



La deformación es

$$\phi = \frac{\delta}{\ell} = \frac{r\theta}{\ell}$$

El esfuerzo cortante es

$$S_t = G\phi = \frac{Gr\theta}{\ell}$$

Como el esfuerzo cortante es la fuerza tangencial por unidad de área, multiplicándolo por el área de la sección transversal de la Capa, 2π rdr, nos dará la fuerza tangencial dF sobre la base de la Capa

$$dF = S_t dA = \left(\frac{Gr\theta}{\ell}\right)(2\pi r dr) = 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^2 dr$$

El torque sobre la base de la Capa cilíndrica es

$$d\tau = rdF = r\left(2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^2 dr\right) = 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^3 dr$$

Integrando de 0 a R, el torque total sobre la base del cilindro es

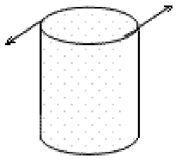
$$\tau = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell}\theta$$

De aquí

$$G = \frac{2\tau\ell}{\pi R^4 \theta}$$

O sea, para determinar C bastará con medir el ángulo θ que se produce al aplicar el torque M.

Ejemplo 44. Una varilla de cobre de 40 cm de longitud y de 1 cm de diámetro está fija en su base y sometida a un par de 0,049 Nm en torno a su eje longitudinal. ¿Cuántos grados gira la cara superior respecto de la inferior?



Solución.

Cobre estirado en frío G = 48,0x10^9 N/m^2

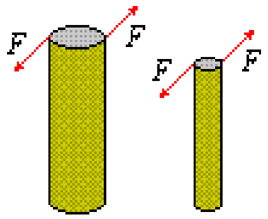
$$\tau = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell}\theta \quad \theta = \frac{2\ell\tau}{\pi G R^4}$$

$$\theta = \frac{2(0,4)(0,049)}{\pi(48,0\times10^9)(0,5\times10^{-2})} = 2,08 \text{ x}10^{-4}$$

radianes

Ejemplo 45. Una varilla que tiene 100 cm de longitud y 1 cm de diámetro está sujeta rígidamente por un extremo y se le somete a torsión por el otro hasta un ángulo de lº. Si se aplica la misma fuerza a la circunferencia de una varilla del mismo material pero que tiene una longitud de 80 cm y un diámetro de 2 cm, ¿cuál es el ángulo de torsión resultante?

Solución.



$$\tau = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell}\theta \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{32} G \frac{D^4}{\ell}\theta,$$

Como $\tau = FD \Rightarrow FD = \frac{\pi}{32} G \frac{D^4}{\ell}\theta$, de aquí

$$\theta = \left(\frac{32F}{\pi G}\right)\left(\frac{\ell}{D^3}\right)$$

Para la varilla de 100 cm y de 80 cm respectivamente son:

$$\theta_1 = \left(\frac{32F}{\pi G}\right)\left(\frac{\ell_1}{D_1^3}\right) \text{ Y } \theta_2 = \left(\frac{32F}{\pi G}\right)\left(\frac{\ell_2}{D_2^3}\right)$$

De estas últimas obtenemos:

$$\theta_2 = \left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 \theta_1 = \left(\frac{80}{100}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 1^{\circ}$$

$= 0,1^{\circ}$

DEFORMACION VOLUMETRICA. MODULO DE ELASTICIDAD VOLUMETRICO.

Módulo de elasticidad volumétrico.

Consideramos ahora un volumen de material V sujeto a un esfuerzo unitario p_0 (por ejemplo la presión atmosférica) sobre toda la superficie.

Cuando el esfuerzo a presión se incrementa a $p = p_0 + \Delta p$ y el volumen sufre una disminución ΔV, la deformación unitaria es $\delta = -\Delta V/V$

El esfuerzo es $\frac{F}{A} = \Delta p$.

La razón del esfuerzo de compresión uniforme a la deformación por compresión uniforme recibe es el módulo de elástico que en este caso se conoce como **módulo de compresibilidad volumétrica o volumétrico (*B*).**

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$$

Donde la constante de proporcionalidad B, depende solamente del material. El módulo volumétrico tiene las dimensiones de la presión, esto es, fuerza/área y es aplicable tanto para sólidos como líquidos. Pero, los gases tienen un comportamiento diferente que será considerado posteriormente.

Nombre	Módulo volumétrico B 10^{10} N/m^2
Aluminio	7,5
Cobre	14

Hierro	16
Plomo	17
Níckel	4,1
Vidrio óptico	5,0
Latón	6,0
Acero	16
Agua	0,21
Mercurio	2,8

Ejemplo 46. ¿Qué incremento de presión se requiere para disminuir el volumen de un metro cúbico de agua en un 0,005 por ciento?
Solución.
Por elasticidad volumétrica tenemos:

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}$$

El módulo de compresibilidad del agua es $2,1 \times 10^{9}$ N/m^{2}

$$\Delta p = -2,1\times 10^{9}\left(\frac{-0,00005V}{V}\right)$$

$= 1,05 \times 10^{5}$ N/m^{2}

Ejemplo 47. Calcule densidad del agua del océano a una profundidad en que la presión es de 3430 N/cm^2. La densidad en la superficie es 1024 kg/m^3.
El módulo de compresibilidad del agua es $2,1 \times 10^{9}$ N/m^{2}
Solución.
p = 3430 N/cm^2 = 3,430 x10^7 N/m^2,
Δp = 3,430 x10^7– 1,013 x10^5 $\approx$ 3,430 x10^7 N/m^2

En la superficie $\rho = \frac{m}{V} = 1024\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Cuando cambia el volumen a $V' = (V + \Delta V)$, tenemos:

$$\rho' = \frac{m}{V'} = \frac{m}{V+\Delta V} = \frac{m}{V\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)}$$

$$= \frac{\rho}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)}$$

Como $B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{B}$

De aquí:

$$\rho' = \frac{\rho}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)} = \frac{\rho}{\left(1-\frac{\Delta p}{B}\right)}$$

$$= \frac{1024}{\left(1-\frac{3,430\times 10^{7}}{2,1\times 10^{9}}\right)} = 1041 \text{ kg/m}^3$$

Ejemplo 48. Si con aluminio se fabrica un cubo de 10 cm de lado, se quiere saber las deformaciones que experimentará en una compresión uniforme, perpendicular a cada una de sus caras, de una tonelada, y cuándo esta misma fuerza actúa tangencialmente a la superficie de una de sus caras, estando el cubo só1idamente sujeto por la cara opuesta.
Solución.
La presión que soporta, cada cara, en el primer caso, será:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{(100)(9,8)}{0,1^2} = 9,8\times 10 \text{ Pa}$$

Como el módulo volumétrico del aluminio es B = 3,5x 10^{10} N/m^2:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{B} = -\frac{9,8\times 10^{5}}{3,5\times 10^{10}} = -2,8\times 10^{-5}$$

De donde:
ΔV = - 2,8x 10^{-5} V = - 2,8x 10^{-5}x 10^{-3} = - 2,8x 10^{-8} m^3.
En cuanto a la deformación, se obtiene a partir de la expresión de la deformación de cizalla, que es:

$$\tan\varphi \approx \varphi = \frac{1}{G}\frac{F}{A} = \frac{1}{3\times 10^{11} x 10^{-1}}\frac{(10^3)(9,8)}{10^{-2}}$$

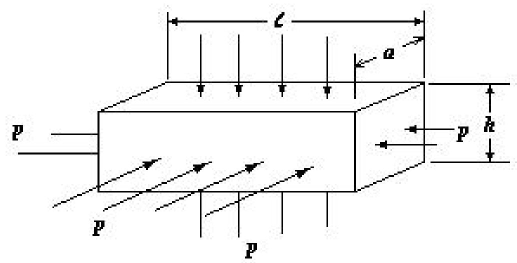
= 3,27x10^{-5} rad

RELACION ENTRE CONSTANTES ELASTICAS.

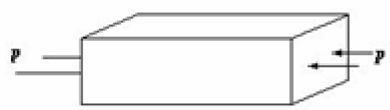
Relación entre B, Y y σ

Muestra sometida a una presión uniforme.

La figura siguiente muestra un bloque bajo presión uniforme en toda su superficie exterior

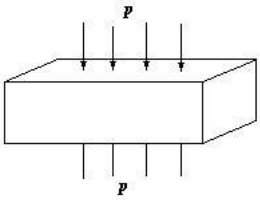


Como la presión es uniforme, el esfuerzo unitario en cada cara es el mismo.
Y las deformaciones de cada una de las dimensiones son:
Dimensión ℓ:



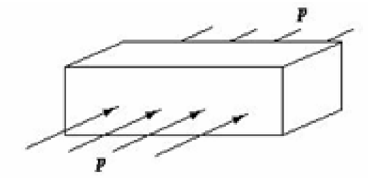
$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = -\frac{p}{Y}$$

Dimensión *a*:



$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{p}{Y}$$

Dimensión *b*:



$$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{p}{Y}$$

Pero, como la deformación de una dimensión lleva a la deformación de las otras dimensiones, tenemos.

Deformación de ℓ:

- Propia:

$$\frac{\Delta \ell_1}{\ell} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *a*:

$$\frac{\Delta \ell_2}{\ell} = -\sigma \frac{\Delta a}{a} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *b*:

$$\frac{\Delta \ell_3}{\ell} = -\sigma \frac{\Delta b}{b} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta \ell_1}{\ell} + \frac{\Delta \ell_2}{\ell} + \frac{\Delta \ell_3}{\ell}$$

$$= -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma)$$

Deformación de *a*:

- Propia:

$$\frac{\Delta a_1}{a} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de ℓ:

$$\frac{\Delta a_2}{a} = -\sigma \frac{\Delta \ell}{\ell} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *b*:

$$\frac{\Delta a_3}{a} = -\sigma \frac{\Delta b}{b} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a_1}{a} + \frac{\Delta a_2}{a} + \frac{\Delta a_3}{a}$$

$$= -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma)$$

Deformación de *b*:

- Propia:

$$\frac{\Delta b_1}{b} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *a*:

$$\frac{\Delta b_2}{b} = -\sigma \frac{\Delta a}{a} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de ℓ:

$$\frac{\Delta b_3}{b} = -\sigma \frac{\Delta \ell}{\ell} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta b_1}{b} + \frac{\Delta b_2}{b} + \frac{\Delta b_3}{b}$$

$$= -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma)$$

El cambio de volumen es:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$= -\frac{3p}{Y}(1 - 2\sigma)$$

Sabemos nosotros que el módulo de compresibilidad es

$$B = -\frac{p}{\Delta V / V}$$

Luego:

$$B = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)}$$

Expresión que nos relaciona el módulo de Compresibilidad, el módulo de Young y la relación de Poisson

Ejemplo 49. Se somete a una muestra de cobre de forma cúbica con 10 cm de arista a una compresión uniforme, aplicando Un esfuerzo de 10^6 N/m^2 perpendicularmente a cada una de sus caras. La variación relativa de volumen que se observa es de $7,25\times10^{-6}$.

a) Determinar el módulo de compresibilidad (*B*) del Cu en el sistema internacional.

b) Determinar el módulo de Poisson sabiendo que el módulo de Young del cobre es 120×10^9 Pa.

Solución.

a) Como:

$$\Delta p = 10^4 \text{ N/m}^2, \quad \frac{\Delta V}{V} = -7,25\times10^{-6} \text{ y}$$

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \Rightarrow$$

$$B = -\frac{10^6}{-7,25\times10^{-6}} = 137,7 \text{ x } 10^9 \text{ N/m}^2$$

b)

$$B = \frac{Y}{3(1-2\sigma)} \Rightarrow (1-2\sigma) = \frac{Y}{3B}$$

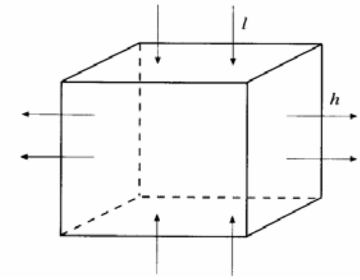
$$\Rightarrow \sigma = \frac{1-\frac{Y}{3B}}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1-\frac{120\times10^9}{3(137,7\times10^9)}}{2} = 0,35$$

Relación entre *G, Y* y σ

Muestra sometida a esfuerzo cortante. Determinación de la relación entre el módulo de rigidez, el módulo de Young y el módulo de Poisson.

Pretendemos analizar la relación entre los esfuerzos cortantes y los esfuerzos de compresión y de tracción. Para ello consideremos primero el caso del bloque de la Figura que está sometido, por una parte, a un esfuerzo de compresión y en la otra dirección a un esfuerzo de tracción. Sea 1 su longitud en la dirección horizontal y h su altura.



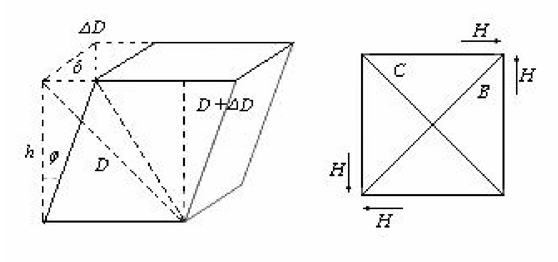
La deformación en la dirección horizontal tiene dos términos: el primero corresponde a la deformación producido por el esfuerzo de tracción, mientras que el segundo corresponde a la dilatación producida por la compresión en la dirección vertical. Por tanto, nos queda,

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{YA} + \sigma\frac{F}{YA} = (1+\sigma)\frac{F}{YA}$$

Por otra parte, la deformación en la dirección vertical corresponde a las deformaciones causadas por un lado por la fuerza de compresión en la dirección vertical y por otro por la tracción en la dirección horizontal. Por tanto,

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{F}{YA} - \sigma\frac{F}{YA} = -(1+\sigma)\frac{F}{YA}$$

Ahora bien, en la Figura abajo representamos la deformación de un bloque sometido a un esfuerzo tangencial detallando lo que le ocurre a las diagonales de sus caras. Si observamos la figura, vemos que los resultados de los esfuerzos tangenciales equivalen a los producidos por las fuerzas *H* que producen, por una parte, un esfuerzo de tracción sobre el plano *C* y un esfuerzo de compresión sobre el plano *B*.



El esfuerzo de compresión sobre el plano *B* resulta ser

$$S_B = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2}A} = \frac{G}{A}$$

A e igualmente el esfuerzo de tracción sobre *C*

$$S_C = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2}A} = \frac{G}{A}$$

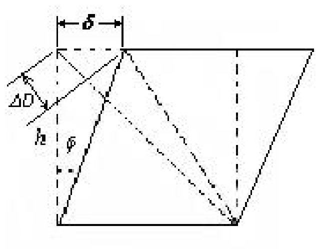
Las deformaciones de las diagonales *B* y *C* se escriben entonces

$$\frac{\Delta D_B}{D} = (1+\sigma)\frac{H}{YA}$$

y $\frac{\Delta D_C}{D} = (1+\sigma)\frac{H}{YA}$ (1)

Si expresamos el esfuerzo tangencial en términos del ángulo ϕ, ya que suponemos que la deformación es pequeña resulta

$$\tan\phi \approx \phi \Rightarrow \phi = \frac{\delta}{h} \approx \frac{\sqrt{2}\Delta D_C}{h} = 2\frac{\Delta D_C}{D}$$



Donde las dos últimas igualdades surgen a partir de analizar la geometría esbozada en la Figura arriba. En efecto, si el ángulo entre δ y ΔD es de *45* grados se cumple

$$\frac{\delta}{\Delta D_C} = \frac{1}{\text{sen}45^o} = \sqrt{2}$$

Y por tanto

$$\phi = \frac{\delta}{h} = \frac{\sqrt{2}\Delta D_C}{D_C \text{sen}45^o} = \frac{2\Delta D_C}{D_C}$$

En estas condiciones, sí sustituimos en (1) este último resultado nos queda

$$\phi = 2(1+\sigma)\frac{H}{YA}$$

Esta ecuación, si tenemos en cuenta que ϕ es la deformación tangencial y la comparamos con la ecuación $G = \frac{S}{\phi} = \frac{H/A}{\phi}$, nos permite obtener

$$G = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$$

Expresión que relaciona el módulo de rigidez con el módulo de Young y con el módulo de Poisson

FUERZA ELASTICA Y ENERGIA ELASTICA.

Energía de deformación.

La energía necesaria para estirar una cantidad x una muestra de material de constante de rigidez k es

Energía = $\int f dx = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2$ o en función de F

Energía $= \frac{1}{2}Fx$

Si la sección transversal de la muestra es A y su longitud ℓ entonces podemos escribir la ecuación como

$$\frac{\text{Energía}}{\text{A}\ell} = \frac{1}{2}\frac{Fx}{A\ell} \text{ o } \frac{\text{Energía}}{\text{A}\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{A}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)$$

Energía por unidad de volumen =

$\frac{1}{2}$(Esfuerzo)(Deformación unitaria)

Esta es la energía necesaria para estirar o comprimir la muestra, teniendo en cuenta el módulo de Young y la energía por unidad de volumen, puede expresarse como

$$\frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2}\frac{(\text{Esfuerzo})^2}{Y}$$

Ejemplo 50. Una carga de 100 kg está colgada de un alambre de acero de 1 m de longitud y 1 mm de radio. ¿A qué es igual el trabajo de tracción del alambre?

Solución.

Por *la* ley de Hooke

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{YA} \Rightarrow F = \frac{YA}{\ell}\Delta\ell \quad (1)$$

Pero para las fuerzas elásticas $F = k\Delta\ell$ (2)

Comparando (1) y (2) vemos que

$$k = \frac{AY}{\ell} \quad (3)$$

Entonces

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{AY(\Delta\ell)^2}{2\ell} \quad (4)$$

Calculando la magnitud $\Delta\ell$ por la fórmula (1) y poniendo todos los datos numéricos en la ecuación (4) obtenemos definitivamente que W = 0,706 J.

Ejemplo 51. Un alambre de acero de 2m de longitud cuelga de un soporte horizontal rígido.

a) ¿Cuánta energía almacena cuando se suspende en él una carga de 5 kg?

b) ¿Si la carga se aumenta 10 kg, en cuanto aumenta energía almacenada?

Y = 2 x 10^{11} N/m^2, A = área de la sección transversal = 10^{-6}m^2

Solución.

$\ell = 2$ m, $F_1 = 5\times 9{,}8$ N, $F_2 = 10\times 9{,}8$ N

$A = 10^{-6}$ m^2, $Y = 2\times 10^2$ N/m^2

W = trabajo realizado por la fuerza $F = kx$ en alargar el alambre una longitud x.

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \text{ , con } F = kx \Rightarrow x = \frac{F}{k}$$

$$W = \frac{1}{2}k\left(\frac{F}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$$

Para un alambre $k = \frac{YA}{\ell}$

Reemplazando:

$$W = \frac{1}{2}\frac{F^2}{YA/\ell}$$

$$= \frac{F^2\ell}{2AY}$$

a) $W_1 = \frac{F_1^2\ell}{2AY} = \frac{(5\times 9{,}8)^2(2)}{2(10^{-6})2\times 10^{11}}$ = 0,012 J

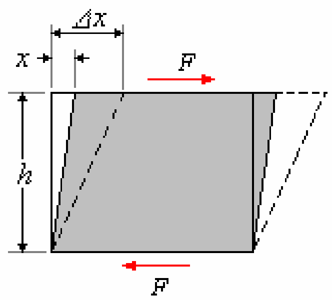
b) $W_2 = \frac{F_2^2\ell}{2AY} = \frac{(10\times 9{,}8)^2(2)}{2(10^{-6})2\times 10^{11}}$ = 0,048 J

El incremento en energía almacenada es:

$\Delta E = W_2 - W_1$ = 0,048 – 0,012 = 0,036 J.

Ejemplo 52. Demostrar que cuando se somete un cuerpo elástico a una tensión de corte pura que no supera el límite elástico de corte para el material, la densidad de energía elástica del cuerpo es igual a la mitad del producto de la tensión de corte por la deformación de corte.

Solución.



La fuerza que deforma por corte o cizalladura es $F = \frac{GA}{h}x$

El trabajo para deformar un dx es

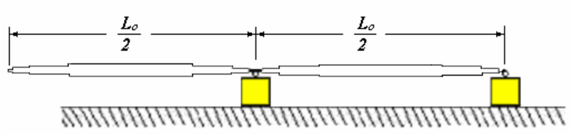
$$W = \int_{x=0}^{x=\Delta x}\frac{GA}{h}x dx$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{GA}{h}(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}F\Delta x$$

La densidad de energía es

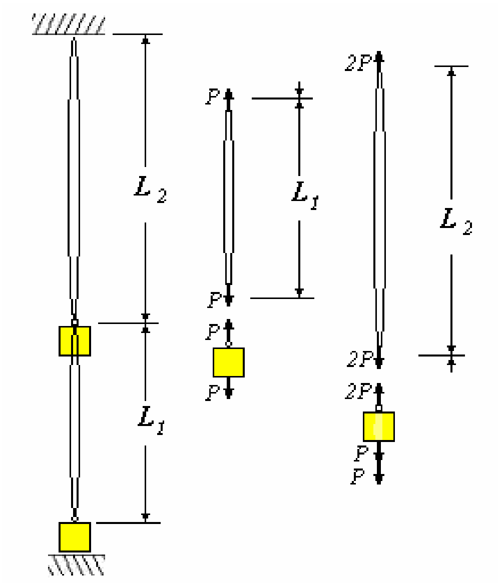
$$\frac{W}{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{A}\right)\Delta x = \frac{1}{2}S_t\Delta x$$

Ejemplo 53. La elasticidad de una banda de goma de longitud L_0 es tal que una fuerza F aplicada a cada extremo produce una deformación longitudinal de una unidad. Se sujetan dos pesos del mismo valor P, uno en un extremo y el otro en la mitad de la banda y a continuación se levanta la banda con los pesos por su extremo libre. ¿Cuál es la mínima cantidad de trabajo que hará elevar ambos pesos del suelo?



Solución.
Como cuando se aplicada a cada extremo una fuerza F se produce una deformación longitudinal de una unidad:

$$\Delta L = 1 = \frac{FL_0}{YA}$$, luego $YA = FL_0$



Usando los diagramas del cuerpo libre mostrados en las figuras tenemos:
Para la parte de la liga L_1: tenemos:

$$\Delta L_1 = \frac{PL_0/2}{YA} = \frac{PL_0/2}{FL_0} = \frac{P}{2F}$$

Para la parte de la liga L_2, tenemos:

$$\Delta L_2 = \frac{2PL_0/2}{YA} = \frac{2PL_0/2}{FL_0} = \frac{P}{F}$$

La mínima cantidad de trabajo que hará elevar ambos pesos del suelo es:
Trabajo = Energía para estirar ΔL_1 + Energía para estirar ΔL_2 + Energía para elevar un peso P la altura L_1, el peso inferior no se levanta, solamente se despega del piso.
Energía para estirar una banda elástica es

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

En este caso $k = \frac{YA}{L_0/2} = \frac{FL_0}{L_o/2} = 2F$, y $x = \Delta L_1$, o ΔL_2, según corresponda

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2}2F(\Delta L_1)^2 + \frac{1}{2}2F(\Delta L_2)^2 + PL_1$$

Como conocemos ΔL_1, ΔL_2 y

$$L_1 = \frac{L_0}{2} + \Delta L_1 = \frac{L_0}{2} + \frac{P}{2F}$$

Tenemos

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2}2F\left(\frac{P}{2F}\right)^2 + \frac{1}{2}2F\left(\frac{P}{F}\right)^2 + P\left(\frac{L_0}{2} + \frac{P}{2F}\right)$$

Finalmente

$$\text{Trabajo} = \frac{7}{4}\frac{P^2}{F} + \frac{1}{2}PL_0$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuál es el objeto del refuerzo de acero en una viga de concreto?
¿El concreto necesita mayor refuerzo bajo compresión o bajo tensión? ¿Por qué?

2. ¿Cuál es más elástico, caucho o acero? ¿Aire o agua?

3. ¿Qué clase de elasticidad se presenta en un puente colgante? ¿En un eje de dirección automotriz? ¿En un resorte? ¿En tacos de caucho?

4. Una mujer distribuye su peso de 500 N igualmente sobre los tacones altos de sus zapatos. Cada tacón tiene 1,25 cm^2 de área. a) ¿Qué presión ejerce cada tacón sobre el suelo?

b) Con la misma presión, ¿cuánto peso podrían soportar 2 sandalias planas cada una con un área de 200 cm^2?

5. ¿Cuál debe ser el diámetro mínimo de un cable de acero que se quiere emplear en una grúa diseñada para levantar un peso máximo de 10000 kg.?El esfuerzo de ruptura por tracción del acero es de 30×10^7 Pa. Igual pero si se quiere un coeficiente de seguridad de 0,6.

6. Dos alambres del mismo material, y misma longitud ℓ, cuyos diámetros guardan la relación n.
¿Qué diferencia de alargamientos tendrán bajo la misma carga?

7. Un ascensor es suspendido por un cable de acero. Si este cable es reemplazado por dos cables de acero cada uno con la misma longitud que el original pero con la mitad de su diámetro, compare el alargamiento de estos cables con el del cable original.

8. Una cierta fuerza se requiere para romper un alambre. ¿Que fuerza se requiere para romper un alambre del mismo material el cual es
a) del doble de longitud?
b) el doble en diámetro y dé la misma longitud?

9. Un hilo de 80 cm de largo y 0,3 cm de diámetro se estira 0,3 mm mediante una fuerza de 20 N. Si otro hilo del mismo material, temperatura e historia previa tiene una longitud de 180 cm y un diámetro de 0,25 cm. ¿qué fuerza se requerirá para alargarlo hasta una longitud de 180,1 cm?
Respuesta.
F = 211 N

10. a) Calcule el cambio de dimensiones de una columna de fundición gris (Y = 145 GPa) que tiene dos tramos de 1,5 m cada uno y diámetros de 0,1 m y 0,15 m, al soportar una carga de 500 kN. ¿Está bien dimensionada la columna si el límite elástico de la fundición gris es 260 MPa?
b) Si la columna fuera troncocónica de 3 m de altura, y los diámetros de sus bases variaran entre 0,1 m y 0,15 m.
Respuesta. a) L_f = 3,001 m. Sí está bien dimensionada.
b) L_f = 3,0009 m

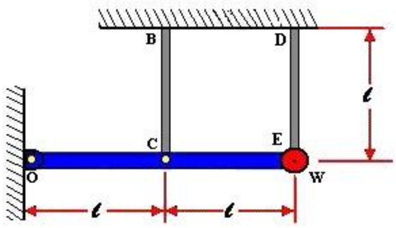
11. Un cable de acero de 2 m de largo tiene una sección transversal de 0,3 cm^2. Se cuelga un torno de 550 kg del cable. Determínese el esfuerzo, la deformación y el alargamiento del cable. Supóngase que el cable se comporta como una varilla con la misma área transversal. El módulo de Young del acero es 200×10^9 Pa.

12. Una varilla metálica de 4 m de largo y sección 0,5 cm^2 se estira 0,20 cm al someterse a una tensión de 5000 N. ¿Qué módulo de Young tiene el metal?

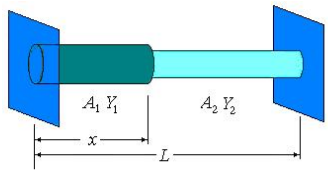
13. Una cuerda de Nylon se alarga 1,2 m sometida al peso de 80 kg de un andinista.
Si la cuerda tiene 50 m de largo y 7 mm de diámetro, ¿qué módulo de Young tiene el Nylon?

14. Para construir un móvil, un artista cuelga una esfera de aluminio de 5 kg de una alambre vertical de acero de 0,4 m de largo y sección 3×10^{-3} cm^2. En la parte inferior de la esfera sujeta un alambre similar del cual cuelga un cubo de latón de 10 kg. Para cada alambre calcular la deformación por tensión y el alargamiento.

15. En el sistema mostrado en la figura, la barra OE es indeformable y, de peso P; los tensores AC y DE son de peso despreciable, área A y módulo de elasticidad Y.
Determinar cuánto bajará el peso W respecto a la posición en la cual los tensores no estaban deformados.

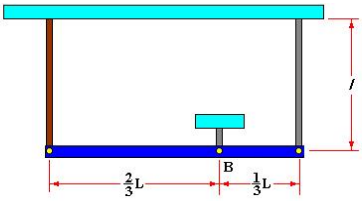


16. Dos barras de longitud $(\frac{\ell}{2} + \Delta\ell)$ cada una, áreas A_1 y A_2 y módulos de elasticidad Y_1 e Y_2 respectivamente, como se muestra en la figura, se comprimen hasta introducirlas entre dos paredes rígidas separadas una distancia ℓ. ¿Cuál será la posición x de la unión de ambas barras?

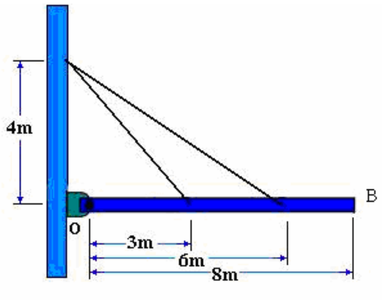


17. Una varilla de 1,05 m de largo y peso despreciable está sostenida en sus extremos por alambres A y B de igual longitud. El área transversal de A es de 1 mm^2 y la de B 4 mm^2. El módulo de Young de A es $2,4\times10^{11}$Pa y de B $1,2\times10^{11}$ Pa. ¿En que punto de la varilla debe colgarse un peso P a fin de producir
a) esfuerzos iguales en A y B? y b) ¿deformaciones iguales en A y B?

18. Una barra de longitud L y masa m se encuentra suspendida por un pivote B indeformable y por dos barras en sus extremos como se muestra en la figura estas barras son iguales de área *A*, longitud ℓ y módulo de elasticidad *Y*.

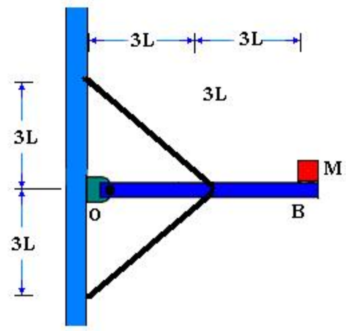


19. En el sistema mostrado en la figura, calcular cuánto desciende el extremo B de la barra indeformable y de peso despreciable, cuando se le coloca un peso de 10 Ton. en ese extremo.
Los tirantes son de acero y de 2cm^2 de área cada uno, suponga deformaciones pequeñas de tal manera que se puedan hacer las aproximaciones geométricas apropiadas.



Respuesta. Δy = 17,1 x 10^{-3} m

20. En el sistema mostrado en la figura, calcular cuanto desciende el extremo B de la barra horizontal rígida y de peso despreciable, cuando se le coloca una masa *M* en ese extremo.
Las barras inclinadas son iguales de área *A* y módulo de elasticidad *Y*.
Asuma pequeñas deformaciones, o sea, que se pueden hacer las aproximaciones geométricas usuales.



21. Un hilo delgado de longitud ℓ, módulo de Young *Y* y área de la sección recta *A* tiene unido a su extremo una masa pesada m. Si la masa está girando en una circunferencia horizontal de radio *R* con velocidad angular ω, ¿cuál es la deformación del hilo? (Suponer que es despreciable la masa del hilo).
Respuesta.

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{m\omega^2 R}{AY}$$

22. Un alambre de cobre de 31 cm de largo y 0,5 mm de diámetro está unido a un alambre de latón estirado de 108 cm de largo y 1 mm de diámetro. Si una determinada fuerza deformadora produce un alargamiento de 0,5 mm al conjunto total y un valor de Y = 12 x 10^{10} Pa, ¿cuál es el alargamiento de cada parte?
Respuesta.
$\Delta\ell$ = 0,27 mm para el latón.
$\Delta\ell$ = 0,23 mm para el cobre

23. Un alambre de acero dulce de 4 m de largo y 1 mm de diámetro se pasa sobre una polea ligera, uniendo a sus extremos unos pesos de 30 y 40 kg. Los pesos se encuentran sujetos, de modo que el conjunto se encuentra en equilibrio estático. Cuando se dejan en libertad, ¿en cuánto cambiará la longitud del alambre?
Respuesta.
$\Delta\ell$ = 1,0 mm

24. Un hilo está formado por un núcleo de acero dulce de 1,3 cm de diámetro, al cual se le ha fusionado una capa exterior de cobre (*Y* = 12 x 10^{10} Pa) de 0,26 cm de gruesa. En cada extremo del hilo compuesto se aplica una fuerza de tracción de 9000 N. Si la deformación resultante es la misma en el acero y en el cobre, ¿cuál es la fuerza que soporta el núcleo de acero?
Respuesta.
F = 5812 N

25. Un ascensor cargado con una masa total de 2000 kg esta de un cable de 3,5 cm^2 de sección. El material del cable tiene un límite elástico de 2,5 x 10^8 Pa y para este material Y = 2 x 10^{10} Pa. Se especifica que la tensión del cable nunca excederá 0,3 del límite elástico.
a) Hallar la tensión del cable cuando el ascensor está en reposo.
b) ¿Cuál es la mayor aceleración permisible hacia arriba?
c) ¿La distancia más corta de parada permisible cuando la velocidad del ascensor es hacia abajo?
Respuesta.
a) $\frac{F}{A}$ = 5,6 x 10^7 Pa, b) a = 0,33 m/s^2,
c) Δy = 33,8 m.

26. Volver a resolver el Problema anterior, teniendo en cuenta esta el peso del cable cuando tiene su longitud máxima de 150 m. La densidad del material del cable es 7,8 x 10^3 kg /m^3. Si se supera la carga máxima, ¿por dónde se romperá el cable: cerca de su punto más alto o próximo al ascensor?
Respuesta.
a) $\frac{F}{A}$ = 6,75 x 10^7 Pa, b) a = 1,32 m/s^2,

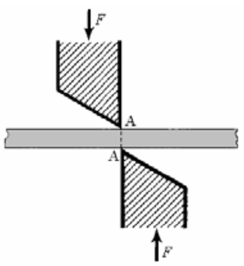
c) Δy = 85,3 m.

27. Un cable pesado de longitud inicial y área de sección recta A tiene una densidad uniforme ρ y un módulo de Young Y. El cable cuelga verticalmente y sostiene a una carga F_g en su extremo inferior. La fuerza tensora en un punto cualquiera del cable es evidentemente suma de la carga F_g y del peso de la parte del cable que está debajo de dicho punto. Suponiendo que la fuerza tensora media del cable actúa sobre la longitud total del cable ℓ_0, hallar el alargamiento resultante.
Respuesta.

$$\Delta \ell = \left(\frac{\ell_0}{Y}\right)\left(\frac{F_g}{A} + \frac{1}{2}\rho g \ell_0\right)$$

28. Demostrar que cuando se somete un cuerpo elástico a una tensión de corte pura que no supera el límite elástico de corte para el material, la densidad de energía elástica del cuerpo es igual a la mitad del producto de la tensión de corte por la deformación de corte.

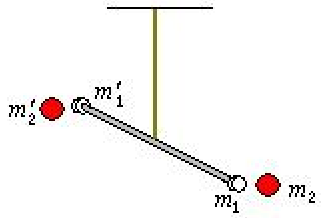
29. El esfuerzo de la ruptura del cobre rolado para la cizalladura es típicamente 1,5 x 10^8.
¿Qué fuerzas F se deben aplicar a las cuchillas de metal mostradas en la figura para cortar una tira de una hoja de cobre de 5 cm de ancho y 1,27 mm de espesor?



Respuesta. 9525 N

30. Una varilla que tiene 100 cm de longitud y 1 cm de diámetro está sujeta rígidamente por un extremo y se le somete a torsión por el otro hasta un ángulo de lº. Si se aplica la misma fuerza a la circunferencia de una varilla del mismo material pero que tiene una longitud de 80 cm y un diámetro de 2 cm, ¿cuál es el ángulo de torsión resultante?
Respuesta. $\theta = 0{,}1^\circ$

31. La balanza de torsión de la figura se compone de una barra de 40 cm con bolas de plomo de 2 cm en cada extremo. La barra está colgada por un hilo de plata de 100 cm que tiene un diámetro de 0,5 mm. Cuando se ponen muy de cerca de las bolas de plomo, pero en lados opuestos, dos bolas mayores de plomo de 30 cm de diámetro (ρ = 11,4 g/cm^3), sus atracciones gravitatorias tienden a hacer girar la barra en el mismo sentido. ¿Cuál será la torsión del hilo de plata?



Respuesta. θ = 0,00422º

32. a) Desarrollar una expresión para la constante de torsión de un cilindro hueco en función de su diámetro interno R_o, su radio externo R_1, su longitud ℓ y su módulo de corte G.
b) ¿Cuál deberá ser el radio de un cilindro macizo de la misma longitud y material y que posee la misma constante de torsión?
c) ¿Cuál deberá ser el ahorro de masa si se utilizase el cilindro hueco en un eje de una máquina en lugar de utilizar el cilindro macizo?
Respuesta.
a) $\tau_0 = \left(\frac{\pi G}{2\ell}\right)\left(R_1^4 - R_0^4\right)$, b) $R = \left(R_1^4 - R_0^4\right)^{\frac{1}{4}}$

c) Ahorro $= 100\left[1 - \sqrt{\frac{\left(R_1^2 - R_0^2\right)}{\left(R_1^2 + R_0^2\right)}}\right]\%$

33. *A* profundidades oceánicas de unos 10 km la presión se eleva a 1 kilobar, aproximadamente.
a) Si se hunde un trozo de acero dulce hasta esta profundidad, ¿en cuánto variará su densidad?
b) ¿Cuál es la densidad del agua del mar a esta profundidad si la densidad en la superficie vale 1,04 g/cm^3?
B_{acero} = 16 x 10^{10} N/m^2, B_{agua} = 0,21 x 10^{10} N/m^2, 1bar = 10^5 Pa
Respuesta.
a) 0,062 %, b) ρ = 1,105 g/cm^3

34. Se somete a una muestra de cobre de forma cúbica con 10 cm de arista a una compresión uniforme, aplicando una tensión equivalente a una tonelada perpendicularmente a cada una de sus caras. La variación relativa de volumen que se observa es de 7,25×10^{-6} ($\Delta V/Vo$). Determinar el módulo de compresibilidad del Cu en el sistema internacional, sabiendo que el módulo de Young del cobre es 120×109 Pa. Obtener además el módulo de Poisson.

35. Un depósito de acero de 60 litros de capacidad contiene oxígeno a una presión manométrica de 140 Pa. ¿Qué volumen ocupará el oxígeno si se le permite que se expansione a temperatura constante hasta que su presión manométrica es nula? (La presión manométrica es la diferencia entre la presión real en el interior del depósito y la de la atmósfera exterior).
Respuesta. V = 889 litros.

36. En cada extremo de una barra horizontal de 1,5 m de larga, 1,6 cm de ancha y 1 cm de larga se aplica una fuerza de tracción de 2 800 N. El módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material de la barra son $Y = 2 \times 10^6$ Pa y $\sigma = 0,3$.
a) Hallar la deformación transversal barra.
b) ¿Cuáles son las variaciones relativas de la anchura y altura?
c) ¿Cuál es el aumento de volumen?
d) ¿Cuál es la energía potencial adquirida por la barra?
Respuesta.
a) $\dfrac{\Delta d}{d_0} == -2,625 \times 10^{-4}$,
b) $\Delta d = -4,2 \times 10^{-4}\, cm$
c) $\Delta h = -2,625 \times 10^{-4}\, cm$

37. a) Demostrar que el coeficiente de Poisson viene dado por

$$\sigma = \frac{3B. - 2S}{2(3B + S)}$$

b) Demostrar que a partir de esta ecuación se sigue que el coeficiente de Poisson debe estar comprendido entre -1 y $\dfrac{1}{2}$.
c) La experiencia demuestra que las barras sometidas a fuerzas de tracción (valores positivos siempre aumentan de volumen, mientras que si se someten a fuerzas de compresión (valores negativos de F), siempre disminuyen de volumen ¿Apoya esta afirmación el hecho de que no existe ningún material para el cual $\sigma \geq \dfrac{1}{2}$?

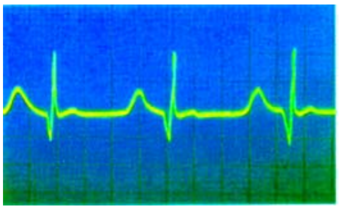
38. Un manual de materiales relaciona estos datos para el aluminio en hoja laminada
Módulo de Young, 7×10^{10} Pa
Límite elástico a la tracción, $7,2 \times 10^7$ Pa
Coeficiente de Poisson, 0,33
Tensión de tracción final, 14×10^7 Pa
Tensión de tracción permisible, 0,4 de la tensión de tracción final
La tensión de tracción permisible es la máxima tensión que se considera segura cuando este material se utiliza en estructuras sometidas a de tracción conocidas y constantes. Una tira de este aluminio de 76 cm de larga, 2,5 cm de ancha y 0,8 mm de gruesa se estira gradualmente hasta que la tensión de tracción alcanza su límite permisible. Calcular
a) su variación de longitud,
b) su variación de volumen,
c) el trabajo realizado y
d) la ganancia en la densidad de energía elástica.
Respuesta.
a) $\Delta\ell$ = 0,688 mm, b) ΔV = 0,0041 cm^3,
c) W = 0,341 J, d) ΔU = 22400 J/m^3

CAPÍTULO 2. Movimiento oscilatorio

INTRODUCCION.

Las vibraciones u oscilaciones de los sistemas mecánicos constituyen uno de los campos de estudio más importantes de toda la física. Virtualmente todo sistema posee una capacidad de vibración y la mayoría de los sistemas pueden vibrar libremente de muchas maneras diferentes. En general, las vibraciones naturales predominantes de objetos pequeños suelen ser rápidas, mientras que las de objetos más grandes suelen ser lentas. Las alas de un mosquito, por ejemplo, vibran centenares de veces por segundo y producen una nota audible. La Tierra completa, después de haber sido sacudida por un terremoto, puede continuar vibrando a un ritmo del una oscilación por hora aproximadamente. El mismo cuerpo humano es un fabuloso recipiente de fenómenos vibratorios; nuestros corazones laten, nuestros pulmones oscilan, tiritamos cuando tenemos frío, a veces roncamos, podemos oír y hablar gracias a que vibran nuestros tímpanos y laringes. Las ondas luminosas que nos permiten ver son ocasionadas por vibraciones. Nos movemos porque hacemos oscilar las piernas. Ni siquiera podremos decir correctamente "vibración" sin que oscile la punta de nuestra lengua.. Incluso los átomos que componen nuestro cuerpo vibran.

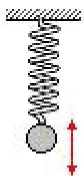
La traza de un electrocardiograma, mostrada en la figura, registra la actividad eléctrica rítmica que acompaña el latido de nuestros corazones.



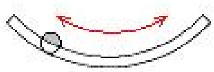
MOVIMIENTO OSCILATORIO

Definición y características

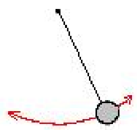
¿Qué es un movimiento oscilatorio? ¡Es un movimiento de vaivén! ¿Podemos hacer una descripción científica? Si estudiamos el movimiento de un número de objetos podemos quizás contestar a la pregunta. Si una masa se suspende a partir de un resorte, se tira hacia abajo y después se suelta, se producen las oscilaciones



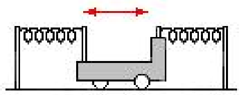
El balanceo de una bolita en una pista curvada, la bolita oscila hacia delante y atrás de su posición de reposo.



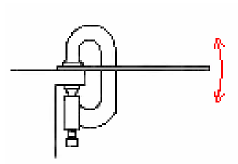
Una masa suspendida del extremo de una cuerda (un péndulo simple), cuando la masa se desplaza de su posición de reposo y se la suelta se producen las oscilaciones.



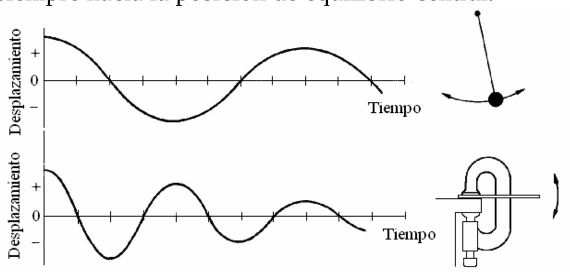
Un carrito atado entre dos soportes en un plano horizontal por medio de resortes oscilará cuando el carrito se desplaza de su posición de reposo y después se suelta.



Una regla afianzada con abrazadera en un extremo a un banco oscilará cuando se presiona y después se suelta el extremo libre.



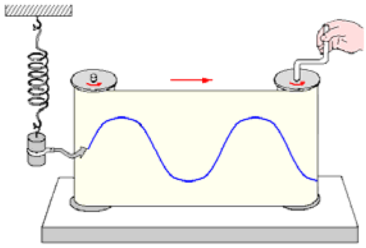
¿Qué hacemos en éstos y otros ejemplos, para conseguir las oscilaciones? Las masas se sacan de su posición de reposo y después se sueltan. Una fuerza restauradora tira de ellas y parecen ir más allá de la posición de reposo. Esta fuerza restauradora debe existir de otra manera ellas no se moverían cuando son soltadas. Porque hay una fuerza entonces debemos tener una aceleración. La fuerza de restauración se dirige siempre hacia la posición de equilibrio central -- la aceleración se dirige así siempre hacia la posición de equilibrio central.



Podemos determinar el gráfico distancia - tiempo para un objeto oscilante tomando una fotografía estroboscópica para un péndulo o usando el Sonic Ranger del laboratorio. Se obtiene su desplazamiento máximo a un lado y otro de la posición de reposo.

La figura arriba muestra los gráficos distancia – tiempo. Algunas oscilaciones parecen tener la misma característica a la tomada al mismo tiempo para cada oscilación completa. Tales osciladores se conocen como isócronas, y mantienen esta característica constante del tiempo sin importar los cambios de la amplitud debido al amortiguamiento**.**

Con un experimento simple como el mostrado en la figura a continuación, también se puede obtener el gráfico desplazamiento - tiempo para el movimiento oscilatorio de un sistema masa resorte, al que se le ha atado un plumón que deja una traza en un rollo de papel que se gira a velocidad constante. Esto produce una "hoja" que muestra que el movimiento de la masa tiene la forma sinusoidal.



Oscilaciones Sinusoidales

Concentraremos preferentemente nuestra atención sobre las oscilaciones sinusoidales. La razón física consiste en que realmente se presentan oscilaciones puramente sinusoidales en una gran variedad de sistemas mecánicos, siendo originadas por fuerzas restauradoras que son proporcionales a los desplazamientos respecto al equilibrio. Este tipo de movimiento es posible casi siempre si el desplazamiento es suficientemente pequeño. Si, por ejemplo, tenemos un cuerpo sujeto a un resorte, la fuerza ejercida sobre el mismo cuando el desplazamiento respecto al equilibrio es x puede describirse en la forma

$F(x) = -(k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \ldots)$, donde k_1, k_2, k_3, etc., son una serie de constantes, y siempre podremos encontrar un margen de valores de x dentro del cual sea despreciable la suma de términos correspondientes a x^2, x^3, etc., de acuerdo con cierto criterio previo (por ejemplo, hasta 1 en 10^3 o 1 en 10^6) en comparación con el término - $k_1 x$, a no ser que el mismo. k_1 sea nulo. Si el cuerpo tiene masa m y la masa del resorte es despreciable, la ecuación del movimiento del cuerpo se reduce entonces a

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x$, o bien $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k_1}{m}x = 0$

Si por definición hacemos $\omega_0^2 = \dfrac{k_1}{m}$, la ecuación anterior se transforma en:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$, que en notación corta es

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

La solución a dicha ecuación diferencial puede expresarse en cualquiera de las formas:

$x(t) = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$,

donde las fases iniciales , φ y ϕ difieren en $\pi/2$. Fácilmente se advierte que A representa el desplazamiento máximo, esto es la amplitud.

Las ecuaciones $x(t) = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$, describen el movimiento armónico simple. A es la **amplitud,** ω_0 es la **frecuencia angular**, en radianes por segundo, φ es la **constante de fase**. La cantidad en paréntesis $(\omega t + \varphi)$ es la fase de la oscilación. A y φ se determinan por las condiciones iniciales del problema.

También $\omega_0 = 2\pi f$, f es la **frecuencia** en oscilaciones por segundo. Una oscilación por segundo se llama 1 hertz (Hz).
Todos estos términos son muy importantes

Ejemplo 1. Demostrar que las ecuaciones
$x(t) = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$
satisfacen la ecuación $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Solución.

$x = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$,

$\dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \varphi)$,

$\dfrac{dx^2}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$

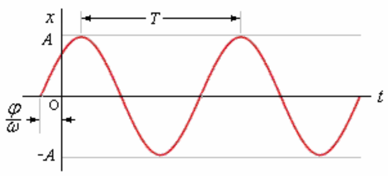
Reemplazando x y $\ddot{x}$ en la ecuación:

$-A\omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t - \varphi) + \omega_0^2 A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi) = 0$,

con lo que queda demostrado.
De igual manera sucede con
$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$.

DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un movimiento del tipo descrito en la ecuación $x(t) = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, es conocido como movimiento armónico simple (MAS), se representa en un gráfico x - t de la forma indicada en la figura. Destaquemos las características más importantes de esta perturbación sinusoidal:



Movimiento armónico simple de período T y amplitud A.

1. Está confinada dentro de los límites $x = \pm A$. La magnitud positiva A se denomina *amplitud* del movimiento.

2. El movimiento tiene un **período** T igual al tiempo transcurrido entre máximos sucesivos o más generalmente entre dos momentos sucesivos en se repitan tanto el desplazamiento x como la velocidad dx/dt.

T es la inversa de la frecuencia f,

$T = \dfrac{1}{f}$.

Dada la ecuación básica $x = A\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, el período debe corresponder a un aumento de 2π en el argumento de la función sinusoidal. Así pues, se tiene

$\omega(t+T)+\varphi_0 = (\omega t+\varphi_0)+2\pi$, de aquí se tiene

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

La situación en t = 0 (o en cualquier otro instante señalado) queda completamente especificada si se establecen los valores de x y dx/dt en dicho momento. En el instante particular t = 0, llamaremos a estas magnitudes x_0 y v_0, respectivamente. Entonces se tienen las identidades siguientes:

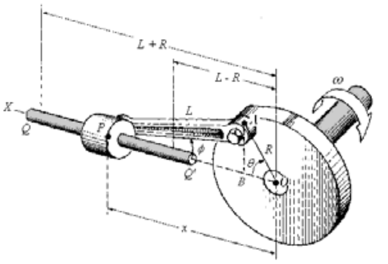
$x_0 = A\text{sen}\varphi_0$

Estas dos relaciones $v_0 = \omega A\cos\varphi_0$ pueden utilizarse para calcular la amplitud A y el ángulo φ_0 (ángulo de fase inicial del movimiento):

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \ , \ \varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

El valor de la frecuencia angular, ω del movimiento se supone conocido por otros medios.

Ejemplo 2. Determinar si P en el mecanismo ilustrado en la figura se mueve con MAS. En este mecanismo, QQ' es una barra sobre la cual puede deslizarse el cilindro P; está conectada por una varilla L al borde de una rueda de radio R que gira con velocidad angular constante (Este mecanismo, encontrado en muchas máquinas de vapor, transforma el movimiento oscilatorio del pistón en el movimiento rotacional de la rueda).



El movimiento de P *es oscilante pero no armónico simple.*

Solución.

De la figura podemos ver fácilmente que P oscila desde una posición a una distancia (L + R) a partir de O hasta una posición (L – R) a partir de O. Para determinar si el movimiento es armónico simple, debemos encontrar si el desplazamiento de P satisface la ecuación $x = A\text{sen}(\omega t+\varphi)$. De la geometría de la figura tenemos que $x = R\cos\theta + L\cos\phi$ y $L\text{sen}\phi = R\text{sen}\theta$, de modo que

$$\text{sen}\phi = \left(\frac{R}{L}\right)\text{sen}\theta$$

$$\cos\phi = \left(1-\text{sen}^2\phi\right)^{1/2} = \frac{1}{L}\left(L^2 - R^2\text{sen}^2\theta\right)^{1/2}.$$

Por consiguiente

$$x = R\cos\theta + \left(L^2 - R^2\text{sen}^2\theta\right)^{1/2},$$

Con $\theta = \omega t$ da

$$x = R\cos\omega t + \left(L^2 - R^2\text{sen}^2\theta\right)^{1/2}$$

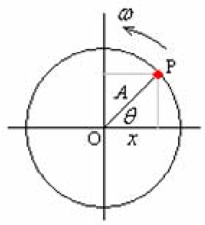
Esta expresión da el desplazamiento de P en función del tiempo. Cuando comparamos esta ecuación con la ecuación $x = A\text{sen}(\omega t+\varphi)$, vemos que el primer término, $R\cos\omega t$, corresponde al movimiento armónico simple con $\varphi = \pi/2$, pero el segundo no. Así, aunque el movimiento de P es oscilatorio, no es armónico simple

Un ingeniero mecánico al diseñar un mecanismo como el de la figura tiene que pensar cómo aplicar la fuerza correcta en P de modo que el desplazamiento x esté dado por la ecuación expresada líneas arriba, de modo que la rueda se mueve con movimiento circular uniforme. Cuando P está unido al pistón de una máquina de vapor, esto se lleva a cabo regulando la admisión de vapor.

EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE Y EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

La posición.

El movimiento armónico simple (MAS) se puede relacionar con el movimiento circular de la manera siguiente. Imagine una clavija P unida a una rueda orientada con su eje perpendicular al plano de la figura siguiente. La clavija está una distancia A del eje, y la rueda rota con velocidad angular constante ω. Se proyecta la clavija sobre el eje horizontal (el eje de x en la figura).



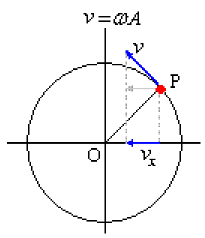
En t = 0, la clavija en toda la trayectoria está a la derecha y la proyección está en x = A.

La posición de la proyección es

$x = A\cos\theta = A\cos\omega t$.

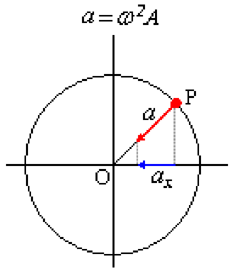
La velocidad.

La velocidad tangencial de la clavija tiene una magnitud $A\omega$, y su proyección en el eje x es $v = -A\omega\text{sen}\omega t$ como se muestra en la figura siguiente.



La aceleración.

La aceleración de la clavija (centrípeta) es $A\omega^2$ dirigida como se muestra en la figura siguiente.



La proyección de la aceleración en el eje de x es $a = -A\omega^2 \cos \omega t$. Así vemos que la posición en el eje x exhibe el movimiento armónico simple desde que las ecuaciones para x, v, y a son iguales a lo obtenido arriba. Si en vez de fijar t = 0 cuando la proyección estaba toda a la derecha, nosotros hubiésemos elegido otro punto de partida con $\omega t = 0$, nuestras ecuaciones habrían incluido el ángulo de la fase φ.
De la discusión anterior se puede ver porque se designa con la letra ω a la velocidad angular, así como también a la frecuencia angular.

Ejemplo 3. Un punto material de 2,5 kg experimenta un movimiento armónico simple de 3 Hz de frecuencia. Hallar:
a) Su frecuencia.
b) Su aceleración cuando la elongación es de 5 cm.
c) El valor de la fuerza recuperadora para esa elongación.
Solución.
La pulsación se relaciona con la frecuencia mediante la expresión:
a) $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ rad.
b) $a = \omega^2 \cdot s = (6\pi)^2 \cdot 0{,}05 = 17{,}8$ m/s.
c) F = m·s = 2,5 ·17,8 = 44,4 N. de prescinde del signo "-" en la expresión de la aceleración pues tal signo únicamente indica que el sentido de esta magnitud es contrario al de la elongación.

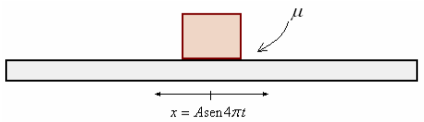
Ejemplo 4. La amplitud de un móvil que describe un MAS, viene dada, en función del tiempo, por la expresión: $y = 2\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (SI). Determinar:
a) Amplitud, frecuencia y periodo del movimiento.
b) Fase del movimiento en t = 2s.
c) Velocidad y aceleración del móvil en función del tiempo.
d) Posición, velocidad y aceleración del móvil en t = 1 s.
e) Velocidad y aceleración máximas del móvil.
f) Desplazamiento experimentado por el móvil entre t = 0 y t = 1 s.

Solución.
a) Por comparación con la ecuación general
$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ se deduce que:
A = 2 m
$\omega = \pi$ y como $\omega = 2\pi f$; $\pi = 2\pi f$; $f = 0{,}5$ s^{-1}
$T = 1/f = 1/0{,}5 = 2$s.
b) La fase viene dada, en este caso por
$\phi = \pi t + \pi/4$; $\phi = 2\pi + \pi/4 = 9\pi/4 \text{rad}$ φ
c) Derivando la ecuación de la elongación respecto a la variable t tenemos la ecuación de la velocidad:
$$v = \frac{dy}{dt} = -2\pi \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (SI)}$$
d) Derivando de nuevo respecto a la variable t obtenemos la ecuación de la aceleración:
$$a = \frac{dv}{dt} = -2\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (SI)}$$
Sustituyendo en las ecuaciones correspondientes:
y = -1,4142 m. ; v = 4,44 m/s. ; a = 13,96 m/s^2
e) La velocidad máxima se adquiere cuando el seno del ángulo vale 1;
$v_{máx} = \pm 6{,}29 \text{m/s}$
y la aceleración máxima cuando el coseno del ángulo vale 1;
$a_{máx} = \pm 19{,}72 \text{m/s}^2$
f) El desplazamiento Δy viene dado por la diferencia entre y para t = 1 e y para t = 0.
El valor de y para t = 1 es y_1 = - 1,4142 m,
y para t = 0 es $y_0 = 2\cos \pi/4 = 1{,}4142$m ;
Δy = -1,4142 -1,4142 = -2,83 m

Ejemplo 5. Sostengo con la palma de la mano abierta una caja de fósforos. De repente comienzo a mover la mano verticalmente con un movimiento armónico simple de 5 cm amplitud y frecuencia progresivamente creciente. ¿Para qué frecuencia dejará la caja de fósforos de estar en contacto con la mano?

Solución.
Cuando baja la palma de la mano, la caja de fósforos, a partir de la posición de equilibrio, se encuentra sometida a la aceleración de la gravedad, g, constante en todo momento, y dirigida verticalmente hacia abajo, y a la aceleración correspondiente al movimiento armónico simple:
$\omega^2 y = 4\pi^2 f^2 y$, dirigida hacia arriba y que alcanza el valor máximo en el extremo de la trayectoria: $a_{máx} = 4\pi^2 f^2 A$ a_{max}.
Cuando esta última aceleración iguale o supere a la de la gravedad la caja de fósforos dejará de estar en contacto con la mano. Eso sucederá cuando:
$4\pi^2 f^2 A = g \Rightarrow f = 2{,}23$ s^{-1}

Ejemplo 6. Un bloque descansa sobre una superficie horizontal.
a) Si la superficie se encuentra en movimiento armónico simple en dirección paralela al piso, realizando dos oscilaciones por segundo. El coeficiente estático de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,5. ¿Qué magnitud debe tener la amplitud de cada oscilación para que no haya deslizamiento entre el bloque y la superficie?
b) Si la plataforma horizontal vibra verticalmente con movimiento armónico simple de amplitud 25 mm. ¿Cuál es la frecuencia mínima para que el bloque deje de tener contacto con la plataforma?
Solución.



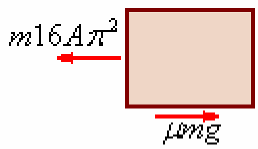
$f = 2$ c/s $\Rightarrow \omega = 2\pi f = 4\pi$

$x = A\mathrm{sen}\omega t \quad x = A\mathrm{sen}4\pi t$

Su aceleración es:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A16\pi^2\mathrm{sen}\omega t \Rightarrow a_{máx} = 16A\pi^2$$

El bloque dejará de tener contacto con la superficie cuando la fuerza de fricción que la sostiene fija al piso sea menor que la fuerza de inercia, eso sucede cuando $ma_{máx} = F_f$

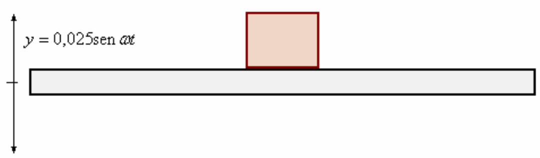


$$m16A\pi^2 = \mu mg \Rightarrow A = \frac{\mu g}{16\pi^2} =$$

$$A = \frac{(0,5)(9,8)}{16\pi^2} = 0,031 \text{ m}$$

$A = 31$ mm

b)



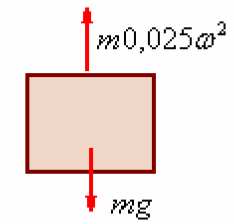
$$y = 0,025\mathrm{sen}\omega t$$

Su aceleración es:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -0,025\omega^2\mathrm{sen}\omega t$$

$$\Rightarrow a_{máx} = 0,025\omega^2$$

El bloque dejará de tener contacto con la superficie cuando la fuerza de fricción que la sostiene fija al piso sea mayor que el peso del objeto, eso sucede cuando $ma_{máx} = mg$



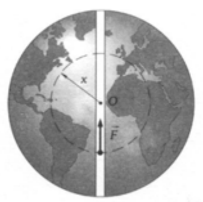
$$m0,025\omega^2 = mg \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{0,025}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{0,025}} = 19,8 \text{ rad/s}$$

$f = 3,15$ c/s

Ejemplo 7. Si la Tierra fuese homogénea y se hiciese un conducto recto de polo a polo, al dejar caer por él un cuerpo desde uno de los polos.
a) Demostrar que adquirirla un movimiento armónico simple (MAS).
b) Calcular el período de este movimiento.

Solución.



a) La ley de la gravitación universal nos dice:

$$\vec{F} = -G\frac{M'm}{r^2}\hat{r}$$

En módulo: $F = -G\dfrac{M'm}{x^2}$

el signo menos nos indica que F va dirigida hacia O.
En nuestro problema M' la masa encerrada dentro del círculo de puntos de la figura. Si llamamos ρ a la densidad de la Tierra, tendremos:

$$M' = V\rho = \frac{4}{3}\pi x^3\rho$$

Por la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$F = -G\frac{M'm}{x^2} = m\ddot{x}$$

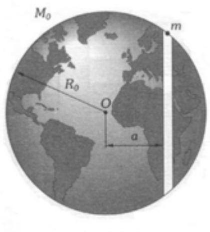
Luego: $F = -\frac{4\pi\rho Gm}{3}x = -kx$

De aquí $k = \frac{4\pi\rho Gm}{3}$

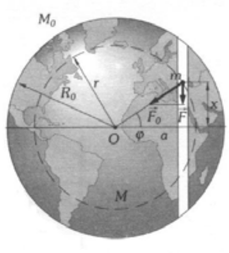
El movimiento es, por tanto, vibratorio armónico simple.
b) de período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}}$$

Ejemplo 8. Si la Tierra fuese homogénea y se hiciese en conducto recto como se indica en la figura, al dejar caer por él un cuerpo de masa m
a) demostrar que adquiriría un movimiento oscilatorio armónico simple.
b) Calcular el período de ese movimiento.
Suponer que no existen rozamientos entre el cuerpo y las paredes del conducto.



Solución.
a) Llamando M a la masa de Tierra encerrada en la esfera de radio r, obtenemos para valor del módulo de la fuerza F_0 que representamos en la figura:



$$F_0 = G\frac{Mm}{r^2}$$

Como: $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} = \frac{M_0}{V_0}$

$$M = \frac{r^3}{R_0^3}M_0$$

Sustituyendo, teniendo en cuenta que

$$G\frac{M_0 m}{R_0^2} = mg_0 \Rightarrow GM_0 = g_0 R_0^2,$$

Obtenemos: $F_0 = \frac{mg_0 r}{R_0}$

La fuerza responsable del movimiento es:

$$F = -\frac{mg_0 r}{R_0}\operatorname{sen}\varphi, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{x}{R}$$

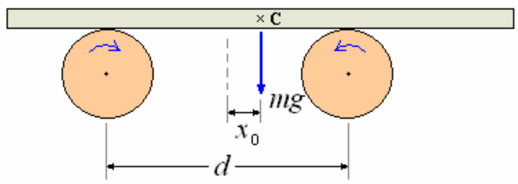
De aquí

$$F = -\frac{mg_0}{R_0}x = -kx$$

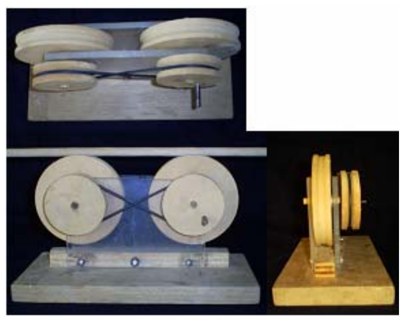
El signo menos nos indica que va dirigida hacia abajo.
El movimiento es oscilatorio armónico simple.
b) de período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g_0}} = 84 \text{ min}$$

Ejemplo 9. Una barra pesada uniforme de masa *m* reposa sobre dos discos iguales que son girados continuamente en sentidos opuestos, como se muestra. Los centros de los discos esta separados una distancia d. El coeficiente fricción entre las barras y la superficie de los discos es μ, constante independiente de la velocidad relativa de las superficies.
Inicialmente la barra se mantiene en reposo con su centro a una distancia x_0 del punto equidistante de los discos. Al tiempo $t = 0$ se suelta. Encontrar el movimiento subsiguiente de la barra.



Solución.
Aparato



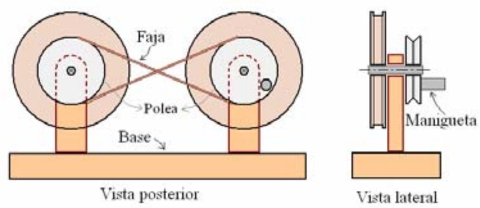
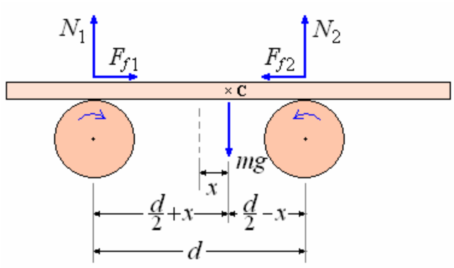


Diagrama de cuerpo libre de la barra
Las fuerzas actuantes sobre la viga se muestran en dibujo siguiente. Los centros de los discos están separados una distancia *d*. Las fuerzas de rozamiento son en sentidos opuestos.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$F_y=0$: $\quad N_1 + N_2 - mg = 0 \qquad (1)$

$\tau_C = 0: \quad -N_1\left(\frac{d}{2}+x\right) + N_2\left(\frac{d}{2}-x\right) = 0$

(2)

La ecuación de momentos (2) se escribe con respecto al centro de gravedad C de la barra, Despejando N_1 y N_2 de (1) y (2), obtenemos

$$N_1 = \frac{1}{2}mg\left(\frac{d}{2}-x\right),\quad N_2 = \frac{1}{2}mg\left(\frac{d}{2}+x\right)$$

Como $\sum F = ma$, para la barra, obtenemos:

$$F_{f1} - F_{f2} = m\ddot{x} \Rightarrow \mu N_1 - \mu N_2 = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu mg\left[\left(\frac{d}{2}-x\right)-\left(\frac{d}{2}+x\right)\right] = m\ddot{x}$$

Simplificando:

$$\ddot{x} + \left(\frac{2\mu g}{d}\right)x = 0.$$

Ecuación correspondiente al movimiento armónico simple, cuya frecuencia natural es ω_o es

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2\mu g}{d}} \text{ rad/s}$$

La ecuación del movimiento de la barra.

$$x = x_0 \cos\omega_0 t$$

La barra se mantiene un moviendo oscilatorio armónico simple sobre los discos que giran en sentidos opuestos.

ENERGIA EN EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Como oscilador armónico simple es un sistema conservativo, la fuerza se puede derivar de la función energía potencial.

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Como $F = -kx$, tenemos: $\frac{dU}{dx} = kx$

$$U = \int dU = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

La energía potencial del oscilador armónico simple es $U = \frac{1}{2}kx^2$

Como hemos visto es la energía de deformación elástica del resorte.

Como

$x = A\text{sen}(\omega t - \varphi)$, y $x_{max} = A$

Se tiene

$$U_{max} = \frac{1}{2}kA^2$$

Por otra parte la energía cinética del oscilador armónico simple es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2$$

Como

$\dot{x} = A\cos(\omega t - \varphi)$,

Con

$\dot{x}_{max} = A\omega$, se tiene

$$K_{max} = \frac{1}{2}m\dot{x}_{max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

La Energía mecánica total es:

$$E = K + U$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos(\omega t - \varphi)$$

Como

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\text{sen}^2(\omega t - \varphi)$$

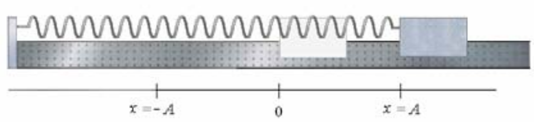
$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \text{Constante}$$

O sea que

$$E = K + U = K_{max} = U_{max}$$

PROBLEMA BASICO MASA – RESORTE
Resorte horizontal.

En nuestra primera referencia a este tipo de sistemas**,** considerábamos que estaba compuesto por un solo objeto de masa *m* sujeto a un resorte de constante *k* y longitud ℓ o a otro dispositivo equivalente, por ejemplo, un alambre delgado, que proporciona una fuerza restauradora igual al producto de cierta constante *k* por el desplazamiento respecto al equilibrio.



Esto sirve para identificar, en función de un sistema de un tipo particular sencillo, las dos características

que son esenciales en el establecimiento de movimientos oscilantes:
1. Una componente inercial, capaz de transportar energía cinética.
2. Una componente elástica, capaz de almacenar energía potencial elástica.

Admitiendo que la ley de Hooke es válida, se obtiene una energía potencial proporcional al cuadrado del desplazamiento del cuerpo respecto al equilibrio igual a $\frac{1}{2}kx^2$. Admitiendo que toda la inercia del sistema está localizada en la masa al final del resorte, se obtiene una energía cinética que es precisamente igual $\frac{1}{2}mv^2$, siendo *v* la velocidad del objeto. Debe señalarse que ambas hipótesis particularizaciones de las condiciones generales 1 y 2 y que habrá muchos sistemas oscilantes en que no se apliquen estas condiciones especiales. Sin embargo, si un sistema *puede* considerarse compuesto efectivamente por una masa concentrada al final de un resorte lineal (“lineal” se refiere a su propiedad y no a su forma geométrica), entonces podemos escribir su ecuación del movimiento mediante uno de estos dos procedimientos:

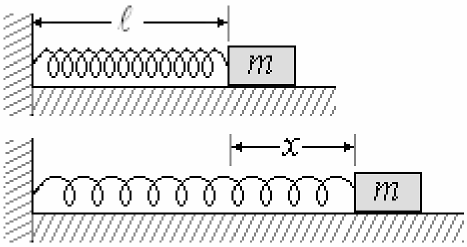
1. Mediante la segunda ley de Newton *(F = ma)*,

$$-kx = ma$$

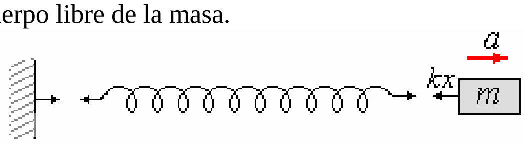
2. Por conservación de la energía mecánica total *(E)*,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

La segunda expresión es, naturalmente, el resultado de integrar la primera respecto al desplazamiento *x*, pero ambas son *ecuaciones diferenciales* del movimiento del sistema.
Vamos a aplicar la segunda ley de Newton (*F = ma*), en el instante en que el resorte se a estirado una longitud *x*



La figura a continuación muestra el diagrama del cuerpo libre de la masa.



Aplicando la segunda ley de Newton (*F = ma*),

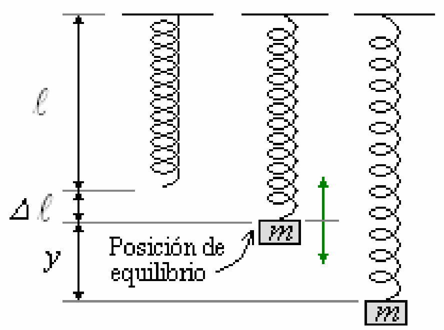
$$-kx = ma \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \text{ o } m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

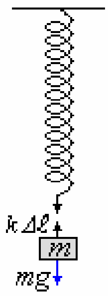
Cuando se vea una ecuación análoga a éstas se puede llegar a la conclusión de que el desplazamiento *x* es una función del tiempo de la forma

$x(t) = A\text{sen}(\omega t - \varphi)$, en donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ siendo k la constante del resorte y m la masa.
Esta solución seguirá siendo válida, aunque el sistema no sea un objeto aislado sujeto a un resorte carente de masa.
La ecuación contiene otras dos constantes, la amplitud *A* y la fase inicial φ, que proporcionan entre las dos una especificación completa del estado de movimiento del sistema para *t* = 0 (u otro tiempo señalado).

Resorte vertical.
Hasta este punto hemos considerado solamente resortes en posición horizontal, los que se encuentran sin estirar en su posición de equilibrio. En muchos casos, sin embargo, tenemos resortes en posición vertical.

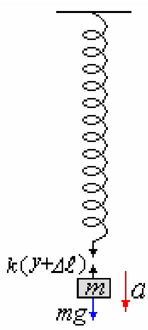


El resorte tiene una longitud original ℓ, cuando se ata una masa *m* a un resorte en posición vertical, el sistema está en equilibrio cuando el resorte ejerce una fuerza hacia arriba igual al peso de la masa. Esto es, el resorte se estira una longitud $\Delta\ell$ dada por



$$k\Delta\ell = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = \frac{mg}{k}$$

Por consiguiente, una masa en un resorte vertical oscila alrededor de la posición de equilibrio.
Aplicando la segunda ley de Newton $(F = ma)$,



$$-k(y + \Delta\ell) + mg = ma$$

$$\Rightarrow -ky - k\Delta\ell + mg = ma$$

Como $k\Delta\ell = mg$:

$$-ky = ma$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \text{ o } m\ddot{y} + ky = 0$$

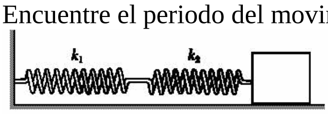
$$\ddot{y}+\frac{k}{m}y=0$$

En todos los otros aspectos las oscilaciones son iguales que para el resorte horizontal.

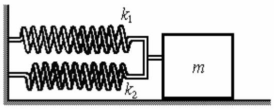
$$y(t)=A\operatorname{sen}(\omega t-\varphi)$$

El moviendo es armónico simple y la frecuencia está dada por $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, siendo k la constante del resorte y m la masa.

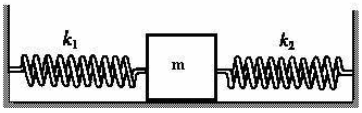
Ejemplo 10. Una masa *m* se conecta a dos resortes de constantes fuerza k_1 y k_2 como en las figuras a , b y c. En cada caso, la masa se mueve sobre una superficie sin fricción al desplazarse del equilibrio y soltarse. Encuentre el periodo del movimiento en cada caso.



(a)



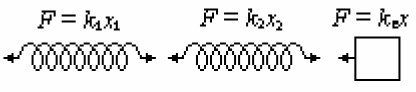
(b)



(c)

Solución.

a) Haciendo el diagrama de cuerpo libre.



Para cada uno de los resortes:

$\sum F_x = ma_x$, $F=k_1x_1$, $F=k_2x_2$

Visto en conjunto la masa oscila debido a un resorte equivalente: $F=k_e x$, donde $x=x_1+x_2$

Luego, podemos escribir.

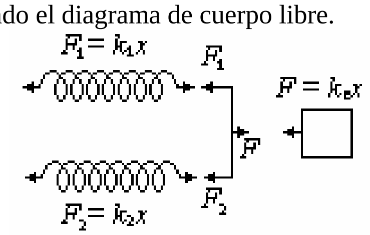
$$\frac{F}{k_e}=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}\Rightarrow\frac{1}{k_e}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2},$$

y $k_e=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$,

Con esto $\omega=\sqrt{\dfrac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$ y

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$$

b) Haciendo el diagrama de cuerpo libre.



Para cada uno de los resortes:

$\sum F_x = ma_x$, $F_1=k_1x$, $F_2=k_2x$

Visto en conjunto la masa oscila debido a un resorte equivalente: $F=k_e x$, ahora $F=F_1+F_2$

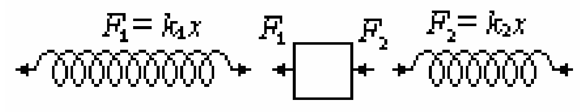
Luego, podemos escribir.

$$k_e x=k_1x+k_2x\Rightarrow k_e=k_1+k_2$$

,

Con esto $\omega=\sqrt{\dfrac{(k_1+k_2)}{m}}$ y $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{(k_1+k_2)}}$

c) Haciendo el diagrama de cuerpo libre.



Para cada uno de los resortes:

$\sum F_x = ma_x$, $F_1=k_1x$, $F_2=k_2x$

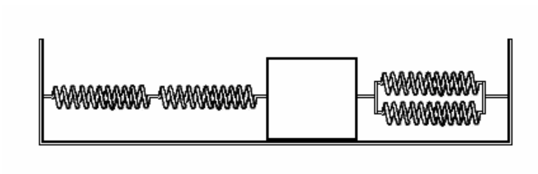
Visto en conjunto la masa oscila debido a un resorte equivalente: $F=k_e x$, ahora $F=F_1+F_2$

Luego, podemos escribir.

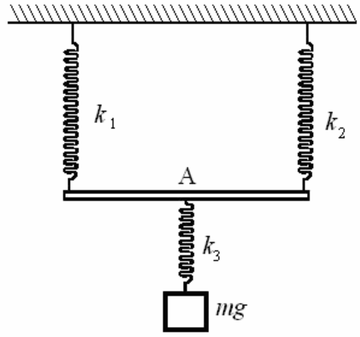
$k_e x=k_1x+k_2x\Rightarrow k_e=k_1+k_2$,

Con esto $\omega=\sqrt{\dfrac{(k_1+k_2)}{m}}$ y $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{(k_1+k_2)}}$

¿Cuál sería el periodo para el caso de la figura siguiente?

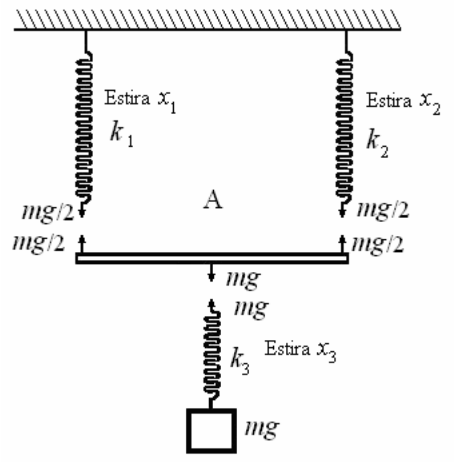


Ejemplo 11. Al suspender un cuerpo de masa *m* de un resorte de constante k_1, y separarlo ligeramente de su posición de equilibrio, el sistema oscila con una frecuencia f_1. Si ahora este resorte se monta como indica la figura, junto con otros dos, de constantes $k_2 = 2k_1$ y $k_3 = 4k_1$, utilizando una barra de peso despreciable, ¿cuál será la nueva frecuencia propia del sistema con relación a la anterior? A es el punto medio de la barra.



Solución.

Como k_1 es diferente k_2 , los estiramientos de los resortes no son iguales, por lo tanto no podemos considerar la suma de las constantes como la constante equivalente de la parte en paralelo.
En este caso vamos hallar directamente la constante equivalente del conjunto.



El estiramiento del resorte 1 es:

$$x_1 = \frac{mg/2}{k_1} = \frac{mg}{2k_1}$$

El estiramiento del resorte 2 es:

$$x_2 = \frac{mg/2}{k_2} = \frac{mg}{4k_1}$$

El estiramiento del resorte 3 es:

$$x_3 = \frac{mg}{k_3} = \frac{mg}{4k_1}$$

Con el peso *mg* el resorte se estira

$$x = \frac{x_2 + x_2}{2} + x_3$$

Siendo $x = \dfrac{mg}{k_{eq}}$

Reemplazando *x*, x_1, x_2 y x_3:

$$\frac{mg}{k_{eq}} = \frac{\frac{mg}{2k_1} + \frac{mg}{4k_1}}{2} + \frac{mg}{4k_1} = \frac{5mg}{8k_1} \Rightarrow$$

$$k_{eq} = \frac{8}{5}k_1$$

La frecuencia del conjunto es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{8k_1}{5m}} = 2\pi f$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8k_1}{5m}}$$

Como la frecuencia del resorte 1 es

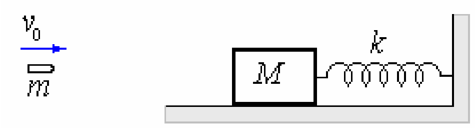
$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

Obtenemos:

$$\frac{f}{f_1} = \sqrt{\frac{8}{5}} = 1,26 .$$

Ejemplo 12. Un pequeño proyectil de masa 10 g que vuela horizontalmente a velocidad 20 m/s impacta plásticamente contra un bloque de madera de masa 190 g unido a un resorte ideal de constante 500 N/m que se halla en posición horizontal. Determine la amplitud y frecuencia de las oscilaciones producidas.

Solución.



Por conservación de cantidad de movimiento:

$$mv_0 = (m + M)v_1$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m}{(m+M)}v_0$$

$$= \frac{10}{(10+190)}20 = 1\frac{m}{s}$$

Por conservación de energía:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(0,2kg)\left(1\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{2}\left(500\frac{N}{m}\right)A^2$$

De aquí: $A = 0,02m = 2cm$

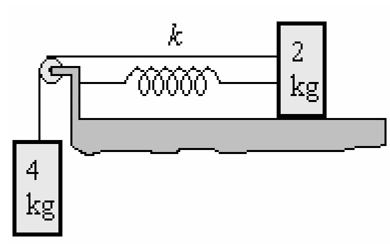
La frecuencia se obtiene de

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{(m+M)}} \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{(m+M)}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{500}{0,2}} = \frac{25}{\pi} = 7,96Hz$$

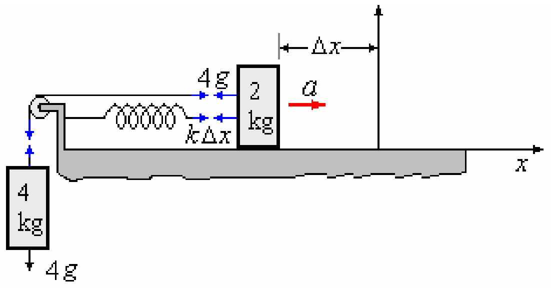
Ejemplo 13. En el diagrama de la figura el resorte tiene masa despreciable y una longitud de 20cm cuando está sin deformar. Un cuerpo de 2kg. Unido al resorte puede moverse sobre una superficie plana horizontal lisa. A dicho cuerpo se le ata un hilo que pasa por una polea sin rozamiento y del cual pende un cuerpo de 4kg. El sistema se halla inicialmente en reposo en la posición representada y la longitud del resorte comprimido es de 15cm. Se corta entonces el hilo y el cuerpo de 2 kg empieza a oscilar con movimiento armónico simple.



a) ¿Cuál es el valor de "*k*"?
b) Hallar la ecuación diferencial
c) Hallar la amplitud de oscilación y la frecuencia natural del MAS.
d) Hallar la energía mecánica del sistema.

Solución.

a) ¿Cuál es el valor de "*k*"?



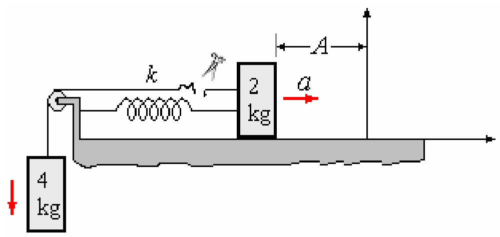
$\Delta x = 0{,}2 - 0{,}15$ = 0,05 m

$F = k\Delta x$

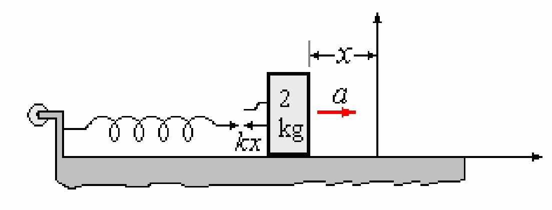
$\Rightarrow k = \dfrac{F}{\Delta x} = \dfrac{mg}{\Delta x} = \dfrac{4(9{,}8)}{0{,}05}$ = 784 N/m

b) Hallar la ecuación diferencial

Al cortar la cuerda



Vamos a aplicar la segunda ley de Newton (*F* = *ma*) al cuerpo de masa 2 kg en el instante en que el resorte está comprimido una longitud *x*



$-kx = ma \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ o $m\ddot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{784}{2}x = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + 392x = 0$

c) La amplitud del movimiento es *A* = 0,05 m, la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{392}$ = 19,8 rad/s

La frecuencia es: $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{19{,}8}{2\pi}$ = 3,15 c/s

d) Hallar la energía mecánica del sistema.

$E = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}784(0{,}05)^2$ = 0,98 J

PÉNDULOS

Péndulo simple

Un ejemplo de movimiento armónico simple es el movimiento de un péndulo. Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida del punto O por una cuerda de longitud ℓ y de masa despreciable. Si la partícula se lleva a la posición B de modo que la cuerda haga un ángulo θ con la vertical OC, y luego se suelta, el péndulo oscilará entre B y la posición simétrica B'.

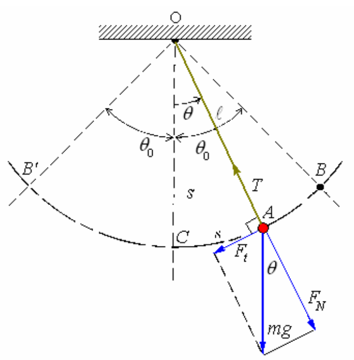
Para determinar la naturaleza de las oscilaciones, debemos escribir la ecuación de movimiento de la partícula. La partícula se mueve en un arco de circulo de radio ℓ = OA. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso *mg* y la tensión *T* a lo largo de la cuerda. De la figura, se ve que la componente tangencial de la fuerza es

$F_t = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta$, donde el signo menos se debe a que se opone al desplazamiento s = CA. La ecuación del movimiento tangencial es $F_t = ma_t$ y, como la partícula se mueve a lo largo de un círculo de radio ℓ, podemos usar la ecuación

$a_t = \dfrac{dv}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$ (reemplazando *R* por ℓ) para expresar la aceleración tangencial.

Esto es $a_t = \ell\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ell\ddot{\theta}$. La ecuación del movimiento tangencial es por consiguiente

$m\ell\ddot{\theta} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta$ o $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\mathrm{sen}\,\theta = 0$



Movimiento osci1atorio de un péndulo.

Esta ecuación no es del mismo tipo que la ecuación $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$ debido a la presencia del $sen\theta$ Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, lo cual es cierto si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, podemos usar la aproximación $sen\theta \approx \theta$ y escribir para el movimiento del péndulo

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta = 0$$

Esta es la ecuación diferencial idéntica a la ecuación $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$ si reemplazamos x por θ, esta vez refiriéndonos al movimiento angular y no al movimiento lineal. Por ello podemos llegar a la conclusión que, dentro de nuestra aproximación, el movimiento angular del péndulo es armónico simple con $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$. El ángulo θ puede así expresarse en la forma $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$, el período de oscilación está dado por la expresión

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Nótese que el período es independiente de la masa del péndulo. Para mayores amplitudes, la aproximación $\text{sen}\theta \approx \theta$ no es válida.

Ejemplo 14. Calcular la tensión en la cuerda de un péndulo en función del ángulo que hace la cuerda con la vertical.

Solución.

Para calcular la tensión *T*, primero obtenemos la fuerza centrípeta sobre la partícula,

$$F_c = T - F_N = T - mg\cos\theta,$$

ya que, de la figura del péndulo simple, F_N está dada por $mg\cos\theta$. Luego igualando esta expresión a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta mv^2/ℓ (nótese que ℓ es el radio), con esto obtenemos

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell}$$

Para conseguir la velocidad usamos la conservación de la energía considerando como nivel 0, el punto de suspensión del péndulo:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Esto es, $v^2 = 2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)$

y por lo tanto

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

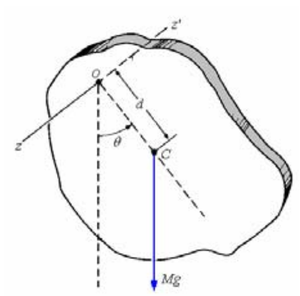
Péndulo compuesto

Un péndulo compuesto (o físico) es cualquier cuerpo rígido que puede oscilar libremente alrededor de un eje horizontal bajo la acción de la gravedad. Sea ZZ' el eje horizontal y C el centro de masa del cuerpo. Cuando la línea OC hace un ángulo θ con la vertical, el torque alrededor del eje *z* actuante sobre el cuerpo es $\tau_z = -Mgd\text{sen}\theta$, donde *d* es la distancia OC entre el eje *z* y el centro de masa C. Si I es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje *z*, y $\alpha = \ddot{\theta}$ es la aceleración angular.

Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación $\sum\tau = I\alpha$ obtenemos:

$-Mgd\text{sen}\theta = I\ddot{\theta}$. Suponiendo que las oscilaciones son de pequeña amplitud, podemos suponer que $sen\theta \approx \theta$, de modo que la ecuación del movimiento es

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{T}\theta \quad \text{o} \quad \ddot{\theta}+\frac{Mgd}{T}\theta = 0$$

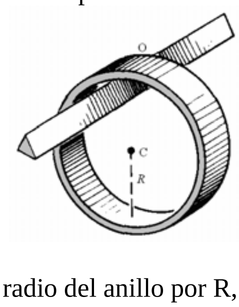


Péndulo compuesto.

Podemos comparar esta ecuación del movimiento comparar con la ecuación $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$, demostrando que el movimiento angular oscilatorio es armónico simple, con $\omega^2 = \frac{Mgd}{I}$. Por consiguiente, el período de las oscilaciones es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

Ejemplo 15. Un anillo de 0,10 m de radio está suspendido de una varilla, como se ilustra en la figura. Determinar su período de oscilación.



Solución.

Designando el radio del anillo por R, su momento de inercia con respecto a un eje que pasa a través de su centro de masa C es $I_C = mR^2$. Entonces, si aplicamos el teorema de Steiner $\left(I_O = I_C + Md^2\right)$, en este caso $d = R$, el momento de inercia con respecto a un eje que pasa a través del punto de suspensión O es

$$I = I_C + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2,$$

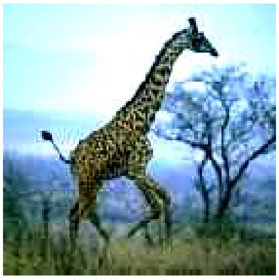
Para un péndulo físico o compuesto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$, luego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Lo cual indica que es equivalente a un péndulo simple de longitud $2R$, o sea el diámetro del anillo. Al reemplazar los valores de R = 0,10 m y g = 9,8 m/s^2 obtenemos T = 0,88 s.

Ejemplo 16. En una caminata normal, las piernas del ser humano o del animal oscilan libremente más o menos como un péndulo físico. Esta observación ha permitido a los científicos estimar la velocidad a la cual las criaturas extintas tales como los dinosaurios viajaban. ¿Si una jirafa tiene una longitud de piernas de 1.8 m, y una longitud del paso de 1 m, qué estimaría usted para el período de la oscilación de la pierna? ¿Cuál sería su velocidad al caminar?



Solución.
Podemos modelar la pierna de la jirafa como un péndulo físico de longitud L que oscila alrededor de un extremo. Su momento de inercia alrededor del punto de oscilación es $I = \frac{1}{3}mL^2$

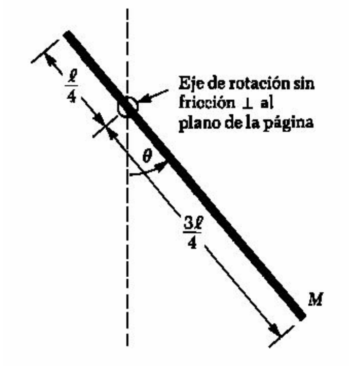
El periodo de un péndulo físico es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

= 2,2 s

$$v = \frac{\text{longitud del paso}}{\text{periodo}} = \frac{1\,\text{m}}{2{,}2\,\text{s}} = 0{,}46\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 17. Considere una barra delgada con masa M = 4 kg y de longitud L = 1,2 m pivotada en un eje horizontal libre de fricción en el punto L/4 desde un extremo, como se muestra en la figura.
a) Encuentre (a partir de la definición) la expresión para el momento de inercia de la barra respecto del pivote.
b) Obtenga una ecuación que dé la aceleración angular α de la barra como función de θ.
c) Determine el periodo para pequeñas amplitudes de oscilación respecto de la vertical.



Solución.
a)

$$I = \int r^2 dM = \int_0^{L/4}\frac{r^2 M}{L}dr = \int_0^{3L/4}\frac{r^2 M}{L}dr$$

$$= \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{4}\right)^3 + \left(\frac{3L}{4}\right)^3\right]$$

$$= \frac{M}{3L}\left(\frac{28L^3}{64}\right) = \frac{7ML^2}{48}$$

b) $r = \frac{-MgL}{4}\operatorname{sen}\theta = I_0\alpha$

$$\alpha = \frac{MgL}{4I_0}\operatorname{sen}\theta = -\frac{12g}{7L}\theta$$

Para oscilaciones pequeñas,

$$\alpha = -\frac{12g}{7L}\theta$$

c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{MgL/4}} = 2\pi\sqrt{\frac{7L}{12g}}$

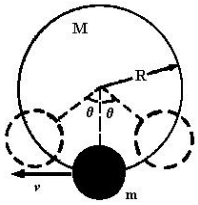
= 1,68 s

Ejemplo 18. Un disco pequeño delgado de masa m y radio r se sujeta firmemente a la cara de otro disco delgado de radio R y masa M, como se muestra en la figura. El centro del disco pequeño se localiza en el borde del disco mayor. El disco mayor se monta por su centro en un eje sin fricción. El dispositivo se gira un ángulo θ y se suelta
a) Demuestre que la rapidez del disco pequeño cuando pasa por la posición de equilibrio es

$$v = 2\sqrt{gR\frac{(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m} + \frac{r^2}{R^2} + 2\right)}}$$

b) Demuestre que el periodo del movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M + 2m)R^2 + mr^2}{2mgR}}$$



Solución.
a) $E = K + U$ = constante, Luego
$K_{arriba} + U_{arriba} = K_{abajo} + U_{abajo}$
Como $K_{arriba} = U_{abajo} = 0$
Obtenemos $mgh = \frac{1}{2} I\omega^2$, pero

$h = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$, $\omega = \frac{v}{R}$ e

$I = \frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2} + mR^2$. Sustituyendo encontramos

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + \frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$mgR(1-\cos\theta) = \left(\frac{M}{4} + \frac{mr^2}{2R^2} + \frac{m}{2}\right)v^2$$ y

$$v^2 = 4gR\frac{(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m} + \frac{r^2}{R^2} + 2\right)}$$

de aquí

$$v = 2\sqrt{gR\frac{(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m} + \frac{r^2}{R^2} + 2\right)}}$$

b) Para un péndulo físico

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$, aquí $M = m + M$;

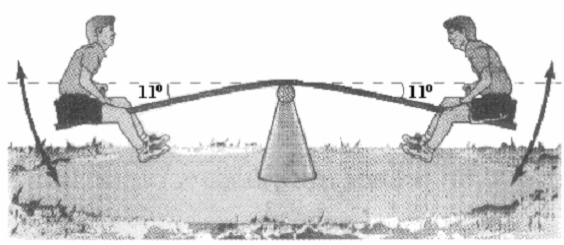
$$d = \frac{mR + M(0)}{m+M} = \frac{mR}{(m+M)}$$

Luego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2} + mR^2\right)}{(m+M)g\left[\frac{mR}{(m+M)}\right]}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+2m)R^2 + mr^2}{2mgR}}$$

Ejemplo 19. Problema del sube y baja. Una barra de 4,2 m de longitud, 8,5 kg de masa tiene un doblez de 202º en su centro de tal manera que queda como muestra la figura. El doblez de la barra reposa sobre un apoyo agudo. Los gemelos de masa 44 kg cada uno, sentados en los extremos opuestos de la barra se balancean. ¿Cuál es el periodo del movimiento de este sube y baja modificado?



Solución.
La ecuación del péndulo físico puede encontrarse aplicando la segunda ley de Newton para la rotación:

$$\sum \tau_O = I_O\alpha$$

$$-mgd\,\text{sen}\theta = I_O\ddot{\theta},$$

m es la masa total del sistema.,
g la aceleración de la gravedad,
d la distancia del punto de apoyo al centro de masa del sistema.
I_O es el momento de inercia del sistema con respecto al apoyo (centro de oscilación)
y θ es el ángulo que forma la línea que pasa por el punto de apoyo y por el centro con la vertical cuando el sistema está oscilando.

Luego $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_O}\text{sen}\theta = 0$, para oscilaciones pequeñas $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_O}\theta = 0$,

De aquí $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_O}}$

Reemplazando valores:

m = 2(44) + 8,5 = 96,5 kg,

$$d = \frac{2(44)(2,1)\text{sen}11^0 + 2((4,25)(1,05)\text{sen}11^0}{96,5}$$

$$= 0,38\,\text{m}$$

$$I_O = 2(44)(2,1)^2 + 2\frac{1}{3}(4,25)(2,1)^2$$

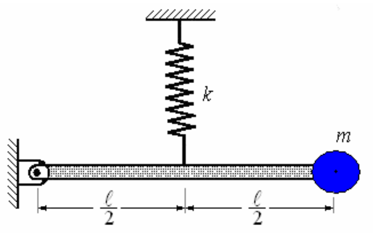
$$= 400,56\,\text{kgm}^2$$

Luego:

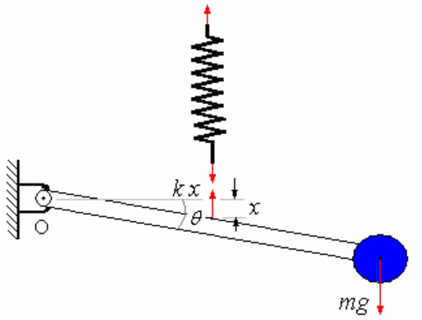
$$\omega = \sqrt{\frac{96,5(9,8)0,38}{400,56}} = 0,95\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

SISTEMAS DE PENDULOS Y RESORTES

Ejemplo 20. El sistema mostrado en la figura consiste de una barra de masa despreciable, pivotada en O, Una masa m pequeña en el extremo opuesto a O y un resorte de constante *k* en la mitad de la barra. En la posición mostrada el sistema se encuentra en equilibrio. Sí se jala la barra hacia abajo un ángulo pequeño y se suelta, ¿cuál es el periodo de las oscilaciones?



Solución.
Supongamos al sistema desviado un ángulo θ:



Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación:
$$\sum \tau_O = I_O \alpha$$

El resorte es el único elemento que causa una fuerza recuperativa, el efecto del peso de la masa está compensado por el efecto del estiramiento previo del reste para poner al sistema en posición horizontal.

$$-kx\left(\frac{\ell}{2}\right)\cos\theta = m\ell^2 \ddot{\theta}$$

Tenemos que $x = \left(\frac{\ell}{2}\right)\text{sen}\theta$

Para ángulos pequeños:
$\text{sen}\theta \approx \theta$ y $\cos\vartheta \approx 1$

Así: $-\frac{k\ell^2}{4}\theta = m\ell^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{4m}\theta = 0$

Ecuación de moviendo armónico simple con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{4m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}}$$

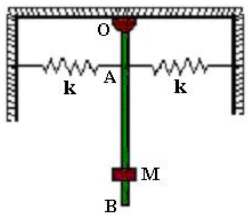
Ejemplo 21. Problema del Metrónomo. El metrónomo es un aparato para medir el tiempo y marcar el compás de la música

La figura muestra un metrónomo y un modelo de metrónomo.

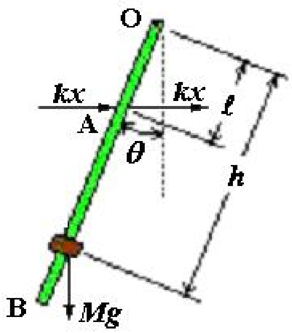
Metrónomo vertical invertido La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA = ℓ, OB = 10ℓ, la masa de la barra del péndulo se considera despreciable.

a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa *M* está situada a una distancia h del punto O.

b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando *M* está primero localizada en A y luego en B



Solución.
a)



$$\sum \tau_O = -2kx.\ell\cos\theta - Mgh.\text{sen}\theta = I_O\alpha$$

Como: $x = \ell sen\theta$, $I_O = Mh^2$:

$$-2k.\ell^2 sen\theta\cos\theta - Mgh.\text{sen}\theta = Mh^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con $\text{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta = 1$ y simplificando:

$$-2\frac{k}{M}\ell^2\theta - gh\theta = h^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{M}\frac{\ell^2}{h^2}+\frac{g}{h}\right)\theta=0$$

b) con M en A: $h=\ell$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{M}+\frac{g}{\ell}\right)\theta=0$$

$$\Rightarrow\ \omega=\sqrt{\frac{2k}{M}+\frac{g}{\ell}}=\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1+\left(\frac{M}{2k}\right)\frac{g}{\ell}}$$

Con M en B: $h=10\ell$

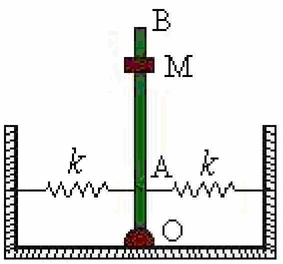
$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{100M}+\frac{g}{10\ell}\right)\theta=0\ \Rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2k}{100M}+\frac{g}{\ell}}=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1+\left(\frac{100M}{2k}\right)\frac{g}{\ell}}$$

Metrónomo vertical derecho La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA = ℓ, OB = 10ℓ.

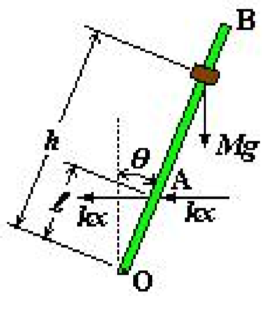
a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa *M* está situada a una distancia h del punto O

b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando *M* está primero localizada en A y luego en B



Solución.

a)



$$\sum\tau_O=-2kx.\ell\cos\theta+Mgh.\text{sen}\theta=I_O\alpha$$

Como: $x=\ell\text{sen}\theta$, $I_O=Mh^2$:

$$-2k.\ell^2 sen\theta\cos\theta+Mgh.\text{sen}\theta\ =\ Mh^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con $\text{sen}\theta\approx\theta$, $\cos\theta=1$ y simplificando:

$$-2\frac{k}{M}\ell^2\theta+gh\theta=h^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{M}\frac{\ell^2}{h^2}-\frac{g}{h}\right)\theta=0$$

b) con M en A: $h=\ell$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{M}-\frac{g}{\ell}\right)\theta=0\ \Rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2k}{M}-\frac{g}{\ell}}=\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1-\left(\frac{M}{2k}\right)\frac{g}{\ell}}$$

Con M en B: $h=10\ell$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{100M}-\frac{g}{10\ell}\right)\theta=0$$

$$\Rightarrow\ \omega=\sqrt{\frac{2k}{100M}-\frac{g}{10\ell}}$$

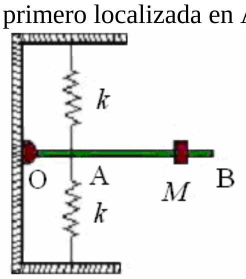
$$=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1-5\frac{Mg}{k\ell}}$$

Metrónomo horizontal

La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA = ℓ, OB = 10ℓ.

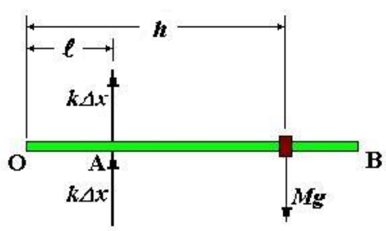
a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa *M* está situada a una distancia *h* del punto O

b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando M está primero localizada en A y luego en B



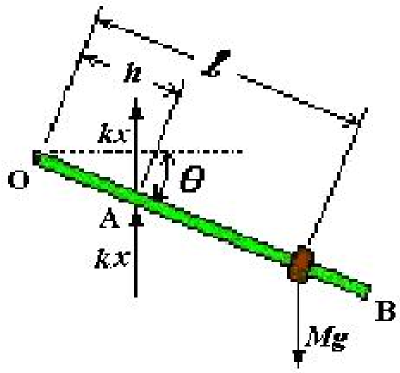
Solución.

a)



Equilibrio estático $\sum\tau_O=-2k\Delta x\ell+Mgh=0$

El torque producido por los pesos de las masas es compensado por los torques producidos por las reacciones a las deformaciones previas de los resortes. Luego la ecuación dinámica es:



$\sum \tau_O = -2kx.\ell \cos\theta = I_O \alpha$

Como: $x = \ell \text{sen}\theta$, $I_O = Mh^2$:

$$-2k.\ell^2 \text{sen}\theta \cos\theta = Mh^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con $\text{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta = 1$ y simplificando:

$$-2\frac{k}{M}\ell^2\theta = h^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M}\frac{\ell^2}{h^2}\right)\theta = 0$$

b) Con *M* en A: $h = \ell$

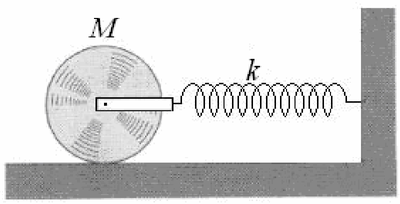
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M}\right)\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

Con *M* en B: $h = 10\ell$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{100M}\right)\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

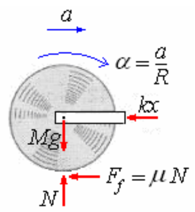
Ejemplo 22. Un cilindro de masa *M* y radio *R* se conecta por medio de un resorte de constante k como de muestra en la figura. Si el cilindro tiene libertad de rodar sobre la superficie horizontal sin resbalar, encontrar su frecuencia.



Solución.

Por la ley de Newton

Aplicando la segunda ley de Newton al cilindro,



$\sum F = ma$ o $m\ddot{x} = -kx - F_f$

Donde F_f es la fuerza de fricción,

Usando la segunda ley de Newton para la rotación,

$\sum \tau = I_o \ddot{\theta}$,

$$I_o \ddot{\theta} = F_f R \text{ o } \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right) = F_f R$$

De aquí $F_f = \frac{1}{2}m\ddot{x}$, sustituyendo esta expresión en la ecuación de la fuerza obtenemos

$$m\ddot{x} = -kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} \text{ o } \frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$$

y $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}} \text{rad/s}$

Por el método de la energía:

La energía total del sistema es la suma de la energía cinética (traslacional y rotacional) y la energía potencial; y permanece igual para todo tiempo,

$E = (K_{traslación} + K_{rotación}) + U$

$$K_{traslación} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 , \; K_{rotación} = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2$$

Donde el momento de inercia del cilindro es

$I_o = \frac{1}{2}MR^2$,

También $R\theta = x$ y $R\dot{\theta} = \dot{x}$

La ecuación de la energía del sistema para cualquier tiempo es

$$E = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2\right]$$

$$= \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

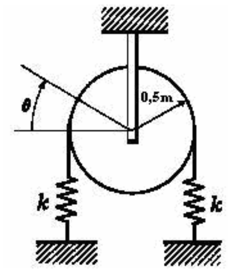
Como *E* = constante, $\frac{dE}{dt} = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{3}{2}M\ddot{x} + kx\right)\dot{x} = 0$$

Como $\dot{x}$ no siempre es cero, la ecuación del movimiento es

$$\frac{3}{2}M\ddot{x}+kx=0 \quad \text{o} \quad \omega_0=\sqrt{\frac{2k}{3M}}\text{rad/s}$$

Ejemplo 23. El disco homogéneo tiene un momento de inercia alrededor de su centro I_o = 0,5 kgm^2 y radio R = 0,5 m. En su posición de equilibrio ambos resortes están estirados 5 cm. Encontrar la frecuencia angular de oscilación natural del disco cuando se le da un pequeño desplazamiento angular y se lo suelta.
k = 800 N/m



Solución.
Usando la segunda ley de Newton para la rotación,

$$\sum\tau=I_o\ddot{\theta},$$

La tensión inicial en cada uno de los resortes es

$$\left(800\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0{,}05\text{m})=40\text{N}$$

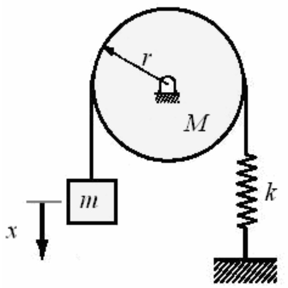
El cambio en tensión es 800(0,5θ) = 400θ, y

$$0{,}5\ddot{\theta}=\left[(40-400\theta)-(40+400\theta)\right]0{,}5$$

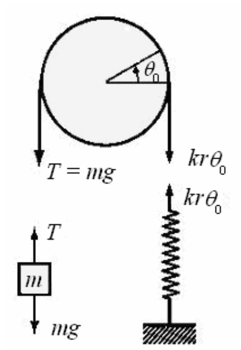
o $\ddot{\theta}+400\theta=0$
De la cual

$$\omega_0=\sqrt{400}=20\text{rad/s}$$

Ejemplo 24. Determinar la frecuencia natural del sistema resorte-masa-polea mostrado en la figura.

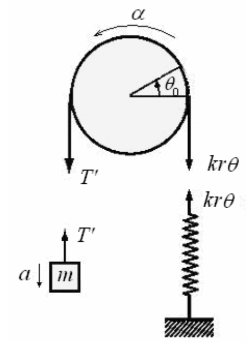


Solución.
Equilibrio estático:
El resorte tiene un estiramiento inicial igual a $r\theta_o$ que produce una fuerza $kr\theta_o$ que equilibra al peso mg.
O sea $kr\theta_o=mg$



Para hacerlo oscilar hay que sacarlo del equilibrio con un movimiento vertical de la masa m.

Solución aplicando la segunda ley de Newton:
Como el peso está compensado por el estiramiento previo la única fuerza actuante es producida por el estiramiento adicional del resorte.



Aplicando la segunda ley de Newton:
Para la masa m, $\sum F=ma$

$$-T'=ma=m\ddot{x}$$

Como $x=r\theta$, $\ddot{x}=r\ddot{\theta}$

Luego $T'=-mr\ddot{\theta}$ (1)

Para el disco de masa M, $\sum\tau=I\alpha$

$$I_0\alpha=I_0\ddot{\theta}=T'r-(kr\theta)r \qquad (2)$$

Donde $\text{I}_0=\frac{1}{2}\text{Mr}^2$ es el momento de inercia de la polea.

Reemplazando (1? En (2):

$$\frac{1}{2}Mr^2\ddot{\theta}=r(-mr\ddot{\theta})-kr^2\theta$$

y $\left(\frac{1}{2}Mr^2+mr^2\right)\ddot{\theta}+kr^2\theta=0$,

Finalmente $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{M/2+m}}\text{rad/s}$

Solución por el método de la energía:
$E = K + U$ = constante
$K = K_{masa} + K_{polea}$

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kr^2\theta^2$$

Como la energía total de sistema permanece constante,

$$\frac{d}{dt}(K+U) = 0 \quad \text{o}$$

$$mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + I_0\dot{\theta}\ddot{\theta} + kr^2\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}\left(mr^2\ddot{\theta} + I_0\ddot{\theta} + kr^2\theta\right) = 0$$

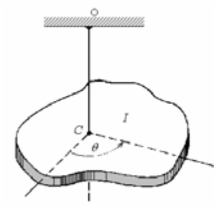
Como $\dot{\theta}$ no siempre es cero,

$\left(mr^2\ddot{\theta} + I_0\ddot{\theta} + kr^2\theta\right)$ es igual a cero. Luego

$$\ddot{\theta} + \frac{kr^2}{I_0 + mr^2}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M/2 + m}}\text{rad/s}$$

PENDULO DE TORSION.



Otro ejemplo de movimiento armónico simple es el péndulo de torsión, consistente en un cuerpo suspendido por un alambre o fibra de tal manera que la línea OC pasa por el centro de masa del cuerpo. Cuando el cuerpo se rota un ángulo θ a partir de su posición de equilibrio, el alambre se tuerce, ejerciendo sobre el cuerpo un torque τ alrededor de OC que se oponen al desplazamiento θ y de magnitud proporcional al ángulo, $\tau = -\kappa\theta$, donde κ es el coeficiente de torsión del alambre.

Aplicando la segunda ley del movimiento (para variables angulares):

$$\sum \tau_0 = I_0\alpha$$

Si I_0 es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje OC, la ecuación del movimiento

$-\kappa\theta = I_0\alpha$, con $\alpha = \ddot{\theta}$, es

$$I_0\ddot{\theta} = -\kappa\theta \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I_0}\theta = 0$$

Nuevamente encontramos la ecuación diferencial del MAs, de modo que el movimiento angular es armónico simple, con $\omega^2 = \dfrac{\kappa}{I_0}$; el período de oscilación es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{\kappa}}$$

Este resultado es interesante debido a que podemos usarlo experimentalmente para determinar el momento de inercia de un cuerpo suspendiéndolo de un alambre cuyo coeficiente de torsión κ se conoce, y luego midiendo el período T de oscilación.

MOVIMIENTO ARMONICO EN DOS DIMENSIONES.

Hasta ahora no hemos limitado a estudiar el movimiento armónico de la partícula o cuerpo descrito por una sola variable, ahora permitiremos a la partícula, movimiento en dos dimensiones.

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

La fuerza se puede descomponer en dos componentes

$F_x = -kx$, $F_y = -ky$

Las ecuaciones del movimiento son:

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$

Donde como antes $\omega_0^2 = k/m$. Las soluciones son:

$x_{(t)} = A\cos(\omega_0 t - \alpha)$, $y_{(t)} = B\cos(\omega_0 t - \beta)$

Luego el movimiento es armónico simple en cada una de las dimensiones, ambas oscilaciones tienen la misma frecuencia pero tienen que diferenciar amplitudes y fases. Podemos obtener la ecuación de la trayectoria de las partículas eliminando el tiempo *t* entre las dos ecuaciones. Para esto escribimos:

$$y_{(t)} = B\cos[\omega_0 t - \alpha - (\alpha - \beta)]$$
$$= B\cos(\omega_0 t - \alpha)\cos(\alpha - \beta)$$
$$- B\operatorname{sen}(\omega_0 t - \alpha)\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

Con

$$\cos(\omega_0 t - \alpha) = \frac{x}{A} \quad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}(\omega_0 t - \alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

Llamando $\delta = (\alpha - \beta)$:

$$y = \frac{B}{A}x\cos\delta - B\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}\operatorname{sen}\delta$$

Elevada al cuadrado se transforma en:

$$A^2y^2 - 2ABxy\cos\delta + B^2x^2\cos^2\delta$$
$$= A^2B^2\operatorname{sen}^2\delta - B^2x^2\operatorname{sen}^2\delta$$

Que es:

$$B^2x^2 - 2AB\cos\delta + Ay^2 = A^2B^2\operatorname{sen}^2\delta$$

Para $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$, esta ecuación toma la forma de una elipse:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

En el caso particular de $A = B$ y $\delta = \pm \pi/2$, tendremos un movimiento circular:

$$x^2 + y^2 = A^2$$

Otro caso particular es con $\delta = 0$, en que tendremos:

$$Bx^2 - 2ABxy + Ay^2 = 0 \Rightarrow (Bx - Ay)^2 = 0,$$

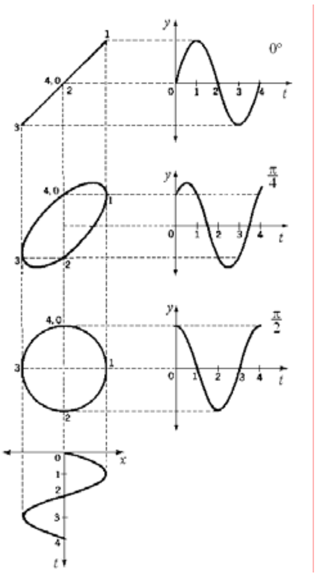
expresión de ecuación de una recta:

$$y = \frac{B}{A}, \text{ para } \delta = 0$$

De forma similar para $\delta = \pm\pi$

$$y = -\frac{B}{A}, \text{ para } \delta = \pm\pi$$

En la figura pueden observarse algunas de las curvas correspondientes al caso $A = B$, cuando $\delta = 0$, $\delta = \pi/4$ y $\delta = \pi/2$

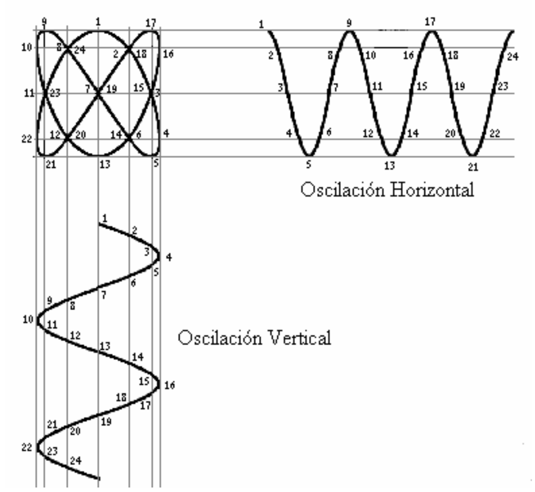


En general las oscilaciones bidimensionales no tienen por qué ser las mismas frecuencias en los mismos movimientos según las direcciones x e y, de forma que las ecuaciones se conviertan en

$$x_{(t)} = A\cos(\omega_x t - \alpha),\ y_{(t)} = B\cos(\omega_y t - \beta)$$

y la trayectoria no es ya una elipse, sino una de las llamadas curvas de Lissajous. Estas curvas serán cerradas cuando el movimiento se repita sobre sí mismo a intervalos regulares de tiempo, lo cual sólo será posible cuando las frecuencias ω_x y ω_y, sean «conmensurables», o sea, cuando ω_x/ω_y sea una fracción racional.

En la figura a continuación se representa uno de estos casos, para el cual ω_x/ω_y = 2/3 (y asimismo, $A = B$ y $\alpha = \beta$).



Curvas de Lissajous.

En el caso de que el cociente de las frecuencias no sea una fracción racional, la curva será abierta; es decir, la partícula no pasará dos veces por el mismo punto a la misma velocidad.

Medida del desfase entre dos señales

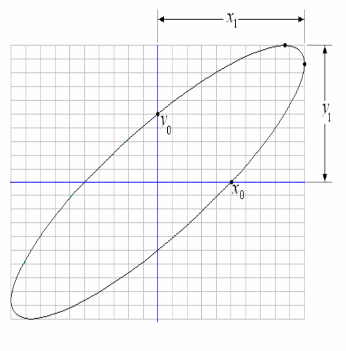
En un osciloscopio componemos dos MAS de direcciones perpendiculares y de la misma frecuencia ω, desfasados δ. Supondremos por simplicidad que ambas señales tiene la misma amplitud A.

$x = A\text{sen}(\omega t)$

$y = A\text{sen}(\omega t + \delta)$

La trayectoria como podemos comprobar es una elipse.

La medida de la intersección de la elipse con los ejes X e Y nos permite medir el desfase δ, entre dos señales x e y.



a) Intersección con el eje Y

Cuando $x = 0$, entonces $\omega t = 0$, ó π.

$y_0 = A\text{sen}\delta$

$y_0 = A\text{sen}(\pi + \delta) = -A\text{sen}\delta$

Si medimos en la parte positiva del eje Y, tendremos que sen $\delta = y_0/A$

En la pantalla del "osciloscopio" el eje X y el eje Y está dividido en 20 partes, cada división es una unidad.

En la figura, A=10, e y_0=5, el desfase δ=30º, ó mejor $\delta = \pi/6$

b) Intersección con el eje X

Cuando $y = 0$, entonces $\omega t = -\delta$, ó $(\pi - \delta)$.

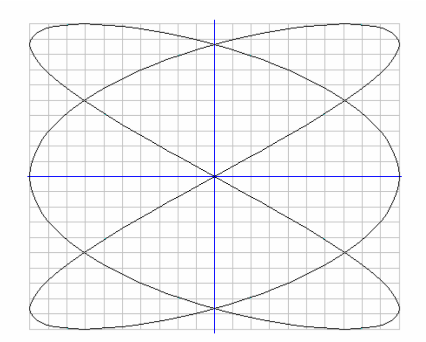
$x_0 = -A\text{sen}\delta$

x_0 =Asen(π - δ) = Asenδ
En la figura, A=10, e x_0=5, el desfase δ=30º, ó mejor $\delta = \pi/6$
c) Intersección con $x = A$ el borde derecho de la pantalla del "osciloscopio"
A =Asen(ωt) por lo que $\omega t = \pi/2$
y_1 = Asen(π/2+δ) = Acosδ

En la figura A = 10 y y_1 = 8.75, el desfase δ » 30º, ó mejor $\delta = \pi/6$
Podemos comprobar que se obtiene la misma trayectoria con el desfase 30º y 330º y también con 150º y 210º. Pero podemos distinguir el desfase 30º de 150º, por la orientación de los ejes de la elipse.

Medida de la frecuencia
Componemos dos MAS de direcciones perpendiculares y de distinta frecuencia ωx, y ωy .Supondremos por simplicidad que ambas señales tiene la misma amplitud A y el desfase δ puede ser cualquier valor
x =Asen($\omega_x t$)
y = Asen($\omega_y t+\delta$)
La relación de frecuencias se puede obtener a partir del número de tangentes de la trayectoria en el lado vertical y en el lado horizontal.
Número de tangentes lado vertical

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\text{número de tangentes lado vertical}}{\text{número de tangentes lado horizontal}}$$



Ejemplo: en la figura

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 25. Dos movimientos vibratorios perpendiculares de la misma frecuencia tienen sus amplitudes en la relación 2/3 y una diferencia de marcha de media longitud de onda. Hállese la forma del movimiento resultante.
Solución.
Las ecuaciones de estos movimientos son:

$$x = A_1 \text{sen}\omega \text{t} \text{ ; } y = A_2 \text{sen}(\omega t + \pi) =$$

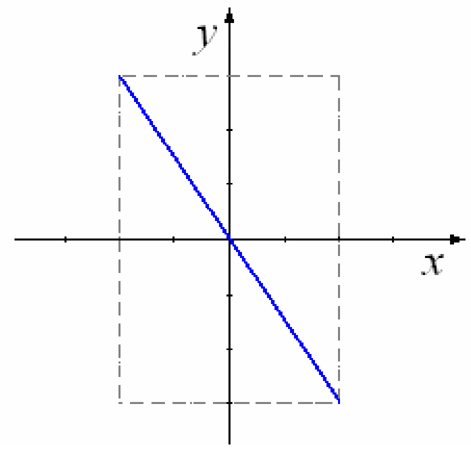
$$A_2 \text{sen}\omega t \cos\pi + A_2 \cos\omega t \text{sen}\pi = - A_2 \text{sen}\omega \text{t}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{-A_2} = -\frac{2}{3}$$

El movimiento resultante es según la ecuación

$$y = -\frac{3}{2}x$$

Corresponde a una recta de pendiente -3/2.



Ejemplo 26. Encuentre la ecuación de la trayectoria de un punto sometido a dos movimientos oscilatorios armónicos rectangulares dados por las ecuaciones

$$x = 3\text{sen}\omega \text{t} \text{ ; } y = 5\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Solución.

$$x = 3\text{sen}\omega \text{t} \Rightarrow \text{sen}\omega \text{t} = \frac{x}{3}$$

Luego: $\cos\omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}$

$$y = 5\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{y}{5} =$$

$$\text{sen}\omega t \cos\frac{\pi}{6} + \cos\omega t \text{sen}\frac{\pi}{6} =$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{5} - \frac{\sqrt{3}x}{6} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x^2}{36}}$$

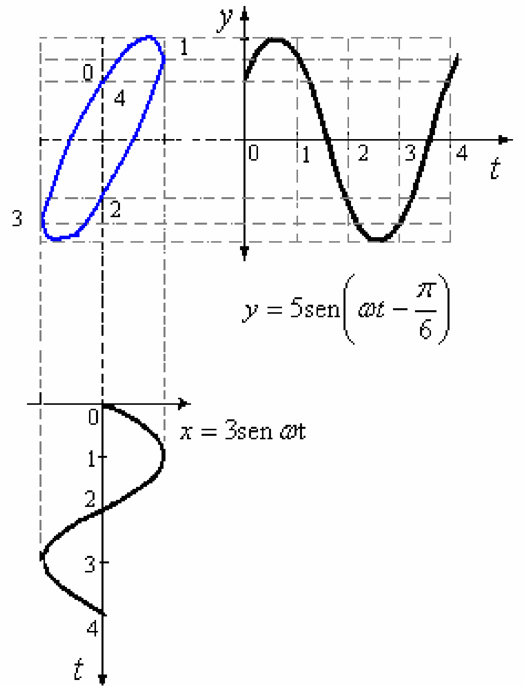
Elevando al cuadrado:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{2\sqrt{3}yx}{30} + \frac{3x^2}{36} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{36}$$

Simplificando:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{\sqrt{3}yx}{15} + \frac{x^2}{9} = \frac{1}{4}$$

Corresponde a la ecuación de una elipse inclinada.



Ejemplo 27. Dos oscilaciones perpendiculares entre si tienen el mismo periodo, la misma amplitud y una diferencia de marcha igual a $\lambda/6$. ¿Qué oscilación resultante produce?

Solución.

Una diferencia de marcha de λ equivale a 2π.

Una diferencia de marcha de $\frac{\lambda}{6}$ equivale a

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Luego, las ecuaciones de los movimientos componentes son:

$$x = a\text{sen}\omega t\,,\; y = a\text{sen}(\omega t - \pi/3)$$

Trabajando con y:

$$y = a\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$a\text{sen}\omega t\cos\frac{\pi}{3} - a\cos\omega t\text{sen}\frac{\pi}{3}$$

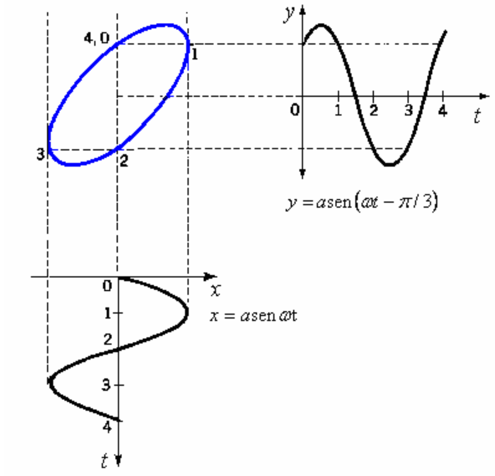
$$= x\left(\frac{1}{2}\right) - a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y - \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}a}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$y^2 + x^2 - xy = \frac{3}{4}a^2$$

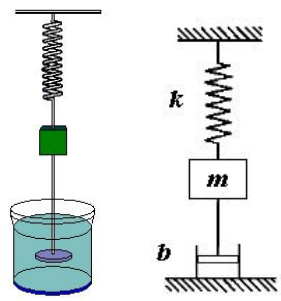
Corresponde a la ecuación de una elipse inclinada



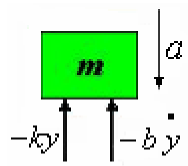
MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO.

En el movimiento armónico simple la amplitud es constante al igual que la energía del oscilador. Sin embargo sabemos que la amplitud del cuerpo en vibración, como un resorte, un péndulo, disminuye gradualmente, lo que indica una pérdida paulatina de energía por parte del oscilador. Decimos que el movimiento oscilatorio está amortiguado.

El Amortiguamiento es causado por la fricción, para una resistencia la viscosa tal como la fuerza amortiguadora del aire, la fuerza amortiguadora puede tomarse como proporcional de la velocidad. Sea la fuerza de un amortiguador $F_b = -bv$ donde el signo menos indica que esta fuerza tiene sentido opuesto al movimiento del cuerpo oscilante:



Aplicando la segunda ley de Newton:



$ma = -ky - bv$

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y}$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0\,,\; \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = 0 \quad \text{(I)}$$

$\beta = \dfrac{b}{2m}$, $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Solución de la ecuación es de la forma $y = e^{rt}$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$r^2 e^{rt} + 2\beta r e^{rt} + \omega_o^2 e^{rt} = 0$$

Simplificando

$$r^2 + 2\beta r + \omega_o^2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son:

$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ y $r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Por consiguiente la solución general de la ecuación (I) es

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{\sqrt{\beta^2-\omega_o^2}\,t} + Ce^{-\sqrt{\beta^2-\omega_o^2}\,t}\right]$$

Discusión de la solución

a) Cuando $\omega_o^2 > \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega_1$ s una cantidad imaginaria y

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{i\omega_1 t} + Ce^{-i\omega_1 t}\right]$$

Haciendo $B = \dfrac{A}{2}e^{i\delta}$ y $C = \dfrac{A}{2}e^{-i\delta}$

Obtenemos

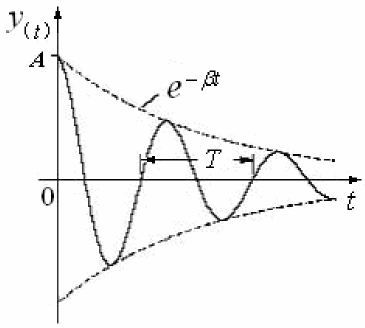
$$y = Ae^{-\beta t}\left[\frac{e^{i(\omega_1 t+\delta)} + e^{-i(\omega_1 t+\delta)}}{2}\right]$$

Expresión que se puede escribir usando las relaciones de Euler como

$$y = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta)$$

Donde ω_1 es la frecuencia del oscilador amortiguado, aunque hablando estrictamente no es posible definir la frecuencia en el caso del movimiento amortiguado desde que este no es un movimiento periódico.

La amplitud máxima del movimiento disminuye debido al factor $e^{-\beta t}$.



Este movimiento se conoce como SUBAMORTIGUADO o poco amortiguado.

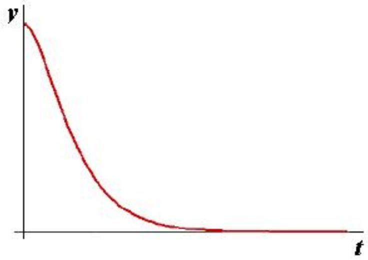
b) Cuando $\omega_o^2 = \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 0$ cantidad real

En este caso la solución tiene la forma

$$y = (B + Ct)e^{-\beta t}$$

El desplazamiento decrece a su posición de equilibrio sin oscilar en el menor tiempo posible, a este movimiento se le conoce como CRITICAMENTE AMORTIGUADO.



Pero para amortiguadores fuertes según lo mostrado en la figura abajo, el período varía según la amplitud y el movimiento cambia considerablemente del modelo armónico simple. El amortiguamiento crítico es la que lleva al oscilador al reposo en el menor tiempo. Esto encuentra aplicaciones en instrumentos donde es una ventaja el poder tomar una lectura rápida del indicador. Es también útil por resortes en asientos y amortiguadores de vehículos.

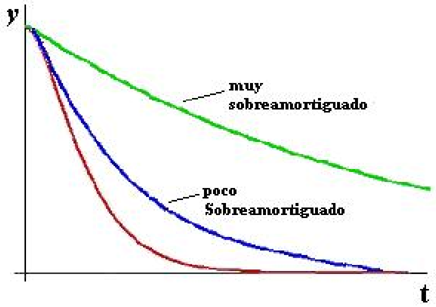
c) Cuando $\omega_o^2 < \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \omega_1$

en este caso la solución tiene la forma

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{\omega_1 t} + Ce^{-\omega_1 t}\right]$$

En este caso tampoco existe oscilación, pero se acerca a la posición de equilibrio más lentamente que el crítico, a este movimiento se le conoce como SOBREAMORTIGUADO



Ejemplo 28. Un péndulo se ajusta para tener un período exacto 2 segundos, y se pone en movimiento. Después de 20 minutos, su amplitud ha disminuido a 1/4 de su valor inicial.

Si el movimiento del péndulo puede se representado por $\theta = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(2\pi f t)$, ¿cuál es el valor de β?

Nota: $e^{-1,386} = \dfrac{1}{4}$

Solución.

a) $\theta = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(2\pi f t)$

Para t = 20 x 60 = 1200 s

$$\frac{\theta_0}{4} = \theta_0 e^{-1200\beta}(1)$$

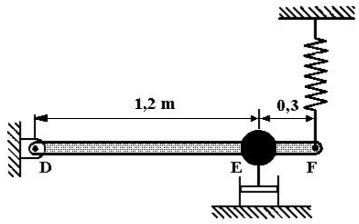
$$e^{-1200\beta} = \frac{1}{4} = e^{-1,386}$$

$$-1200t = -1,386$$

$$\Rightarrow \ \beta = \frac{1,386}{1200} = 0,001155$$

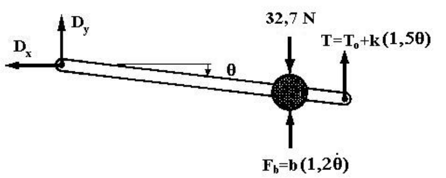
=1,2 x 10^{-3} N.s/m ó kg/s.

Ejemplo 29. El cuerpo E de 32,7 N en la figura está asegurado a la varilla DF cuyo peso puede ignorarse. El resorte tiene un módulo k = 100 N/m y el coeficiente del amortiguador es b = 26,7 N-s/m. El sistema está en equilibrio cuando DF está horizontal. La varilla se desplaza 0,10 rad en sentido horario y desde el reposo cuando t = 0. Determinar
a) la ecuación del movimiento de la varilla,
b) la frecuencia del movimiento.



Solución.
La figura muestra el diagrama del cuerpo libre de la varilla DF, desplazada en la dirección positiva.

Cuando el cuerpo está en equilibrio, θ y $\dot{\theta}$ ambas valen cero y $T = T_0 = \frac{1,2}{1,5}(32,7)$.



Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación con el desplazamiento y velocidad indicados en la figura es:

$$1,2(32,7) - 1,2(26,7)F_b - 1,5T = I_o\ddot{\theta}$$

$$1,2(32,7) - 1,2(26,7)\left(1,2\dot{\theta}\right) - 1,5[(1,5)32,7 + 100(1,5\theta)]$$

$$= \frac{32,7}{9,8}(1,2)^2\ddot{\theta}$$

La ecuación se reduce a

$$4,8\ddot{\theta} + 38.4\dot{\theta} + 225\theta = 0$$

o

$$\ddot{\theta} + 8,00\dot{\theta} + 46,9\theta = 0 .$$

De la forma

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Donde: 2β = 8 y $\omega_0^2 = 46.9$

Cuya solución es

$$\theta = De^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) \text{ y}$$

$$\dot{\theta} = -D\omega e^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t - \phi) - D\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

Con D y ϕ constantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del movimiento (en este caso para t = 0, $\theta = 0,1\text{rad}$ y $\dot{\theta} = 0$.

y $\omega = \left|\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right| = \left|\sqrt{4^2 - 46,9}\right|$ = 5,56 rad

Por las condiciones iniciales

$$0,1 = D\cos(-\phi) = D\cos\phi \qquad (1)$$

$$0 = -D\omega\operatorname{sen}(-\phi) - D\beta\cos(-\phi)$$

$$= D(\omega\operatorname{sen}\phi - \beta\cos\phi) \qquad (2)$$

De (2) obtenemos

$$\tan\phi = \frac{\beta}{\omega} = -\frac{4}{5,56} = -0,72$$

$$\Rightarrow \phi = \text{-0,62 rad}$$

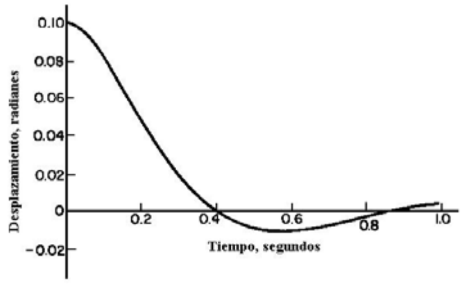
De (1)

$$D = \frac{0,1}{\cos\phi} = \frac{0,1}{0,81} = 0,12\,\text{rad}$$

La ecuación del movimiento es

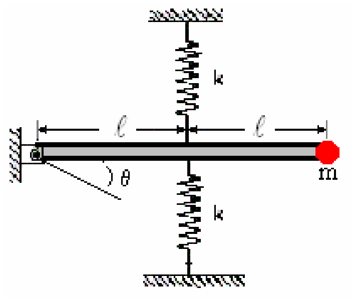
$$\theta = 0,12e^{-4t}\cos(5,56t - 0,62) \text{ rad}$$

Correspondiente a un movimiento oscilatorio subamortiguado cuyo gráfico se muestra a continuación, la vibración se amortigua rápidamente.

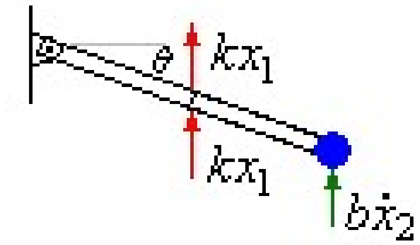


b) La frecuencia del movimiento es ω = 5,56 rad/s.

Ejemplo 30. El sistema mostrado en la figura se encuentra en el plano horizontal en equilibrio. Consiste en una barra rígida indeformable de masa M, ligada a dos resortes de constante k, y con una masa en el extremo libre de magnitud "m", sobre la cual actúa una fuerza disipativa proporcional a su velocidad $F_v = -b\,v_m$. Si se desplaza un ángulo 0,15 rad en sentido horario y luego se le suelta.
Determinar:
a) La ecuación de movimiento del sistema para ángulos pequeños de deformación
b) Encontrar la ley de movimiento para cuando k=1500 N/m , b =40 N s/m y M =3m= 3kg, además ℓ =1,5m



Solución.
a)



$$\sum \tau_O = -2kx_1.\ell\cos\theta - b\,\dot{x}_2\,2\ell\cos\theta = I_O\alpha$$

Como:

$$x_1 = \ell\operatorname{sen}\theta \approx \ell\theta,\ \ x_2 = 2\ell\operatorname{sen}\theta \approx 2\ell\theta \ \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2 = 2\ell\dot{\theta}$$

$$I_0 = \frac{1}{3}M(2\ell)^2 + m(2\ell)^2 \ \text{ y } \cos\theta \approx 1 :$$

$$-2k.\ell^2\theta - 4b\ell^2\dot{\theta} = \left(\frac{M}{3} + m\right)4\ell^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{\left(\frac{3m}{3} + m\right)}\dot{\theta} + \frac{k}{2\left(\frac{3m}{3} + m\right)}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{2m}\dot{\theta} + \frac{k}{4m}\theta = 0$$

b) $\theta = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$

$$\beta = \frac{b}{4m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4m}} \quad \omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|}$$

Cuando k =1500 N/m , b =40 N s/m y M =3m = 3kg, además ℓ =1.5m y el ángulo inicial = 0,15 rad.

$$\beta = \frac{(40)}{4(1)} = 10 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(1500)}{4(1)}} = \sqrt{375}$$

$$\omega = \sqrt{\left|10^2 - 375\right|} = \sqrt{275} = 16,58$$

$$\theta = \theta_0 e^{-10t}\cos(16,58t + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = -10\theta_0 e^{-10t}\cos(16,58t + \varphi)$$
$$-16,58\theta_0 e^{-10t}\operatorname{sen}(16,58t + \varphi)$$

Si para t = 0 se desplaza un ángulo 0,15 rad en sentido horario y luego se le suelta.

$$0,15 = \theta_0\cos(\varphi)$$

$$0 = -10\theta_0\cos(\varphi) - 16,58\theta_0\operatorname{sen}(\varphi)$$

De estas ecuaciones obtenemos:

$$\varphi = -0,54\text{rad} \ \text{ y } \ \theta_0 = 0,175\text{rad}$$

$$\theta = 0,175e^{-10t}\cos(16,58t - 0,54)$$

Ejemplo 31. Un bloque de 5,0 kilogramos se une a un resorte cuya constante es 125 N/m. El bloque se jala de su posición del equilibrio en x = 0 m a una posición en x = + 0,687 m y se libera del reposo. El bloque entonces ejecuta oscilación amortiguada a lo largo del eje x. La fuerza amortiguadora es proporcional a la velocidad. Cuando el bloque primero vuelve a x = 0 m, la componente x de la velocidad es - 2,0 m/s y la componente x de la aceleración es +5,6 m/s^2.

a) Calcule la magnitud de la aceleración del bloque después de ser liberado en x = + 0,687 m?

b) ¿Calcule el coeficiente de amortiguamiento b?

c) Calcule el trabajo realizado por la fuerza amortiguadora durante el recorrido del bloque de x = + 0,687 m a x = 0 m.

Solución.

a) **Forma fácil**

Como la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

en x = + 0,687 m, $\dot{x} = 0$

Luego:

$$5\ddot{x} + 125(0,687) = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{x} = a = -17,18\text{m/s}^2$$

Forma trabajosa

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x} = -A\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) - A\omega e^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x} = A\beta^2 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) + A\omega\beta e^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$
$$+ A\omega\beta e^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t - \phi) - A\omega^2 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$
$$= A\left(\beta^2 - \omega^2\right)e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) + 2A\omega\beta e^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

Para $t = 0$

$$e^{-\beta t} = 1,\ \cos(\omega t - \phi) = 1 \ \text{ y } \ \operatorname{sen}(\omega t - \phi) = 0$$

Luego: $a = A\left(\beta^2 - \omega^2\right) = A\omega_0^2$,

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{125}{5} = 25$$

Reemplazando valores:

$$a = 0,687(25) = 17,18\text{m/s}^2$$

b) **Forma fácil**

Cuando el bloque primero vuelve a x = 0 m, la componente x de la velocidad es - 2,0 m/s y la componente x de la aceleración es +5,6 m/s^2.

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0$$
$$5(5,6)+b(-2,0)+k(0)=0$$
$$5(5,6)+b(-2,0)=0 \Rightarrow b=\frac{5(5,6)}{2,0}=14\mathrm{m/s}$$

Forma trabajosa

$$x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t-\phi)$$
$$\dot{x}=-A\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t-\phi)-A\omega e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega t-\phi)$$
$$\ddot{x}=A(\beta^2-\omega^2)e^{-\beta t}\cos(\omega t-\phi)+2A\omega\beta e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega t-\phi)$$

x = 0 m, v = - 2,0 m/s, a = +5,6 m/s^2.

$$0=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t-\phi) \quad (1)$$
$$-2,0=-A\omega e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega t-\phi) \quad (2)$$
$$5,6=2A\omega\beta e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega t-\phi) \quad (3)$$

(3) / (2)

$$\frac{5,6}{2,0}=\frac{2A\omega\beta e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega t-\phi)}{A\omega e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega t-\phi)}$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{5,6}{4,0}=1,4$$

Siendo $\beta=\dfrac{b}{2m}$

$$\Rightarrow b=2m\beta=2(5)(1,4)=14\mathrm{kg/s}$$

c) En x = + 0,687 m

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}(125)(0,687)^2 = 29,5 \text{ J}$$

En x = 0 m $E_2=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}(5)(-2,0)^2$ = 10 J

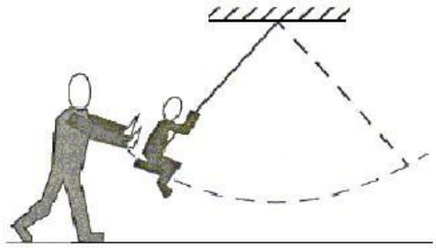
$\Delta E = E_2 - E_1$ = 10 - 29,5= - 19,5 J

Trabajo realizado por la fuerza amortiguadora

OSCILACIONES FORZADAS

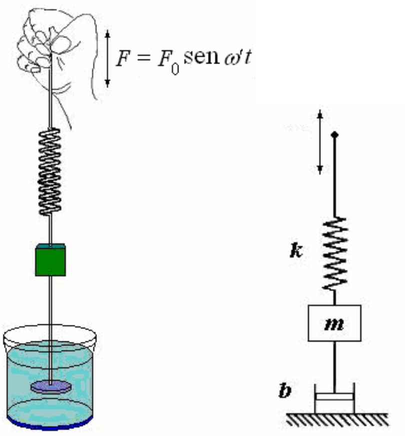
Las oscilaciones que hemos discutido hasta ahora son las oscilaciones libres en las cuales el sistema se da una cierta energía, y dejado solo. Por ejemplo, usted podría empujar a un niño en un columpio hasta cierta altura, después dejarlo y esperar que el movimiento termine.

Pero ésta no es la única posibilidad; podríamos también empujar en varias ocasiones el columpio a cualquier frecuencia y que miramos a ver que sucede. En este caso decimos que tenemos oscilaciones forzadas. Ahora hay dos frecuencias en el problema: la frecuencia natural ω_o de las oscilaciones libres, y la frecuencia productora ω de las oscilaciones forzadas



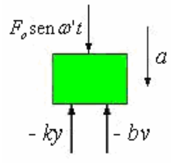
Descripción

Como observamos en un columpio, para mantener las oscilaciones hemos de aplicar una fuerza oscilante al oscilador amortiguado.



Sea $F_o\mathrm{sen}\omega' t$ la fuerza oscilante aplicada, siendo ω' su frecuencia angular. La ecuación del movimiento será ahora

$$\sum F=ma$$
$$.-ky.-b\dot{y}+F_o\mathrm{sen}\omega' t=ma$$
$$m\ddot{y}+b\dot{y}+ky=F_o\mathrm{sen}\omega' t$$



Expresamos la ecuación del movimiento en forma de ecuación diferencial

$$\ddot{y}+2\beta\dot{y}+\omega_o^2 y=F_o\mathrm{sen}\omega' t \quad \omega_o^2=\frac{k}{m}$$
$$2\beta=\frac{b}{m}$$

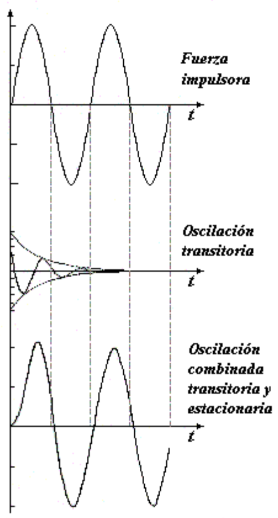
La solución de esta ecuación diferencial es complicada, y se compone de la suma de dos términos

$$y_{(t)}=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\delta)+D\mathrm{sen}(\omega' t+\delta'),$$

donde D' y δ' son constantes arbitrarias que han de ajustarse a fin de satisfacer las condiciones iniciales y ω' es la frecuencia del oscilador amortiguado no forzado.
Pasado un tiempo suficientemente largo, tal que $\dfrac{bt}{2m} >> 1$, el primer término de la ecuación es prácticamente nulo y puede despreciarse frente al segundo término. Así, pues, la expresión:
$Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta)$ se denomina solución **transitoria**.
En cambio la expresión $D\text{sen}(\omega' t + \delta')$ se conoce como solución **estacionaria**, y es la predominante siempre que se tenga $t >> \dfrac{2m}{b}$.
Para obtener las expresiones de A y δ', se sustituye $y = D\text{sen}(\omega' t + \delta')$ en la ecuación diferencial, lo que nos da:

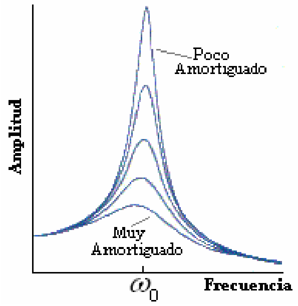
$$D = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\beta^2\omega'^2}}$$

y $\tan\delta' = \dfrac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$



El comportamiento dependiente del tiempo real de un oscilador armónico amortiguado y forzado puede resultar muy complejo. La figura muestra la respuesta de un oscilador amortiguado frente a la acción de una fuerza impulsora de frecuencia $\omega' = ½\,\omega_o$, suponiendo que el sistema está en reposo cuando la fuerza comienza a actuar. Obsérvese que una vez eliminado el comportamiento transitorio, únicamente persiste el movimiento estacionario con frecuencia ω'.

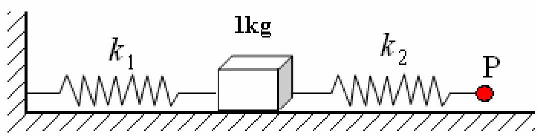
Resonancia, aplicaciones.
Resonancia
Como la amplitud D de depende de ω', ésta puede tomar diferentes valores, en particular, al valor de ω' que hace que D sea máxima, se le denomina frecuencia de resonancia ω_R.
El valor de ω' que hace máximo a D podemos encontrarlo de la manera siguiente:
$\left.\dfrac{\partial D}{\partial \omega'}\right|_{\omega'=\omega_R} = 0$, derivando D e igualando a cero, se obtiene: $\omega' = \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$



En la figura se muestra la respuesta en amplitud de la oscilación forzada, en el estado estacionario. Como podemos observar a partir de la fórmula o la gráfica, la amplitud de la oscilación forzada en el estado estacionario disminuye rápidamente cuando la frecuencia de la oscilación forzada ωf se hace mayor o menor que la frecuencia propia del oscilador ω_o.

En el caso ideal que no exista rozamiento, la amplitud de la oscilación forzada se hace muy grande, tiende a infinito, cuando la frecuencia de la oscilación forzada ω' se hace próxima a la frecuencia propia del oscilador ω_o.
En el caso de que exista rozamiento (β >0) la amplitud se hace máxima cuando la frecuencia de la oscilación forzada ω' es próxima a la del oscilador ω_o
Los efectos de la resonancia igualmente pueden resultar indeseables o incluso destructivos. EI traqueteo en la carrocería de un automóvil o el molesto zumbido en un alta voz estereof6nico se deben casi siempre a la resonancia. Casi todos hemos escuchado que una cantante de potente voz puede romper el cristal al cantar a determinada frecuencia. Igualmente conocida es la advertencia de que un grupo de personas no debe marchar por un puente por miedo a que la frecuencia de los pasos corresponda a alguna frecuencia natural del mismo. Todos éstos son ejemplos de resonancia.

Ejemplo 32. El extremo libre del resorte de constante k_2 empieza en $t = 0$ a oscilar armónicamente con amplitud B y frecuencia ω alrededor de su posición de equilibrio "P".



Haga el DCL del bloque y determine la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del bloque.

Solución.

Movimiento del punto P

$$x' = B\,\text{sen}\,\omega' t$$

$$-k_1 x - k_2(x - x') = ma$$

$$ma + (k_1 + k_2)x = k_2 x'$$

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 B\,\text{sen}\,\omega' t$$

$$\ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m}x = \frac{k_2 B}{m}\text{sen}\,\omega' t$$

Ecuación que corresponde a un movimiento armónico simple forzado.

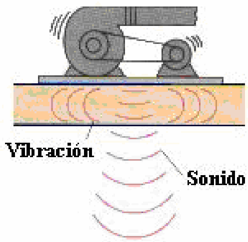
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\text{sen}\,\omega' t$$

CASO DEL PUENTE TACOMA

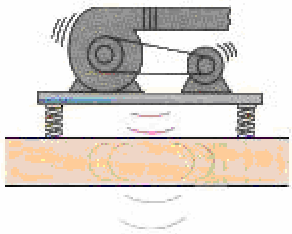

El puente Tacoma original era conocido como "Galloping Gertie" debido a su balanceo, comportamiento ondulado. Tenía una longitud de 1980 metros aproximadamente y fue abierto al tráfico el 1 de julio de 1940 uniendoTacoma y el puerto Gig por carretera.
El puente era un diseño inusualmente ligero, los ingenieros descubrieron, una peculiar sensibilidad a los fuertes vientos. En lugar de resistirlos, como lo hacen la mayoría de los puentes modernos, El puente Tacoma tendía a sacudirse y a vibrar. Esto empeoró progresivamente debido a los fenómenos armónicos. Cuatro meses después de la inauguración del puente, hubo una tormenta con viento de 70 km/h en el área alrededor del puente el 7 de noviembre de 1940. El viento hizo sacudir puente violentamente de lado a lado, y finalmente rompió el puente.
Este incidente sucedió debido a la estructura del puente entró en resonancia con la vibración que producía el viento. Nadie murió, pues el puente había sido cerrado debido a sacudidas anteriores. Éste es el más conocido y estudiado de fallas por oscilación forzada, gracias a la película y las fotografías que registran el derrumbamiento.

Muchas veces necesitamos un sistema que no transfiera eficientemente la energía. Un ejemplo es un mecanismo para aislar de las vibraciones a aparatos sensibles. Una solución común al problema de la vibración consiste en fijar la fuente de vibración sobre un montaje elástico que amortigüe y absorba los movimientos. Lo que quizás no sea tan obvio es el hecho de que el problema puede agravarse con un montaje elástico incorrecto. E1 aislamiento se consigue al disminuir la frecuencia natural del sistema con relación a la frecuencia de la fuente vibratoria. La razón por la que esta técnica funciona es la menor transferencia de energía cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es mucho mayor que la frecuencia natural del sistema.
Hemos fundamentado completamente nuestro análisis de la resonancia, así como de la respuesta de un sistema al movimiento forzado, en el comportamiento de una masa unida a un resorte que cumple con la ley de Hooke. Sin embargo, se aplican los mismos principios y resultados generales a otros sistemas oscilantes, sean mecánicos, eléctricos o de otro tipo.

Ejemplo 33. Un equipo de ventilación del sistema de calefacción y aire acondicionado de un edificio se monta firmemente en el techo y opera en forma continua. Las vibraciones se transmiten a la estructura del edificio y generan niveles de vibración inaceptables.



Para reducir la vibración que se percibe abajo, se va a fijar el equipo a una placa montada sobre resortes. EI eje del ventilador gira a 1800 rpm (revoluciones por minuto) y la masa combinada de la unidad y la placa de montaje (véase la figura) es de 576 kg.



¿Cuál es la constante de rigidez apropiada para los resortes usados para soportar la placa? Suponga que se emplean cuatro resortes, uno en cada esquina.

Estrategia. El sistema de oscilación en este caso está compuesto por el motor, el ventilador, la plataforma de montaje y los resortes. Una regla práctica a la que se recurre algunas veces establece que la frecuencia impulsora, o perturbadora, debe ser por lo menos 3 veces la frecuencia natural del sistema. Para muchos casos, resulta adecuado un factor de 5 y, en condiciones críticas, resulta conveniente un factor de

12 o superior. Podemos conseguir estos factores reduciendo la frecuencia natural del sistema. Si elegimos una proporción de 1 a 5, lo que corresponde a una reducción en la fuerza de las vibraciones en el edificio de más o menos 96%, la frecuencia natural que se desea del sistema es

$$\frac{1}{5}(1800\ \text{rpm})\left(\frac{2\pi}{60s/\min}\right)=12\pi\ \ \text{Hz}$$

Solución. Los resortes adecuados pueden elegirse utilizando

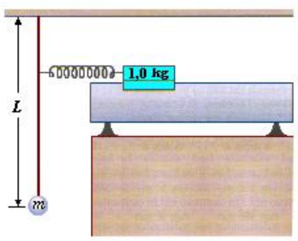
$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

AI resolver para la constante de resorte *k*, obtenemos $k = m(2\pi f)^2$ = (576 kg)$(12\pi/\text{s})^2$ = 8,18 x 10^5 N/m.

Esta sería la más grande constante de resorte deseable si todas las masas se soportaran mediante un resorte. Puesto que son cuatro en total, uno en cada esquina de la placa de montaje, cada uno de estos cuatro resortes tendrá una constante o rigidez de

$$\frac{1}{4}\left(8{,}18\times10^5\ \text{N/m}\right)=2{,}05\times10^5\ \text{N/m}$$

Ejemplo 34. ¿Cuál debe ser la longitud del péndulo en la figura para producir la amplitud máxima en el carrito de 1,0 kg del carril neumático si la constante de resorte es *k* = 120 N/m?



Solución.

La amplitud máxima se alcanzará cuando el péndulo oscile con la frecuencia de resonancia, en este caso no hay amortiguamiento, luego la frecuencia de de resonancia es: $\omega_R=\omega_0$

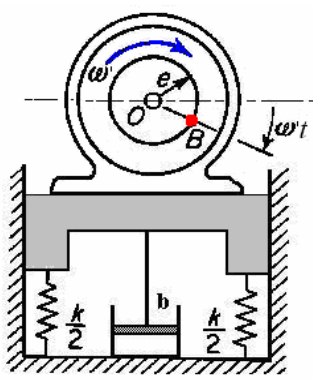
$$\sqrt{\frac{g}{L}}=\sqrt{\frac{k}{m}}\ \Rightarrow$$

$$L=\frac{mg}{k}=\frac{(1{,}0)(9{,}8)}{120}=0{,}0817\ \text{m}\ =8{,}2\ \text{cm}$$

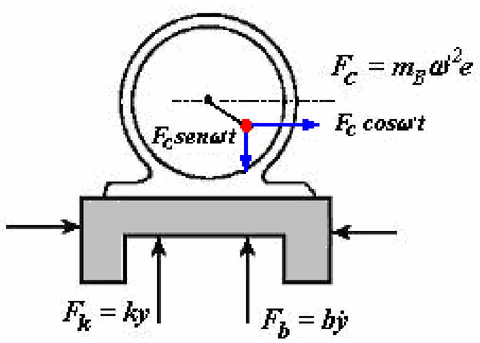
Ejemplo 35. El motor en la figura está montado sobre dos resortes, cada uno con modulo *k*/2 = 10000 N/m. El amortiguador tiene un coeficiente *b* = 140 N.s/m. El motor incluyendo la masa desbalanceada B, pesa 170 N, y el cuerpo no balanceado B pesa 4,5 N y está localizado a 7,5 cm. del centro del eje.

a) El motor gira a 300 rpm. Determine la amplitud y el ángulo de fase (relativo a la posición de B) del movimiento resultante.

b) Determine la velocidad de resonancia y la amplitud resultante del movimiento.



Solución.



a) Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical.

$$\sum F_y=ma_y,$$

$$-F_k-F_b+F_c\,\text{sen}\,\omega t=ma_y$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\right)y-b\dot{y}+F_c\,\text{sen}\,\omega t=m\ddot{y}$$

La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{y}+b\dot{y}+\left(\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\right)y=F_c\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\Rightarrow m\ddot{y}+b\dot{y}+ky=F_c\,\text{sen}\,\omega t$$

o $\ddot{y}+2\beta\dot{y}+\omega_0^2y=\dfrac{F_c}{m}\text{sen}\,\omega t$

Donde $m=\dfrac{170}{9{,}8}=17{,}3kg$, *b* = 140 N.s/m

y $\beta=\dfrac{b}{2m}=4$

k = 20000 N/m y $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=34\ \text{rad/s}$

$$\omega'=\frac{300\times2\pi}{60}=31{,}4\text{rad/s}$$

$$F_c=m_Be\omega'^2=\frac{4{,}5}{9{,}8}\times0{,}075\times(31{,}4)^2=34\ \text{N}$$

La solución de la ecuación es

$$y=D\text{sen}(\omega' t+\delta)$$

Con $D=\dfrac{F_c/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega'^2\right)^2+4\omega'^2\beta^2}}$

y $\tan\delta' = \dfrac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{34/17{,}3}{\sqrt{\left(34^2 - 31{,}4^2\right)^2 + 4\times 31{,}4^2 \times 4^2}}$$

$= 7{,}8\times 10^{-3}\,\text{m}$ = 7,8 mm

El ángulo de fase

$\tan\delta = \dfrac{2\times 31{,}4\times 4}{34^2 - 31{,}4^2} = 1{,}48$, $\delta = 55{,}9^\circ$

b) La resonancia ocurre cuando

$$\omega' = \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

$$\omega_R = \sqrt{34^2 - 2\times 4^2} = 33{,}5\,\text{rad/s}$$

$$\omega_R = \frac{33{,}5\times 60}{2\pi} = 320\,\text{rpm}$$

La amplitud de resonancia es:

$$D = \frac{F_c/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_R^2\right)^2 + 4\omega_R^2\beta^2}}$$

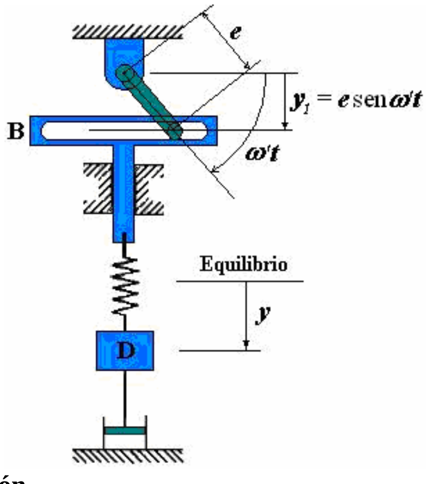
$$= \frac{34/17{,}3}{\sqrt{\left(34^2 - 33{,}5^2\right)^2 + 4\times 33{,}5^2\times 4^2}}$$

$= 7{,}3\times 10^{-3}\,\text{m}$ = 7,3 mm

Ejemplo 36. El cuerpo *D* de la figura tiene una masa de 10 kg y está soportado por un resorte con una constante de 1000 N/m. El cuerpo en la parte superior da al resorte un movimiento armónico vertical por medio de la manivela que tiene una velocidad angular de 40 rpm. La longitud de la manivela es de 1,30 cm.

a) determine la amplitud y ángulo de fase del movimiento de la masa *D* cuando el coeficiente de amortiguación es 100 N.s/m y cuando se desconecta el amortiguador

b) Determine el rango de valores de ω (si hay alguno) que limitará al movimiento de la masa a 2 cm. Cuando b = 0.



Solución.

a) Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical.

$\sum F_y = ma_y$,

$-F_k - F_b = ma_y$

$$-k(y - y_1) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

Como $y_1 = e\,\text{sen}\,\omega' t$

$$-k(y - e\,\text{sen}\,\omega' t) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = ke\,\text{sen}\,\omega t$$

o $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \dfrac{ke}{m}\text{sen}\,\omega' t$

Donde

$m = 10kg$, b = 100 N.s/m y $\beta = \dfrac{b}{2m} = 5$

k = 1000 N/m y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10\,\text{rad/s}$

$$\omega' = \frac{40\times 2\pi}{60} = 4{,}19\,\text{rad/s}$$

La solución de la ecuación es

$$y = D\,\text{sen}\left(\omega' t + \delta\right)$$

con $D = \dfrac{ke/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$ y

$$\tan\delta' = \frac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{1000\times 1{,}3\times 10^{-2}/10}{\sqrt{\left(10^2 - 4{,}19^2\right)^2 + 4\times 4{,}19^2\times 5^2}}$$

$= 1{,}41\times 10^{-2}\,m$ = 1,41 cm

El ángulo de fase

$\tan\delta' = \dfrac{2\times 4{,}19\times 5}{10^2 - 4{,}19^2} = 0{,}51$, $\delta' = 26{,}9^\circ$

Cuando se desconecta el amortiguador β = 0.

Con $D = \dfrac{ke/m}{\omega_o^2 - \omega'^2}$ y $\tan\delta' = 0$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{1000\times 1{,}3\times 10^{-2}/10}{10^2 - 4{,}19^2}$$

$= 1{,}58\times 10^{-2}\,\text{m}$ = 1,58 cm

El ángulo de fase

$\tan\delta' = 0$, $\Rightarrow$ $\delta' = 0^\circ$

b) Determine el rango de valores de ω' (si hay alguno) que limitará al movimiento de la masa a 2 cm. Cuando b = 0.

La resonancia ocurre cuando

$\omega' = \omega_R = 10 \text{rad/s}$

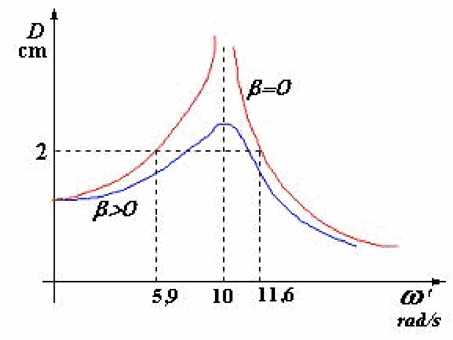
La amplitud D es infinita.

El valor de D con un valor máximo de dos se encuentra con

$$D = \frac{ke/m}{\pm(\omega_o^2 - \omega'^2)} \quad \text{Para } D = 2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow D = \frac{1{,}3}{\pm(10^2 - \omega^2)} = 2\times 10^{-2}\text{m}$$

se obtiene $\omega'_1 = 5{,}9 \text{rad/s}$ y $\omega'_2 = 11{,}6 \text{rad/s}$



D tiene como valor máximo 2 cuando
$5{,}9 \text{rad/s} \le \omega' \ge 11{,}6 \text{rad/s}$

Ejemplo 37. La relación entre la fuerza aplicada a un resorte y el alargamiento producido (ley de Hooke) es: $F = 439\ \Delta\ell$ (todo en SI): Si se suspende el resorte de un extremo y se cuelga en el otro una masa m = 3,2 kg calcular:

a) la frecuencia propia de las oscilaciones.

b) Si existe un amortiguamiento debido a una fuerza resistente $F = -33v$ (velocidad) ¿cuál será la frecuencia y la ecuación diferencial del movimiento?

c) Sí además actúa una fuerza sinusoidal de amplitud 10 N y frecuencia doble que la propia del oscilador ¿cuál es la velocidad máxima en las oscilaciones forzadas permanentes?

Solución.

a) La ley de Hooke es: $F = k\,\Delta\ell \Rightarrow F = 439\,\Delta\ell$

Luego la constante del resorte es k = 439 N/m

La frecuencia angular propia del resorte es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{439}{3{,}2}} = 11{,}7 \text{ rad/s}$$

La frecuencia propia o natural es:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{11{,}7}{2\pi} = 1{,}864 \text{ Hz}$$

b) La ecuación del movimiento con fuerza resistente es:

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Con k = 439 N/m, b = 33 N.s/m y m = 3,2 kg:

$$-439x - 33b\dot{x} = 3{,}2\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + 10{,}31\dot{x} + 137{,}2x = 0$$

Ecuación de la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Donde: $2\beta = 10{,}31$ y $\omega_0^2 = 137{,}2$

Cuya solución es

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

Con A y ϕ constantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del movimiento y

$$\omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|} = \sqrt{\left|\left(\frac{10{,}31}{2}\right)^2 - 137{,}2\right|}$$

= 10,52 rad/s

Observamos que es un poco menor que la propia del oscilador ω_0

La frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{10{,}52}{2\pi}$ = 1,674 Hz

c) Sí además actúa una fuerza sinusoidal de amplitud 10 N y frecuencia doble que la propia del oscilador

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento.

$$\sum F = ma \Rightarrow -kx - b\dot{x} + F_0 \operatorname{sen}\omega' t = m\ddot{x}$$

La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen}\omega' t$$

o $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega' t$

Donde además de los valores conocidos, tenemos

F_0 = 10 N y $\omega' = 2\omega_0$ = 2 (11,71) = 23,43 rad/s.

La solución de la ecuación es

$x = D\operatorname{sen}(\omega' t + \delta)$, la velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = D\omega'\cos(\omega' t + \delta)$$

con $D = \dfrac{F'/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$ y

$$\tan\delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{10/3{,}2}{\sqrt{\left(11{,}71^2 - 23{,}43^2\right)^2 + 4\times 23{,}43^2 \times 5{,}15^2}}$$

= 6,54 x 10^{-3} m = 6,54 mm

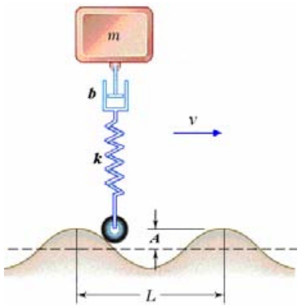
Y la velocidad máxima es

$D\omega' = 6{,}54\times 10^{-3}(23{,}43)$ = 0,153 m/s

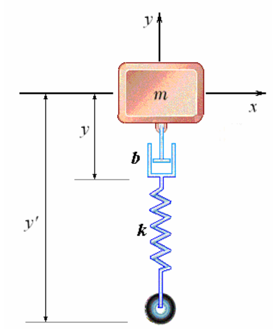
Ejemplo 38. Para estudiar el movimiento de un carro en un camino “encalaminado”, se puede usar el siguiente modelo: El camino se representa por una sinusoide de amplitud A y separación entre crestas L.

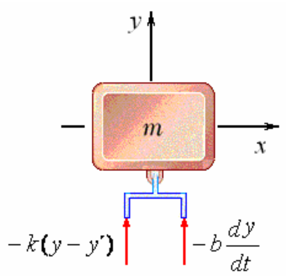
El carro se representa por una masa M apoyada sobre un resorte de constante de rigidez k y un amortiguador de constante b (que representan a los 4 resortes y amortiguadores, realmente existentes, con el objeto de considerar únicamente el efecto vertical). El carro avanza con una velocidad horizontal v constante.

a) Encontrar la amplitud y frecuencia del movimiento vertical del carro.
b) ¿A qué velocidad entrará en resonancia?



Solución.
a) El carro tiene oscilación forzada debido al encalaminado de la carretera. El encalaminado le produce un movimiento vertical dado por la ecuación: $y' = A\,\text{sen}\,\omega' t$, donde $\omega' = 2\pi f$, con $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L}$.





La ecuación del movimiento vertical de la masa M se obtiene de $\sum F_y = Ma_y$

$$-k(y-y') - b\dot{y} = M\ddot{y} \Rightarrow$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = kA\,\text{sen}\,\omega' t$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = \frac{kA}{M}\text{sen}\,\omega' t, \text{ con } 2\beta = \frac{b}{M} \text{ y}$$

$$\omega_o^2 = \frac{k}{M}$$

La parte importante de la solución es la estacionaria $y = D\,\text{sen}(\omega' t + \delta)$, con

$$D = \frac{kA/M}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\beta^2\omega'^2}} \text{ y}$$

$$\tan\delta = \frac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

La amplitud del movimiento esta dada por D y la frecuencia por ω'

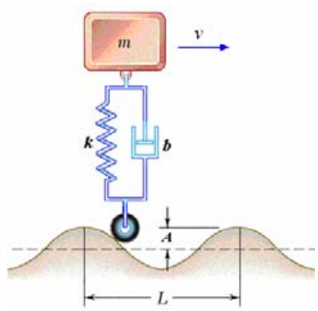
b) Como $\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} = 2\pi\frac{v}{L}$

Entrará en resonancia con la velocidad

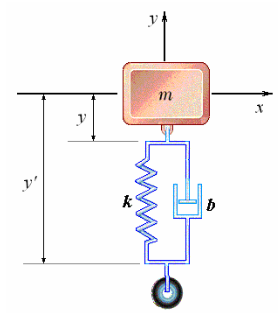
$$v = \frac{L\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}}{2\pi}$$

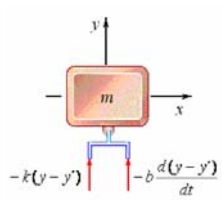
Nota: En la solución consideramos para el amortiguador solo el efecto del movimiento de la masa, para el resorte consideramos el efecto del movimiento de la masa y el producido por el calamonado. En el problema siguiente consideraremos los dos efectos en los dos elementos.

Ejemplo 39. Para estudiar el movimiento de un carro en un camino "encalaminado", se puede usar el siguiente modelo: El camino se representa por una sinusoide de amplitud A y separación entre crestas L. El carro se representa por una masa m apoyada sobre un resorte de constante de rigidez k y un amortiguador de constante b (que representan a los 4 resortes y amortiguadores, realmente existentes, con el objeto de considerar únicamente el efecto vertical). El carro avanza con una velocidad horizontal v constante.
a) Encontrar la amplitud y frecuencia del movimiento vertical del carro.
b) ¿A qué velocidad entrará en resonancia?



Solución.
a) El carro tiene oscilación forzada debido al encalaminado de la carretera. El encalaminado le produce un movimiento vertical dado por la ecuación: $y' = A\,\text{sen}\,\omega' t$, donde $\omega' = 2\pi f$, con $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L}$.





La ecuación del movimiento vertical de la masa M se obtiene de $\sum F_y = Ma_y$

$$-k(y-y') - b\frac{d(y-y')}{dt} = M\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -ky + ky' - b\dot{y} + b\dot{y}' = M\ddot{y}$$

Con $y' = A\,\text{sen}\,\omega' t$ y $\frac{dy'}{dt} = \dot{y}' = A\omega'\cos\omega' t$:

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = kA\,\text{sen}\,\omega' t + b\omega'\cos\omega' t$$

Haciendo $kA = F_0 \text{sen}\phi$ y $b\omega' = F_0 \cos\phi$,

Con $\phi = \tan^{-1}\dfrac{kA}{b}$ y $F_0 = \sqrt{(kA)^2 + (b\omega')^2}$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_0 \text{sen}\phi \,\text{sen}\,\omega' t + F_0 \cos\phi \cos\omega' t$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_0 \text{sen}(\omega' t + \phi) \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{F_0}{M}\text{sen}(\omega' t + \phi)$$

Con $2\beta = \dfrac{b}{M}$ y $\omega_o^2 = \dfrac{k}{M}$:

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{M}\text{sen}(\omega' t + \phi)$$

La parte importante de la solución es la estacionaria

$y = D\text{sen}(\omega' t + \phi + \delta)$, con

$$D = \frac{F_0 / M}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2\omega'^2}}$$ y

$$\tan\delta = \frac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

La amplitud del movimiento esta dada por D y la frecuencia por ω'

b) Como $\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} = 2\pi\dfrac{v}{L}$

Entrará en resonancia con la velocidad

$$v = \frac{L\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}}{2\pi}$$

Ejemplo 40. La constante elástica de un resorte es 40 N/m. Un extremo está fijo y en el otro hay una masa m = 0,16 kg. Calcular:
a) la frecuencia propia de la oscilación.
b) la ecuación diferencial del movimiento sin amortiguamiento.
c) La energía para el oscilador si amortiguamiento para amplitud de 0,02 m.
d) Si la masa se introduce en aceite se origina la fuerza resistente viscosa $F = -bv$ (siendo b el coeficiente de amortiguamiento y v la velocidad). Escribir la ecuación diferencial del movimiento amortiguado para b = 0,4 Ns/m.
e) ¿Cuánto tendría que valer b para que el movimiento no fuese oscilatorio?
f) Para b = 0,4 expresar la amplitud en función del tiempo.
g) Dar la frecuencia del movimiento.
h) Si b = 0,4 y además aparece una fuerza sinusoidal de amplitud 0,5 N y frecuencia doble que la propia, calcular la amplitud de la oscilación y la diferencia de fase con la fuerza aplicada
i) calcular la frecuencia de resonancia, y dar la amplitud en este caso.
j) escribir la ecuación del movimiento completa y dar la solución general, indicando el tiempo para el cual la amplitud del tiempo transitorio se reduce ala mitad.

Solución.

a) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{40}{0,16}} = \sqrt{250}$ = 15,81 rad/s

b) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 250x = 0$

c) La energía para el oscilador si amortiguamiento para amplitud de 0,02 m.

$E = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}(40)(0,02)^2$ = 0,008 N

d) La ecuación diferencial del movimiento amortiguado para es:

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Con k = 40 N/m, b = 0,4 N.s/m y m = 0,16 kg:

$$-40x - 0,4b\dot{x} = 0,16\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + 2,5\dot{x} + 250x = 0$$

Ecuación de la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Donde: $2\beta = 2,5$ y $\omega_0^2 = 250$

e) ¿Cuánto tendría que valer b para que el movimiento no fuese oscilatorio?

El movimiento es oscilatorio cuando

$(\beta^2 - \omega_0^2) < 0$ y no es oscilatorio cuando

$(\beta^2 - \omega_0^2) \geq 0$ o $\beta^2 \geq \omega_0^2$

$\Rightarrow \beta^2 \geq 250 \Rightarrow \beta \geq 15,81$

De aquí $b \geq 15,81(2m)$ $b \geq 5,06$

Como b = 0,4, realmente hay oscilación.

f) Para b = 0,4 expresar la amplitud en función del tiempo.

La solución de la ecuación del movimiento es

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

La amplitud está dada por $Ae^{-\beta t}$, donde $\beta = \dfrac{2,5}{2}$ = $1,25\dfrac{\text{Ns}}{\text{m}}$ y A depende de las condiciones iniciales.

g) La frecuencia angular del movimiento es:

$$\omega = \sqrt{|\beta^2 - \omega_0^2|} = \sqrt{\left|\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 - 250\right|}$$

= 15,76 rad/s

y la frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{15,76}{2\pi}$ = 2,51 Hz

h) Si b = 0,4 y además aparece una fuerza sinusoidal de amplitud 0,5 N y frecuencia

$\omega' = 2\omega_0 = 2(15,81)$ = 31,62 rad/s

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \text{sen}\omega' t \Rightarrow$$

$$0{,}16\ddot{x} + +0{,}4b\dot{x} + 40x = 0{,}5\text{sen}31{,}62t$$

De donde:

$$\ddot{x} + 2{,}5\dot{x} + 250x = 3{,}125\text{sen}31{,}62t$$

Ecuación de la forma $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\text{sen}\omega' t$

Cuya solución es

$$x = D\text{sen}(\omega' t + \delta)$$

Con $D = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2 \beta^2}}$ y

$$\tan\delta = \frac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{3{,}125}{\sqrt{\left(15{,}81^2 - 31{,}62^2\right)^2 + 4(31{,}62)^2(1{,}25)^2}}$$

$= 4{,}14 \times 10^{-3}$ m

D = 4,4 mm

El ángulo de fase

$$\tan\delta = \frac{2\times 31{,}62\times 1{,}25}{15{,}81^2 - 31{,}62^2} = -0{,}1054,$$

$$\delta = -6{,}07^0$$

i) calcular la frecuencia de resonancia, y dar la amplitud en este caso.

La resonancia ocurre cuando

$$\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

$$\omega_R = \sqrt{15{,}81^2 - 2\times 1{,}25^2} = 15{,}71 \text{rad/s}$$

La amplitud de resonancia es:

$$D = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_R^2\right)^2 + 4\omega_R^2\beta^2}}$$

$$= \frac{3{,}125}{\sqrt{\left(15{,}81^2 - 15{,}71^2\right)^2 + 4\times 15{,}71^2 \times 1{,}25^2}}$$

$= 24{,}9 \times 10^{-3}$ m

j) escribir la ecuación del movimiento completa y dar la solución general.

La ecuación completa del movimiento es.

$x = x_{\text{transitoria}} + x_{\text{particular}}$

La solución particular es $x = D\text{sen}(\omega' t + \delta)$

Y la solución transitoria es

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

El tiempo para el cual la amplitud del tiempo transitorio se reduce a la mitad es t'

De tal modo que $\dfrac{A}{2} = Ae^{-\beta t'}$

$$\Rightarrow t' = \frac{\ln 2}{\beta} = \frac{0{,}692}{1{,}25} = 0{,}554 \text{ s}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un oscilador armónico simple de 5 g de masa tiene un período de 0,6 s y una amplitud de 18 cm. Hallar el ángulo de fase, la velocidad y la fuerza aceleradora en el instante en que el desplazamiento del oscilador es -9 cm.

Respuesta. Fase = 120° o 240°, v = 160 cm/s,

F = 0,05 N

2. Una nadadora de masa m está sobre una balanza situada en el extremo de una palanca de salto, que ella ha puesto previamente en movimiento armónico simple con frecuencia angular ω y amplitud $A = y_m$ *(a)* ¿Cuál es la lectura de la balanza? *(b)* ¿En qué condiciones se verá lanzada la nadadora de la palanca?

Respuesta.

$$F_g = mg - m\omega^2 y_m \text{sen}\omega t$$

3. Una masa de 150 g situada en el extremo de un resorte horizontal se ve desplazada 3 cm hacia la izquierda de la posición de equilibrio mediante una fuerza de 60 N.

a) Hallar la frecuencia natural angular ω_0.

b) Hallar la amplitud del movimiento subsiguiente si se dejase de repente en libertad la masa.

c) ¿Cuáles serán la posición y velocidad de la masa 10 s después de haber quedado libre?

Respuesta. a) $\omega_0 = 115{,}47\, rad/s$, b) A = 3 cm, c) x = 0,492 cm a la izquierda de la posición de equilibrio, d) v = - 341,66 cm.

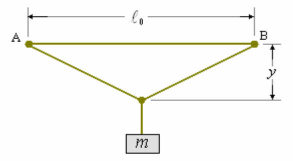
4. Un bloque descansa sobre una placa delgada que ejecuta un movimiento armónico simple vertical con un periodo de 1.2 s. ¿Cuál es la máxima amplitud del movimiento para el cual el bloque no se separa de la placa?

Respuesta. A = 0,357

5. Una plataforma está realizando un movimiento armónico simple en dirección vertical con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de $10/\pi$ vibraciones por segundo. En el punto más bajo de su trayectoria se coloca un cuerpo sobre la plataforma.

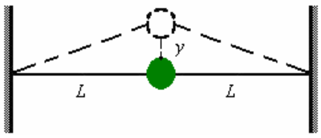
a) ¿En qué punto se separará el cuerpo de la plataforma?
b) ¿A qué altura ascenderá el cuerpo por encima del punto más alto alcanzado por la plataforma?
Respuesta. a) y = 2,5 cm, b) 1,25 cm

6. Un alambre de longitud ℓ_0 se alarga en $10^{-3}\ell_0$, cuando se cuelga de su extremo inferior una cierta masa. Si se conecta este mismo alambre entre dos puntos A y *B*, alejados ℓ_0 y situados en el mismo plano horizontal y de su punto medio se cuelga la misma masa, como se ve en la figura, ¿cuál es la depresión *y* en dicho punto y cuál es la tensión del alambre?



Respuesta. $y = \frac{\ell_0}{20}$, tensión = 5 x peso del objeto.

7. Una masa m se conecta a dos bandas de jebe de longitud *L*, cada una bajo una tensión *T*, como se muestra la figura. La masa se desplaza una pequeña distancia y en forma vertical. Suponiendo que la tensión no cambia significativamente, demuestre que:
a) la fuerza de restitución es - (2*T/L*) y
b) que el sistema presenta un movimiento armónico simple con una frecuencia dada por $\omega = \sqrt{2T/mL}$



8. Se observa que una fuerza de 0,1 N estira a una determinada cuerda elástica en 50 mm. Se suspende de un extremo de la cuerda un objeto de 15 g Y se le hace adquirir una vibración vertical tirando hacia abajo de él y luego soltándolo. ¿Hasta qué punto habrá que alargar la cuerda con el objeto colgado para que al alcanzar el punto más alto de la vibración no exista tensión en la cuerda?

Respuesta. $\Delta y = 7{,}5\text{cm}$

9. Una partícula gira con celeridad constante en una circunferencia de radio *R.*

a) Demostrar que sus proyecciones sobre los ejes horizontal y vertical (sus componentes *x* e *y)* realizan movimientos armónicos simples con unas constantes de fase que se diferencian en $\pi/2$. Esta circunferencia se conoce como circunferencia de referencia correspondiente a la oscilación horizontal.

b) Si el eje *x* representa el desplazamiento de un oscilador armónico simple en unidades de la amplitud *A* y el eje *y* representa su *velocidad* en unidades de ωA, demostrar que el gráfico del movimiento en el plano *xy* es un círculo de radio unidad.

10. Consideremos el oscilador armónico simple de 5 *g* de masa tiene un período de 0,6 s y una amplitud de 18 cm.. a) Hallar la energía mecánica total del oscilador. b) ¿Cuál es su velocidad inicial v_0 si el desplazamiento inicial es 6 cm?
Respuesta. a) *E* = 88,826x10^{-7} N
b) $v_0 = 177{,}7$ cm/s

11. En el instante *t* = 0 un oscilador armónico simple con una frecuencia de 5 rad/s tiene un desplazamiento de 25 cm y una celeridad de -10 cm/s.

a) Hallar la amplitud *A* de la oscilación.

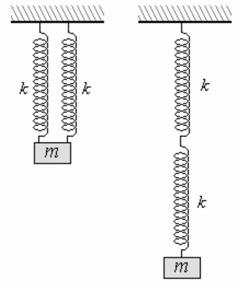
b) ¿Cuál es su constante de fase?

c) Si existe un peso de 10 g en el oscilador, ¿cuál es su energía mecánica total?
Respuesta. a) *A* = 25,08 cm, b) $\phi = 94{,}6^o$, c) E = 78,625 x 10^{-7} N

12. Un oscilador armónico simple de masa 0,8 kg y frecuencia $10/3\pi$ Hz se pone en movimiento con una energía cinética inicial $K_0 = 0{,}2J$ y una energía potencial inicial $U_0 = 0{,}8J$. Calcular
a) su posición inicial.
b) su velocidad inicial.
c) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?
Respuesta. a) $x_0 = \pm 0{,}45m$, b) $v_0 = \pm 1{,}5m/s$, c) *A* = 0,50 m,

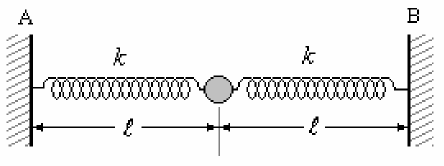
13. Se cuelga de un resorte un objeto de 1g de masa y se le deja oscilar. Para *t* = 0, el desplazamiento era 43,785 cm y la aceleración -1,7514 cm/s^2. ¿Cuál es la constante del resorte?
Respuesta. *k* = 0,025 N/m

14. Una masa *m* cuelga de un resorte uniforme de constante *k.*
a) ¿Cuál es el período de las oscilaciones del sistema?
b) ¿Cuál sería el período si la masa *m* se colgase de modo que:
(1) Estuviese sujeta a dos resortes idénticos situados uno junto al otro?
(2) Estuviese sujeta al extremo inferior de dos resortes idénticos conectados uno a continuación del otro?



Respuesta. a) $T_0 = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$, b) $\frac{T_0}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}T_0$

15. Una masa *m* descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento y está unida a unos soportes rígidos mediante dos resortes idénticos de longitud ℓ_0 sin deformar y constante *k*. Ambos resortes se estiran hasta una longitud ℓ considerablemente mayor que ℓ_0. Los desplazamientos horizontales de *m* respecto a su posición de equilibrio se denominarán *x* (sobre AB) e *y* (perpendicular a AB).
a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento (es decir, la ley de Newton) que rige las oscilaciones pequeñas en dirección *x*.
b) Escribir la ecuación diferencial del movimiento que rige las oscilaciones pequeñas en dirección *y* (admitir que *y* <<1).
c) Calcular el cociente entre los períodos de oscilaciones sobre *x* e *y* en función de ℓ y ℓ_0.
d) Si para *t* = 0 se deja libre la masa m desde el punto $x = y = A_0$ con velocidad nula, ¿cuáles son sus coordenadas *x* e *y* en un instante posterior *t?*
e) Dibujar un gráfico de la trayectoria de *m* resultante bajo las condiciones de la parte (d) si $\ell = \frac{9}{5}\ell_0$.



Respuesta. c) $\frac{T_x}{T_x} = \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell}\right)^{1/2}$, d)

$$x_{(t)} = A_0 \cos\left(\frac{2k}{m}\right)^{1/2} t,$$

$$y_{(t)} = A_0 \cos\left[\frac{2k(\ell - \ell_0)}{m\ell}\right]^{1/2} t$$

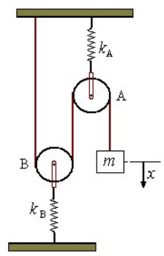
16. Un resorte que tiene su masa M distribuida uniformemente en toda su longitud tiene colgada una masa m en su extremo inferior. Si el resorte se alarga uniformemente cuando el sistema oscila, demostrar que cuando la masa suspendida se está moviendo con una velocidad *v* la energía cinética del sistema viene dada por

$$K = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right)v^2$$

Si el sistema masa-muelle realiza un movimiento armónico simple, demostrar que tendrá un período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{3}}{k}}$$

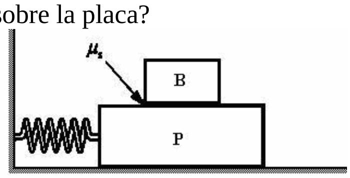
17. Si la masa de las poleas mostradas en la figura es pequeña y la cuerda inextensible, encontrar la frecuencia natural del sistema.



Respuesta.

$$\omega = \sqrt{\frac{k_A k_B}{4m(k_A + k_B)}}\ \frac{rad}{s}$$

18. Una placa plana P hace un movimiento armónico simple horizontal sobre una superficie sin fricción con una frecuencia *f* = 1,5 Hz. Un bloque B descansa sobre la placa, como se muestra en la figura, y el coeficiente de fricción estático entre el bloque y la placa es μ = 0,60. ¿Cuál es la máxima amplitud de oscilación que puede tener el sistema sin que resbale el bloque sobre la placa?



Respuesta. *A* = 6,62 cm

19. Se observó que el período de un determinado péndulo era *T* = 1,002 s al nivel del mar. Cuando el péndulo se llevó a la cima de una montaña, el período resultó ser *T* = 1,003 s.
a) ¿Qué altura tenía la montaña?
b) ¿Cómo se vería afectado por la altura un péndulo de torsión?

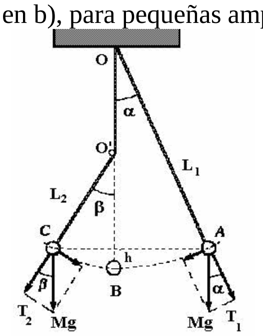
Para $h << R_T \Rightarrow g = g_0\left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right)$, R_T = 6 378,13 km
Respuesta. a) *h* = 6,36 km, b) no, excepto en el

caso de que la resistencia del aire sea más pequeña.

20. Un cohete que posee un empuje igual a cinco veces su peso está equipado con un reloj de péndulo vertical. Se dispara el cohete en el instante $t = 0$ y se eleva verticalmente. Después de 5 s se agota el combustible. ¿Cuál es el tiempo leído en dicho reloj de péndulo si un reloj semejante en el suelo marca 15 s?

Respuesta. $t = 21{,}2$ s

21. Un péndulo está constituido por una pequeña esfera, de dimensiones que consideramos despreciables, cuya masa es $M = 200$ g, suspendida en un hilo inextensible y sin peso apreciable, de 2 m de largo.
a) Calcular el período para pequeñas amplitudes.
b) Supongamos que en el momento de su máxima elongación la esfera se ha elevado 20 cm por encima del plano horizontal que pasa por la posición de equilibrio. Calcular su velocidad y su energía cinética cuando pase por la vertical.
c) Supongamos que al pasar por la vertical el hilo encuentra un clavo O' situado 1m debajo del punto de suspensión O y normal al plano de oscilación. Describir el movimiento posterior de la esfera. Calcular la relación de las tensiones del hilo cuando el péndulo alcanza sus posiciones extremas.
d) Calcular el período de este péndulo, tal como se describe en b), para pequeñas amplitudes.



Respuesta.

a) $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{9{,}8}} = 2\sqrt{2}$ s

b) $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2x9{,}8x0{,}2} = 0{,}4 m/s$

c) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{L_1 - h}{L_1 - 2h} = \dfrac{2 - 0{,}2}{2 - 2x0{,}2} = 1{,}12$

d) $T = \dfrac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1 = 2{,}4s$

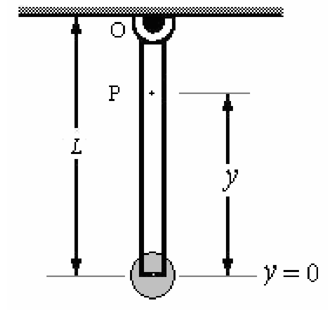
22. Un aro delgado y uniforme de diámetro d cuelga de un clavo. Se desplaza un ángulo pequeño en su propio plano y luego se le deja libre. Suponiendo que el aro no desliza sobre el clavo, demostrar que su período de oscilación es el mismo que el de un péndulo ideal de longitud *d.*

23. a) Una varilla homogénea delgada de longitud ℓ oscila alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Hallar la longitud del péndulo ideal equivalente y situar el centro de oscilación y el centro de percusión.

b) Un disco macizo de radio R está oscilando con una pequeña amplitud alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y situado a una distancia r de su centro. ¿A qué distancia r' será máxima la frecuencia?

Respuesta. a) $\ell_0 = \dfrac{2}{3}\ell$, b) $r' = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

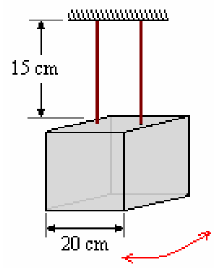
24. Se sujeta una masa M en el extremo de un barra uniforme de masa M y longitud L, la cual se pivota en la parte superior Determine las tensiones en la barra en el pivote y en el punto P, cuando la barra se encuentra en reposo. Calcule el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos del equilibrio y determine el periodo para $L = 2$ m. (Sugerencia: Suponga que la masa en el extremo de la barra es una masa puntual.)



Respuesta.

$$T = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{2(2)}{9{,}8}} = 2{,}68 \text{ s.}$$

25. Un bloque cúbico de 20 cm de arista está colgado por dos cuerdas de 15 cm de largo, como se indica en la figura.
a) ¿Cuál es el período de oscilación cuando el movimiento es paralelo al plano de la figura?
b) ¿Cuándo el movimiento es perpendicular al plano de la figura?

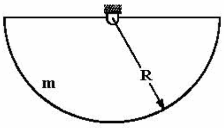


Respuesta. a) $T = 0{,}78s$, b) $T = 1{,}1s$

26. Un alambre delgado se dobla en forma de una semicircunferencia de radio *R.* Se le hace oscilar en su propio plano alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por el punto medio del alambre. Hallar la longitud del péndulo ideal equivalente.

Respuesta. $\ell_0 = 2R$

27. Un semicírculo de radio R y masa m está pivotado alrededor de su centro como se muestra en la figura. Determinar su frecuencia natural de oscilación para pequeños desplazamientos.

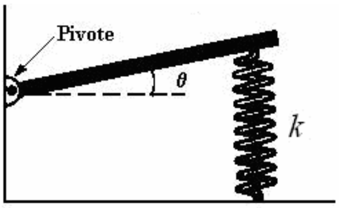


Respuesta: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{8g}{3R\pi}}$rad/s

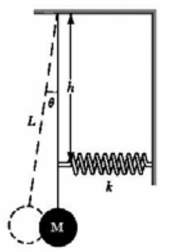
28. Un arco circular de diámetro *d* se cuelga de un clavo. ¿Cuál es el período de sus oscilaciones cuando las amplitudes son pequeñas?

Respuesta. $2\pi\left(\dfrac{d}{g}\right)^{1/2}$

29. Una tabla horizontal de masa *m y longitud* L se pivota en un extremo, y en el extremo opuesto se sujeta a un resorte de constante de fuerza *k* . El momento de inercia de la tabla respecto del pivote es $\dfrac{1}{3}mL^2$. Si la tabla se desplaza un ángulo pequeño θ de la horizontal y se suelta, demuestre que se moverá con un movimiento armónico simple, con una frecuencia angular dada por $\omega = \sqrt{3k/m}$.

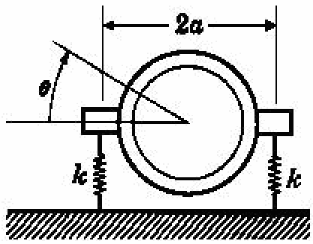


30. Un péndulo de longitud *L* y masa *M* tiene conectado un resorte de constante de fuerza k a una distancia *h* por debajo del punto de suspensión. Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud (θ pequeño). (Suponga que el soporte vertical, de longitud *L*, es rígido, pero de masa despreciable.)



Respuesta. $\omega = \sqrt{\dfrac{mgL + kL^2}{mL^2}}$

31. Un motor eléctrico está apoyado por 4 resortes, cada uno de constante *k* como se muestra en la figura. Si el momento de inercia del motor alrededor del eje central de rotación es I_0, encontrar la frecuencia natural de oscilación.

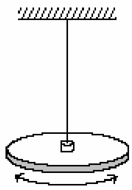


Respuesta.

$$\omega_0 = 2a\sqrt{\frac{k}{I_o}} \text{ rad/s}$$

32. a) Se cuelga una bola de acero maciza del extremo de un alambre de acero de 2m de longitud y radio 1 mm. La carga de rotura del acero es **1,1** x 10^9 N/m^2. ¿Cuáles son el radio y la masa de la bola de mayor tamaño que puede soportar el alambre?
b) ¿Cuál es el período de las oscilaciones de torsión de este sistema? (Módulo de cizalladucha del acero = 8 x 10^{10} N/m^2. Momento de inercia de la esfera respecto a un eje que pasa por centro = $2MR^2/5$.)
Respuesta. a) 22 cm radio, 360 kg b) 66 s.

33. La lenteja de un péndulo de torsión como el de la figura es un disco de momento de inercia desconocido *I.* Su período es *T* = 3 s. Cuando se coloca sobre el disco un anillo delgado de 3 kg de masa y un radio de 10 cm, de forma que el hilo de suspensión pasa por el centro exacto del anillo, el nuevo período de oscilación es *T* = 4 s. Hallar el momento de inercia *I.*



Respuesta. *I* = 0,0386 kg.m^2

34. Un resorte de 20 cm de longitud cuelga de un soporte fijo. Al colocarse una masa de 0,5 kg en el extremo inferior la longitud aumenta a 25 cm. Al poner en oscilación el sistema se observa que en el tiempo π/0,65 segundos ejecuta 10 oscilaciones. Analice y diga si el movimiento armónico es simple o amortiguado. Justifique.
Respuesta.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \; k = \frac{0,5\times 9,8}{0,05} = 98\frac{N}{m}, \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{98}{0,5}} = 14\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La frecuencia medida es $\omega = 2\pi\left(\frac{10}{\pi/0,65}\right) = 13\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

La diferencia se debe a que el movimiento es amortiguado.

35. Se cuelga un objeto de masa 0,2 kg de un resorte cuya constante es 80 N/m., Se somete el objeto a una fuerza resistente dada por - *bv*, siendo *v* su velocidad en m/s.
a) Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el caso de oscilaciones libres del sistema.
b) Si la frecuencia con amortiguamiento es $\sqrt{3}/2$ de la frecuencia sin amortiguamiento, ¿cuál es el valor de la constante *b?*
Respuesta. b) 4 N.s/m,

36. Se conecta un bloque de masa *m* él un resorte cuyo otro extremo se mantiene fijo. Existe también un mecanismo de amortiguamiento viscoso. Sobre este sistema se han realizado las siguientes observaciones:

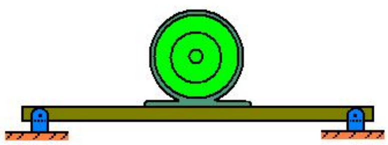
(1) Si se empuja horizontalmente el bloque con una fuerza igual a compresión estática del muelle es igual a *h*.
(2) La fuerza resistente viscosa es igual a *mg* si el bloque se mueve con una cierta velocidad conocida *u*.
a) Para este sistema completo (en el que se incluye tanto el resorte el amortiguador) escribir la ecuación diferencial que rige las oscilaciones horizontales de la masa en función de *m*, g, *h* y *u*.
Responder a las siguientes preguntas en el caso de que. $u = 3\sqrt{gh}$:
b) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas?
c) ¿Qué tiempo ha de transcurrir, expresado en forma de un múltiplo de $\sqrt{h/g}$, para que la energía descienda en un factor $1/e$?
d) ¿Cuál es el valor *Q* de este oscilador?
e) Este oscilador, inicialmente en su posición de reposo, se pone en movimiento repentinamente cuando *t* = 0 mediante un proyectil de masa despreciable, pero cantidad de movimiento no nula, que se mueve en sentido positivo las *x*. Hallar el valor del ángulo de fase δ en la ecuación $x = Ae^{-\beta t/2}\cos(\omega t - \delta)$ que describe el movimiento subsiguiente, y representar *x* en función de *t* para los primeros ciclos.
f) Si el oscilador se impulsa con una fuerza $mg\cos\omega t$, siendo $\omega = \sqrt{2g/h}$ ¿cuál es la amplitud de la respuesta del estado estacionario?
Respuesta. b) $\left(\frac{35g}{36h}\right)^{1/2}$, c) $3\left(\frac{h}{g}\right)^{1/2}$, d) Q = 3, e) $\delta = \frac{\pi}{2}$, f) 0,90 *h*.

37. Un objeto de masa 0,2 kg se cuelga de un resorte cuya constante es 80 N/m. El cuerpo se somete a una fuerza resistente dada por - *bv*, siendo *v* su velocidad (m/s) y *b* = 4 N.m/s.
a) Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el caso de oscilaciones libres del sistema y hallar su período.
b) Se somete el objeto a una fuerza impulsora sinusoidal dad $F(t) = F_0$ sen ωt, siendo F_0 = 2N y ω = 30 rad/s. En estado estacionario, ¿Cuál es la amplitud de la oscilación forzada?

Respuesta. a) $T = \frac{\pi}{5\sqrt{3}}s$, b) 1,3 cm

38. Un Pontiac Grand Prix de 1550 kg se soporta mediante cuatro resortes en espiral, cada uno con una constante de 7,00 x 10^4 N/m.
a) ¿Cuál es la frecuencia natural de este sistema?
b) El automóvil vibra al rodar sobre los baches en una autopista de concreto. Si los baches están separados 18,5 m, ¿qué tan rápido se está moviendo el automóvil cuando la frecuencia de los baches está en resonancia con la frecuencia natural?
Respuesta. a) 2,14 Hz b) 39,6 m/s

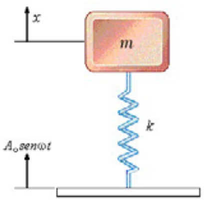
39. Un motor pequeño de velocidad variable tiene una masa de 9 kg se monta en una viga elástica tal como se muestra en la figura. El motor rota con una masa excéntrica de 1 kg a 5 cm. del centro del eje. Cuando el motor no está funcionando, el motor y el peso excéntrico hacen desviar a la viga 1,25 cm. Determine
a) la velocidad del sistema en la resonancia y
b) la amplitud de las vibraciones forzadas cuando el motor está funcionando en 300 rpm.
c) ¿Sería posible reducir la amplitud de la vibración forzada del motor en la parte
b) sujetando un peso adicional al motor? ¿Si es así qué peso se debe agregar para reducir la amplitud de la vibración a 1,25 cm?



40. Un auto con amortiguadores en mal estado rebota hacia arriba y hacia abajo con un periodo de 1,5 s después de pasar por un hoyo. El auto tiene una masa

de 1500 kg y se soporta mediante cuatro resortes de igual constante de fuerza *k*. Determine el valor de *k*.
Respuesta. $k = 6580$ N/m

41. Un bloque de masa m está soportado por un resorte de constante *k* el cual está montado sobre una base de peso despreciable sometida a un movimiento armónico simple de arriba abajo $A_0 \operatorname{sen} \omega t$ como se muestra en la figura. Determine el movimiento del bloque.

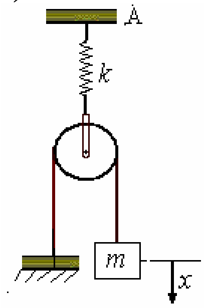


Respuesta.

$$x = A\operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) + \frac{A_0\omega_0^2}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. A, ϕ y δ dependen de las condiciones iniciales.

42. En el sistema mostrado en la figura, si la masa de la polea mostrada en la figura es pequeña y la cuerda inextensible Encontrar:
a) La ecuación de movimiento para cuando el soporte A no tiene movimiento alguno.
b) La ecuación de Movimiento para cuando el soporte A según la siguiente ley $x_A = x_o \cos(\omega t)$. (Sugerencia: nótese que la deformación del resorte puede expresarla como la diferencia de las deformaciones de sus extremos)
c) La solución estable para el caso b.



Respuesta.
a) la frecuencia angular de las oscilaciones de la masa m es: $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

b) $\ddot{x} + \dfrac{k}{4m} x = \dfrac{1}{2m} \cos \omega t$

c) $x = D\cos(\omega t + \delta)$

$$D = \frac{1/2m}{\omega_o^2 - \omega^2}, \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{4m}}$$

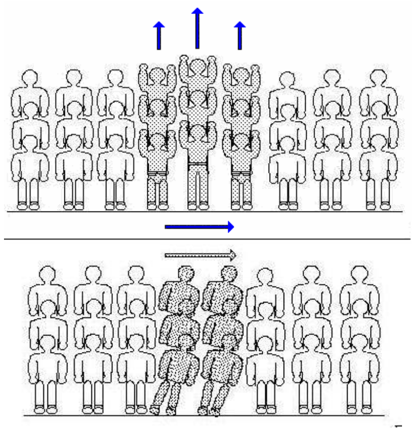
CAPÍTULO 3. Movimiento ondulatorio y ondas

INTRODUCCIÓN.

Existen en la naturaleza muchos fenómenos de los cuales se dice "tienen naturaleza ondulatoria" pero ¿qué es exactamente una onda? ¿Qué propiedades tienen? ¿Cómo se puede formalizar una expresión matemática de un fenómeno ondulatorio? Estas y otras cuestiones son el tema objeto de este capítulo.
No obstante, antes de entrar de lleno en lo que es una onda y su formalismo, vamos a definir onda como:
Una onda es una perturbación física que transmite energía, pero que no transmite materia.
En las ondas materiales las partículas concretas que componen el material no se propagan, sino que se limitan a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. No obstante cuando una onda se transmite por dicho material se produce una sincronización de oscilaciones entre las distintas partículas componentes del medio que posibilita la propagación de energía.
La onda de choque de una explosión es un buen ejemplo. La creación súbita de calor en la explosión eleva a presión muy alta a la masa de gas de su vecindad inmediata. Esta presión se ejerce sobre el aire que rodea el cual es comprimido e incrementado en presión. Esta presión a su vez es ejercida sobre el aire de más allá, o sea que hay una onda de presión que se aleja de la explosión con una velocidad de 335 m/s esta onda contiene la energía requerida para comprimir el aire. Esta energía rompe ventanas a grandes distancias de la explosión. Ningún material viaja, el movimiento de cualquier partícula de aire relativamente es pequeño, la perturbación es la que viaja rápidamente a grandes distancias y transmite la energía

DEFINICIÓN - CARACTERÍSTICAS.

Una onda es una perturbación que se propaga desde el punto en que se produjo hacia el medio que rodea ese punto.
Las ondas materiales (todas menos las electromagnéticas) requieren un medio elástico para propagarse.
El medio elástico se deforma y se recupera vibrando al paso de la onda.
La perturbación comunica una agitación a la primera partícula del medio en que impacta, este es el foco de las ondas y en esa partícula se inicia la onda.
La perturbación se transmite en todas las direcciones por las que se extiende el medio que rodea al foco con una velocidad constante en todas las direcciones, siempre que el medio sea isótropo (de iguales características físico-químicas en todas las direcciones).
Todas las partículas del medio son alcanzadas con un cierto retraso respecto a la primera y se ponen a vibrar, recuerda la ola de los espectadores en un estadio de fútbol.



La forma de la onda es la foto de la perturbación propagándose, la instantánea que congela las posiciones de todas las partículas en ese instante. Curiosamente, la representación de las distancias de separación de la posición de equilibrio de las partículas al vibrar frente al tiempo dan una función matemática seno que, una vez representada en el papel, tiene forma de onda.
Podemos predecir la posición que ocuparán dichas partículas más tarde, aplicando esta función matemática.
El movimiento de cada partícula respecto a la posición de equilibrio en que estaba antes de llegarle la perturbación es un movimiento oscilatorio armónico simple.
Una onda transporta energía pero no transporta materia: las partículas vibran alrededor de la posición de equilibrio pero no viajan con la perturbación.
Veamos un ejemplo: la onda que transmite un látigo lleva una energía que se descarga al golpear su punta. Las partículas del látigo vibran, pero no se desplazan con la onda.

Pulso y tren de ondas – Onda viajera

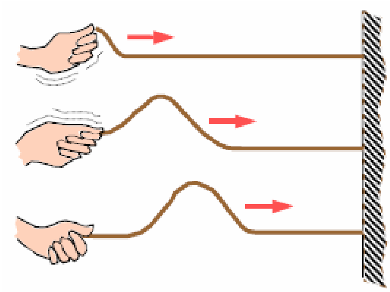
El movimiento de cualquier objeto material en un medio (aire, agua, etc.) puede ser considerado como una fuente de ondas. Al moverse perturba el medio que lo rodea y esta perturbación, al propagarse, puede originar un pulso o un tren de ondas.
Un impulso único, una vibración única en el extremo de una cuerda, al propagarse por ella origina un tipo de onda llamada **pulso**. Las partículas oscilan una sola vez al paso del pulso, transmiten la energía y se quedan como estaban inicialmente. El pulso sólo está un tiempo en cada lugar del espacio. El sonido de un disparo es un pulso de onda sonora.
Si las vibraciones que aplicamos al extremo de la cuerda se suceden de forma continuada se forma un **tren de ondas** que se desplazará a lo largo de la cuerda, esto viene a ser una **onda viajera**.

TIPOS DE ONDAS:

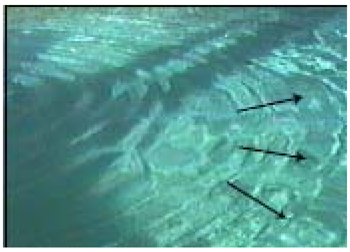
Podemos establecer criterios de clasificación de las ondas. Algunos serían:

Según el medio por el que se propaguen
Ondas mecánicas. Son las que requieren un medio material para propagarse. Ejemplo, el sonido
La onda de sonido ordinario es una forma de transmisión de energía, perturbaciones en el aire entre fuente vibrante que es la que produce el sonido y un receptor tal como el oído. El sonido también puede transmitirse en los líquidos y en los sólidos. Las ondas en una cuerda, en un resorte y las ondas de agua son otros ejemplos de ondas que necesitan de un medio elástico para propagarse. A este tipo de ondas se los denomina "ondas mecánicas".
Ondas electromagnéticas. Son las que no requieren un medio material. Ejemplo, la luz.
Existe otro tipo de ondas relacionada con la luz, transmisión de radio y radiación de calor, esto es las ondas electromagnéticas que no necesitan de un medio para propagarse.

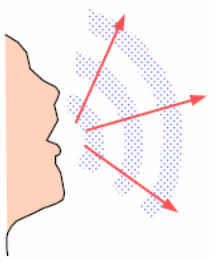
Según el número de dimensiones que involucran
Unidimensionales. Ejemplo, la propagación del movimiento en una cuerda



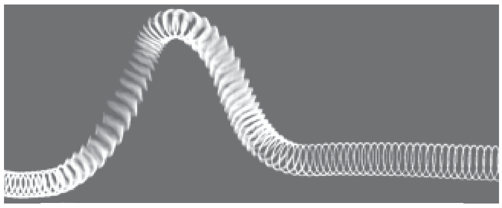
Bidimensionales. Ejemplo, olas en la superficie de un líquido.

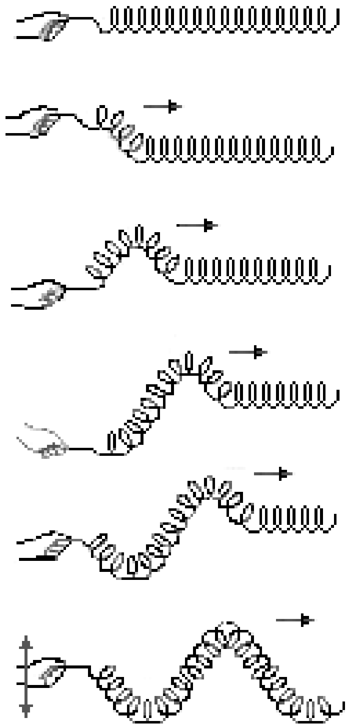


Tridimensionales. Ejemplo, el sonido normal.

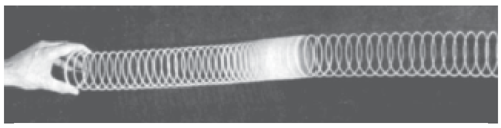


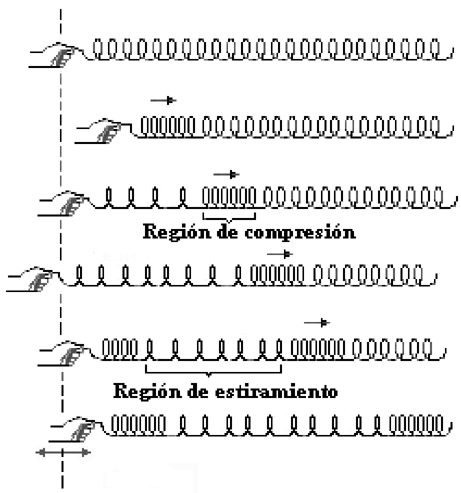
Según la relación entre la vibración y la dirección de propagación
Transversales. Son aquellas ondas en las cuales la oscilación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo en una cuerda normal y tensa la onda se propaga de izquierda a derecha (en cierto caso particular) pero, en cambio, la oscilación de un punto concreto de la cuerda se produce de arriba a abajo, es decir, perpendicularmente a la propagación





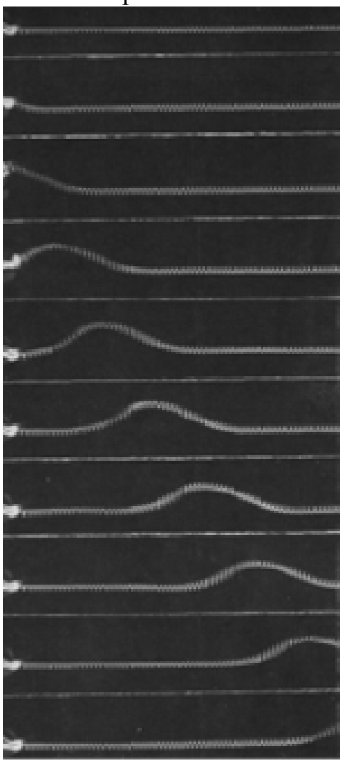
Longitudinales. En este tipo la propagación es paralela a la oscilación. Como ejemplo, si apretamos un resorte las espiras oscilan de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, paralelas en cualquier caso a la dirección de propagación.





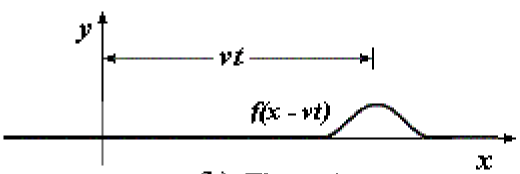
EXPRESIÓN MATEMÁTICA PARA UNA ONDA VIAJERA.

En la Figura (Physical Science Study Committee, 1965) se muestra una secuencia de fotografías de un pulso propagándose de izquierda a derecha a lo largo de un resorte. En esta sección haremos uso de estas fotografías para descubrir la expresión matemática de una onda viajera y probar el significado de algunos de los términos utilizados para describir las ondas.



El intervalo de tiempo entre cada fotografía es el mismo. Estas fotografías indican que la velocidad de un pulso es constante; y la forma del pulso prácticamente no cambia durante el movimiento de avance. Un examen más minucioso muestra que el pulso se va haciendo gradualmente más ancho conforme avanza; la altura del pulso se va haciendo menor mientras el ancho del pulso crece. Este ensanchamiento del pulso es una consecuencia de la dispersión. La dispersión no tiene un interés primordial en las ondas que deseamos considerar, por lo que la ignoraremos en nuestro estudio.

(a) Tiempo $t = 0$



(b) Tiempo t

En la Figura arriba pueden apreciarse dos etapas del movimiento de un pulso en una cuerda, a dos tiempos diferentes, cuando el pulso se propaga de izquierda a derecha con velocidad *v*. La figura está dibujada sobre un sistema de ejes coordenados de modo que el eje *x* muestra la dirección en que la cuerda no se distorsiona. Supongamos que la forma de la cuerda a $t = 0$ está dada por la expresión $f(x)$ (Figura a). Después de un tiempo *t* el pulso ha avanzado hacia la derecha una distancia vt (Figura b). Debe notarse que la función $f(x-a)$ tiene la misma forma que la función $f(x)$, sin embargo $f(x-a)$ esta desplazada una distancia *a* en la dirección +x. Si suponemos que el pulso mantiene su forma mientras se propaga, podemos expresar la forma del pulso en un instante de tiempo *t* mediante

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

Una descripción similar a la anterior, nos proporciona la expresión de un pulso que se mueve hacia la izquierda con velocidad *v*

$$y(x,t) = f(x + vt)$$

Se denomina función de onda a la función $y(x,t)$ que sirve para describir onda. Para el caso de una onda en una cuerda, la función de onda representa la coordenada *y* de un elemento de la cuerda. Por tanto, la función de onda da el desplazamiento *y* de dicho elemento desde su posición de equilibrio $y = 0$, pero es una función que depende de *x* y de *t*.

Esto significa que el desplazamiento de un elemento de cuerda depende de:

a) la coordenada *x* del elemento; y

b) el tiempo *t* de la observación.

Esto es, *x* y *t* deben aparecer combinados en $y(x,t)$ como $(x - vt)$ o $(x + vt)$. Para especificar una función de onda debemos escribirla como una determinada función. Así por ejemplo la función de onda específica que vamos a discutir en la sección siguiente es $y(x,t) = A\operatorname{sen}(x - vt)$.

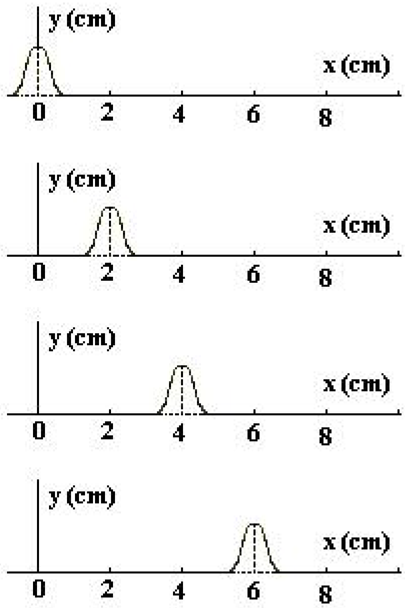
Ejemplo 1. De las funciones que se presentan a continuación, sólo dos pueden representar ecuaciones de onda, de ondas unidimensionales que se propagan en el eje *x*:

$$y_1(x,t) = \frac{5\times 10^{-2}}{\left[0{,}25 + (x - 2t)^2\right]}$$

$$y_2(x,t) = \frac{5\times 10^{-2}}{\left[0{,}25 + \left(x^2 + 4t^2 - 2t\right)\right]}$$

$$y_3(x,t) = \frac{5\times 10^{-2}}{\left[0{,}25 + (2x + t)^2\right]}$$

a) Decir cuales de las funciones: y_1, y_2 e y_3 son funciones de onda y justificar la respuesta.
b) ¿Cuáles son las velocidades de propagación de dichas ondas?
c) En la figura se representan varias "fotografías" de una cuerda tensa, en la cual se está propagando una onda que corresponde a una de las dos anteriores. Las "fotografías" corresponden a instantes separados 0,01 s. ¿A cuál de las ondas corresponden las "fotos"?



Solución
a) Cualquier perturbación que obedece en todo instante a la ecuación: $y(x,t) = f(x \pm vt)$ representa una onda unidimensional que se propaga hacia la derecha (signo negativo) o hacia la izquierda (signo positivo) del eje x, con velocidad *v*. Así pues, las funciones y_l e y_3 son las únicas posibles representantes de ecuaciones de onda.
b) Para y_1, el valor de la velocidad será $v_1 = 2\text{m/s}$, hacia la derecha del eje x.
Para y_3, la transformamos en:

$$y_3 = \frac{5\times 10^{-2}}{0{,}25 + 4\left(x + \frac{1}{2}t\right)^2} \Rightarrow v_3 = -\frac{1}{2}\text{m/s}$$, hacia la izquierda del eje x. .

c) Corresponde a y_1 puesto que su propagación es hacia la derecha del eje x, y además, es claro que su velocidad es 2 m/s, lo que se deduce de las medidas dadas en las fotografías sucesivas.

ONDAS ARMONICAS

Un caso especialmente interesante y frecuente es aquel en que y es una función sinusoidal o armónica tal como $y(x) = A\text{sen}kx$, de modo que

$$y(x,t) = A\text{sen}k(x - vt) \qquad (1)$$

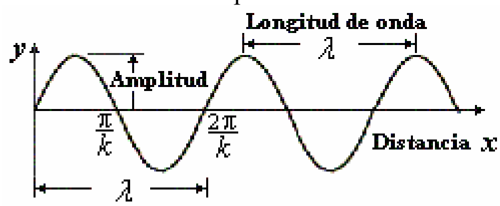
La cantidad k conocida como **número de onda** (diferente a la constante k del resorte) tiene un significado especial. Reemplazando el valor de x por $\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)$, obtenemos para $y(x,t)$, el mismo valor; esto es,

$$y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = A\text{sen}k\left[\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) - vt\right]$$
$$= A\text{sen}k[(x - vt) + 2\pi]$$
$$= A\text{sen}k(x - vt) = y(x,t)$$

Observamos que $\frac{2\pi}{k}$ es el "periodo de espacio" de la curva, repitiéndose cada $\frac{2\pi}{k}$, cantidad la llamaremos **longitud de onda** y la designaremos por λ .

Entonces $\lambda = \frac{2\pi}{\text{k}}$

Para un determinado tiempo



Observamos que la ecuación (1) también puede ser escrita en la forma

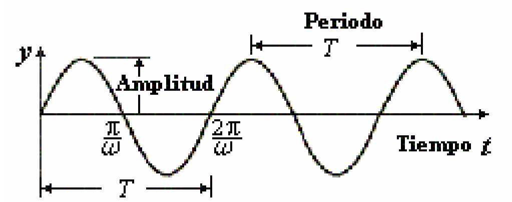
$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - kvt) = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

Donde la **frecuencia angular** $\omega = kv$ y $v = \frac{\omega}{k}$

La función $y(x,t)$ es también periódica en el tiempo, con un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Y por lo tanto, con una frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Para un determinado espacio *x*.



Podemos obtener una relación importante de las ondas.

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$, expresión que concuerda con

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f$$

También es frecuente escribir la ecuación de la onda sinusoidal en la forma:

$$y = A\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

Onda que viaja a la izquierda. Similarmente para una onda que viaja a la izquierda se tendría

$$y = A\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = A\text{sen}(kx+\omega t)$$

Función sinusoidal desfasada con respecto al origen. Adicionalmente, podemos tener una función sinusoidal desfasada con respecto al origen de coordenadas, esto es,

$$y(x) = A\text{sen}(kx-\varphi)$$

y la onda viajera será

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx-\omega t-\varphi)$$

Similarmente para una onda que viaja hacia la izquierda se tendrá

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx+\omega t-\varphi)$$

Nota. Una onda real no puede ser perfectamente armónica, puesto que unas ondas armónicas se extienden hacia el infinito en ambos sentidos a lo largo del eje *x* y no tienen ni principio ni fin en el tiempo. Una onda real debe tener principio y fin en algún lugar del espacio y del tiempo. Las ondas existentes en la naturaleza, como son las ondas de sonido o las ondas de luz, pueden frecuentemente aproximarse a ondas armónicas, puesto que su extensi6n en el espacio es mucho mayor que su longitud de onda, y el intervalo de tiempo que tardan en pasar por un punto es mucho mayor que su período. Una onda de este tipo se denomina tren de ondas. Así que una onda armónica es una representación idealizada de un tren de ondas.

Ejemplo 2. Un veraneante que descansa en la playa observa que durante los últimos 30 minutos han arribado 90 olas a la orilla. Luego se mete al mar y se dirige nadando hacia un bote anclado y ubicado a 450 m mar adentro, tomándole un total de 5 minutos en llegar. En el trayecto el nadador sorteo 60 olas.
Determine
a) La velocidad con que las olas se acercan a la orilla es:
b) La separación entre crestas de 2 olas consecutivas.
Solución.

Si en 30 minutos llegan 90 olas a la orilla, la frecuencia de las olas es:

$$f = \frac{90}{30\times 60} = \frac{1}{20}\frac{\text{c}}{\text{s}}$$

Si hay 60 olas en 450 metros la longitud de onda de las olas es:

$$\lambda = \frac{450}{60} = 7{,}50\,\text{m}$$

a) La velocidad con que las olas se acercan a la orilla.

$$v = \lambda f = 7{,}50\times\frac{1}{20} = 0{,}375 \text{ m/s}$$

b) La separación entre las crestas de 2 olas consecutivas es una longitud de onda:

$$\lambda = \frac{450}{60} = 7{,}50\,\text{m}$$

Ejemplo 3. Una onda sinusoidal es enviada a lo largo de una de un resorte, por medio de un vibrador fijo en uno de sus extremos. La frecuencia del vibrador es 20 ciclos por segundo y la distancia entre puntos de mínimo sucesivos en el resorte es 24 cm. Encontrar:
a) La velocidad de la onda
b) La ecuación de la onda, sabiendo que el desplazamiento longitudinal máximo es de 4 cm. y que se mueve en el sentido positivo de *x*.
Solución.
a) Si f = 20 Hertz y λ = 24 cm.
la velocidad es

$$v = \lambda f = 24 \text{ x } 20 = 490 \text{ cm/seg.}$$

b) La ecuación de la onda que se mueve en el sentido positivo es

$$y = A\text{sen}(kx-\omega t)$$

Siendo

A = 4cm, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{12}$ y

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 40\,\pi$$

Luego la ecuación de la onda es

$$y_{(x,t)} = 4\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{24}-20t\right)$$

y en cm *x* en cm y *t* en segundos.
Corno la variable x aparece en la expresión con signo opuesto a la variable *t*, la onda se propaga en la dirección + *x*.

Ejemplo 4. a) Una onda en una cuerda esta descrita por $y = 0{,}002\text{sen}(0{,}5x-628t)$. Determine la amplitud, la frecuencia, periodo, longitud de onda y velocidad de la onda.
b) Una onda en una cuerda esta descrita por $y = 25\text{sen}[1{,}25\pi\ x - 0{,}40\pi\ t]$ en el sistema cgs. Determine la amplitud, la frecuencia, periodo, longitud de onda, la velocidad de propagación y la velocidad transversal de la onda.
Solución.
a) La ecuación de la onda es

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx-\omega t)$$

$$A = 0{,}002\,\text{m},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}5 \Rightarrow \lambda = 12{,}6\,\text{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 628 \Rightarrow T = 0{,}001\,\text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 100\ \text{Hz}$$

$$v = \lambda f = 1260\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La ecuación de una onda armónica, en general, es

$$y = A\text{sen}(kx - \omega t) = A\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)$$

La ecuación dada en el problema se puede poner de la forma siguiente

$$y = 25\text{sen}2\pi\left[\frac{x}{\frac{2}{1{,}25}} - \frac{t}{\frac{1}{0{,}40}}\right]$$

Identificando ambas ecuaciones tenemos:
Amplitud $A = 25$ cm

Longitud de onda $\lambda = \dfrac{2}{1{,}25} = 1{,}6\ \text{cm}$

Frecuencia $f = \dfrac{1}{T} = 0{,}40\ \text{Hz}$

Velocidad de propagación

$$v = \frac{\lambda}{T} = 0{,}64\ \text{cm/s}$$

La velocidad transversal será

$$v_t = \frac{dy}{dt} = 25\times 0{,}8\pi\cos\pi(1{,}25x - 0{,}80t)$$
$$= 20\pi(1{,}25x - 0{,}80t)\ \text{cm/s}$$

Ejemplo 5. Un foco puntual realiza un movimiento periódico representado por la ecuación.
Las unidades están en el sistema cgs.

$$y = 4\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)$$

Se pide determinar:
a) La velocidad de la onda.
b) La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 1 s
c) La diferencia de fase, en un instante dado, de dos partículas separadas 210 cm.
d) Si el desplazamiento, *y*, de una determinada partícula en un instante determinado es de 3 cm, determinar cuál será su desplazamiento 2 s más tarde

Solución.
a) La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{240}{6} = 40\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

La velocidad es de sentido contrario al positivo del eje *x*.
b) La diferencia de fase es

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t+1}{6} - \frac{t}{6}\right) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 30°$$

c) En este caso, la diferencia de fase viene dada por

$$\varphi = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\pi\frac{210}{240} = 2\pi\frac{7}{8} = \frac{7\pi}{4} = 31°$$

d) Sabemos que

$$3 = 4\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)$$

$$\Rightarrow \cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right) = \frac{3}{4}$$

El desplazamiento 2 segundos más tarde será

$$y = 4\cos 2\pi\left(\frac{t+2}{6} + \frac{x}{240}\right)$$
$$= 4\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240} + \frac{1}{3}\right)$$
$$= 4\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right) + \frac{2\pi}{3}\right]$$
$$= 4\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)\cos\frac{2\pi}{3} - \text{sen}2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right]$$

Pero

$$\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right) = \frac{3}{4}\ \text{y}$$

$$\text{sen}2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right) = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Sustituyendo valores

$$y = 4\left[\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{7}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -3{,}79\ \text{cm}$$

Ejemplo 6. Una onda sinusoidal que viaja en la dirección positiva *x* tiene una amplitud de 15 cm, una longitud de onda de 40 cm y una frecuencia de 8 Hz. El desplazamiento de la onda en $t = 0$ y $x = 0$ es 15 cm
a) Determinar el número de onda, el período, la frecuencia angular y la rapidez de onda.
b) Determinar la constante de fase φ, y se escribirá una expresión general para la función de onda.

Solución.
a) Utilizando las ecuaciones estudiadas obtenemos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40} = 0{,}157/\text{cm}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0{,}125\ \text{s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8) = 50{,}3\ \text{rad/s}$$

$$v = \lambda f = (40)(8) = 320\ \text{cm/s}$$

b) Puesto que la amplitud $A = 15$ cm, y como se tiene $y = 15$ cm en $x = 0$ y $t = 0$, obtenemos

$$15 = 15\text{sen}(-\varphi) \Rightarrow \text{sen}(-\varphi) = 1$$

Esto puede comprobarse por simple observación puesto que la función coseno está desplazada 90º respecto de la función seno. Sustituyendo los valores de *A*, *k* y ω en esta expresión, se obtiene

$$y = 15\cos(0{,}157t - 50{,}3x)\text{cm}$$

Ejemplo 7. La ecuación de una onda armónica que se propaga en una cuerda es

$$y = 25\text{sen}(1{,}25\pi x - 0{,}8\pi t)$$

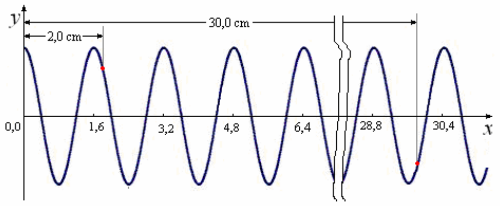
Donde *x* se expresa en cm y *t* en segundos.
a) Determinar cual es el desfase para dos partículas de la soga posicionadas en 2cm y 30cm
b) Cual es la distancia mínima entre 2 partículas del medio cuyo desfase es de π/3.

Solución.

a) $y = 25\text{sen}(2{,}5\pi - 0{,}8\pi t) = 25\cos 0{,}8\pi t$

$y = 25\text{sen}(37{,}5\pi - 0{,}8\pi t) = -25\cos 0{,}8\pi t$

El desfase es π rad



El desfase entre esos dos puntos en todo instante será igual a π rad.

b) $1{,}25\pi x_2 - 1{,}25\pi x_1 = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow$

$x_2 - x_1 = \dfrac{1}{3(1{,}25)} = \dfrac{1}{3{,}75} = 0{,}27$ cm

Otra forma

Si 2π corresponde a 1,6 cm., cuando corresponde a $\dfrac{\pi}{3}$:

$$d = \frac{1{,}6\times\dfrac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1{,}6}{6} = 0{,}27 \text{ cm}$$

Ejemplo 8. La velocidad de propagación de una onda es de 330 m/s, y su frecuencia, 10^3 Hz. Calcúlese:
a) La diferencia de fase para dos posiciones de una misma partícula que se presentan en intervalos de tiempo separados 5 x 10^{-4} s.
b) La diferencia de fase en un determinado instante entre dos partículas que distan entre sí 2,75 cm.
c) La distancia que existe entre dos partículas que se encuentran desfasadas 120°.

Solución.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{10^3} = 0{,}33\text{m}, \; T = \frac{1}{f} = 10^{-3}\text{ s}$$

a) Si a un período *T* le corresponde una diferencia de fase 2π:
a Δt le corresponde una diferencia de fase $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \frac{2\pi 5\times 10^{-4}}{10^{-3}} = \pi\text{ rad}$$

b) Si a una longitud de onda λ le corresponde una diferencia de fase 2π:
a Δx le corresponde una diferencia de fase $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi 2{,}75\times 10^{-2}}{33\times 10^{-2}} = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

c) $\Delta x = \dfrac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi} = \dfrac{0{,}33\times\pi/6}{2\pi} = 0{,}11\text{ m}$

Ejemplo 9. Sometemos al extremo de una cuerda tensa a vibraciones sinusoidales de 10Hz. La mínima distancia entre dos puntos cuyas vibraciones tienen una diferencia de fase $\pi/5$ es de 20 cm, calcular:
a) La longitud de onda.
b) La velocidad de propagación.

Solución.

a) Si la diferencia de fase para dos puntos separados 20 cm es $\pi/5$, a diferencia de fase para una longitud de onda λ es 2π.

Luego $\lambda = \dfrac{2\pi}{\pi/5}20 = 200\text{ cm} = 2$ m

b) La velocidad de propagación
$v = \lambda f = 2\text{m x } 10\text{s}^{-1} = 20$ m/s

Ejemplo 10. Una onda tiene por ecuación: $y(x,t) = 5\text{sen}\pi(4x - 20t + 0{,}25)$, expresada en el sistema CGS. Determinar la amplitud, la frecuencia, la longitud de onda, el número de onda, la frecuencia angular, la fase inicial y la velocidad de propagación.

Solución

La ecuación general de la onda es:

$$y(x,t) = y_o\text{sen}(kx - \omega t + \varphi)$$

$$= y_o\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

que comparada con la dada:

$$y(x,t) = 5\text{sen}2\pi\left(2x - 10t + \frac{1}{8}\right)$$

resulta: $y_0 = 5\text{ cm}$, $T = \dfrac{1}{f}\text{ s}$

$\Rightarrow f = \dfrac{1}{T} = 10\text{ Hz}$, $\lambda = \dfrac{1}{2}\text{ cm}$,

$k = 4\text{ cm}^{-1}$, $\omega = 20\pi r\text{ rad/s}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}\text{ rad}$,

$v = \lambda f = \dfrac{1}{2}\times 10 = 5\text{ cm/s}$

Ejemplo 11. Sometemos al extremo de una cuerda a un vibrador que le produce una onda sinusoidal. Si la ecuación de la vibración escrita en el sistema $y = 5\text{sen}0,2\pi t$, propagándose en la cuerda con una velocidad de 10 cm/s. Determine la ecuación de la onda producida.

Solución.

La ecuación de la onda que se propaga el sentido negativo del eje OX es:

$$y(x,t) = y_0\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} + \varphi\right)$$

$$\Rightarrow\ y(x,t) = y_0\text{sen}2\pi\left(\frac{t}{T} + \varphi\right)$$

Comparando con la dada: $y(0,t) = 5\text{sen}0,2\pi t$

$$y_0 = 5\,\text{cm},\ \frac{2\pi}{T} = 0,2\pi \rightarrow T = 10\,\text{s},\ \varphi = 0$$

Además como

$$\lambda = vT\ \rightarrow\ \lambda = 10\times 10 = 100\,\text{cm}$$

De aquí

$$y(x,t) = 5\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{100} + \frac{t}{10}\right)$$

Ejemplo 12. Las ecuaciones de dos ondas escritas en el sistema CGS vienen dadas por:

$y_1(x,t) = 4\text{sen}2\pi(4t - 0,5x)$ e

$y_2(x,t) = 6\text{sen}(4\pi x - 5\pi t)$

Calcular en cada caso:

a) Velocidad en función del tiempo, de un punto situado a 10 cm del foco.
b) Velocidad máxima de ese punto.
c) Velocidad de fase.
d) ¿En qué instante alcanza su velocidad máxima un punto situado a 1,5 m del foco?
e) Posición de los puntos que tienen velocidad máxima en $t = 0$.

Solución.

$y_1(x,t) = 4\text{sen}(8\pi t - \pi x)$,

$y_2(x,t) = 6\text{sen}(4\pi x - 5\pi t)$

a) $v_{y1}(x,t) = \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = 32\pi\cos(8\pi t - \pi x)$

$$v_{y2}(x,t) = \frac{\partial y_2}{\partial t} = -30\pi\cos(4\pi x - 5\pi t)$$

Cuando $x = 10$ cm, entonces:

$$v_{y1}(10,t) = 32\pi\cos(8\pi t - 10\pi) = 32\pi\cos 8\pi t$$

$$v_{y2}(10,t) = -30\pi\cos(40\pi - 5\pi t) = -30\pi\cos 5\pi t$$

b) En valor absoluto: $v_{y1\max} = 32\pi\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$

$$v_{y2\max} = 30\pi\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

c) $v_1 = \dfrac{\omega_1}{k_1} = \dfrac{8\pi}{\pi} = 8\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$,

$$v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{5\pi}{4\pi} = \frac{5}{4}\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

d) Para $x = 150$ cm, obtenemos:

$$v_{y1}(150,t) = 32\pi\cos(8\pi t - 150\pi) = 32\pi\cos 8\pi t$$

si v_{y1} es máxima, entonces:

$$\cos 8\pi t = \pm 1\ \Rightarrow\ 8\pi t = n\pi\ \Rightarrow\ t = \frac{n}{8}s$$

En v_{y2} será:

$$v_{y2}(150,t) = -30\pi\cos(600\pi - 5\pi t) = -30\pi\cos 5\pi t$$

En el máximo:

$$\cos 5\pi t = \pm 1\ \Rightarrow\ 5\pi t = n\pi\ \Rightarrow\ t = \frac{n}{5}\text{s}$$

e) Para $t = 0$, entonces: $v_{y1}(x,0) = 32\pi\cos\pi x$

y para que sea máxima:

$$\cos\pi x = \pm 1 \Rightarrow\ \pi x = n\pi\ \Rightarrow\ x = n$$

Para v_{y2}, será: $v_{y2}(y,0) = -30\pi\cos 4\pi x$

y para que sea máxima:

$$\cos 4\pi x = \pm 1 \Rightarrow\ 4\pi x = n\pi\ \Rightarrow\ x = \frac{n}{4}$$

Ejemplo 13. Sometemos al extremo de una cuerda tensa a un vibrador que le produce vibraciones sinusoidales. Por este efecto se propaga por la cuerda una onda transversal que tiene por ecuación: $y(x,t) = 10\,\text{sen}\pi(1,6x - 0,8t)$, expresada en el sistema CGS.

a) ¿Qué condiciones iniciales nos determinan esta ecuación de onda?
b) Determínese para esta onda su amplitud, velocidad de propagación y longitud de onda.
c) Tiempo que tarda en comenzar a vibrar una partícula de la cuerda situada a 10 cm del extremo en que se encuentra el vibrador y ecuaciones horarias del movimiento de el1a [$y(t)$, $v(t)$, $a(t)$] una vez transcurrido éste.
d) Dibujar la forma que tiene la cuerda [$y(t)$] cuando han transcurrido 5,625 s del comienzo de la vibración (perfil de la onda).

Solución.

a) Si hacemos $x = 0$ y $t = 0$, tendremos:

$$y(0,0) = 10\,\text{sen}0 = 0$$

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -8\pi\cos\pi(1,6x - 0,8t)$$

$$\Rightarrow\ v(0,0) = -8\pi < 0$$

La ecuación dada nos determina que en el extremo de la cuerda en que se encuentra al vibrador $x = 0$ y para

$t = 0$ es cuando comienza a actuar el vibrador con movimiento vibratorio armónico dirigido hacia abajo (en el sentido negativo del eje *y*. La onda se propaga en la dirección positiva del eje *x*.

b) Como la ecuación general de una onda sin fase inicial $(y = 0)$ es:

$$y(x,t) = y_0 \operatorname{sen} 2\pi(kx - \omega t) = y_0 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

Comparándola con la dada:

$$y(x,t) = 10 \operatorname{sen} \pi(1,6x - 0,8t) = 10 \operatorname{sen} 2\pi(0,8x - 0,4t)$$

De aquí

$$y_0 = 10 \text{ cm},\ \lambda = \frac{1}{0,8} = 1,25\text{cm},$$

$$T = \frac{1}{0,4} = 2,5s,\ f = \frac{1}{T} = 0,4\text{Hz},$$

$$v = \lambda f = 1,25 \times 0,4 = 0,5\text{cm/s}$$

c) La partícula comenzará a vibrar transcurrido un tiempo *t,* tal que:

$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v} = \frac{10}{0,5}$ =20 s

Pasado éste, la partícula comienza a vibrar con movimiento armónico de ecuación:

x = 10cm $\Rightarrow$ $y(t) = 10 \operatorname{sen} 2\pi(8 - 0,4t)$

Luego:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -8\pi \cos 2\pi(8 - 0,4t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -6,4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi(8 - 0,4t)$$

Obsérvese que el origen de las elongaciones para este movimiento vibratorio armónico se encuentra a 20 s del comienzo de la actuación del vibrador. El signo menos de la velocidad nos indica que comienza a moverse hacia abajo (sentido negativo del eje *y),* y, por tanto, la partícula se encuentra en fase con el vibrador. (El tiempo 20 s = 8 *T* nos indica que han transcurrido 8 períodos y, por tanto, la partícula se encuentra a 8λ = 10 cm de distancia del origen, y la forma de la cuerda hasta esa partícula será 8 "bucles" hacia abajo del eje *y* y otros tantos hacia arriba).

d) t = 5,625 s $\Rightarrow$ $y(x) = 1 \operatorname{sen} 2\pi(0,8x - 2,25)$

Intersección con eje *y*: $x = 0$ $\Rightarrow$

$$y(0) = -10 \operatorname{sen} 4,5\pi = -10\text{cm}$$

lo que nos indica que el vibrador se encuentra en su máxima elongación (amplitud) y por debajo del origen.

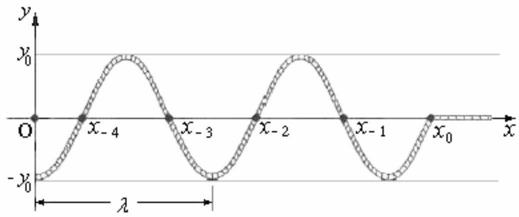
Intersección con eje *x:*

El trozo de cuerda que se ha puesto en movimiento en ese tiempo será:

x = *vt = 0,5* x 5,625 = 2,8125 cm, correspondiente a

$$2,8125\frac{\lambda}{1,25} = 2,25\lambda = 2\lambda + \frac{\lambda}{4}$$

lo que quiere decir es que a partir de esta distancia la cuerda se encuentra en reposo, con lo que la gráfica (forma de la cuerda en ese instante) será la de



La ecuación es

$$y(x) = 0 \Rightarrow 2\pi(0,8x - 2,25) = n\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{n + 4,5}{1,6}$$

Hay cinco valores de x para $y(x) = 0$.

x_0 corresponde a $n = 0$ $\Rightarrow$

$$x_0 = \frac{0 + 4,5}{1,6} = 2,8125\text{cm}$$

x_{-1} corresponde a $n = -1$ $\Rightarrow$

$$x_{-1} = \frac{-1 + 4,5}{1,6} = 2,1875\text{cm}$$

x_{-2} corresponde a $n = -2$ $\Rightarrow$

$$x_{-2} = \frac{-2 + 4,5}{1,6} = 1,5625\text{cm}$$

x_{-3} corresponde a $n = -3$ $\Rightarrow$

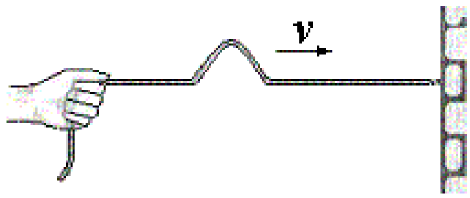
$$x_{-3} = \frac{-3 + 4,5}{1,6} = 0,9375\text{cm}$$

x_{-4} corresponde a $n = -4$ $\Rightarrow$

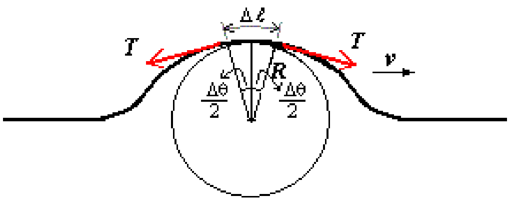
$$x_{-4} = \frac{-4 + 4,5}{1,6} = 0,3125\text{cm}$$

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN EN FUNCIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MEDIO.

Forma simple de calcular la velocidad de la onda en una cuerda en función de las propiedades del medio. Supongamos que tenemos una cuerda de masa por unidad de longitud μ, que esta estirada por una fuerza de tensión *T*. Un pulso se propaga en la cuerda.



Tomamos un pequeño elemento $\Delta\ell$ de la cuerda se muestra en la figura.



Este elemento, de longitud, en la parte más elevada de la onda, está sujeto a la tensión de la cuerda en los dos sentidos de propagación de la onda. Podemos dibujar una circunferencia de radio *R*, en que *R* es la amplitud de la onda. Este elemento de la cuerda, considerado bien pequeño, está en el lado de un triángulo cuyo ángulo opuesto está dado por $\Delta\theta$. Instantáneamente, es como si este elemento de cuerda estuviese en movimiento en una trayectoria circular de radio R, con velocidad *v*; la velocidad de la onda.
Aplicando la segunda ley de Newton al segmento de cuerda $\Delta\ell$

$$\sum F_x = ma_y \Rightarrow T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow -2T\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = -\Delta m a_c$$

$a_c = \frac{v^2}{R}$. Como $\frac{\Delta\theta}{2}$ es pequeño, podemos considerar $\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$

Reemplazando:

$$2T\frac{\Delta\theta}{2} = \mu R\Delta\theta\frac{v^2}{R} \Rightarrow T = \mu v^2 \text{ y } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Obtenemos la velocidad de la onda en la cuerda en función de las propiedades de la cuerda: su tensión y su densidad lineal.

Ejemplo 14. La cuerda Si de un mandolina tiene 0,34 m de largo y tiene una densidad linear de 0,004 kg/m. El tornillo de ajuste manual unido a la cuerda se ajusta para proporcionar una tensión de 71,1 N. ¿Cuál entonces es la frecuencia fundamental de la cuerda?
Solución.

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2(0,34m)}\sqrt{\frac{71,1N}{0,004\,kg/m}}$$
= 196 Hz

Un instrumento de cuerda tal como una guitarra es templada ajustando la tensión en una cuerda por medio de un tornillo de ajuste manual. La longitud de la cuerda es fija, así que el ajuste de la tensión da la frecuencia fundamental. Otras frecuencias fundamentales pueden ser alcanzadas acortando la longitud de la cuerda presionando en un traste. Finalmente, varias cuerdas de diversas densidades se utilizan para dar una gama de las velocidades de la onda, de tal modo proporcionando el acceso a una mayor gama de frecuencias fundamentales.

Ejemplo 15. Una onda $y = A\text{sen}(k_1x - \omega_1 t)$ viaja por una cuerda de densidad de masa lineal μ. y tensión *T*. Diga, para cada una de las ondas que se dan a continuación, si pueden viajar por la misma cuerda simultáneamente con la onda dada. ¿Por qué? ¿Bajo qué condición?

$y_1 = A\text{sen}(k_1x + \omega_2 t)$
$y_2 = A\text{sen}(k_2x + \omega_1 t)$
$y_3 = A\text{sen}(k_2x + \omega_2 t)$
$y_4 = A\text{sen}(k_1x + \omega_1 t)$

Siendo $\omega_1 \neq \omega_2$ y $k_1 \neq k_2$

Solución.
La velocidad de propagación es única;

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\omega_1}{k_1}$, por lo tanto, la relación $\frac{\omega_1}{k_1}$ esta determinada o fija.

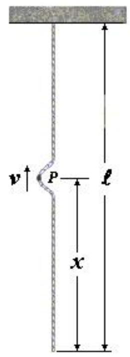
y_1. **No puede viajar**, se requiere: $\frac{\omega_2}{k_1} = \frac{\omega_1}{k_1}$, lo que nos lleva a una falsedad, contra lo supuesto, $\omega_2 = \omega_1$

y_2. **No puede viajar**, por que similar al caso anterior: $\frac{\omega_1}{k_2} = \frac{\omega_1}{k_1}$ también nos lleva a una falsedad contra lo supuesto, $k_2 = k_1$

y_3. **Si puede viajar**, bajo la condición: $\frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega_1}{k_1}$

y_4. **Si puede viajar**, por que tienen igual ω_1 y k_1 es la misma onda que viaja en sentido contrario.

Ejemplo 16. Una cuerda de masa *M* y longitud ℓ cuelga del techo de una habitación.
a) Probar que la velocidad de pulso transversal en función de la posición cuando se propaga a lo largo de ella es $v = \sqrt{gx}$, siendo *x* la distancia al extremo libre.
b) Probar que un pulso transversal recorrerá la cuerda en un tiempo $2\sqrt{\ell/g}$.



Solución.

a) La velocidad del punto *P* es $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, la tensión *T* en ese punto es debido a la cuerda que cuelga de longitud x, cuya masa es μx y su peso $T = \mu g x$.

Luego $v = \sqrt{\frac{\mu g x}{\mu}} = \sqrt{gx}$

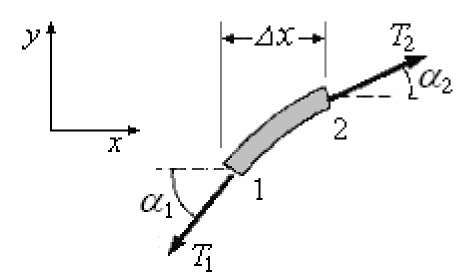
b) para encontrar el tiempo de recorrido del pulso

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{gx} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{gx}}$$

$$\Rightarrow t = \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{gx}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

ECUACION DE LA ONDA.

Ondas transversales en una cuerda. En esta parte trataremos la ecuación de la onda y su solución, considerando el caso particular de la onda transversal en una cuerda, resultado que es general también para los demás casos.



La cuerda tiene una masa uniforme μ por unidad de longitud y está sometida a una tensión *T*. Sobre esta cuerda esta viajando una onda transversal.
Consideremos un elemento de longitud (de 1 a 2) como se muestra en la figura, sobre este elemento actúan dos fuerzas externas a él, que la jalan en cada extremo debido al resto de la cuerda. Estas fuerzas son de igual magnitud que la tensón de la cuerda.
La fuerza horizontal sobre este elemento es:

$$\sum F_x = T_1 \cos\alpha_2 - T_2 \cos\alpha_1 = 0$$

si la curvatura de la cuerda no es muy grande

$$\cos\alpha_1 \cong \cos\ \alpha_2$$

de aquí concluimos que $T_1 \approx T_2 \approx T$

La fuerza vertical sobre el elemento es:

$$\sum F_y = T \operatorname{sen}\alpha_2 - T \operatorname{sen}\alpha_1$$

Si los desplazamientos transversales de la cuerda no son muy abruptos, podemos considerar que, Sen $\alpha \cong \tan\alpha$

Luego,

$$\sum F_y = T(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1)$$

Que será la fuerza total neta que actúa sobre el elemento Δx considerado.
Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\sum F_y = \Delta m a_y = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ denota la aceleración vertical del elemento de cuerda.

Como $\tan\alpha_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1$, $\tan\alpha_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2$

y, $\Delta m = \mu \Delta \ell = \mu \frac{\Delta x}{\cos\theta} \approx \mu \Delta x$

se tendrá

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right]$$

ó

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right]}{\Delta x}$$

Llevando al límite cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Ecuación diferencial del movimiento.
Como la velocidad de propagación de una onda en una cuerda tensa es $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, por lo que la ecuación diferencial de la onda la escribimos como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Cuya solución es la ecuación de la onda

$$y = A\operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

comprobación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Reemplazando

$$-A\omega^2 \operatorname{sen}(kx - \omega t) = -v^2 A k^2 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

Expresión válida para toda onda, ya que ω / k corresponde a la velocidad de propagación de la onda.

De manera similar podemos encontrar la velocidad de propagación de la onda para:
a) Ondas longitudinales en una barra de metal de densidad ρ módulo de elasticidad *Y*.

$$v_L = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

b) Ondas transversales en una barra de metal de densidad ρ módulo de elasticidad cortante o de cizalladura *G*.

$$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

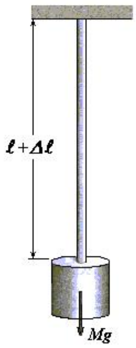
c) Ondas longitudinales en un gas de densidad ρ módulo de compresibilidad volumétrica *B*.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Ejemplo 17. Para el cobre el modulo de elasticidad volumétrica es 14 x 10^{10} N/m^2 y la densidad es 8920 kg/m^3. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el cobre?
Solución.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{14\times 10^{10}}{8920}} = 3960 \text{ m/s}$$

Ejemplo 18. A un alambre de acero (Módulo de Young: Y = 2,0 x 10^{11} N/m^2, densidad del acero: ρ = 7,8 g/cm^3) que tiene un diámetro de 1 mm y 4 m de longitud, lo colgamos del techo, calcular:
a) El alargamiento del alambre cuando de su extremo libre colgamos un peso de 150 kg.
b) La velocidad de propagación de las ondas longitudinales y transversales a lo largo del alambre cuando el cuerpo está suspendido.



Solución.

a) $\dfrac{\Delta\ell}{\ell} = \dfrac{F}{YA} \quad \Rightarrow$

$$\Delta\ell = \frac{Mg\ell}{Y\pi R^2} = \frac{150\times 9{,}8\times 4}{2\times 10^{12}\pi 25\times 10^{-8}}$$

= 37,4 x 10^{-3} m

b) La velocidad de propagación de las ondas longitudinales lo largo del alambre

$$v_{longitudinal} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\times 10^{11}}{7{,}8\times 10^{3}}} = 5{,}06\times 10^{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo del alambre

$$v_{transversal} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\rho\pi R^2}} \Rightarrow$$

$$v_{transversal} = \sqrt{\frac{150\times 9{,}8}{7{,}8\times 10^{3}\times \pi 25\times 10^{-8}}}$$

$$= 490\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 19. Se tiene un alambre de acero de 1,3 mm de diámetro, sabiendo que 5 m de este alambre se alarga 0,5 mm con una carga de 2,1 kg. (densidad del acero, 7,8 g/cm^3)
a) Calcule el módulo de Young en el acero.
b) Calcule la velocidad de propagación de una onda
Solución.
Donde ρ, la densidad es un valor conocido igual a 7,8 g/cm^3.
a) El módulo de Young *Y* puede calcularse de

$$Y = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell} = \frac{F\ell}{A\Delta\ell} =$$

$$\frac{(2{,}1\times 9{,}8)(5)}{\left[\pi\left(1{,}3\times 10^{-3}\right)^2/4\right]\left(0{,}5\times 10^{-3}\right)} = 15{,}5 \text{ x } 10^{10} \text{ N/m}^2$$

b) La velocidad de propagación del sonido en el acero viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{15{,}5\times 10^{10}}{7{,}8\times 10^{3}}} = 4458 \text{ m/s}$$

Ejemplo 20. Una cuerda de piano de longitud 40 cm, sección 0,4 mm^2 y densidad 7,8 g/cm^3, emite un sonido fundamental cuando se aproxima un diapasón de frecuencia 218 Hz.
a) Determine la tensión a que está sometida.
b) Si la tensión se multiplica por 4, ¿cómo se modifica la frecuencia de su sonido fundamental?
Solución.

a) En este caso $\dfrac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = 2L$ =0,8 m

La velocidad de las ondas es: $v = \lambda f$ = 0,8 x 218 = 174,4 m/s

La velocidad de las ondas transversales en la cuerda tensa está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu v^2$$

La densidad lineal es: $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{mA}{LA} = \rho A$ = (7,8 x 10^3)(0,4 x 10^{-6}) = 3,12 x 10^{-3} kg/m

Finalmente $T = \mu v^2$ = (3,12 x 10^{-3})(174,4)^2 = 94,9 N

b) En este caso la velocidad de las ondas transversales es:

$$v' = \sqrt{\frac{4T}{\mu}} = 2\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2v.$$

La longitud de onda no cambia y la nueva frecuencia será:

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{2v}{\lambda} = 2f = 2 \times 218 = 436 \text{ Hz.}$$

Ejemplo 21. A un resorte cuya masa es 200 g y cuya longitud natural cuando está colgado de un punto fijo es 4 m, se le pone una masa de 100 g unida a su extremo libre.
Cuando esta masa se encuentra en equilibrio, la longitud del resorte es 4,05 m. Determinar la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el resorte.
Solución.

Ondas longitudinales en un resorte.

$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, para un resorte $Y = \frac{k\ell_o}{A}$, $\rho = \frac{\mu}{A}$

luego para el resorte $v = \sqrt{\frac{k\ell_o}{\mu}}$

$\ell_0 = 4m$, $\Delta\ell = \ell - \ell_o = 4{,}05 - 4 = 0{,}05$ m

$$F = k\Delta\ell \Rightarrow k = \frac{Mg}{\Delta\ell} = \frac{0{,}1 \times 9{,}8}{0{,}05} = 19{,}6\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

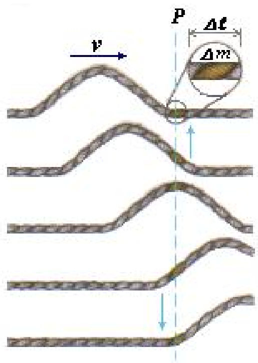
$$\mu = \frac{m}{\ell_o} = \frac{0{,}2}{4} = 5 \times 10^{-2}\frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

finalmente

$$v = \sqrt{\frac{k\ell_o}{\mu}} = \sqrt{\frac{19{,}6 \times 4}{5 \times 10^{-2}}} = 39{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ENERGÍA E INFORMACIÓN TRANSFERIDA MEDIANTE ONDAS

Tenemos la experiencia de energía transferida por ondas en muchas situaciones. Sentimos la fuerza de una ola en el océano, nuestra piel siente el calor de las ondas luminosas del sol, escuchamos las ondas de sonido. Además, la mayor parte de la información que recibimos nos llega mediante ondas. El habla y la música se transmiten por ondas de sonido, la radio y la televisión por ondas electromagnéticas. La luz reflejada por la cual usted lee esta página es una onda. ¿Cómo depende la energía (y en consecuencia la información) transmitida por las ondas de las propiedades de las ondas? Para responder esta pregunta antes debemos considerar cómo es transferida la energía por un solo pulso. Luego, ampliaremos los resultados con el fin de tener una expresión para la energía de una onda armónica.



A un elemento de masa Δm en el punto P se le da una energía cinética a medida que un pulso de onda pasa con una velocidad v.

Para el tiempo $t = 0$, un pequeño segmento de la cuerda alrededor del punto P de la figura anterior, con masa Δm y longitud $\Delta\ell$, está en reposo y no tiene energía cinética. El movimiento hacia arriba y hacia abajo proporciona la energía requerida para iniciar el pulso a lo largo de la cuerda. A medida que el borde que encabeza el pulso alcanza P, el segmento $\Delta\ell$ comienza a moverse hacia arriba. A medida que la cresta de la onda pasa el segmento $\Delta\ell$, el segmento se mueve a su posición más alta y empieza de nuevo a bajar, teniendo energía cinética mientras está en movimiento. Cuando el pulso entero ha pasado P, el segmento $\Delta\ell$ regresa al reposo y de nuevo no tiene energía cinética. El progreso del pulso a lo largo de la cuerda corresponde al flujo de energía a lo largo de la cuerda. Otro tipo de pulso, incluyendo un pulso que viaja a través del aire, transferiría energía a lo largo de la dirección de la propagación de modo similar.

¿Cuánta energía se ha transferido al pasar P durante un tiempo t? Para una onda armónica que viaja en una cuerda, cada punto se mueve con movimiento armónico simple en la dirección transversal (y).
Como vimos anteriormente, en ausencia de amortiguamiento, la energía total de un oscilador armónico es igual a su energía potencial en el desplazamiento máximo A, es decir, $\frac{1}{2}kA^2$.
También vimos que la relación entre masa, constante k del oscilador (no es el número de onda k) y frecuencia es $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Si tratamos el segmento de la cuerda como un oscilador armónico con masa Δm que se mueve a la frecuencia f, podemos acomodar la ecuación para obtener una constante de salto efectiva $k = (2\pi f)^2 \Delta m$. La energía asociada con el movimiento de este segmento de la cuerda es entonces

$$\Delta E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(2\pi f)^2 \Delta m A^2$$

$$\Delta E = 2\pi^2 \Delta m f^2 A^2$$

Ahora tenemos un resultado importante: la energía de una onda depende del cuadrado de la amplitud de la onda. Así, una onda con el doble de amplitud de otra onda equivalente (con la misma frecuencia, el mismo medio) tendrá energía cuatro veces mayor.

Para encontrar la rapidez del flujo de energía, o potencia, observamos que Δm se puede escribir corno $\rho S \Delta \ell$, donde ρ es la densidad, *S* el área de la sección transversal y $\Delta \ell$ la longitud del segmento de la cuerda. En un tiempo Δt, la onda con rapidez v recorre una longitud $\Delta \ell = v \Delta t$, de manera que podemos sustituir $\Delta m = \rho S v \Delta t$ dentro de la ecuación para ΔE. Obtenemos una expresión para la energía transportada en el tiempo Δt.

$$\Delta E = 2\pi^2 S \rho v f^2 A^2 \Delta t$$

La rapidez a la cual se propaga la energía a lo largo de la cuerda es la potencia *P*.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = 2\pi^2 S \rho v f^2 A^2$$

El parámetro más útil generalmente es la intensidad I, que se define como la potencia que fluye a través de un área unidad. Para este caso, la intensidad en watts por metro cuadrado (W/m^2) es:

$$I = \frac{P}{S} = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2$$

Aunque este resultado lo hemos derivado para el caso especifico de ondas en una cuerda, dan la dependencia correcta de la densidad del medio, la velocidad de la onda, la frecuencia y la amplitud apropiada para cualquier onda armónica viajera.

El oído humano puede acomodarse a un intervalo de intensidades sonoras bastante grande, desde 10^{-12} W/m^2 aproximadamente (que normalmente se toma como umbral de audición), hasta 1 w/m^2 aproximadamente que produce sensación dolorosa en la mayoría de las personas. Debido a este gran intervalo y a que la sensación fisiológica de fuerza sonora no varía directamente con la intensidad, se utiliza una escala logarítmica para describir el nivel de intensidad de una onda sonora.

Nivel de Intensidad.

El nivel de intensidad, β, se mide en decibelios (dB) y se define:

$\beta = \log \dfrac{I}{I_0}$, donde I es la intensidad del sonido, e I_0 es un nivel de referencia cuyo valor es de 10^{-12} W/m^2 que escogemos como la unidad de audición.

En esta escala, el intervalo de intensidad sonora para el oído humano es de 0 dB a 120 dB, que corresponden a intensidades a partir de 10^{-12} W/m^2 hasta cerca de 1 W/m^2. La sensación de sonido más o menos fuerte depende de la frecuencia además de la intensidad del mismo.

Ejemplo 22. Una cuerda de densidad lineal 480 g/m está bajo una tensión de 48 N. Una onda de frecuencia 200 Hz y amplitud 4,0 mm recorre la cuerda. ¿A qué razón la onda transporta energía?

Solución.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(200) = 400\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{48N}{0{,}48\, kg/m^3}} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$P = \frac{1}{2}\mu v \mu^2 A^2$$

$$= (0{,}5)(0{,}48)(10)(400\pi)^2(0{,}004)^2 = 61 \text{ W}$$

Ejemplo 23. La conversación normal se desarrolla a cerca de 60 dB. ¿A qué nivel de intensidad corresponde?

Solución.

$$60 = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}, \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^6$$

$$\Rightarrow I = 10^6 I_0 = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Ejemplo 24. Una fuente emite el sonido uniformemente en todas las direcciones en un nivel de la energía de 60 W. ¿Cuál es la intensidad una distancia de 4 m de la fuente?

Solución.

La potencia se distribuye sobre la superficie de una esfera de área $A = 4\pi r^2$.

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{60}{4\pi r(4)^2} = 0{,}30 \text{W/m}^2$$

Ejemplo 25. A una distancia de 5 m de una fuente el nivel de sonido es 90 dB. ¿A qué distancia el nivel ha bajado a 50 dB?

Solución.

$I_1 = \dfrac{P}{4\pi r_1^2}$ y $I_2 = \dfrac{P}{4\pi r_2^2}$ de aquí $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$

$$\beta_1 = 10\log_{10}\frac{I_1}{I_0} = 90dB, \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^9$$

Similarmente,

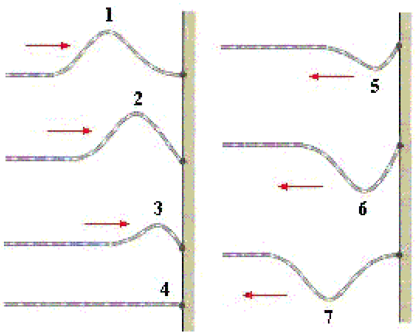
$$\beta_2 = 10\log_{10}\frac{I_2}{I_0} = 50dB, \Rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 10^5$$

Luego $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{10^5}{10^9} = 10^{-4} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$

$$\Rightarrow r_2 = 10^2 r_1 = 500 \text{ m}$$

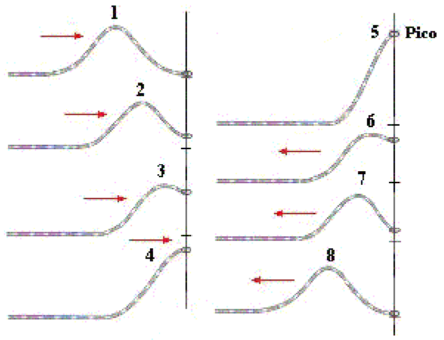
REFLEXION DE ONDAS
Ahora veremos que sucede con una onda al llegar a un extremo que la confina; para este estudio consideraremos una perturbación en una cuerda, primero veremos cuando el extremo esta rígidamente atado a la pared y la cuerda no tienen posibilidad de desplazamiento en ese punto. Luego veremos el caso en que la cuerda tiene posibilidad de desplazamiento vertical en el punto de atadura. Esta propiedad de las ondas que aquí introducimos se aplica a todas las ondas.

Primer Caso.- Extremo fijo
Cuando el pulso de una onda llega al extremo más alejado de una cuerda que esta fija a una pared en ese extremo, la onda no se detiene repentinamente, sino que es reflejada. Si no se disipa energía en el extremo lejano de la cuerda, la onda reflejada tiene una magnitud igual a la de la onda incidente; sin embargo, la dirección de desplazamiento se invertirá (vea figura). Esta inversión sucede porque a medida que el pulso encuentra la pared, la fuerza hacia arriba del pulso en el extremo tira hacia arriba sobre la pared. Como resultado, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la pared tira hacia abajo sobre la cuerda. Esta fuerza de reacción hace que la cuerda estalle hacia abajo, iniciando un pulso reflejado que se aleja con una amplitud invertida (o negativa).



Extremo Fijo

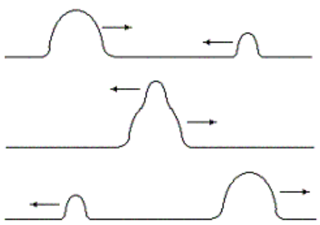
Segundo Caso.- Extremo Libre
Si la cuerda tiene libertad para moverse en su extremo lejano. De nuevo, un pulso de onda que viaja a lo largo de la cuerda se refleja cuando alcanza ese extremo (vea figura). Pero en este caso vemos que la onda reflejada tiene la misma dirección de desplazamiento que la onda incidente. A medida que el pulso alcanza el extremo de la cuerda, ésta se mueve en respuesta al pulso. A medida que el extremo de la cuerda empieza a regresar a su posición, inicia un pulso inverso a lo largo de la cuerda, justamente como si el movimiento final se debiera a alguna fuerza externa. El resultado es un pulso exactamente igual al pulso de onda incidente. Pero viajando en el sentido contrario.



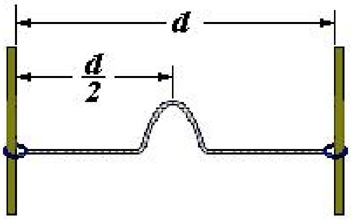
Extremo Libre

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE ONDAS - INTERFERENCIA
Tratamos en este punto el efecto combinado de dos o más ondas que viajan en el mismo medio. En un medio lineal, esto es, en un medio en que la fuerza de recuperación es proporcional al desplazamiento del mismo, se puede aplicar el **principio de superposición** para obtener la perturbación resultante. Este principio es aplicable a muchos tipos de ondas, incluyendo las ondas en cuerdas, ondas sonoras, ondas superficiales en el agua y ondas electromagnéticas. El término **interferencia** se empleó para describir el efecto producido al combinar dos ondas que se desplazan simultáneamente a través de un medio.

Principio de superposición.
El principio de superposición establece que, cuando dos o más ondas se mueven en el mismo medio lineal, la onda resultante en cualquier punto es igual a la suma algebraica de los desplazamientos de todas las ondas componentes.

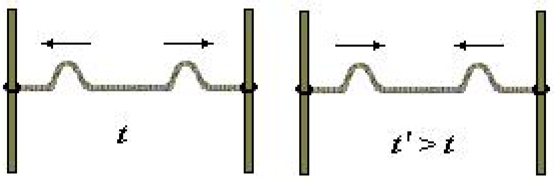


Ejemplo 26. Entre dos barras paralelas se mantiene tensa una cuerda mediante dos anillos, como se indica en la figura. Se perturba la cuerda partiendo de un desplazamiento inicial como el indicado en la figura (muy exagerado en la misma). La longitud de la cuerda es d y la velocidad de propagación de las ondas transversales en dicha cuerda es v.
Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la cuerda alcance un estado igual al representado si:
a) Los anillos pueden moverse libremente a lo largo de las barras.
b) Un anillo está fijo.
c) Están fijos los dos anillos.

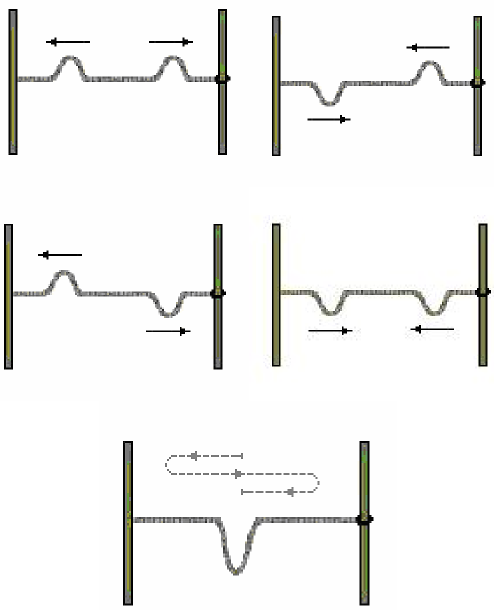


Solución.
a) Si los anillos pueden moverse a lo largo de las barras, cuando los pulsos de la figura llegan a los extremos la reflexión se realiza sin cambio de fase. El máximo central se produce en el instante t_1 tal que:

$$t_1 = 2\frac{d/2}{v} \Rightarrow t_1 = \frac{d}{v}$$



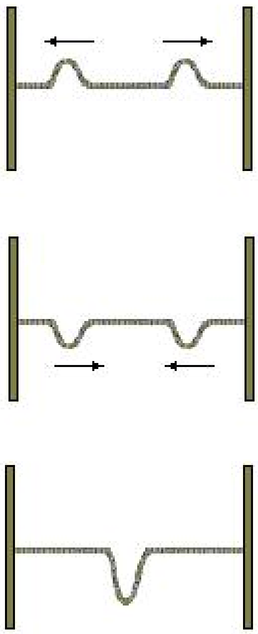
b) En el anillo fijo se produce cambio de fase en la reflexión. La propagación sigue los pasos de la figura.



Se produce un mínimo en el centro en el instante:

$t = \frac{d/2}{v} + \frac{d}{v} + \frac{d/2}{v} = \frac{2d}{v}$ y el tiempo necesario para que se produzca el máximo en el centro es el doble que el anterior, es decir: $t_2 = \frac{4d}{v}$

c) Con los dos extremos fijos hay cambio de fase en ambos. Como se aprecia en la figura el mínimo central se produce en $t = d/v$, y el máximo en un tiempo: $t_3 = \frac{2d}{v}$



ONDAS QUE VIAJAN EN LA MISMA DIRECCION.
Se aplicará el principio de superposición a dos ondas armónicas que viajan en la misma dirección en cierto medio.

Ondas con la misma Amplitud y frecuencia.
Si el sentido de avance es el del semieje positivo de las *x*, y tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, pero difieren en fase se pueden expresar sus funciones de onda individuales como

$y_1 = A\text{sen}(\omega t - kx)$ e

$y_2 = A\text{sen}(\omega t - kx - \varphi)$

La función de onda resultante *y* se obtiene haciendo

$$y_{total} = y_1 + y_2$$
$$= A\text{sen}(\omega t - kx) + A\text{sen}(\omega t - kx - \varphi)$$

Empleando la identidad trigonométrica siguiente:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\cos\frac{(A-B)}{2}\text{sen}\frac{(A+B)}{2}$$

Se obtiene

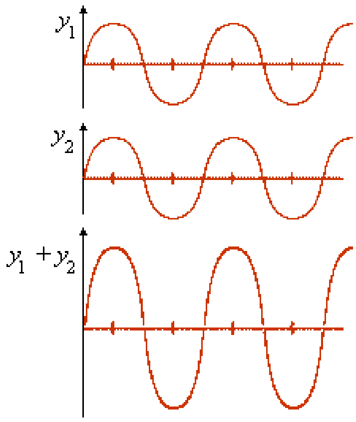
$$y_{total} = \left[2A\cos\frac{\varphi}{2}\right]\text{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Luego, observamos el movimiento resultante es nuevamente ondulatorio, pues es de la forma $f(x - vt)$ o bien $f(kx - \omega t)$.

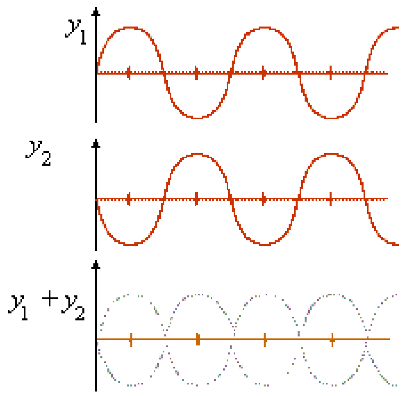
La onda resultante tiene igual frecuencia y longitud de onda que sus componentes, pero con desfase $\frac{\varphi}{2}$ respecto a y_1 y $-\frac{\varphi}{2}$ respecto a y_2

La amplitud de este movimiento ondulatorio es $\left[2A\cos\frac{\varphi}{2}\right]$, vemos que es diferente al de sus componentes y con la característica fundamental que depende de φ.

Si $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi...$, entonces $\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 1$ y la amplitud de la onda resultante es $\pm 2A$. En otras palabras, la onda resultante es el doble de amplia que las ondas individuales. En este caso se dice que las ondas están en fase en todos los puntos, es decir, las crestas y los valles de las ondas individuales ocurren en las mismas posiciones. Este tipo de superposición se denomina **interferencia constructiva**.

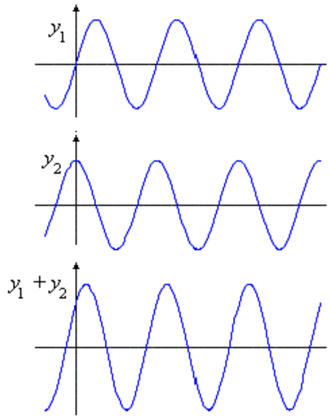


Si $\varphi = \pi$ (o cualquier múltiplo impar de veces) π, entonces $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$, y la onda resultante tiene amplitud cero en cualquier parte. En este caso la cresta de una onda coincide con el valle de la otra y sus desplazamientos se cancelan en cada punto. Este tipo de superposición se denomina **interferencia destructiva**.



La amplitud de la onda resultante es cero

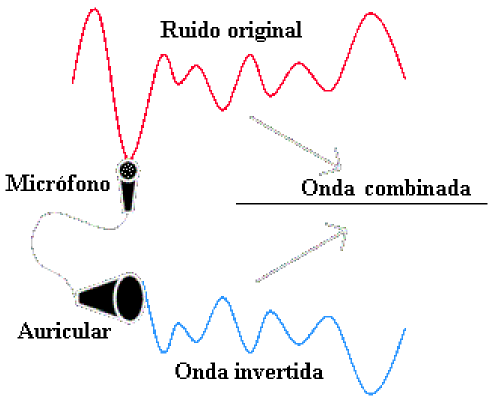
Si $0 < \varphi < \pi$ la onda resultante tiene una amplitud cuyo valor está entre 0 y *2A*. La figura muestra un desfase $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



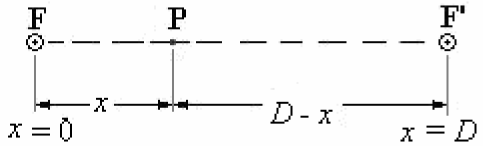
APLICACIONES:
El estetoscopio y la cancelación de ruidos.

El estetoscopio.
Este instrumento fue inventado en 1816 por el médico francés R.T.H. Laennec. A este hombre, por pudor, no le agradaba la idea de aplicar su oreja sobre el pecho de las pacientes, por lo que se acostumbró a utilizar un tubo de papel. Posteriormente perfeccionó la idea aplicando el principio de interferencia constructiva.

Cancelación de ruidos.
La interferencia destructiva puede ser muy útil. Es muy importante que el piloto de un avión oiga lo que sucede a su alrededor, pero el ruido del motor representa un problema. Por eso, los pilotos pueden usar unos auriculares especiales conectados a un micrófono que registra directamente el sonido del motor. Un sistema en los auriculares crea una onda inversa a la que llega a través del micrófono. Esta onda es emitida, de forma que neutraliza la primera. En los automóviles se está experimentando con un sistema similar.



Ejemplo 27. Dos focos puntuales F y F', separados entre si 1 m, emiten en fase sonidos de 500 Hz de frecuencia con la misma intensidad.
a) Obtener la posición de los puntos, si los hay, en los que no se registra sonido.
b) Obtener la posición de los máximos y mínimos de intensidad que se registran a lo largo del segmento FF'. (v = 340 m/s).
$x = D$



Solución.
a) Si consideramos que ambos sonidos se propagan con frentes de ondas esféricos y que por tanto la amplitud disminuye con la distancia, para que se produzca anulación total en un punto, éste deberá equidistar de *F* y *F'*, con lo que los únicos puntos serian los de la mediatriz del segmento *F F';* pero precisamente en esos puntos las dos amplitudes se suman por estar los *focos* en fase. En consecuencia, no hay ningún punto a distancia finita en el que la intensidad resultante sea nula.
b) Desde un punto P del segmento F' a distancia x de *F*, la diferencia de caminos a los focos es:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = x - (D - x) = 2x - D$$

MÁXIMOS:

$$\Delta x = n\lambda \;\Rightarrow\; 2x - D = n\frac{v}{f} \;\Rightarrow x = \frac{D}{2} + \frac{n}{2}\frac{v}{f}$$

$$n = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{340}{500} = 0{,}16\text{m}$$

$$n = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0{,}50\text{m}$$

$$n = +1 \;\Rightarrow\; x_3 = 0{,}84\text{m}$$

Los máximos están en valores de x igual a 0,16; 0,50; 0,84 m
MÍNIMOS:

$$\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{D}{2} + \frac{(2n+1)}{4}\frac{v}{f}$$

$$n = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{340}{500} = 0{,}33\text{m}$$

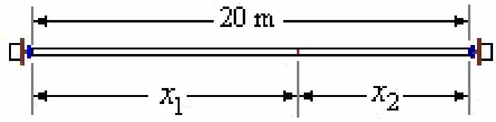
$$n = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0{,}67\text{m}$$

Los mínimos están en valores de *x* igual 0,33 m; 0,67 m.
Los restantes máximos y mínimos se localizan fuera del segmento F F'.

Ejemplo 28. Dos Fuentes separadas 20 m vibran de acuerdo a las ecuaciones

$$y_1 = 0{,}06\,\text{sen}\,\pi t \text{ m} \quad y_2 = 0{,}02\,\text{sen}\,\pi t \text{ m}$$

Ellas envían ondas de velocidad 3 m/s a lo largo de una varilla. ¿Cuál es la ecuación del movimiento de una partícula a 12 m de la primera fuente y a 8 m de la segunda?
Solución.



Referido a la figura. La fuente 1 envía ondas en el sentido +x, tal que

$$y_1 = A_1 \text{sen}(kx_1 - \omega t).$$

La fuente 2 envía ondas en el sentido -*x*, tal que

$$y_2 = A_2 \text{sen}(kx_2 + \omega t)$$

como $\omega = \pi \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, y $v = \dfrac{\omega}{k} = 3\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\Rightarrow\; k = \frac{\omega}{v} = \frac{\pi}{3}\text{m}$$

También A_1 = 0,06 m y A_2 = 0,02 m
La perturbación resultante en el punto x_1 = 12 m, x_2 = -8 m es.

$$y = y_1 + y_2$$

$$= 0{,}06\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x_1 - \pi t\right) + 0{,}02\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x_2 + \pi t\right)$$

$$= 0{,}06\,\text{sen}\left(\frac{12\pi}{3} - \pi t\right) + 0{,}02\,\text{sen}\left(-\frac{8\pi}{3} + \pi t\right)$$

$$= 0{,}06\,\text{sen}\,\pi t + 0{,}02\,\text{sen}\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 0{,}06\,\text{sen}\,\pi t + 0{,}02\left[-\frac{1}{2}\text{sen}\,\pi t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi t\right]$$

$$= 0{,}05\,\text{sen}\,\pi t - 0{,}0173\cos\pi t$$

Ejemplo 29. Dos fuentes F_1 y F_2, que vibran con la misma fase producen en la superficie libre del agua ondas representada por las ecuaciones:

$$y_1 = 8\,\text{sen}(20\pi t - 0{,}2\pi x) \text{ (en cm)}$$

$$y_2 = 4\,\text{sen}(40\pi t - 0{,}4\pi x) \text{ (en cm)}$$

Determine la amplitud de la onda que se produce por interferencia en un punto P que dista 25 cm de F_1 y 15 cm de F_2.
Solución.

Usando la relación

$\mathrm{sen}(A-B)=\mathrm{sen}A\cos B-\cos A\,\mathrm{sen}B$:

$$y_1 = 8(\mathrm{sen}20\pi t\cos 0{,}2\pi x - \cos 20\pi t\,\mathrm{sen}0{,}2\pi x)$$

$$y_2 = 4(\mathrm{sen}40\pi t\cos 0{,}4\pi x - \cos 40\pi t\,\mathrm{sen}0{,}4\pi x)$$

En el punto P (x_1 = 25 cm, x_2= 15 cm):

$$y_1 = 8(\mathrm{sen}20\pi t\cos 5\pi - \cos 20\pi t\,\mathrm{sen}5\pi)$$

$$y_2 = 4(\mathrm{sen}40\pi t\cos 6\pi - \cos 40\pi t\,\mathrm{sen}6\pi)$$

Con $\mathrm{sen}5\pi = \cos\pi = 0$, $\cos 5\pi = \cos\pi = -1$

y $\mathrm{sen}6\pi = \cos 2\pi = 0$, $\cos 6\pi = \cos 2\pi = 1$

Obtenemos:

$$y_1 = 8(-\mathrm{sen}20\pi t) = -8\mathrm{sen}2\pi t$$

$$y_2 = 4(\mathrm{sen}40\pi t) = 4\mathrm{sen}2\pi t$$

La suma:

$$y = y_1 + y_2 = -8\mathrm{sen}2\pi t + 4\mathrm{sen}2\pi t = -4\mathrm{sen}2\pi t$$

La amplitud de la onda que se produce por interferencia en un punto P es 4 cm.

Ondas que difieren tanto en Frecuencia como en Amplitud

Sean las ondas y_1 e y_2 que difieren tanto en frecuencia como en amplitud

$$y_1 = A_1\mathrm{sen}(\omega_1 t \pm k_1 x) = A_1\mathrm{sen}\theta_1 \quad \text{e}$$

$$y_2 = A_2\mathrm{sen}(\omega_2 t \pm k_2 x) = A_2\mathrm{sen}\theta_2$$

Si las ondas componentes difieren tanto en frecuencia como en amplitud, existen varios modos de combinarse, de modo que todos ellos exigen cierta habilidad en el cálculo trigonométrico. Si ponemos $\theta_2 = \theta_1 + \delta$ y desarrollamos

$$\mathrm{sen}(\theta_1+\delta) = \mathrm{sen}\theta_1\cos\delta + \cos\theta_1\mathrm{sen}\delta$$

$$y = y_1 + y_2 = A_1\mathrm{sen}\theta_1 + A_2\mathrm{sen}\theta_2$$

$$= A_1\mathrm{sen}\theta_1 + A_2\mathrm{sen}(\theta_1+\delta)$$

$$= (A_1 + A_2\cos\delta)\mathrm{sen}\theta_1 + A_2\mathrm{sen}\delta\cos\theta_1 \quad (1)$$

Esta expresión puede recombinarse en la forma de una sola onda

$$y = A\mathrm{sen}(\theta_1+\phi)$$

$$= A\cos\phi\,\mathrm{sen}\theta_1 + A\mathrm{sen}\phi\cos\theta_1 \quad (2)$$

Igualando coeficientes de (1) y (2) obtenemos las ecuaciones:

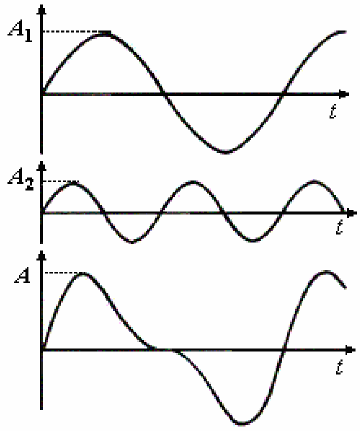
$$A\cos\phi = A_1 + A_2\cos\delta \quad \text{y} \quad A\mathrm{sen}\phi = A_2\mathrm{sen}\delta$$

Elevándolas al cuadrado y sumando obtenemos el valor de A:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$$

Y dividiéndolas obtenemos el valor de ϕ:

$$\tan\phi = \frac{A_2\mathrm{sen}\delta}{A_1 + A_2\cos\delta}$$



Si se desea la onda resultante puede sumarse a una tercera onda y así sucesivamente. En general esta superposición no es simple, puesto que tanto la amplitud como la fase resultante pueden ser funciones del tiempo y de la posición.

Ejemplo 30. Dos ondas armónicas de amplitudes 2 y 4 cm viajan en la misma dirección y tienen idéntica frecuencia; si su diferencia de fase es π/4, calcúlese la amplitud de la onda resultante.

Solución.

A una diferencia de fase $\delta = \dfrac{\pi}{4}$, le corresponde una distancia: $\Delta x = \dfrac{\delta}{k} = \dfrac{\lambda\delta}{2\pi} = \dfrac{\pi}{8}$

y como la amplitud de la onda resultante verifica:

$$A_o^2 = A_{o1}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{o1}A_{o2}\cos\delta$$

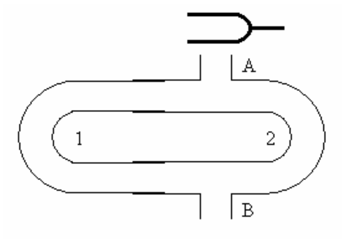
Sustituyendo:

$$A_o = \sqrt{A_{o1}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{o1}A_{o2}\cos\delta}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 16\cos\frac{\pi}{4}} = 5{,}6\ \text{cm}$$

Ejemplo 31. El aparato de Quincke consta de dos tubos en U, pudiéndose deslizar las ramas de uno de ellos dentro de las ramas del otro. En las proximidades de la ramificación

A se produce un sonido que se escucha poniendo el oído en B. Deslizando el tubo 1 dentro del 2, se encuentran posiciones en las que no se percibe sonido; ¿por qué? Si el desplazamiento lateral que hay que dar al tubo 1, desde que no se percibe sonido hasta que, de nuevo, se deja de percibir, es de 25 cm, ¿cuáles son la longitud de onda, la frecuencia y el período de las ondas sonoras? Velocidad de propagación del sonido en el aire, 340 m/s.

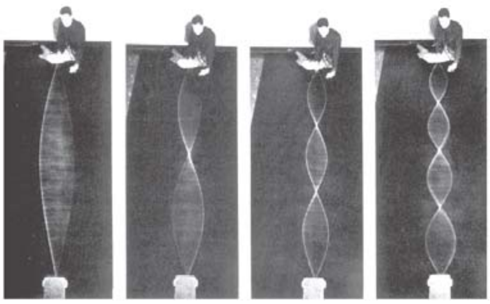


Solución.
No se percibirá sonido cuando la diferencia de recorridos A 1 B y A 2 B sea un número impar de semi longitudes de onda. Si en tales condiciones se desplaza el tubo 1 hasta dejar de nuevo de per*cibir* sonido, el exceso de recorrido que hace el sonido, con respecto a la posición anterior, es una longitud de onda.
En la segunda posición el sonido ha recorrido en la rama A 1 B, 50 cm más que en la A 2 B (25 en la parte superior y de 1 y 25 en la inferior). Por tanto:
λ =50 cm

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0,5} = 680\ \text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{680}\ \text{s}$$

ONDAS IGUALES VIAJANDO EN SENTIDOS OPUESTOS. ONDAS ESTACIONARIAS
Un tipo de superposición de ondas especialmente interesante es el que tiene lugar entre dos ondas de idénticas características pero propagándose en sentido contrario. Las ondas resultantes reciben el nombre de **ondas estacionarias**, pues no implican un movimiento de avance de la perturbación



Este tipo de ondas están asociadas a reflexiones en los límites de separación de medios de propiedades diferentes. Dichos límites pueden ser básicamente de dos tipos, libres y fijos. El nudo de unión de dos cuerdas de diferente grosor sería un ejemplo de límite libre; por el contrario, el extremo de la cuerda unido a un punto fijo en una pared sería un límite fijo.
Vimos anteriormente que en un **límite libre** la onda reflejada tiene las mismas características que la onda incidente, tan sólo difieren en el sentido de avance de la perturbación. Por el contrario, en un **límite fijo** la onda reflejada posee las mismas características que la incidente, pero está desfasada π radianes respecto a la onda incidente

Consideremos en primer lugar las ondas estacionarias (que se propagan en el eje x) por reflexión en un límite libre. La función de onda resultante será:

$y_1 = A\text{sen}(kx - \omega t)$ e $y_2 = A\text{sen}(kx + \omega t)$, la suma de estas ondas nos da:

$$y_{total} = y_1 + y_2$$

$= A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(kx + \omega t)$, haciendo uso de la suma trigonométrica

$$y_{total} = 2A\text{sen}kx\cos\omega t$$

El movimiento resultante no es ondulatorio, pues no se propaga al no ser de la forma $f(x - vt)$.
Una partícula en cualquier punto dado x ejecuta movimiento armónico simple conforme transcurre el tiempo. Nótese que todas las partículas vibran con la misma frecuencia, pero con la particularidad que la amplitud no es la misma para cada partícula del medio, con la posición (en un movimiento ondulatorio al amplitud es igual para cualquier punto).
La amplitud esta dada por 2*A* sen *kx*.

Los puntos de mínima amplitud (nula) se llaman **nodos**. En ellos se debe cumplir:

$$\text{sen}kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \Rightarrow$$

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

Para n = 0, 1, 2, 3, ……….

Los puntos de máxima amplitud (± 2*A*) se llaman **vientres** o **antinodos**. En ellos se debe cumplir:

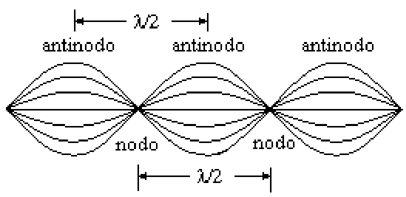
$$\text{sen}kx = \pm 1 \Rightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Para n = 0, 1, 2, 3,……….

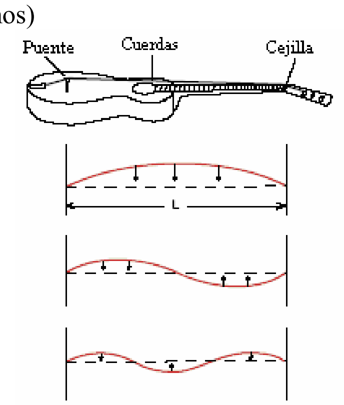
Así pues, tanto los nodos como los vientres aparecen a intervalos de longitud λ/2, mediando entre un nodo y un antinodo hay una distancia de λ/4.



La figura muestra la envolvente de una onda estacionaria.
Al no propagarse las ondas estacionarias, no transportan energía.
La energía se mantiene estacionaria, alternando entre cinética vibratoria y potencial elástica. Por lo tanto el movimiento repetimos no es ondulatorio, el nombre proviene del hecho que podemos analizarlo como superposición de ondas.

Condiciones de contorno
Las condiciones en los límites, llamadas *condiciones de contorno*, imponen restricciones a la hora de formarse ondas estacionarias en el medio correspondiente. Así, si los límites son fijos, en ellos se tendrán que dar nodos necesariamente; si ambos límites son libres se darán antinodos, y si uno es libre y el otro es fijo se habrán de dar antinodo y nodo respectivamente.

Límite fijo - Límite fijo: (como en los instrumentos musicales, violín, arpa, etc., la cuerda esta fija en sus dos extremos)



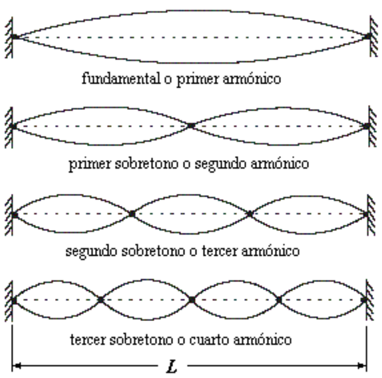
En este caso las condiciones a imponer son que, si la longitud del medio es L, tanto en $x=0$ como $x=L$ se habrán de dar nodos. Aplicando la condición de nodo en un límite fijo, resulta:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

o en términos de frecuencias,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = n\frac{v}{2L}$$

Para n = 1, 2, 3, 4,…………..
Por tanto, tanto la frecuencia como la longitud de onda sólo pueden tomar determinados valores, es decir, están cuantificadas. La frecuencia más baja de la serie recibe el nombre de **frecuencia fundamental**, y las restantes, que son múltiplos de la fundamental, reciben el nombre de **armónicos**.



Estas frecuencias posibles en la cavidad formada por los límites fijos, se denominan **modos** de la cavidad

Ejemplo 32. Por un medio unidimensional (dirección del eje Ox) se propagan dos ondas transversales, vibrando en el plano xOy y dadas por:

$$y_1 = A\text{sen}(\omega t + kx),\ y_2 = A\text{sen}(\omega t - kx + \varphi).$$

a) Comprobar que la superposición de ambas da lugar a una onda estacionaria.
b) Si en x = 0 ha de haber un nodo de la onda estacionaria, comprobar que el valor de φ debe ser π.
c) Calcular la velocidad de un punto del medio cuya distancia al origen sea 1/4 de la longitud de onda.

Solución.
a)

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\text{sen}(\omega t + kx) + A\text{sen}(\omega t - kx + \varphi)$$
$$= 2A\text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (1)$$

Llamando: $y_{o(x)} = 2A\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)$

$$\Rightarrow\ y = y_o \text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Por lo tanto, la expresión (1) es la ecuación de la onda estacionaria puesto que cualquier partícula en un punto dado x efectúa un movimiento armónico simple al transcurrir el tiempo, vibrando todas las partículas con idéntico periodo; y cada partícula vibra siempre con la misma amplitud, no siendo la misma para cada una sino que varia con la posición *(x)* de cada partícula.

b) $y_{o(0)} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\varphi}{2} = 0 \quad \varphi = \pi$

c) $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = y_o \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -y_o \omega \text{sen}\omega t$

$$y_{o\left(\frac{\lambda}{4}\right)} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 2A$$

Finalmente $v_y = -2A\omega\text{sen}\omega t$
En tal punto existe un vientre.

Ejemplo 33. La onda $y_1 = A\text{sen}(kx - \omega t)$ viaja por una cuerda. Después de reflejarse se convierte en $y_2 = -\frac{A}{2}\text{sen}(kx + \omega t)$. Que es lo que se obtiene de la combinación de estas dos ondas.

Solución.

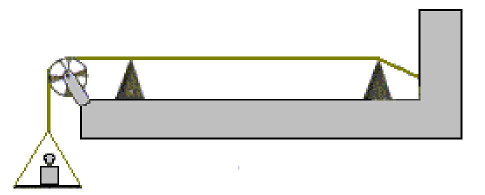
Hagamos $y = y_1 + y_2$.

$$y = A\text{sen}(kx - \omega t) - \frac{A}{2}\text{sen}(kx + \omega t) =$$
$$\frac{A}{2}\text{sen}(kx - \omega t) + \frac{A}{2}\text{sen}(kx - \omega t) - \frac{A}{2}\text{sen}(kx + \omega t)$$

$= \frac{A}{2}\operatorname{sen}(kx - \omega t) - A\operatorname{sen}\omega t \cos kx$

El primer término es una onda viajera y el Segundo una onda estacionaria.

Ejemplo 34. Calcular la frecuencia del sonido fundamental emitido por una cuerda de 1 m de longitud y 1 mm de diámetro, cuya densidad es 2 g/cm^3 y está tensa por un peso de 9231,6 g.



Solución.
La frecuencia del sonido emitido por una cuerda es:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T = (9{,}2316 kg)\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right) = 90{,}47 \text{ N}$$

$$\mu = \rho A = \left(2000\frac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{10^{-6}\pi}{4}\right)$$

$$= 1{,}57\times 10^{-3}\frac{kg}{m}$$

$$f = \frac{1}{2(1)}\sqrt{\frac{90{,}47}{1{,}57\times 10^{-3}}} = 38{,}8 \text{ Hz}$$

Ejemplo 35. Una cuerda está estirada por un peso de 10 N. Calcular el peso que debe tensar a otra cuerda de la misma sustancia, la misma longitud y doble radio para que emita la octava aguda de la que produce la primera. Se supone que ambas emiten el sonido fundamental.

Solución.

$$\mu = \rho A = \pi r^2 \rho,$$

$$\mu' = \frac{m'}{L} = \frac{\rho\pi(2r)^2 L}{L} = 4\pi r^2\rho = 4\mu$$

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ y}$$

$$f' = 2f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{\mu'}} \Rightarrow f' = 2f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{4\mu}}$$

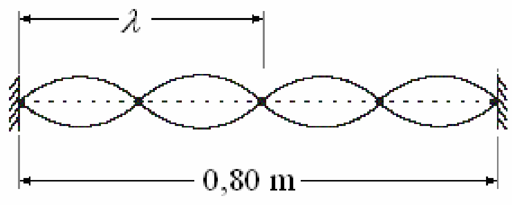
Relacionando f y f':

$$\frac{f'}{f} = \frac{2f}{f} = \frac{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{4\mu}}}{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T'}{T}} \Rightarrow \frac{T'}{T} = 16$$

Como T = 10 N, T' = 160 N

Ejemplo 36. Una cuerda horizontal, de longitud ℓ = 0,80 m, esta sometida en uno de sus extremos a oscilaciones sinusoidales de frecuencia f = 120 Hz, esta frecuencia corresponde a uno de los modos resonantes de la cuerda y se observa que entre sus extremos aparecen 4 antínodos ó vientres cuya amplitud de oscilación es A = 2 cm. Calcular:
a) La velocidad de propagación de las ondas.
b) La velocidad y aceleración máxima que puede alcanzar un punto de la cuerda.
c) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,050 m de un extremo de la cuerda.
d) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,125 m de un extremo de la cuerda.

Solución.



$\lambda = 0{,}40$ m, f = 120 Hz,

a) La velocidad de propagación de las ondas.
$v = \lambda f = 0{,}40 \times 120 = 48$ m/s

b) La velocidad y aceleración máxima que puede alcanzar un punto de la cuerda.

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\operatorname{sen}\omega t$$

$$\Rightarrow v_{máx} = A\omega = 0{,}02\times 240\pi = 4{,}8\pi \text{ m/s}$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\operatorname{sen}\omega t$$

$$\Rightarrow$$
$$a_{máx} = A\omega^2 = 0{,}02\times(240\pi)^2 = 1152\pi^2 \text{ m/s}^2$$

c) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,050 m de un extremo de la cuerda.
Ecuación de una onda estacionaria:
$y = 2A\operatorname{sen}kx\cos\omega t$
La amplitud está dada por:

$$2A\operatorname{sen}kx = 2A\operatorname{sen}\frac{2\pi}{\lambda}x$$

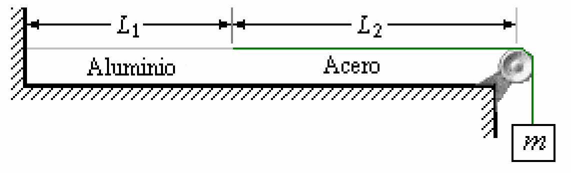
Para 0,050 m

$$0{,}04\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}40}0{,}050\right) = 0{,}04\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}028 \text{ m}$$

d) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,125 m de un extremo de la cuerda.
Para 0,125 m

$$0{,}04\text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}40}0{,}125\right) = 0{,}04\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}037 \text{ m}$$

Ejemplo 37. Un alambre de aluminio de $L_1 = 60{,}0$ cm y con una superficie transversal 1,00x10^{-2} cm^2, está conectado a un alambre de acero de la misma superficie. El alambre compuesto, cargado con un bloque *m* de 10,0 kg de masa, está dispuesto como se indica en la figura, de manera que la distancia L_2 de la unión con la polea de sostén es 86,6 cm. Se crean ondas transversales en el alambre utilizando una fuente externa de frecuencia variable.
a) Determine la frecuencia más baja de excitación en que se observan las ondas estacionarias, de modo que la unión en el alambre es un nodo.
b) ¿Cuál es el número total de nodos observados en esta frecuencia, excluyendo los dos en los extremos del alambre?
La densidad del aluminio es 2,60 g/cm^3, y la del acero es 7,80 g/cm^3.



Solución.
La frecuencia para ondas estacionarias en una cuerda fija en los dos extremos es

$f_n = n\dfrac{v}{2L}$, como para una cuerda tensa $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$,

obtenemos: $f_n = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

Como el punto de unión de los alambres tiene que ser un nodo, tenemos n_1 nodos para el aluminio y n_2 nodos para el acero.
Siendo la frecuencia f, la tensión T y la sección de alambre S común para los dos alambres, tenemos:

Para el aluminio $f = \dfrac{n_1}{2L_1}\sqrt{\dfrac{T}{\mu_1}}$, para el acero

$$f = \frac{n_2}{2L_2}\sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

Luego $\dfrac{n_1}{2L_1}\sqrt{\dfrac{T}{\mu_1}} = \dfrac{n_2}{2L_2}\sqrt{\dfrac{T}{\mu_2}}$

La masa por unidad de longitud

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{mS}{LS} = \left(\frac{m}{V}\right)S = \rho S$$

Reemplazando las expresiones de μ_1 y μ_2:

$$\frac{n_1}{L_1}\sqrt{\frac{T}{\rho_1}} = \frac{n_2}{L_2}\sqrt{\frac{T}{\rho_2}} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{L_1}{L_2}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

Reemplazando valores, obtenemos: $\dfrac{n_1}{n_2} = 0{,}4$

Como la menor es la frecuencia se obtiene con el menor valor de *n*, tenemos que buscar los menores valores de n_1 y n_2 que tengan la relación 0,4,

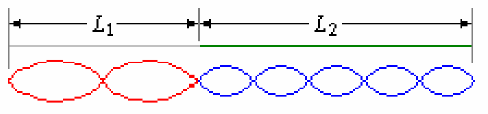
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{5}$$

Correspondiendo $n_1 = 2$ y $n_2 = 5$.

a) Usando $n_1 = 2$, obtenemos la frecuencia que produce un nodo en la unión

$$f = \frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \frac{2}{2(0{,}6)}\sqrt{\frac{10(9{,}8)}{2{,}6\times10^3\left(10^{-6}\right)}}$$
$= 324$ Hz

b) El número total de nodos observados en esta frecuencia, excluyendo los dos en los extremos del alambre, se pueden contar en el esquema de la figura, son 6 (hay un nodo común para el aluminio y para el acero).



Ejemplo 38. Dos ondas armónicas se escriben por medio de:

$$y_1(x,t) = 0{,}015\cos\left(\frac{x}{2} - 40t\right),$$

$$y_2(x,t) = 0{,}015\cos\left(\frac{x}{2} + 40t\right)$$

Donde x, y_1, e y_2 están en metros y *t* en segundos.

Dichas ondas se propagan en una cuerda tensa de gran longitud e interfieren para producir una onda estacionaria.
a) Determine la longitud de onda, frecuencia y rapidez de propagación de las ondas que interfieren.
b) Determine la función de la onda estacionaria.
c) Determine la posición de los nodos y antinodos en la onda estacionaria.
d) ¿Cuál es la amplitud de la onda en *x* = 0,4 m?
Solución.
a) La onda viajera es de la forma

$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi f t\right)$$

Luego comparando:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 4\pi = 12{,}56 \text{ m}$$

$$2\pi f = 40 \Rightarrow f = \frac{20}{\pi} = 6{,}37 \text{ Hz}$$

$v = \lambda f = (4\pi)\left(\dfrac{20}{\pi}\right)$ = 80 m/s

b) $y = y_1 + y_2$

$y(x,t) = 0{,}015\cos\left(\dfrac{x}{2} - 40t\right) + 0{,}015\cos\left(\dfrac{x}{2} + 40t\right)$

$y(x,t) = 0{,}015\left[\cos\left(\dfrac{x}{2} - 40t\right) + \cos\left(\dfrac{x}{2} + 40t\right)\right]$

Siendo

$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$:

$y(x,t) = 0{,}015\left(2\cos\dfrac{x}{2}\cos 40t\right)$

$= 0{,}030\cos\dfrac{x}{2}\cos 40t$

Función de la onda estacionaria

c) Determine la posición de los nodos y antinodos en la onda estacionaria.

Los nodos son para $\cos\dfrac{x}{2} = 0$

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2}, 3\dfrac{\pi}{2}, 5\dfrac{\pi}{2}, ...n\dfrac{\pi}{2}$

$x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, ... \pm n\pi$

Los antinodos son para $\cos\dfrac{x}{2} = \pm 1$,

$\dfrac{x}{2} = 0,\ 2\pi,\ 4\pi....2n\pi$

$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, ... \pm 2n\pi$

d) Amplitud de la onda en x = 0,4 m.

$A = 0{,}030\cos\dfrac{0{,}4}{2} = 0{,}030(0{,}98)$

= 0,0294 m = 2,94 cm

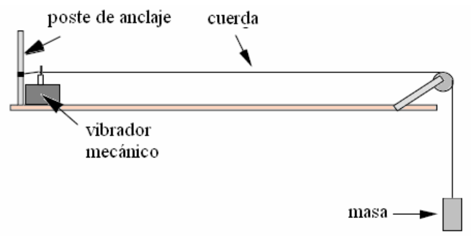
Ejemplo 39. En el dispositivo de la figura, una masa *m* es colgada de una cuerda que pasa sobre una polea. El otro extremo de una cuerda es conectada a un generador de frecuencia *f* fija. La cuerda tiene una longitud *L* de 2 metros y una densidad lineal de 0,002 kg/m. Se observan armónicos únicamente cuando las masas colgadas son 16 kg y 25 kg.

a) ¿Cuáles son los armónicos producidos por estas masas?

¿Cuál es la relación entre las tensiones y el número armónico?

b) ¿Cuál es la frecuencia del generador?

c) ¿Cuál es el valor máximo *m* para que se produzca un armónico?



Solución.

a) ¿Cuáles son los armónicos producidos por estas masas?

Los armónicos se producen para m_1 = 16 kg y para m_2 = 25 kg.

$n\dfrac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = \dfrac{2L}{n}$

$\lambda_1 f = \dfrac{2L}{n_1} f = \sqrt{\dfrac{m_1 g}{\mu}}$, $\lambda_2 f = \dfrac{2L}{n_2} f = \sqrt{\dfrac{m_2 g}{\mu}}$

Luego: $\dfrac{n_2}{n_1} = \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

Los armónicos son el quinto y el cuarto.

¿Cuál es la relación entre las tensiones y el número armónico?

$T_1 = m_1 g$, $T_2 = m_2 g$ y $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{16}{25}$

b) ¿Cuál es la frecuencia del generador?

$f = \dfrac{n_1}{2L}\sqrt{\dfrac{m_1 g}{\mu}} \Rightarrow f = \dfrac{5}{2(2)}\sqrt{\dfrac{16(9{,}8)}{0{,}002}}$ = 350 Hz

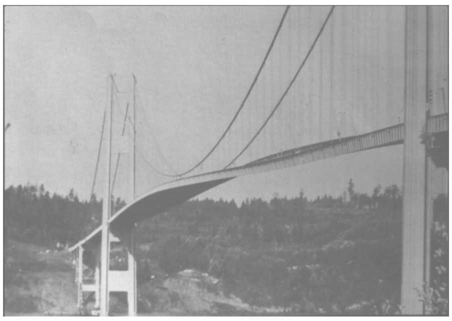
c) ¿Cuál es el valor máximo de *m* que produce un armónico?

$\lambda f = \dfrac{2L}{n} f = \sqrt{\dfrac{mg}{\mu}} \Rightarrow m = \dfrac{4L^2 f^2 \mu}{n^2 g}$

El mayor valor de *m* se produce con *n* = 1

$m = \dfrac{4(2)^2(350)^2(0{,}002)}{(1)^2(9{,}8)}$ = 400 kg

Ejemplo 40. El puente colgante de Tacoma, de aproximadamente 1810m de longitud, fue abierto al tráfico el 1 de julio de 1940, luego de 2 años de construcción, uniendo Tacoma y Gig Harbor. 4 meses después el puente colapsó durante una tormenta el 7 de Noviembre de 1940. Durante la resonancia se observó al puente oscilando en su segundo modo de vibración a razón de 60 oscilaciones cada minuto.



Determine:

a) la longitud de onda de la onda estacionaria formada.

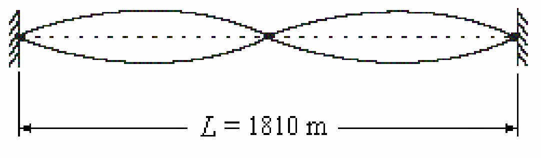
b) la velocidad de propagación de la onda.

c) el módulo de corte del puente, asumiendo que la densidad promedio del puente era de 5x10^3kg/m^3.

d) la ley de movimiento vertical de un carro que se hallaba estacionado a un cuarto de la longitud del puente desde uno de sus extremos.

Solución.

a)



$\lambda = 1810\text{ m}$

b) $v = \lambda f = (1810\text{ m})(1/\text{s}) = 1810\text{ m/s}$

c) Como $v = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}} \Rightarrow G = v^2\rho =$

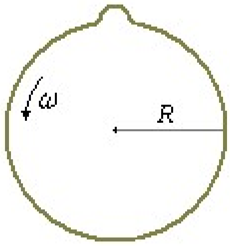
$(1810)^2(5\times10^3) = 1{,}63805\times10^{10}\ \dfrac{N}{m^2}$

d) Para ondas estacionarias $y = 2A\text{sen}kx\cos\omega t$

Para $x = \dfrac{\lambda}{4}$, $\text{sen}kx = 1$, luego

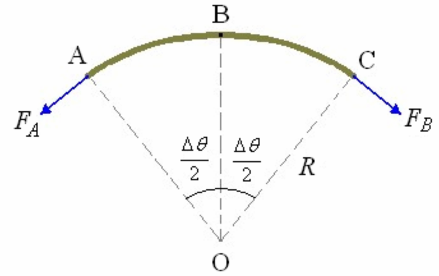
$y = 2A\cos\omega t \Rightarrow y = 2A\cos 2\pi ft$

Ejemplo 41. Un lazo de cuerda se gira a una alta velocidad angular ω, de modo que se forma un círculo tenso del radio R. Se forma un pulso (como se muestra en la figura) en la cuerda girante.
a) Demostrar que la tensión en la cuerda es $T = \mu\omega^2R^2$, donde μ es la densidad lineal de la cuerda.
b) Bajo que condiciones el pulso permanecería estacionario relativo a un observador en tierra.



Solución.

a) Según se muestra en figura tomemos ACB una pequeña sección de la cuerda, que subtiende un ángulo $\Delta\theta$ en O, el centro del lazo. Elegimos C en el punto medio del arco.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_H = F_B\cos\frac{\Delta\theta}{2} - F_A\cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_A = F_B = T$$

$$\sum F_V = -F_B\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - F_A\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = -\Delta m a_c$$

De esta última ecuación:

Con $F_A = F_B = T$, $\Delta m = \mu\Delta\ell = \mu R\Delta\theta$ y $\text{sen}\dfrac{\Delta\theta}{2} \approx \dfrac{\Delta\theta}{2}$:

Obtenemos:

$$2T\frac{\Delta\theta}{2} = \mu R\Delta\theta(\omega^2R)$$

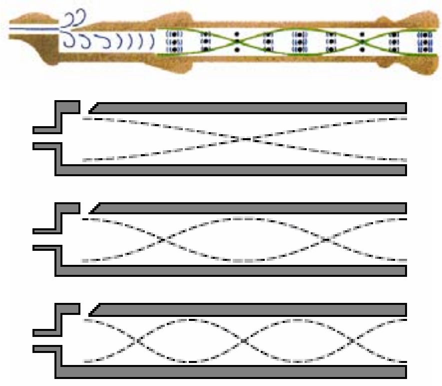
$$\Rightarrow T = \mu\omega^2R^2$$

b) En una cuerda con densidad lineal μ y tensión T una onda viaja con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu\omega^2R^2}{\mu}} = \omega R.$$

Luego el pulso debe viajar con una velocidad $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ relativa a la cuerda. Luego, si el pulso se mueve en sentido horario con respecto a la cuerda, permanecería estacionario con respecto a tierra.

Límite libre. Límite libre: (un tubo abierto en ambos extremos, como en los instrumentos musicales de viento, ejemplo, la flauta).



En este caso las condiciones a imponer son que, si la longitud del medio es L, tanto en $x=0$ como $x=L$ se habrán de dar antinodos. Aplicando la condición de antinodo en un límite libre, resulta:

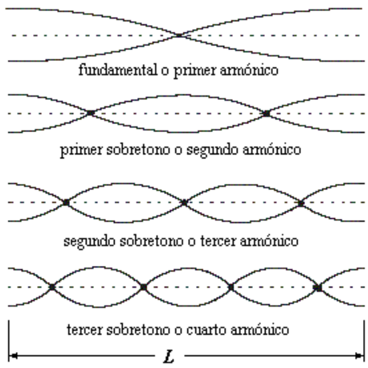
$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

o en términos de frecuencias,

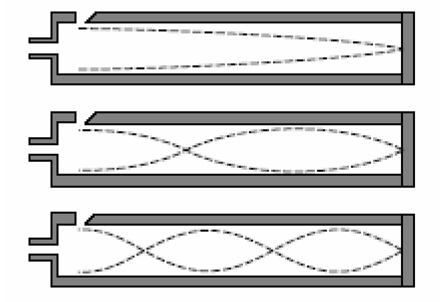
$$f_n = \frac{\lambda_n}{v} \Rightarrow f_n = n\frac{v}{2L}$$

Para n = 1, 2, 3, 4,…………..

Por tanto, igual que antes la frecuencia y la longitud de onda sólo podrán tomar determinados valores, y estarán cuantificadas. La frecuencia más baja de la serie recibe el nombre de **frecuencia fundamental**, y las restantes, que son múltiplos de la fundamental, reciben el nombre de **armónicos.** Se representan a continuación los cuatro primeros.



Limite fijo. Límite libre: (una cuerda con un extremo con libertad de movimiento y el tubo cerrado en un extremo).



En esta situación se tendrá un nodo en $x=0$ y un antinodo en $x=L$, lo que implica que en la longitud L de la cuerda han de caber un número impar de cuartos de onda. Aplicando la condición de antinodo reflexión en un límite fijo resulta:

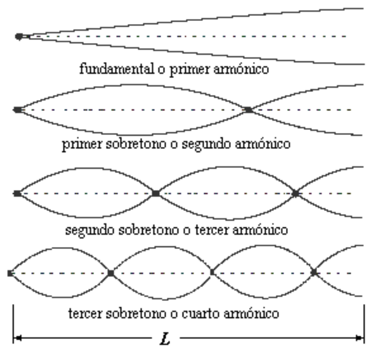
$$L = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4} \Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

o, en términos de frecuencias,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = (2n-1)\frac{v}{4L}$$

Para n = 1, 2, 3, 4,…………..

que representan la serie de ondas permitidas por las condiciones de contorno. Se representan a continuación los cuatro primeros.



Ejemplo 42. Calcular la frecuencia de los sonidos emitidos por un tubo abierto y otro cerrado de 1 m de longitud, produciendo el sonido fundamental. Se supone .que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.

Solución.

Para tubo abierto (n = 1):

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{340}{2(1)} = 170 \text{ Hz}$$

Para un tubo cerrado (n = 1):

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{340}{4(1)} = 85 \text{ Hz}$$

Ejemplo 43. Calcular la longitud de un tubo abierto que lleno de aire y a 0° C (v = 330 m/s) emite como sonido fundamental el DO3.

Solución.

Frecuencia del DO 3 = 264 Hz:

$$f = \frac{v}{2L} \Rightarrow L = \frac{v}{2f} = \frac{330}{2(264)} = 0{,}625 \text{ m}$$

Ejemplo 44. Un tubo de 1 m de largo está cerrado por uno de sus extremos. Un alambre estirado se coloca cerca del extremo abierto. El alambre tiene 0,3 m de largo y una masa de 0,01 kg. Se sostiene fijo en sus dos extremos y vibra en su modo fundamental.

Pone a vibrar a la columna de aire en el tubo con su frecuencia fundamental por resonancia.

Encontrar:

a) La frecuencia de oscilación de la columna de aire.

b) La tensión del alambre.

Velocidad del sonido en el aire 340 m/s.

Solución.

a) La frecuencia fundamental (n =1) en el tubo sonoro cerrado valdrá:

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{340}{4(1)} = 85 \text{ Hz}$$

b) Dicha frecuencia será la fundamental que se produce en la cuerda, por lo que:

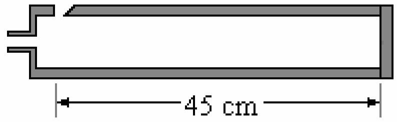
$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}01}{0{,}3} = \frac{1}{30}\frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$T = 4L^2 f^2 \mu = 4(0{,}3)^2(85)^2\left(\frac{1}{30}\right) = 86{,}7 \text{ N}$$

Ejemplo 45. El tubo de un órgano representado en la figura tiene 45 cm de longitud y las onda estacionaria que se produce por el silbato en espacio libre es de una longitud de onda de 60 cm. Dicho tubo se puede considerar abierto en el extremo izquierdo y cerrado en el derecho.

a) Muéstrese en un diagrama al interior del tubo la onda estacionaria que se produce ubicando la posición de las crestas nodos y vientres de amplitud.

b).Si la máxima amplitud de oscilación de las partículas de aire al interior del tubo es de 10^{-6} cm. ¿cuál será la máxima amplitud que podrán alcanzar las partículas de aire en el centro del tubo?



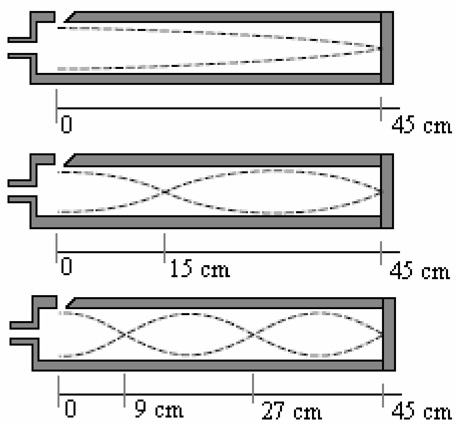
Solución.

La frecuencia libre es

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0{,}6} = 566{,}6\ \text{Hz},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}6} = 10{,}47\ \text{rad}$$

a) Diagrama al interior del tubo la onda estacionaria para las tres primeras resonancias.



b).Si la máxima amplitud de oscilación de las partículas de aire al interior del tubo es de 10^{-6} cm. ¿cuál será la máxima amplitud que podrán alcanzar las partículas de aire en el centro del tubo?

$$y_{total} = 2A\,\text{sen}kx\cos\omega t$$

La máxima amplitud de oscilación es en un vientre

$\text{sen}kx = 1$ y $\cos\omega t = 1$, luego: $10^{-8} = 2A \Rightarrow$

$A = 0{,}5\times 10^{-8}$ m

La máxima amplitud que podrán alcanzar las partículas de aire en el centro del tubo

$x = 22{,}5$ cm y $\cos\omega t = 1$

$$y_{máx(x=0,225)} = 2A\,\text{sen}kx$$

$$= 2\left(0{,}5\times 10^{-8}\right)\left[\text{sen}(10{,}7)(0{,}225)\right]$$

$= 0{,}71 \times 10^{-8}$ m

Ejemplo 46. Un ingeniero naval quiere averiguar si un tubo que presenta externamente una boca circular abierta está abierto o cerrado en el otro extremo que no logra ver. Para esto decide usar una fuente sonora de frecuencia variable. Tomó para ello dos frecuencias de resonancia consecutivas, que le dieron los siguientes valores: 125 y 175 Hz.

a) ¿Cuál es el razonamiento en que se basó?
b) ¿A qué conclusión llegó?
c) ¿Para qué frecuencia resonaría en estado fundamental?
d) Cree que también pudo averiguar la longitud del tubo. Si se puede ¿cuál es?

Solución.

a) Las frecuencias de resonancia están dadas:

Para tubo abierto: $f = \dfrac{n}{2L}v$.

Para tubo cerrado en un extremo: $f = \dfrac{(2n-1)}{4L}v$

Para n = 1, 2, 3, 4, 5, ……………….

Y lo que tenemos que hacer es analizar para 125 y 175 Hz, con cuál de las condiciones concuerdan.

b) Para 125 correspondería (n – 1) y para 175 correspondería n.

De tal manera que $\dfrac{n-1}{125} = \dfrac{n}{175}$, se cumple para n = 3,5 valor que no es entero, lo que descarta esta posibilidad.

No cumple para tubo abierto

Haciendo lo mismo para el caso de tubo cerrado

$\dfrac{2n-3}{125} = \dfrac{2n-1}{175}$, se cumple para n = 4, valor entero que si cumple

EL TUBO ES CERRADO .

c) Como $f = \dfrac{(2n-1)}{4L}v$

La frecuencia fundamental es para n = 1

$f = \dfrac{1}{4L}v$, f = 25 Hz

d) Si, ya que $\dfrac{v}{4L} = 25$, y $L = \dfrac{v}{100}$,

Considerando la velocidad el sonido v = 340 m/s, se obtiene L = 3,40 m.

LOS INSTRUMENTOS MUSICALES

La formación de ondas estacionarias está relacionada con los instrumentos musicales tanto de cuerda como de viento. Así, el sonido generado por un arpa es consecuencia de la propagación por el aire de las ondas estacionarias que se producen, entre dos límites fijos, en las diferentes cuerdas, de modo que los graves (frecuencias bajas) se producirán en las cuerdas más largas y los agudos (frecuencias altas) en las cuerdas más cortas. En los órganos, las ondas estacionarias que se forman en los tubos se corresponden con las formadas por reflexión en dos límites, uno fijo y otro libre. Por tanto, cuanto mayor sea la longitud del órgano menor es la frecuencia: los tubos largos corresponden a frecuencias bajas (sonidos graves) y los cortos a frecuencias altas (sonidos agudos)

OSCILACION DE VARILLAS. DIAPASÓN

Varilla fija por un extremo. Puesta en oscilación, al organizarse la onda estacionaria se debe tomar un nodo en el extremo fijo y un vientre en el opuesto. Los razonamientos que se realizan para un tubo cerrado son válidos para este caso; por lo tanto, una varilla que oscila fija por un extremo responde a la ley

$$\ell = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

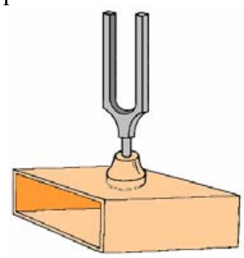
Varilla fija por un punto interior. Si se hace oscilar una varilla fija por un punto interior para que se organice una onda estacionaria, se formará allí un nodo y vientres en los extremos. Todo esto depende exclusivamente del punto por el que se sostenga. Este punto (siguiendo el razonamiento de tubos abiertos), deberá estar situado en la mitad, a $1/4$ a $1/6$, etcétera, de un extremo.

Téngase presente que varillas de igual longitud, idénticamente .fijadas, pueden producir sonidos de distinta frecuencia si se varía la naturaleza de 1a sustancia, las dimensiones o la forma de excitación.

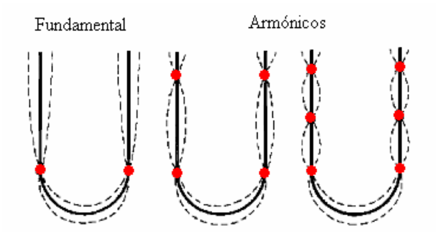
La frecuencia fundamental depende de la velocidad de propagación. Esta observación es válida para los tubos sonoros ya que, modificando la naturaleza y las condiciones del gas, se modifica la velocidad de propagación.

DIAPASÓN

Un aparato de aplicación en acústica es el diapasón que consta de una barra metálica en forma de "U", soportada en su parte media.



Si se lo excita, entra en vibración formándose una onda estacionaria; los nodos estarán ubicados a 2/3 de su longitud al emitirse el sonido fundamental. La frecuencia del diapasón depende de la elasticidad del material y su densidad.

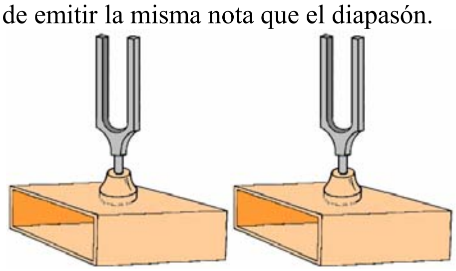


Para aumentar la intensidad del sonido producido, se monta el diapasón sobre una caja. Si la caja está cerrada en un extremo, su longitud es ¼ de la longitud de onda del sonido en el aire emitido por el diapasón. Si la caja está abierta en los dos extremos la longitud de la caja es igual a la mitad de dicha longitud de onda. Al vibrar, las .dos ramas de un diapasón se mueven en fases opuestas. Cuando las ramas se acercan, el punto más bajo del pie del diapasón baja, y sube cuando las ramas se alejan. Este pie se encuentra afectado de un movimiento vibratorio de dirección vertical lo que puede comprobarse apoyándolo en la mano. Es así finalmente, como se transmite la vibración del diapasón a la columna de aire contenida en la caja. Los diapasones se utilizan como patrones de registro de frecuencia, pues pueden construirse de manera que no sean afectados por variaciones de temperatura. Es posible lograr diapasones capaces de mantener una frecuencia de vibración con una precisión de 1 en 100000.

Resonancia

Se ha visto que un sistema tal como una cuerda estirada es capaz de oscilar en uno o más modos naturales de vibración. Si se aplica una fuerza periódica a este sistema, la amplitud resultante del movimiento del sistema será mayor cuando la frecuencia de la fuerza aplicada sea igual o aproximadamente igual a una de las frecuencias naturales del sistema, que cuando la fuerza excitadora se aplique en alguna otra frecuencia.
Las correspondientes frecuencias naturales de oscilación de un sistema generalmente se conocen como **frecuencias resonantes**

Experimento de resonancia. En la figura se muestran dos diapasones montados en sendas cajas de igual longitud, lo que indica que ambos tienen igual frecuencia. A estas cajas se las llama de resonancia, pues tienen 1a misma longitud que un tubo sonoro capaz de emitir la misma nota que el diapasón.

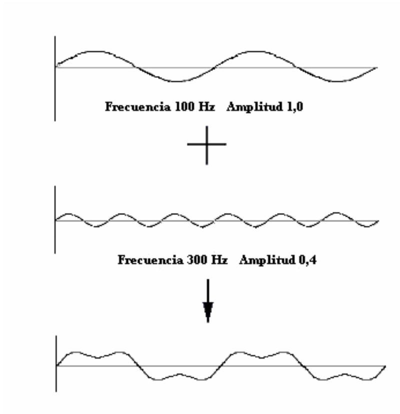


Enfrentadas las aberturas de las cajas y excitado un diapasón, se comprueba que el otro entra espontáneamente en vibración, En efecto, si se detiene con la mano el diapasón excitado en un principio, se percibe nítidamente el sonido producido por el otro y,

si se libera el diapasón detenido, éste vuelve a vibrar, lo que podrá percibirse acercando levemente la mano a las ramas del diapasón. Se ha producido un fenómeno de resonancia acústica.
Si existe un cristalero cerca podrá comprobar que algunas copas mantienen la vibración por más tiempo que otras y que durante algunos instantes la amplitud de la vibración va en aumento. Lo que sucede es que un cuerpo puede vibrar, entre otras razones, por la recepción de ondas. Como cada cuerpo tiene una frecuencia propia d vibración, si ésta coincide con la de la onda recibida la vibración se mantiene

ONDAS DE DIFERENTE FRECUENCIA VIAJANDO EN EL MISMO ESPACIO

La figura ilustra la suma de dos ondas sinusoidales de frecuencia y amplitud diferentes. Esta onda resultante mantiene la frecuencia del componente más grave, pero con el timbre alterado

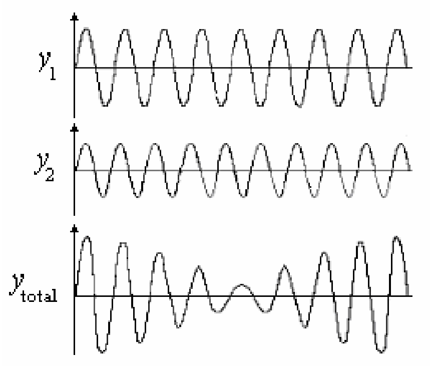


PULSACIONES O BATIDOS.

Cuando dos fuentes de sonido que tienen casi la misma frecuencia se hace sonar al mismo tiempo, ocurre un efecto interesante. Puede oír un sonido con una frecuencia que es el promedio de las dos. Sin embargo, la sonoridad de este sonido crece repetidamente y después decae, en lugar de permanecer constante. Estas variaciones repetidas en amplitud se denominan **pulsaciones** o **batidos**, y la ocurrencia de pulsaciones es una característica general de las ondas.

Si la frecuencia de una de las fuentes de ondas se cambia, hay un cambio que corresponde en el grado en que varía la amplitud. Este grado se llama frecuencia de pulsación. A medida que las frecuencias se hacen más cercanas, la frecuencia de pulsación se hace más lenta. Así, un músico puede afinar una guitarra a otra fuente de sonido escuchando las pulsaciones mientras incrementa o disminuye la tensión en cada cuerda. A la postre, las pulsaciones se hacen tan lentas que efectivamente se desvanecen, y las dos fuentes están en un tono.

Las pulsaciones se pueden explicar con facilidad considerando dos ondas sinusoidales y_1 e y_2 a partir de la misma amplitud A, pero de frecuencias diferentes f_1 y f_2. El principio de superposici6n establece que la amplitud combinada y es la suma algebraica de las amplitudes individuales.



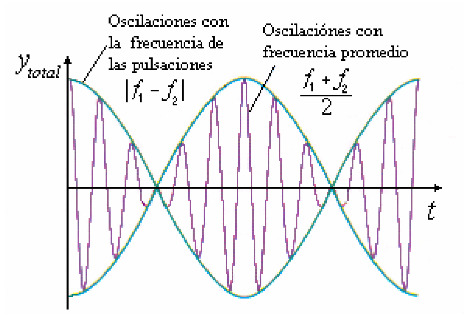
$$y = y_1 + y_2$$

$$y_{total} = A\,\text{sen}2\pi f_1 t + A\text{sen}2\pi f_2 t$$

Usando la identidad trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos, tenemos

$$y_{total} = \left[2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\text{sen}2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

Esta ecuación representa una onda que oscila con el promedio de sus frecuencias. La amplitud resultante también oscila, con una frecuencia de pulsación igual a la diferencia entre las frecuencias de la fuente.



La primera parte de y_{total} es $2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t$, esto da la amplitud de las pulsaciones que varían lentamente, como se indica en la figura anterior.

Como el sonido alto se escucha siempre que el término sea $2A$ o $-2A$, la frecuencia de las pulsaciones es $f_p = |f_1 - f_2|$. Finalmente, las oscilaciones rápidas con cada pulsación son debidas a la segunda parte de y_{total}, $\text{sen}2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$

Estas oscilaciones tienen una frecuencia que es el promedio de las dos frecuencias de las fuentes. Las pulsaciones se pueden escuchar hasta frecuencias de alrededor de 10 Hz. Más allá son difíciles de distinguir

Ejemplo 47. Cuando se golpea un diapasón de 440 Hz al mismo tiempo que se pulsa la cuerda de una guitarra que debe dar la nota Sol, se escuchan 3 pulsaciones por segundo. Después de que la cuerda de la guitarra se tensa un poco más para aumentar su frecuencia las pulsaciones aumentan a 6 por segundo. ¿Cuál es la frecuencia de la guitarra con la tensión final?

Solución.

En este fenómeno de interferencia de dos ondas sonoras de frecuencia parecida se producen **pulsaciones** que el oído percibe con un tono $\frac{f_1 + f_2}{2}$ y una amplitud que oscila con $f_p = \left| f_1 - f_2 \right|$. El oído responde a la intensidad de la onda sonora que depende del cuadrado de la amplitud, es decir el sonido será fuerte tanto para amplitud máxima como para amplitud mínima. Es decir para el oído la frecuencia de batido es Δf .

En este caso y dado que la frecuencia de batido percibida por el oído es 3 s^{-1}, la frecuencia original emitida por la cuerda es 437 Hz ó 443 Hz.

La frecuencia de oscilación de la cuerda es directamente proporcional a la velocidad de transmisión de las ondas de la cuerda que a su vez depende de la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda. Por tanto al aumentar la tensión de la cuerda, aumentamos la frecuencia de oscilación.

En este caso, al aumentar la tensión, aumenta la frecuenta de **batidos** a 6 s^{-1}. Por tanto este hecho implica que la frecuencia original de la cuerda era de 443 Hz y después de aumentar la tensión es de 446 Hz. Si hubiese sido 437 Hz se detectaría un decremento en la frecuencia de batido.

Ejemplo 48. Algunas de las notas bajas del piano tienen dos cuerdas. En una nota particular una de las cuerdas se templa correctamente a 100 Hz. Cuando las dos cuerdas suenan juntas, se oye un batido por segundo. ¿En qué porcentaje debe un afinador de piano cambiar la tensión de la cuerda desafinada para hacerla coincidir correctamente? (el batido es entre los tonos fundamentales)

Solución.

La frecuencia fundamental es $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

Asumimos que las dos cuerdas son de la misma longitud, composición y diámetro, tal que la diferencia Δf es debida a la diferencia de tensión ΔT .

De la ecuación anterior obtenemos.

$$\frac{df}{dT} = \frac{1}{2L}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{T\mu}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{1}{2T} = \frac{f}{2T}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{f} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

Como $\left|\Delta f\right| << f$, tenemos $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta T}{T}\right)$.

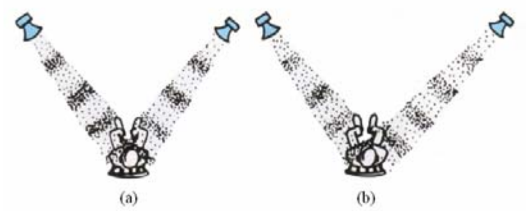
En este caso f = 100 Hz y $\left|\Delta f\right| = 1\,\text{Hz}$.

Luego $\frac{\Delta T}{T} = 2\frac{\left|\Delta f\right|}{f} = 2\left(\frac{1}{100}\right)$ = 2 por ciento.

(si la cuerda desafina es “baja” su tensión debe ser aumentada; si la cuerda es “alta” su tensión se debe bajar.)

INTERFERENCIA DE DOS ONDAS QUE VIAJAN EN DISTINTAS DIRECCIONES

Una causa corriente que origina una diferencia de fase entre dos ondas sonoras, es la diferencia de longitudes de los trayectos que deben recorrer las ondas desde su fuente o foco hasta el punto donde se produce la interferencia. Supóngase que tenemos dos focos que están emitiendo ondas armónicas de la misma frecuencia y longitud de onda. En la figura a continuación, el espectador (a) recibe los dos sonidos en fase, el observador (b) recibe los sonidos con diferencia de fase.



En el caso general, podemos escribir las funciones de onda como:

$$y_1 = A\text{sen}(kr_1 - \omega t - \varphi),\ y_2 = A\text{sen}(kr_2 - \omega t)$$

La diferencia de fase para estas dos funciones de onda está dada por:

$$\delta = k(r_2 - r_1) - \varphi \ \Rightarrow\ \delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \varphi$$

Este término se debe a:

La diferencia de fase inicial entre y_1 e y_2;

Si las ondas están oscilando en fase, en $t = 0$ y $r = 0$, entonces $\varphi = 0$.

Realizando la composición de movimientos obtenemos para la amplitud de la onda resultante:

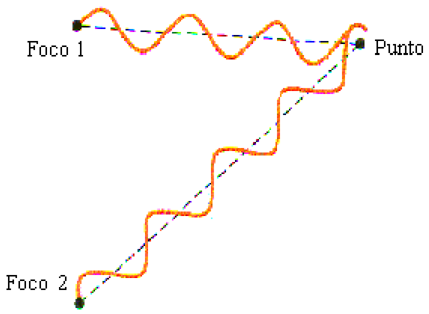
$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$, siendo el término de interferencia: $2A_1A_2\cos\delta$.

Estudiamos ahora los máximos y mínimos a partir del término de interferencia.

La diferencia para los caminos recorridos por las dos ondas es

$$\delta = k(r_2 - r_1) - \varphi \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \varphi$$

1. Interferencia constructiva: Si la diferencia entre los caminos recorridos por ambas ondas hasta un cierto punto es un número entero de longitudes de onda, la interferencia es constructiva



Para cumplir con esta condición

$\delta = 2n\pi \Rightarrow \cos\delta = 1 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \varphi = 2n\pi \quad \Rightarrow$$

$$(r_2 - r_1) = \frac{\lambda}{2\pi}(2n\pi + \varphi)$$

En conclusión, para que ocurra la interferencia constructiva la diferencia de caminos debe ser:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \left(n + \frac{\varphi}{2\pi}\right)\lambda$$

La amplitud de la onda resultante será:

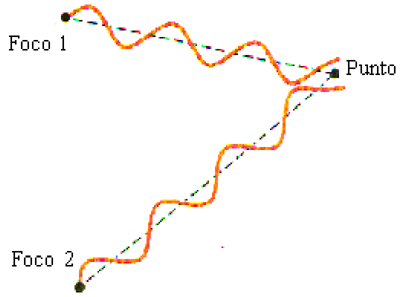
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2}$$

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$$

Si $A_1 = A_2 \Rightarrow A = 2A_1$

Por tanto se puede afirmar que una diferencia en los trayectos de una longitud de onda o de un número entero cualquiera de longitudes de onda es equivalente a que no haya ninguna diferencia en absoluto entre las trayectorias.

2. Interferencia destructiva: Si la diferencia de trayectos es una semilongitud de onda o un número impar de semilongitudes de onda, el máximo de una onda coincidirá con el mínimo de la otra y la interferencia será destructiva.



Para cumplir con esta condición

$\delta = (2n+1)\pi \Rightarrow \cos\delta = -1 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2,$ ....

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \varphi = (2n+1)\pi \Rightarrow$$

$$(r_2 - r_1) = \frac{\lambda}{2\pi}[(2n+1)\pi + \varphi]$$

En conclusión, para que ocurra la interferencia constructiva la diferencia de caminos debe ser:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \left[(2n+1) + \frac{\varphi}{2\pi}\right]\lambda$$

La amplitud de la onda resultante será:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2}$$

$$A = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = A_1 - A_2$$

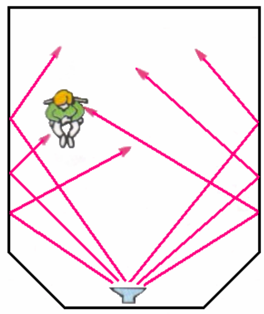
Si $A_1 = A_2 \Rightarrow A = 0$

Resumiendo, si $\varphi = 0$:

Condición de máximo: $(r_1 - r_2) = n\lambda$

Condición de mínimo: $(r_1 - r_2) = (2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$

APLICACIONES. Cuando se construye una sala de conciertos hay que tener en cuenta la interferencia entre ondas de sonido, para que una interferencia destructiva no haga que en algunas zonas de la sala no puedan oírse los sonidos emitidos desde el escenario.



Arrojando objetos al agua estancada se puede observar la interferencia de ondas de agua, que es constructiva en algunos puntos y destructiva en otros. La interferencia puede producirse con toda clase de ondas, no sólo ondas mecánicas.

Las ondas de radio interfieren entre sí cuando se reflejan en los edificios de las ciudades, con lo que la señal se distorsiona. La luz visible está formada por ondas electromagnéticas que pueden interferir entre sí. La interferencia de ondas de luz causa, por ejemplo, las irisaciones que se ven a veces en las burbujas de jabón. La luz blanca está compuesta por ondas de luz de distintas longitudes de onda. Las ondas de luz reflejadas en la superficie interior de la burbuja interfieren con las ondas de esa misma longitud reflejadas en la superficie exterior. En algunas de las longitudes de onda, la interferencia es constructiva y en otras destructiva. Como las distintas longitudes de onda de la luz corresponden a diferentes colores, la luz reflejada por la burbuja de jabón aparece coloreada.

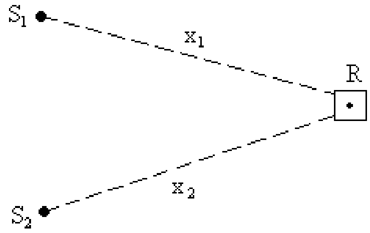
Ejemplo 49. Dos focos sonoros emiten simultáneamente ondas de la misma frecuencia f = 425 Hz, siendo la velocidad del sonido en el aire v = 340 m/s. Si colocamos un aparato registrador de sonidos a x_1 = 100 m del primer foco y a x_2 = 101,2 del segundo ¿Se registrará sonido en el aparato?

Solución.

La longitud de onda del sonido emitido por ambos focos es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{425} = 0{,}80 \text{ m}$$

Para que el aparato no registrara sonido sería preciso que en el punto donde está situado se produzca un mínimo de interferencia. De otra manera, R deberá estar situado en un punto cuya diferencia de distancias a S_1 y S_2 sea igual a un múltiplo impar de semilongitudes de onda:



$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

Según los valores dados:

$$x_2 - x_1 = 101{,}2 - 100 = 1{,}2 \text{ m}$$

y $\quad \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{0{,}80}{2} = 0{,}40 \text{ m}$

Luego $\quad x - x_1 = 1{,}2 = 3(0{,}40) = 3\dfrac{\lambda}{2}$

Por tanto, el aparato no registrará el sonido

Ejemplo 50. Dos parlantes S_1 y S_2 están separados una distancia de 5m, están conectados a un oscilador de audio. Un muchacho está en el punto P, a 12,0 m de S_1 y 13,0 m de S_2: Formando un triángulo rectángulo S_1, S_2 y P. La onda de S_2 llega al punto P, 2,00 periodos después que la onda de S_1. La velocidad del sonido es 350 m/s.

a) ¿Cuál es la frecuencia del oscilador?

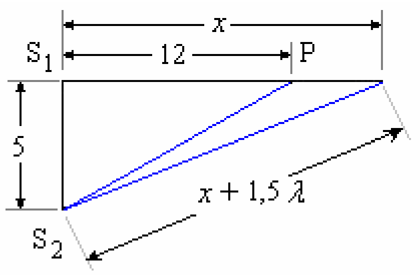
b) Si el muchacho camina alejándose de S_1 por la línea que pasa por P, hasta que una interferencia destructiva ocurre. ¿En qué punto medido desde S_1 la onda de S_2 llega 1,50 periodos más tarde?

Solución.

a) $2\lambda = 13 - 12 = 1\text{m} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{2} = 0{,}5\text{m}$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{350}{0{,}5} = 700 \text{ Hz}$$

b)



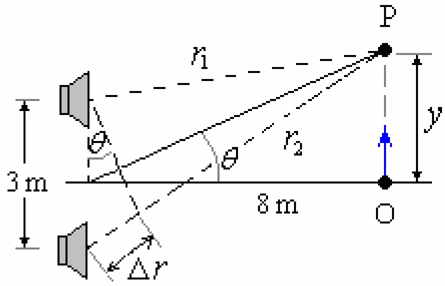
$$(x + 1{,}5\lambda)^2 - x^2 = 5^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 3\lambda x + (1{,}5\lambda)^2 - x^2 = 25$$

con $\lambda = 0{,}5 \text{ m}$: $1{,}5x + (0{,}75)^2 = 25$

finalmente $x = 16{,}3 \text{ m}$

Ejemplo 51. Dos altavoces se excitan mediante el mismo oscilador a una frecuencia de 2000 Hz. La separación entre los altavoces es de 3 m, como se muestra en la figura. Un escucha está originalmente en el punto O, situado a 8 m medidos sobre el eje axial central. ¿Cuánto debe caminar el oyente perpendicularmente a ese eje, antes de alcanzar el primer mínimo en la intensidad sonora?



Solución.
Puesto que la velocidad del sonido en el aire es 330 m/s y ya que f = 2000 Hz, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{2000} = 0{,}165 \text{ m}$$

El primer mínimo ocurre cuando las ondas que alcanzan el punto P están 180º fuera de fase, o cuando la diferencia de trayectos, $r_2 - r_1$, sea igual a $\lambda/2$.
Por lo tanto, la diferencia de fase se obtiene de

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2} = \frac{0{,}165}{2} = 0{,}0835 \text{ m}$$

Del pequeño triángulo rectángulo de la figura del enunciado se observa que para una buena aproximación, sen $\theta = \Delta r/3$ para pequeños valores de θ o sea

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\Delta r}{3} = \frac{0{,}0825}{3} = 0{,}0275$$

$$\theta = 1{,}58^{\circ}$$

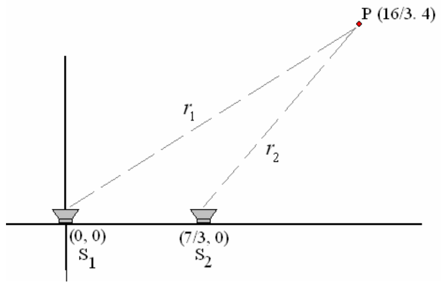
Del triángulo rectángulo grande de la misma figura se encuentra que tan $\theta = y/8$, o sea

$$y = 8\tan\theta = 8\tan 1{,}58^{\circ} = 0{,}22 \text{ m}$$

Es decir, el oyente escuchará mínimos en la intensidad sonora resultante a 22 cm desde cualquier lado de la línea central. Si el escucha permanece en estas posiciones, ¿en qué otras frecuencias se escucharán mínimos?

Ejemplo 52. Dos parlantes S_1 y S_2 son activados por el mismo sistema de audio emitiendo simultáneamente ondas sonoras armónicas idénticas de frecuencia "f" que llegan a un observador en P.
Los parlantes S_1 y S_2 se encuentran en el origen (0, 0) m y en (7/3, 0) m, respectivamente, mientras el observador está en (16/3, 4) m, (v_s = 340 m/s).
a) Si la onda emitida por S_1 llega 10 periodos más tarde que la emitida por S_2. ¿Qué frecuencia emiten los parlantes?
b) Si ahora el observador se ubica sobre el eje x, diga justificando que fenómeno ondulatorio percibe entre las regiones:
- Entre los parlantes.
- A la izquierda de S_1.
- A la derecha de S_2.

Solución.
a)



$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2} = 16\sqrt{\frac{4^2+3^2}{\left(4^2\right)\left(3^2\right)}}$$

$$= 16\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{20}{3}$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{16}{3} - \frac{7}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$r_1 - r_2 = \frac{20}{3} - 5 = \frac{5}{3} = 10\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \text{m}$$

Luego la frecuencia $f = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{340}{1/6} = 2040 \text{ Hz}$

b) Si ahora el observador se ubica sobre el eje x
Como la separación entre las fuentes es 7/3 m y la longitud de onda es 1/6, hay un número exacto de longitudes de onda entre las fuentes $\left(\frac{7/3}{1/6} = 14\right)$.

- Entre los parlantes.

$$y_1 = A\operatorname{sen}(kx - \omega t),\ y_2 = A\operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1/6} = 12\pi,\ \omega = 2\pi f = 4080\pi$$

$$y = y_1 + y_2 = A\operatorname{sen}(kx - \omega t) + A\operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

$$= 2A\operatorname{sen}kx\cos\omega t$$

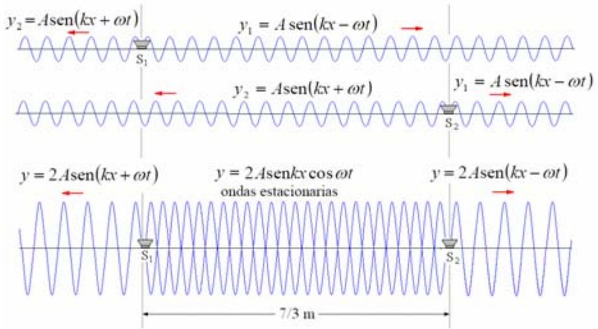
Se forman ondas estacionarias.
- A la izquierda de S_1.

$$y = y_2 + y_2 = 2A\operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

Hay interferencia constructiva.
- A la derecha de S_2.

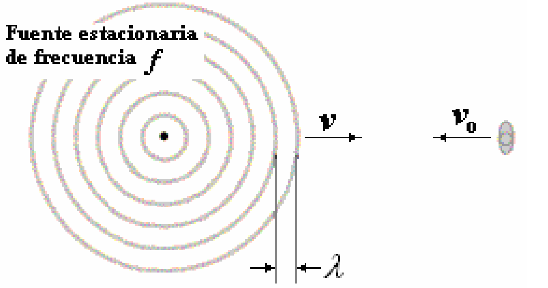
$$y = y_1 + y_1 = 2A\operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Hay interferencia constructiva.



EFECTO DOPPLER
La mayoría de nosotros estamos familiarizados con la elevación y descenso posterior del tono de la sirena de una ambulancia o la bocina de un automóvil cuando éste se aproxima y cuando ha pasado**.** Este cambio en el tono, debido al movimiento relativo entre una fuente de sonido y el receptor se llama el efecto de Doppler, en honor del físico austriaco Christian Doppler (1803 -1853). Si usted escucha cuidadosamente el efecto Doppler, usted notará que el tono aumenta cuando el observador y la fuente se acercan y disminuye cuando se alejan. Uno de los aspectos más interesantes del efecto Doppler es el hecho que se aplica a todos los fenómenos ondulatorios, no solamente al sonido. La frecuencia de la luz también experimenta el efecto Doppler cuando hay movimiento relativo entre la fuente y el receptor. Para la luz, este cambio en frecuencia significa un cambio en color. En efecto, la mayoría de las galaxias distantes se observan cambiadas a rojo lo que significa que se están moviendo alejándose de la tierra. Algunas galaxias, sin embargo, se están moviendo hacia nosotros, y su luz muestra un cambio a azul.
En el resto de esta sección, nos centramos en el efecto Doppler en ondas acústicas. Demostramos que el efecto es diferente dependiendo de si el observador o la fuente se está moviendo. Finalmente, el observador y la fuente pueden estar en el movimiento, y presentamos los resultados para tales casos también.

Observador en movimiento
Si tenemos una fuente sonora estacionaria en aire quieto. El sonido radiado es representado por frentes de onda circunferenciales que se alejan de la fuente con una velocidad *v*. La distancia entre los frentes de onda es la longitud de onda λ, y la frecuencia del sonido es *f*. Para las ondas estas cantidades están relacionadas por $v = \lambda f$.
Para un observador que se acerca con una velocidad v_o, como se muestra en la figura, el sonido parece tener una mayor velocidad $v + v_o$ (considerando que la velocidad del sonido relativa al aire es siempre la misma). Como resultado llegan al observador en un determinado tiempo un mayor número de frentes de onda que si hubiera estado en reposo. Para el observador el sonido tiene una frecuencia, *f'*, que es más alta que la frecuencia de la fuente, *f*.



Podemos encontrar la frecuencia *f'* notando que la longitud de onda del sonido no cambia, sigue siendo λ. Sin embargo la velocidad se ha incrementado a $v' = v + v_o$.
Entonces, $v' = \lambda f'$, y de aquí

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_o}{\lambda}$$

Como $\lambda = v/f$, reemplazando, tenemos

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_o}{v/f} = f\left(\frac{v + v_o}{v}\right) = f\left(1 + \frac{v_o}{v}\right)$$

Notamos que *f'* es mayor que *f*.
En el caso de alejarse de la fuente sonora el observador, para el observador el sonido parecerá tener una velocidad reducida $v' = v - v_o$, repitiendo los cálculos encontramos que

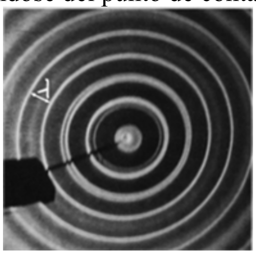
$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v/f} = f\left(\frac{v - v_o}{v}\right) = f\left(1 - \frac{v_o}{v}\right)$$

En general el Efecto Doppler para un observador en movimiento es

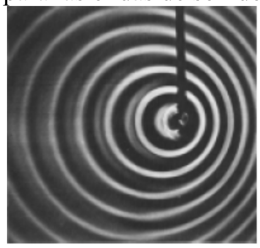
$$f' = f\left(1 \pm \frac{v_o}{v}\right)$$

El signo mas (+) corresponde cuando el observador se mueve hacia la fuente, y el signo menos (–) cuando el observador se aleja de la fuente.

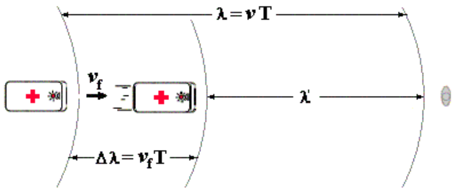
Fuente en movimiento
Con el observador estacionario y la fuente en movimiento, el efecto Doppler no se debe a que el sonido parece tener una mayor o menor velocidad como en el caso del observador en movimiento. Por el contrario, el sonido una vez que la fuente emite una onda sonora, viaja a través del medio con su velocidad característica *v*, sin importar lo que la fuente haga.
Por analogía, consideremos una onda de agua. La figura muestra una bolita oscilando hacia arriba y hacia abajo sobre la superficie de con recipiente de agua. Su movimiento causa ondas de agua circulares que se extienden alejándose del punto de contacto.



Cuanto la fuente de ondas (la bolita) es movida hacia la derecha (vea la figura), cada cresta de onda se mueve alejándose como un círculo en expansión, pero dado que la fuente se está moviendo, emite cada onda a una ubicación diferente. Como resultado, las ondas que se mueven en la misma dirección que la fuente se juntan apretándose, en tanto que las que se mueven en la dirección opuesta se separan alejándose unas de otras. La velocidad de la onda es constante si la fuente se mueve o no. Por tanto, donde la longitud de onda la frecuencia es incrementada, y donde la longitud de onda es alargada, la frecuencia es reducida. Esto es válido también para las ondas de sonido.



Consideremos Una fuente que se mueve hacia el observador con una velocidad v_f tal como muestra la figura. Si la frecuencia de la fuente es f, emite un frente de onda cada T segundos, donde $T = 1/f$. Por consiguiente, durante un periodo un frente de onda viaja una distancia vT mientras que la fuente emisora viaja una distancia $v_f T$. Como resultado el siguiente frente de onda es emitido a una distancia $vT - v_f T$ detrás del frente previo, como muestra la figura.



Esto significa que la longitud de onda hacia delante es

$\lambda' = vT - v_f T = (v - v_f)T$

Como mencionamos antes, la velocidad de la onda sigue siendo v, de aquí

$v = \lambda' f'$

La nueva frecuencia es

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_f)T}$$

Considerando que $T = 1/f$, tenemos

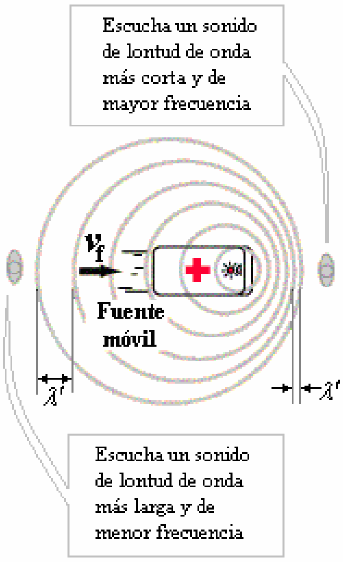
$$f' = \frac{v}{(v - v_f)(1/f)} = f\frac{v}{(v - v_f)} = f\frac{1}{\left(1 - \frac{v_f}{v}\right)}$$

f' es mayor que *f*, como esperábamos.

En general el Efecto Doppler para una fuente en movimiento y observador estacionario es

$$f' = f\frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_f}{v}\right)}$$

El signo menos (-) corresponde cuando la fuente se mueve hacia el observador, y el signo menos (–) cuando la fuente se aleja del observador.



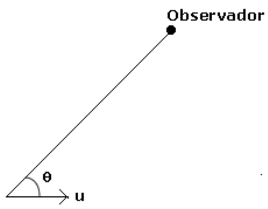
Finalmente

Si ambas se mueven:

Acercándose uno a otro $f' = f\dfrac{(v + v_o)}{(v - v_f)}$

Alejándose uno a otro $f' = f\dfrac{(v - v_o)}{v + v_f}$

La situación es más complicada para otras direcciones, pero puede analizarse sencillamente si la distancia de la fuente al punto de observación es grande comparada con la longitud de onda. En este caso se llega al resultado siguiente



$$\lambda_{(\theta)} = \lambda_0\left(1 - \frac{u\cos\theta}{v}\right)$$

o bien

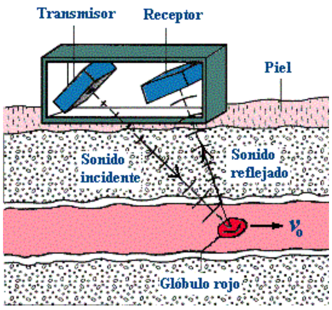
$$f_{(\theta)} = f_0\frac{1}{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{v}\right)}$$ para la frecuencia.

Estas últimas ecuaciones nos indican que el efecto Doppler depende de la componente de la velocidad de la fuente en la dirección del observador

APLICACIÓN: Medidor de flujo doppler

Este dispositivo mide la velocidad del torrente sanguíneo y constituye una aplicación interesante del efecto Doppler. El dispositivo consta de elementos transmisor y receptor colocados directamente sobre la piel, como se observa en la figura. El transmisor emite una onda sonora continua cuya frecuencia es de 5 MHz. Cuando los g1óbulos rojos reflejan el sonido su frecuencia cambia como si se presentara el efecto Doppler, debido a que se mueven las células. El

elemento receptor detecta el sonido reflejado y el contador electrónico mide su frecuencia, que está corrida por el efecto Doppler con respecto a la frecuencia de transmisión. A partir del cambio en frecuencia es posible determinar la rapidez con q fluye el torrente sanguíneo. Por lo general, el cambio en frecuencia es aproximadamente 6 000 Hz para rapideces de flujo aproximadamente iguales a 0,1 m/s. El medidor de flujo Doppler puede usarse para localizar regiones en las que los vasos capilares se estrechan, ya que en tales regiones se producen mayores rapideces de flujo, según la ecuación de continuidad. Además, el medidor de flujo Doppler puede utilizarse para detectar el movimiento cardiaco de un feto de apenas 8 a 10 semanas de edad.
EI efecto Doppler también se emplea en dispositivos de un radar para medir la velocidad de vehículos en movimiento. Sin embargo, se utilizan las ondas electromagnéticas, en vez de las ondas sonoras, para tales propósitos.



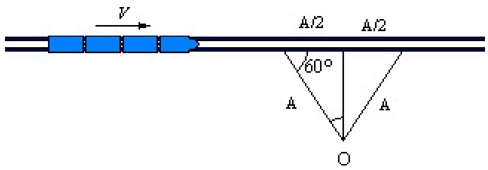
Ejemplo 53. La sirena de un auto patrullero estacionado emite un sonido de 1200 Hz. ¿Bajo condiciones en que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s, qué frecuencia oirá un peatón parado si la sirena se está acercando a 30 m/s? ¿Qué frecuencia oirá cuando la sirena está alejándose en 30 m/s?
Solución.
Acercándose

$$f' = \frac{v_f}{v_f - v} f = \left(\frac{340}{340 - 30}\right)(1200) = 1316 \text{ Hz}$$

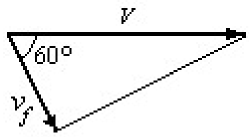
Alejándose

$$f' = \frac{v_f}{v_f + v} f = \left(\frac{340}{340 + 30}\right)(1200) = 1103 \text{ Hz}$$

Ejemplo 54. Una persona se encuentra a una distancia $\sqrt{3}A/2$ de línea férrea, por la cual viene un tren a velocidad constante V y tocando una sirena de frecuencia *f*. La velocidad del sonido en el aire es v_s.
¿Qué frecuencia escucha la persona? Cuando:
a) El tren esta acercándose a una distancia A de él.
b) Cuando se encuentra frente a él.
c) Cuando se ha alejado una distancia A de él.
d) ¿Qué frecuencia escucha un niño que se asoma por la ventanilla de uno de los vagones del tren?
Solución.
En el gráfico se ve fácilmente la situación geométrica planteada en el problema.



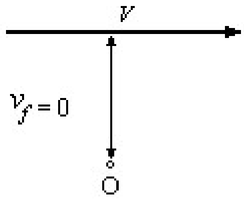
a) La velocidad de la fuente v_f respecto al observador será:



$$v_f = V \cos 60^o = \frac{V}{2}$$

Luego, $f' = f\left(\dfrac{v_s}{v_s - \frac{V}{2}}\right)$

Vemos que aumenta la frecuencia.
b) En este caso, la velocidad de la fuente con respecto al observador es cero.



$$f' = f$$

c) Como en el caso a) la velocidad de la fuente es: $v_f = \dfrac{V}{2}$, pero, se aleja del observador , o sea que la frecuencia disminuye :

$$f' = f\left(\frac{v_s}{v_s + \frac{V}{2}}\right)$$

d) En el caso del niño, la velocidad de la fuente respecto a él es nula, por lo tanto, escucha la frecuencia *f*.

Ejemplo 55. Una sirena que emite un sonido de 1000 Hz se aleja de un observador y se aproxima a una pared con una velocidad de 10m./seg. .
¿Cuál es la frecuencia que escucha el observador?
Solución.
El observador escucha dos frecuencias:
La frecuencia directa y la reflejada en la pared.
La frecuencia directa

$$f_1' = f\frac{1}{\left(1+\frac{v_f}{v_s}\right)} = 1000\frac{1}{\left(1+\frac{10}{330}\right)} = 971 \text{ Hz}$$

Y la frecuencia reflejada en la pared.
La frecuencia que llega a la pared es

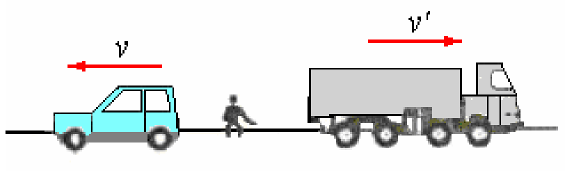
$$f_2' = f\frac{1}{\left(1-\frac{v_f}{v_s}\right)} = 1000\frac{1}{\left(1-\frac{10}{330}\right)} = 1\,031 \text{ Hz}$$

Las que sumadas producen pulsaciones de frecuencia

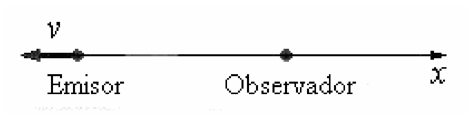
$$f_b = f_2' - f_1' = 1031 - 971 = 60 \text{ Hz}$$

Que es lo que escucha el observador.

Ejemplo 56. Un automóvil se mueve hacia la izquierda con una velocidad v = 30 m/s. En dirección contraria (rebasado suficientemente el punto de cruce) va un camión a una velocidad v' = 21 m/s, con una gran superficie reflectora en su parte posterior. El automóvil emite un bocinazo (emisión instantánea) con una frecuencia de 1 000 Hz. Determinar:
a) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas percibidas por el observador de la figura colocado a la derecha del auto?
b) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que llegan a la superficie reflectora del camión?
c) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibirá el observador después que las ondas se han reflejado en el camión?
d) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibiría el conductor del auto, después de la reflexión en el camión?
Velocidad del sonido: 330 m/s. Se supone el aire en calma.



Solución.
a)

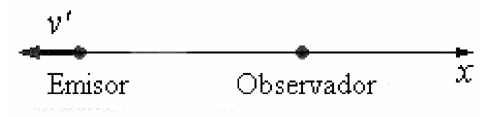


$$f_1 = f_0\frac{v_s}{v_s + v} = 1000\frac{330}{330+30} = 916{,}7\text{Hz}$$

b) La superficie reflectora es ahora el receptor auditivo.

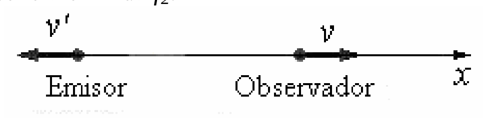
$$f_2 = f_0\frac{v_s - v'}{v_s + v} = 1000\frac{330-21}{330+30} = 858{,}3 \text{ Hz}$$

c) La superficie reflectora se vuelve foco emisor, emitirá con la frecuencia f_2.



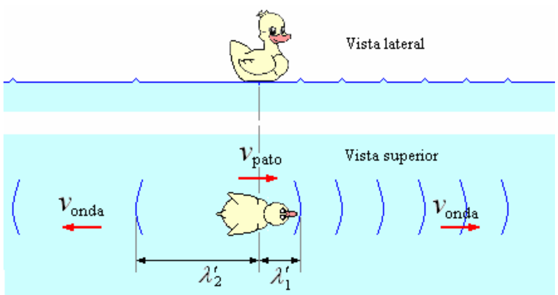
$$f_3 = f_2\frac{v_s}{v_s + v'} = 858{,}3\frac{330}{330+21} = 806{,}9 \text{ Hz}$$

d) El receptor es el auto y el emisor el camión y la frecuencia emitida f_2:



$$f_4 = f_2\frac{v_s - v}{v_s + v'} = 858{,}3\frac{330-30}{330+21} = 733{,}6 \text{ Hz}$$

Ejemplo 57. Al nadar un pato patalea una vez cada 1,6 s produciendo ondas superficiales en el agua, el pato avanza con rapidez constante en un estanque en el que las ondas superficiales viajan a 0,4 m/s. Las crestas de las ondas están espaciadas adelante del pato 0,10m
a) Calcule la rapidez del pato.
b) ¿Cuál es el espaciamiento de las crestas detrás del pato?
Nota: En este problema las ondas son producidas por el pataleo del pato y las ondas se propagan en el agua (ondas acuáticas).
Solución.



Perturbación producida por el pataleo del pato:
T = 1,6 s. $\Rightarrow f = 1 / 1{,}6$ Hz
Para la onda: v_{onda} = 0,4 m/s.

a) Como $\lambda_1' = 0{,}1\text{m} \Rightarrow f_1' = \frac{v_{onda}}{\lambda_1'} = \frac{0{,}4}{0{,}1} = 4\text{Hz}$

Efecto doppler de fuente que se mueve, la frecuencia hacia delante es:

$$f_1' = f\left(\frac{1}{1-\frac{v_{pato}}{v_{onda}}}\right) \Rightarrow 1 - \frac{v_{pato}}{v_{onda}} = \frac{f}{f_1'}$$

$$\Rightarrow v_{pato} = v_{onda}\left(1 - \frac{f}{f_1'}\right)$$

Reemplazando valores:

$$v_{pato} = 0{,}4\left(1 - \frac{1/1{,}6}{4}\right) = 0{,}3375 \text{ m/s.}$$

b) La frecuencia detrás del pato

$$f_2' = f\left(\frac{1}{1+\frac{v_{\text{pato}}}{v_{\text{onda}}}}\right)$$

$$= \frac{1}{1,6}\left(\frac{1}{1+\frac{0,3375}{0,4}}\right) = 0,39 \text{ Hz}$$

$$\lambda_2' = \frac{v_{\text{onda}}}{f_2'} = \frac{0,4}{0,39} = 1,18 \text{ m}$$

El espaciamiento de las crestas detrás del pato es de 1,18 m.

Ejemplo 58. El sonar de un patrullero estacionado al borde de una pista emite hacia delante un corto pulso de ultra sonido de frecuencia de 34 kHz .Luego de 1,5 s de haberse emitido las ondas se capta un pulso de retorno de frecuencia de 32 kHz proveniente de un automóvil.
(v_{sonido} = 340 m/s)
a) Determine la velocidad del automóvil
b) A que distancia del patrullero se encontraba el automóvil al salir el pulso
Solución.
a) Determine la velocidad del automóvil
La frecuencia que llega al automóvil

$$f_1' = f\left(1-\frac{v_o}{v_s}\right) = 34000\left(1-\frac{v_0}{340}\right)$$

Esta frecuencia vuelve al patrullero

$$f_2' = f_1'\frac{1}{\left(1+\frac{v_o}{v_s}\right)}\left(1-\frac{v_0}{v_s}\right) = 34000\left(\frac{340-v_o}{340+v_o}\right)$$

= 32000 Hz

$$\Rightarrow \left(\frac{340-v_o}{340+v_o}\right) = \frac{32}{34} \Rightarrow$$

$$34(340-v_o) = 32(340+v_o)$$

$$\Rightarrow 66v_o = 340(34-32)$$

$$\Rightarrow v_o = \frac{340(2)}{33} = 10,3 \text{ m/s}$$

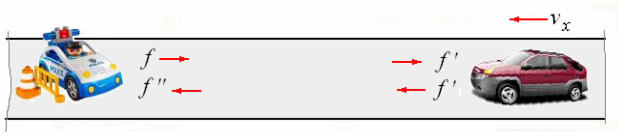
b) A que distancia del patrullero se encontraba el automóvil al salir el pulso
Cuando el pulso llega al automóvil han pasado 1,5/2 = 0,75 s
La distancia a la que se encontraba el automóvil del patrullero fue: $340(0,75) - 10,30(0,75)$ = 240,28 m.

Ejemplo 59. El sonar de un patrullero estacionado al borde de una pista emite hacia delante un corto pulso de ultrasonido de frecuencia 60 kHz. Luego de un corto tiempo se capta un pulso de retorno de frecuencia 62 kHz proveniente de un automóvil.
Determine: la velocidad con que se mueve el carro e indique si el carro se acerca o aleja del patrullero.
(Velocidad del sonido = 340 m/s).
Solución.

$$v_s = 340 \text{ m/s}$$

v_x es la velocidad del automóvil.

El sonido se emite del patrullero, llega al automóvil y regresa al patrullero.



$$f = 60 \text{ Hz y } f'' = 62 \text{ Hz}$$

Al automóvil llega

$$f' = f\left(\frac{v_s \pm v_o}{v_s}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f' = 60\left(\frac{340 \pm v_x}{340}\right) \qquad (1)$$

+ o -, dependiendo si el automóvil se acerca o aleja del patrullero en reposo.

Al patrullero llega de retorno

$$f'' = f'\left(\frac{v_s}{v_s \mp v_f}\right)$$

$$\Rightarrow 62 = f'\left(\frac{340}{340 \mp v_x}\right) \qquad (2)$$

- o +, dependiendo si el automóvil se acerca o aleja del patrullero en reposo.

Multiplicando (1) x (2):

$$62 = \frac{60(340 \pm v_x)}{(340 \mp v_x)}$$

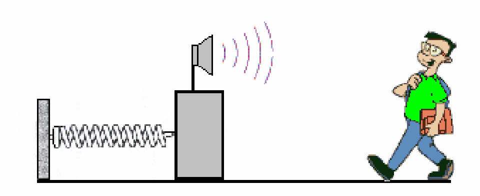
La única posibilidad de tener solución es en el caso que el automóvil se acerca al patrullero.:

$$62 = \frac{60(340 + v_x)}{(340 - v_x)} \Rightarrow v_x = 5,57 \text{ m/s}$$

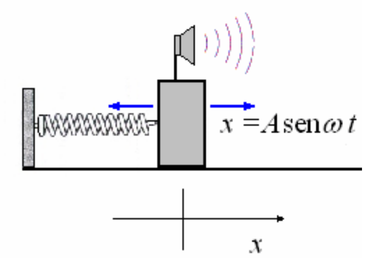
Luego el automóvil se está acercando al patrullero.

v_x = 5,57 m/s.

Ejemplo 60. Un altavoz es colocado sobre un bloque, conectado a un resorte (k = 50 N/m), como se muestra en la figura. La masa total (bloque y altavoz) es 0,5kg; el sistema oscila con una amplitud de 5 cm. Si el altavoz emite a 500 Hz, determinar:
a) La frecuencia máxima percibida por la persona.
b) La frecuencia mínima percibida por la persona.
Asumir c = 340m/s



Solución.
Oscilación de la masa:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0,5}} = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

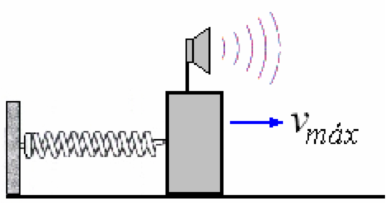
$$x = A\operatorname{sen}\omega t = 0,05\operatorname{sen}10t \;\Rightarrow\; v = 0,5\cos 10t$$

$$v_{máx} = \begin{cases} +0,5 \\ -0,7 \end{cases}$$

En general el Efecto Doppler para una fuente en movimiento y observador estacionario es

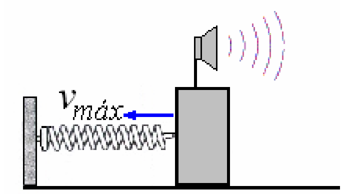
$$f' = f\frac{1}{\left(1 \mp \dfrac{v_f}{v}\right)}$$

El signo menos (-) corresponde cuando la fuente se mueve hacia el observador, y el signo menos (–) cuando la fuente se aleja del observador.
a) La frecuencia máxima percibida por la persona.



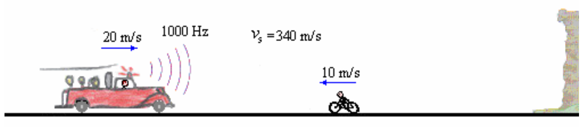
$$f' = f\frac{1}{\left(1 - \dfrac{v_f}{v}\right)} = 500\frac{1}{\left(1 - \dfrac{0,5}{340}\right)} = 500,74 \text{ Hz}$$

b) La frecuencia mínima percibida por la persona.



$$f' = f\frac{1}{\left(1 + \dfrac{v_f}{v}\right)} = 500\frac{1}{\left(1 + \dfrac{0,5}{340}\right)} = 499,27 \text{ Hz}$$

Ejemplo 61. El carro de bomberos que se mueve con una velocidad de 20 m/s, hace sonar su sirena que tiene una frecuencia de 1000 Hz.
Un ciclista se acerca al carro alejándose del acantilado con una velocidad de 10 m/s,
a) ¿Qué sonido escucha el conductor del carro de bomberos?
b) ¿Qué sonido escucha el ciclista?



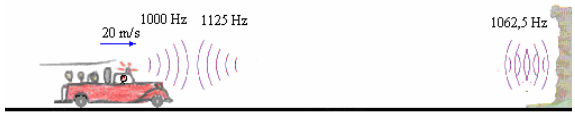
Solución.
a) El conductor escucha dos frecuencias f_1 que es la frecuencia f (1000 Hz) de la sirena y la frecuencia f' del eco producido por la presencia del acantilado.
La frecuencia que llega al acantilado se debe a una fuente que se acerca con v_f = 20 m/s

$$f' = f_0\frac{v_s}{v_s - v_f} = 1000\frac{340}{340 - 20} = 1062,5 \text{ Hz}$$

Esta frecuencia se refleja y llega a los oídos del conductor que se acerca con velocidad v_o = 20 m/s.

$$f'' = f'\frac{(v_s + v_o)}{v_s} = 1062,5\frac{(340 + 20)}{340} = 1125 \text{ Hz}$$

Como las dos frecuencias que escucha son muy cercanas escuchará batidos o pulsaciones correspondientes a las frecuencia f = 1000 Hz y f' = 1125 Hz.
Es decir $f_b = 1125 - 1000$ = 125 Hz (frecuencia de los batidos) .



b) Al oído del ciclista llega la frecuencia directa que es con observador y fuente acercándose

$$f_1'' = f\frac{v_s + v_o}{v_s - v_f} = 1000\frac{340 + 10}{340 - 20} = 1093,75 \text{ Hz}$$

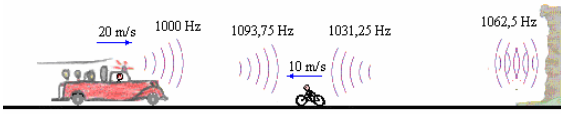
También llega el eco producido por el acantilado

$$f_2'' = f'\frac{(v_s - v_o)}{v_s} = 1062,5\frac{(340 - 10)}{340} =$$

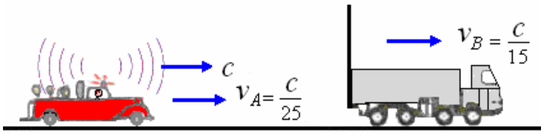
1031,25 Hz

Como las dos frecuencias que escucha son muy cercanas escuchará batidos

$f_b = 1093,75 - 1031,25$ = 62,5 Hz (frecuencia de los batidos).



Ejemplo 62. Las ondas sonoras emitidas por el carro de bomberos (A) se reflejan en el camión (B) y al regresar interfieren con las ondas emitidas.
Determinar el número de pulsaciones por segundo que detecta un observador sobre el móvil A.
f_o = 400 Hz



Solución.
Frecuencia que llega a la pared

$f' = f_0$ Acercándose fuente y alejándose "observador"

$$f' = f_0 \frac{(v - v_B)}{(v - v_A)} \qquad (1)$$

Frecuencia que recibe el pasajero
Alejándose fuente y acercándose "observador"

$$f'' = f' \frac{(v + v_A)}{(v + v_B)} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$f'' = f_0 \frac{(v - v_B)}{(v - v_A)} \frac{(v + v_A)}{(v + v_B)} =$$

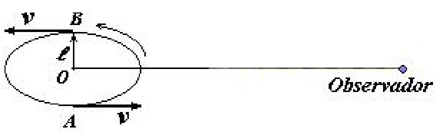
$$400 \frac{\left(c - \frac{c}{15}\right)}{\left(c - \frac{c}{25}\right)} \frac{\left(c + \frac{c}{25}\right)}{\left(c + \frac{c}{15}\right)}$$

$$= 400 \frac{(15-1)}{(25-1)} \frac{(25+1)}{(15+1)} = 400 \frac{(14)}{(24)} \frac{(26)}{(16)}$$

= 379,17 Hz.

El pasajero escucha f_p = 400 – 379,17 = 20,83 pulsaciones/s

Ejemplo 63. Una sirena de 420 Hz gira atada al extremo de una cuerda de 2 m de longitud a razón de 300 r.p.m. ¿Qué intervalo de frecuencias percibe un observador situado en el plano de rotación de la sirena y alejado de ésta? Tomar para velocidad del sonido en el aire 340 m/s.



Solución.

$$\omega = 300 \frac{\text{rev} \times 2\pi \text{rad} \times \text{min}}{\text{min} \times \text{rev} \times 60\text{s}} = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La velocidad de la fuente emisora es:

$v = \omega\ell = 10\pi(2) = 20\pi$ m/s

Si el observador está lo suficientemente alejado, tomamos la dirección de percepción en la misma dirección que tiene la velocidad. Cuando la sirena se encuentra en la posición A de la figura, tendremos:

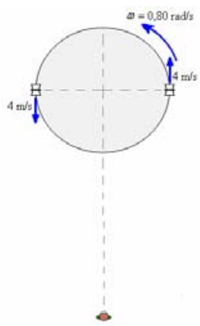
$$f_1' = f \frac{v}{v - v_f} = \frac{340}{340 - 20\pi} = 515,2 \text{ Hz}$$

En el punto B:

$$f_2' = f \frac{v}{v + v_f} = \frac{340}{340 + 20\pi} = 354,2 \text{ Hz}$$

El intervalo será el comprendido entre las dos frecuencias calculadas

Ejemplo 64. Un carrusel de 5,0 m de radio, tiene un par de altoparlantes de 600 Hz montados en postes en extremos opuestos de un diámetro. El carrusel gira con una velocidad angular de 0,80 rad/s. Un observador estacionario está colocado a cierta distancia enfrente del carrusel. La velocidad del sonido es 350 m/s.
a) Calcular la longitud de onda más larga que llega al escucha desde las sirenas.
b) Calcular la frecuencia de las sirenas más alta que escucha.
c) Calcular la frecuencia de batido máxima en la posición del escucha.
d) Un escucha montado en una bicicleta que se aleja directamente del carrusel con una rapidez de 4,5 m/s. ¿Cuál es la frecuencia de las sirenas más alta que escucha?
Solución.
a)



La longitud de onda más larga es con la menor frecuencia
Y eso sucede cuando la fuente se aleja

$$f_1' = f \frac{v_s}{(v_s + v_f)} = 600 \frac{350}{(350 + 0,80 \times 5)}$$

$$= 600 \frac{350}{(354)} = 593,2 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{350}{593,2} = 0,59 \text{ m} = 59 \text{ cm}.$$

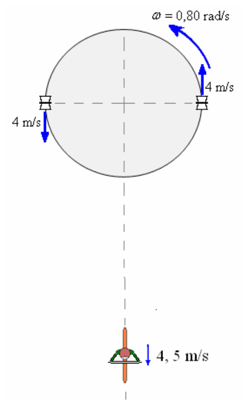
b) La frecuencia más alta sucede cuando la fuente se acerca.

$$f_2' = f\frac{v_s}{(v_s - v_f)} = 600\frac{350}{(350 - 0{,}80\times 5{,}0)}$$

$$= 600\frac{350}{(346)} = 606{,}9 \text{ Hz}$$

c) $f_b = f_2' - f_1' = 606{,}9 - 593{,}2 = 13{,}74$ Hz

d)



La fuente se acerca y el observador se aleja.

$$f'' = f\frac{(v_s - v_o)}{(v_s - v_f)} = 600\frac{(350 - 4{,}5)}{(350 - 4)} =$$

$$600\frac{(345{,}5)}{(346{,}0)}$$

Ejemplo 65. Un buque se acerca a una costa acantilada haciendo sonar una sirena de 600 Hz. El sonido se refleja en la costa y se oye 10 s después, interfiriendo con el propio de la sirena, lo que da lugar a 12 pulsaciones por segundo. Calcule con estos datos el tiempo que el buque tardará en alcanzar la costa.

Solución.

$f_b = f' - f \Rightarrow f' = f + f_b = 600 + 12 = 612$ Hz

$$f' = f\frac{(v_s + v_b)}{(v_s - v_b)} = 600\frac{(340 + v_b)}{(340 - v_b)} = 612$$

$$\Rightarrow v_b = 3{,}88\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sea *d* la distancia a la que se encuentra el buque cuando inicia el sonido de la sirena, 10 segundos después escucha pulsaciones, esto es el tiempo de viaje de las ondas de ida y vuelta.

Tiempo de ida: $t_1 = \dfrac{d}{v_s}$

Tiempo de vuelta: $t_2 = \dfrac{d - v_b t}{v_s}$

Tiempo total:

$$t = t_2 + t_2 = \frac{d}{v_s} + \frac{d - v_b t}{v_s} = \frac{2d - v_b t}{v_s}$$

$$\Rightarrow d = \frac{(v_s + v_b)t}{2} = \frac{(340 + 3{,}88)10}{2} = 1719{,}4 \text{ m.}$$

$$t_b = \frac{1719,}{}$$

Como $t_b = \dfrac{d - v_b t}{v_b}$, obtenemos:

$$t_b = \frac{1719{,}4 - 3{,}88(10)}{3{,}88} = 433{,}14 \text{ s} = 7 \text{ min } 13{,}14 \text{ s.}$$

El tiempo que el buque tardará en alcanzar la costa es 7 min 13,14 s.

Ejemplo 66. Una sirena que emite con una frecuencia *f* sube verticalmente hacia arriba, partiendo del suelo y a una velocidad constante *V*. El punto de partida de la sirena está a una distancia *d* de un observador.

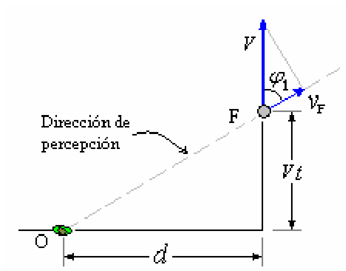
a) Supuesto el observador parado, calcular en función de los datos la frecuencia que percibiría el observador después de transcurridos *t* segundos.

b) Supuesto que el observador se aleja del punto de partida a una velocidad *V'*, y que parte del punto a esa distancia *d*, en el mismo instante que la sirena. Calcular en función de los datos la frecuencia que percibiría el observador, después de transcurridos t segundos.

(Velocidad del sonido: *v)*

Solución.

a)



Frecuencia cuando la fuente se aleja del observador:

$$f' = f\frac{v}{(v + v_F)},$$

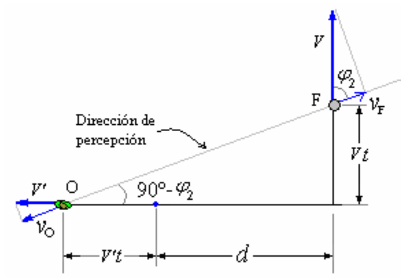
$$v_F = V\cos\varphi_1 = V\frac{Vt}{\sqrt{V^2t^2 + d^2}}$$

De aquí:

$$f' = f\frac{v}{\left(v + \dfrac{V^2 t}{\sqrt{V^2t^2 + d^2}}\right)}$$

$$= f\frac{v\sqrt{V^2t^2 + d^2}}{v\sqrt{V^2t^2 + d^2} + V^2 t}$$

b)



Frecuencia cuando la fuente y el observador se alejan mutuamente:

$$f' = f\frac{(v - v_O)}{(v + v_F)}$$

$$v_O = V'\cos(90^\circ - \varphi_2) = V'sen\varphi_2$$

$$= V'\frac{V't + d}{\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2}}$$

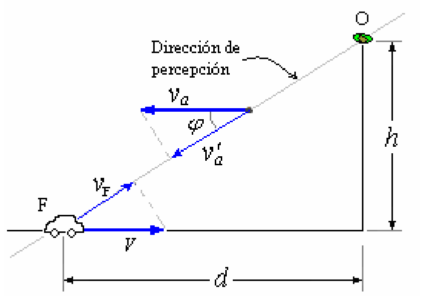
$$v_F = V\cos\varphi_2 = V\frac{Vt}{\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2}}$$

$$f' = f\frac{\left(v - V'\dfrac{V't + d}{\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2}}\right)}{\left(v + \dfrac{V^2t}{\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2}}\right)}$$

$$= f\frac{\left[v\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2} - V'(V't + d)\right]}{\left[v\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2} + V^2t\right]}$$

Ejemplo 67. Un hombre se encuentra en lo alto de una torre de altura *h*. A una distancia *d* del pie de ésta, un automóvil que se dirige hacia ella con una velocidad V emite un bocinazo con una frecuencia *f*. El aire se mueve con una velocidad v_a y en dirección contraria al automóvil. Calcular en función de estos datos la frecuencia percibida por el hombre de la torre. (Velocidad del sonido: *v).*

Solución.



La velocidad del sonido en la dirección de percepción está afectada por la velocidad del viento, de tal modo que bajo estas condiciones $v_s = (v - v'_a)$

La frecuencia que percibe un observador en reposo con la fuente acercándose, bajo estas condiciones es:

$$f' = f\frac{(v - v'_a)}{[(v - v'_a) - v_F]}$$

$$v'_a = v_a\cos\varphi = \frac{v_a d}{\sqrt{h^2 + d^2}},$$

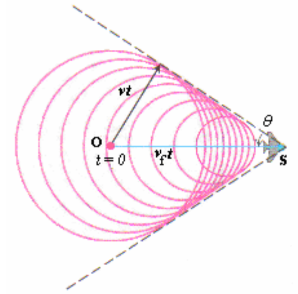
$$v_F = V\cos\varphi = \frac{Vd}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$

$$f' = f\frac{\left(v - \dfrac{v_a d}{\sqrt{h^2 + d^2}}\right)}{\left(v - \dfrac{v_a d}{\sqrt{h^2 + d^2}} - \dfrac{Vd}{\sqrt{h^2 + d^2}}\right)}$$

$$= f\frac{\left(v\sqrt{h^2 + d^2} - v_a d\right)}{\left(v\sqrt{h^2 + d^2} - v_a d - Vd\right)}$$

FORMACION DE UNA ONDA DE CHOQUE

Hemos visto en el efecto Doppler que los frentes de onda producidos por una fuente de sonido en movimiento están comprimidos en la dirección hacia la cual está viajando la fuente. A medida que aumenta la velocidad de la fuente, la compresión se hace más pronunciada. ¿Qué sucede cuando la velocidad de la fuente empieza a hacerse mayor que la velocidad de la onda? En este caso, la fuente se mueve más aprisa que las ondas y los argumentos usados para describir el efecto Doppler ya no son aplicables más. En su lugar, las ondas esf6ricas expandiéndose desde la fuente t posiciones posteriores a lo largo de la trayectoria de la fuente, se combinan todas formando un frente de onda único cónico que se conoce como onda de choque (véase la figura). Como la onda de choque está compuesta por muchos frentes de onda actuando juntos, tiene una gran amplitud.

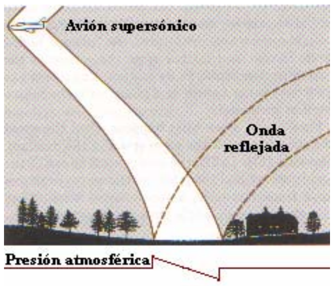


Para el tiempo $t = 0$ la fuente emite una onda desde el punto O En un tiempo posterior t, el frente de la onda se ha expandido a un radio $r = vt$ y la fuente ha viajado a una distancia *v,t* para alcanzar al punto S. Frentes de onda posteriores también se expanden como se indica en la figura anterior, de manera que a ese tiempo t alcanzan justamente la línea tangente que se dibuja desde S al frente de onda centrado en O. La envolvente resultante de frentes de onda forma un cono con un semiángulo θ dado por

$$\text{sen}\,\theta = \frac{vt}{v_f t} = \frac{v}{v_f}$$

La relación v_f/v, llamada número Mach, se usa frecuentemente para dar la velocidad en términos de la velocidad del sonido. Así una velocidad de 1,5 veces la velocidad del sonido se denota como Mach 1,5.
Cuando la onda de choque es producida por un aeroplano que se mueve a una velocidad mayor que la velocidad del sonido, es decir, a velocidad supersónica, la onda de choque se conoce como explosión sónica.

En la figura siguiente se muestra la onda de choque producida en el aire por un aeroplano supersónico que se mueve a Mach 1,1. Nótese que además de la onda de choque producida en el extremo frontal, en la parte posterior del aeroplano aparecen ondas de choque menores. Una nave a alta velocidad produce dos o más ondas de choque, las cuales están asociadas con la nariz, la cola y otras proyecciones de la nave.
Los aviones supersónicos producen ondas de choque que se escuchan como explosiones sónicas.



El gráfico muestra que la presión de aire se eleva bruscamente a lo largo de la onda de choque formada por la parte delantera de la nave. Luego la presión cae por debajo de la presión atmosférica y nuevamente se eleva bruscamente a lo largo de las ondas de choque formadas por la parte posterior de la nave. (Los frentes de onda son curvos porque la velocidad del sonido depende de la temperatura del aire y la temperatura varía con la altura.). La segunda elevación vuelve a la normalidad a la presión.
El tiempo entre los dos cambios de presión es 1/30 de segundo, de tal manera que se escucha un simple “Bum” cuando las ondas de choque pasan.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un joven en un barco mira las ondas en un lago que pasan con una pausa de medio segundo entre cada cresta, ¿Si a una onda le toma 1,5 s pasar los 4,5 m de longitud de su barco de 4,5 m, cuál es la velocidad, la frecuencia, el período, y la longitud de onda de las ondas?

2. Los delfines se comunican bajo el agua usando ondas de compresión de alta frecuencia. ¿Si la velocidad del sonido en agua es 1,4 x 10^3 m/s y la longitud de onda promedio es 1,4 centímetros, cuál es la frecuencia típica del sonido de un delfín? ¿Es esta frecuencia audible a los seres humanos?

3 La cavidad del pecho de un ser humano resuena alrededor de 8 Hz. ¿qué longitud de onda causa tal vibración?

4. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es

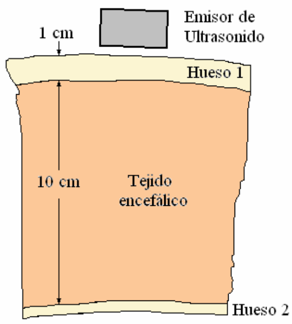
$$y = 6{,}0\,\text{cm}\,\text{sen}\left[(2{,}0\pi\ \text{rad/m})x + (4{,}0\pi\ \text{rad/s})t\right].$$

Calcule:
a) amplitud
b) longitud de onda
c) frecuencia
d) velocidad de propagación
e) dirección de propagación de la onda
f) La velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

5. Una barra de acero transmite ondas longitudinales por medio de un oscilador acoplado a uno de sus extremos. La barra tiene un diámetro de 4 mm. La amplitud de las oscilaciones es 0,1 mm y la frecuencia es 10 oscilaciones por segundo. Hallar:
a) ecuación de las ondas que se propagan a lo largo de la barra.
b) energía por unidad de volumen.
c) promedio del flujo de energía por unidad de tiempo a través de una sección cualquiera de la barra.
d) potencia requerida para operar el oscilador.

6. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es $y = 1{,}8\,\text{mm}\,\text{sen}\left[(23{,}8\text{rad/m})x + (317\text{rad/s})t\right]$. La cuerda se encuentra sometida bajo una tensión de 16,3 N. Determinar la densidad lineal de masa.

7. En una eco encefalografía se aplica una señal de ultrasonido para detecta la respuesta de un obstáculo (hueso, tumor, etc.). Suponga la disposición de la figura. Calcule el tiempo que emplea el ultrasonido para obtener un eco en la segunda capa ósea (hueso 2). Se sabe que la velocidad de propagación de las ondas sonoras en el hueso es de 3,370 m/s y en el tejido encefálico, de 1550 m/s



Respuesta. 1,35 x 10^4 m/s

8. Calcule la distancia a la cual un nadador debe encontrarse respecto del fondo (o de un obstáculo) para percibir el fenómeno del eco de un sonido producido por él mismo (velocidad del sonido en agua 1640 m/s).
Respuesta. 82 m

9. La velocidad de propagación en un gas y en un líquido a la misma temperatura es de 330 m/s y 1500 m/s respectivamente. Un dispositivo, por ejemplo, un diapasón, produce ondas sonoras en ambos fluidos de 420 Hz.
Halle la relación de longitudes de onda en el líquido respecto del gas y la longitud de onda del sonido en cada medio.
Respuesta.
a) $\dfrac{\lambda_{líquido}}{\lambda_{gas}} = 4{,}55$, b) $\lambda_{gas} = 0{,}786\text{m}$,
c) $\lambda_{l_{líquido}} = 3{,}57\text{m}$

10. Una ventana de 1,5 m^2 se abre en una calle donde el ruido propio produce un nivel sonoro en la ventana de 60 dB. Determine la potencia acústica que entra por la ventana mediante ondas sonoras.
Respuesta. 1,5 x 10^4 W

11. Un alambre se doblado en un lazo circular del diámetro D. se asegura por medio de una abrazadera por los extremos opuestos. Se envía una onda transversal alrededor del lazo por medio de un vibrador pequeño que actúe cerca de la abrazadera. Encuentre las frecuencias de resonancia del lazo en los términos de la velocidad *v* de la onda y el diámetro D.
Respuesta. Los soportes del lazo forman nodos en dos puntos; para medio lazo $\pi \dfrac{D}{2} = n\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \dfrac{\pi D}{n}$,
con esto se encuentra $f = \dfrac{v}{\lambda} = n\left(\dfrac{v}{\pi D}\right)$

12. Una cuerda vibrante sometida a una fuerza de tracción vibra con frecuencia de 220 Hz. Si la fuerza de tracción se duplica y se mantienen las otras condiciones constantes, determine la nueva frecuencia de vibración.
Respuesta. f_2 = 311,13 Hz

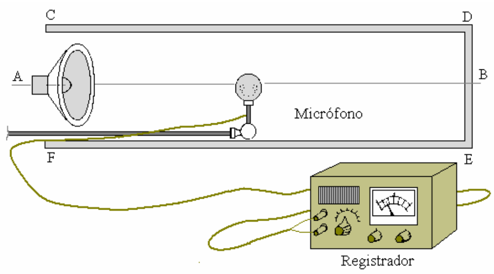
13. Una cuerda de 80 cm de longitud y densidad lineal de 1,69 x10^{-4} g/cm, está fija en sus dos extremos y emite un sonido fundamental cuando se la somete a una fuerza de tracción de 1,92 kg.
a) Determine la frecuencia fundamental del sonido
b) Calcule el factor por el cual debe multiplicarse la intensidad de la fuerza de tracción para que la frecuencia del nuevo sonido fundamental sea el tercer armónico del caso anterior
Respuesta. a) 481Hz, b) 9

14. La cuerda de un violín de 30 cm de longitud emite un sonido de 460 Hz. Al fijarla en un punto tal que su longitud disminuya a 25 cm, emite un nuevo sonido. Calcule su frecuencia.
Respuesta. f = 552 Hz

15. Un diapasón emite un sonido de frecuencia constante. Este diapasón (vibrando) se coloca sobre un tubo cilíndrico de vidrio que contiene agua. El nivel de agua puede variar observándose que, para ciertas alturas *h* de la columna de aire en el tubo, la intensidad del sonido es mucho mayor que para otras. Las alturas para las -cuales existe resonancia son h_1 = 12 cm; h_2 = 36 cm; h_3 = 60 cm. Calcule la longitud de la onda emitida por el diapasón.
Respuesta. λ = 48 cm

16. Una probeta tiene 80 cm de profundidad y recibe la mayor cantidad de agua para que el aire contenido en el tubo entre en resonancia con un diapasón que emite una onda sonora de período T = 32 x 10^{-1} s (valor de la velocidad del sonido en aire en las condiciones del problema, 340 m/s).
Calcule la profundidad del agua.
Respuesta. 0,52 m

17. Un altoparlante se coloca en un punto A de una caja rectangular de sección C D E F. El sonido emitido es de 120 Hz. Suponga que un micrófono A, puede desplazarse a lo largo de la línea AB. El micrófono es conectado a un registrador de intensidad sonora. Mediante este experimento se logra demostrar que en A y en puntos contados a partir de A hacia la derecha cada 1,20 m se registra un máximo e intensidad sonora.
a) calcule la longitud de onda sonora emitida
b) calcule la velocidad de propagación
c) ¿qué intensidad indicará el micrófono cuando llegue a B?

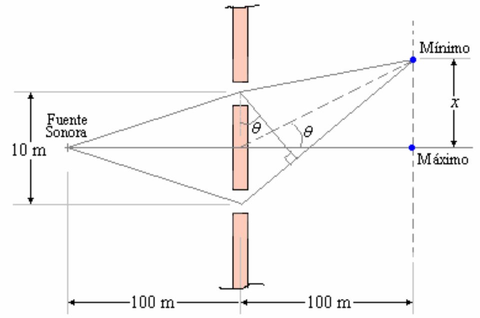


Respuesta. a) λ = 2,40 m, b) v = 288 m/s

18. Sea un tubo de Kundt construido con un tubo de vidrio, un émbolo que ajusta en un extremo y un altoparlante colocado en el otro (fuente sonora en el cual se utiliza como "detector" polvo de corcho. Ajustando, convenientemente la posición del émbolo se observa que el polvo de corcho en ciertos lugares se agita violentamente, mientras que en otros permanece en reposo. En estas condiciones se mide la distancia entre de puntos consecutivos en reposo que da 35 cm. Entonces se retira el aire atmosférico y se lo sustituye

por otro gas, observándose ahora que distancia entre los puntos citados precedentemente es de 45 cm, Sabiendo que la velocidad del sonido en el aire era de 340 m/s, calcule la velocidad del sonido en el gas introducido.
Respuesta. 437,14 m/s

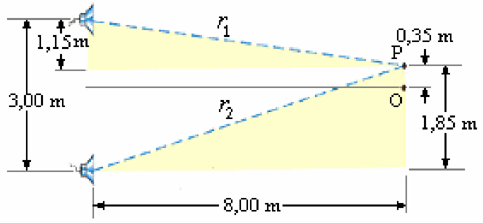
19. Una fuente sonora F emite ondas de λ = 2 m. A 100 m de la misma encuentra una pared con dos ventanas separadas entre si. A 100 m otro lado de esta última pared un observador detecta una posición máxima intensidad de sonido. ; ¿A qué distancia mínima debe colocarse observador para dejar de percibir el sonido?



Respuesta.

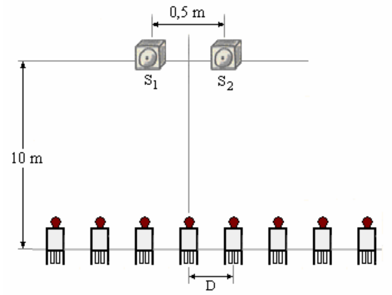
$$x = \frac{1}{2}\frac{D\lambda}{\sqrt{d^2 - \frac{\lambda^2}{4}}} = 5{,}03\text{m}$$

20. Dos altoparlantes están colocados como se muestra en la figura con una separación de 3 m. Los altoparlantes son puestos a vibrar sinusoidalmente por un amplificador que hace que emitan ondas sonoras en fase. Un hombre se encuentra originalmente en el punto O a 8 m de los altoparlantes en una línea perpendicular a ambos los altoparlantes y que pasa por el punto medio del segmento que une los altoparlantes donde escucha un máximo de intensidad. El hombre después se desplaza a un punto P situado a 0,350 m del punto O. En ese punto detecta el primer mínimo de la intensidad sonora.
a) Calcule la diferencia de fase de las ondas sonoras producidas por los dos altoparlantes para el punto P.
b) Calcule la longitud de onda de las ondas sinusoidales.
c) Determine la frecuencia de la fuente sabiendo que en estas condiciones (20ºC) la velocidad del sonido en el aire es de 344 m/s.
d) Si la frecuencia de la fuente de ondas se ajusta de modo que el hombre detecte el primer mínimo de intensidad sonora a 0,75 m del punto O, ¿cuál será la nueva frecuencia?



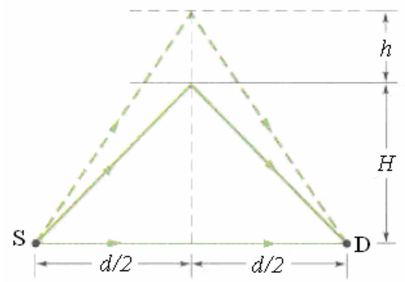
Respuesta.
a) 13 cm b) 26 cm c) f =1,3 kHz d) f = 0.63 kHz

21. Dos altoparlantes están colocados con una distancia de 0,5 m entre si emiten ambos una onda sonora. Los altoparlantes son puestos a vibrar por un amplificador que hace que emitan ondas en fase. A 10 m de distancia de los altoparlantes hay una fila de sillas y a una distancia de D = 1 m del punto central está situado el primer mínimo de intensidad.



a) Diga si un oyente en la silla central escucha un máximo o un mínimo de intensidad del sonido.
b) ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia de las ondas sonoras considerando que la velocidad del sonido es 344 m/s (20ºC)?
c) ¿Cuál es la diferencia del camino del sonido emitido por los dos altoparlantes correspondientes al máximo siguiente de intensidad?
d) Considere ahora que el amplificador hace que las ondas producidas por los dos altoparlantes estén desfasados 180º. Diga si tienen un máximo o mínimo de intensidad en el punto central y a D = 1 m del punto central.
Respuesta.
a) Máximo, b) λ =10 cm, f =3.5 kHz, c) 10 cm, d) mínimo; máximo

22. Una fuente S y un detector D de ondas de radio están separados una distancia *d*, uno del otro. Las ondas de radio de longitud de onda λ llegan a un detector después de un recorrido en línea recta o después de ser reflejados por alguna capa en la atmósfera. Cuando esa capa atmosférica está a una altura *H* las ondas llegan en fase al detector. Si la altura de la capa reflectora aumenta gradualmente, la diferencia de fase entre las ondas en el detector cambia de forma gradual hasta que las ondas están desfasadas π cuando la capa reflectora está a la altura $H + h$.



a) Encuentre la expresión de λ en función de: *d*, *h*, e *H*.
b) Calcule la longitud de onda sabiendo que la fuente y el detector se encuentran apartados 100 km, y que H = 6 km y h = 52 m.

Respuesta.
a)

$$\lambda = 4\left[\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (H+h)^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + H^2}\right]$$

b) λ =25 m

23. Una fuente sonora emite un sonido de 540 Hz y se aproxima a un observador detenido con velocidad de valor 60 km/h. Supuesto que el valor de la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, calcule la frecuencia del sonido recibido por el observador.
Respuesta. 567 Hz

24. Una fuente sonora estacionaria emite un sonido de frecuencia 680 Hz. Si el valor de la velocidad del sonido del aire es de 340 m/s, determine en qué sentido (con relación a la fuente) debe moverse un observador y con qué valor de velocidad debe hacerla si desea que la frecuencia del sonido percibido sea de 694 Hz.
Respuesta. a) hacia la fuente, b) 6,8 m/s

25. Una fuente sonora emite sonido con frecuencia de 840 Hz y se aproxima a un observador a velocidad de valor 40 m/s. Simultáneamente, el observador se acerca a la fuente con velocidad de valor 10 m/s, Si se acepta como valor de la velocidad del sonido 340 m/s, calcule el nuevo valor de la frecuencia percibida por el observador.
Respuesta. 980 Hz

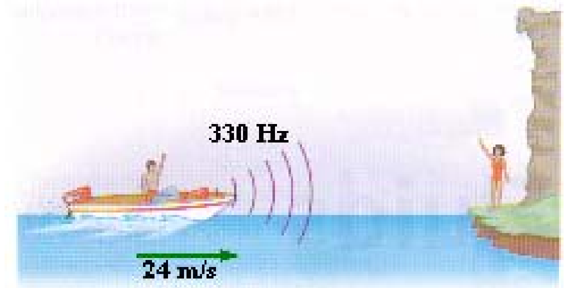
26. Una fuente sonora se aparta de un observador partiendo del reposo y con aceleración constante de valor 2 m/s^2. La velocidad del sonido en este medio vale 360 m/s. Determine el intervalo entre dos sonidos recibidos a 20 s y 30 s.
Respuesta. 1,05

27. Cuatro batidos o pulsaciones por segundo se oyen cuando dos diapasones suenan simultáneamente. Después de unir un pedazo pequeño de la cinta a una rama del segundo diapasón, los dos diapasones se hacen sonar otra vez y se oyen dos batidos por segundo. Si el primer diapasón tiene una frecuencia de 180 hertzios, ¿cuál es la frecuencia original del segundo diapasón?

Respuesta. La frecuencia del segundo diapasón debe ser más alta que la del primer diapasón o al agregar la cinta habría aumentado el número de batidos. Por lo tanto, v_2 - 180 = 4 o v_2 = 184 Hz.

28. Un conductor viaja al norte en una carretera a una velocidad de 25 m/s. Un auto patrullero, conduciendo al sur a una velocidad de 40 m/s, se acerca con su sirena que suena en una frecuencia de 2500 hertz.
a) ¿Qué frecuencia escucha el conductor mientras que el patrullero se acerca?
b) ¿Qué frecuencia escucha el conductor después de pasar el patrullero?
c) ¿si hubiera estado viajando el conductor al sur, cuáles serían los resultados para (a) y (b)?
Respuesta. a) 3042 Hz b) 2072 Hz c) 2625Hz, 2401 Hz

29. Jorge se está dirigiendo hacia la isla con una velocidad de 24 m/s cuando él ve a Betty que esta en orilla en la base de un acantilado. Jorge hace sonar la bocina de frecuencia 330 Hz.
a) ¿Qué frecuencia escucha Betty?
b) Jorge puede oír el eco de su bocina reflejado por el acantilado. ¿La frecuencia de este eco mayor que o igual a la frecuencia es oída por Betty? Explique.
c) Calcule la frecuencia que escucha Jorge del eco del acantilado.



30. Dos naves en una niebla espesa están hacen sonar sus sirenas, que producen sonido con una frecuencia de 165 hertz. Una de las naves está en el reposo; la otra se mueve en una línea recta que pasa por la que está en el reposo. ¿Si la gente en la nave inmóvil oye una frecuencia de los batidos de 3,0 hertzios, cuáles son las dos velocidades y direcciones posibles del movimiento de la nave móvil?
Respuesta. 6,13 m/s 6,35 m/s

CAPÍTULO 4. Mecánica de fluidos

INTRODUCCIÓN

La materia puede clasificarse por su forma física como un sólido, un líquido o un gas. Las moléculas de los s6lidos a temperaturas y presiones ordinarias tienen atracción fuerte entre ellas y permanecen en posición fija relativa una a la otra. Luego un sólido tiene volumen y forma definida y sufre deformaciones finitas bajo la acción de una fuerza.

Las moléculas de los líquidos a temperaturas y presiones ordinarias tienen poca atracción entre ellas y cambian de posición relativa una a otra. En consecuencia los líquidos tienen volumen definido tomando la forma del recipiente que los contiene, pero no lo llenan necesariamente.

Las moléculas de los gases a. temperaturas y presiones ordinarias tienen muy poca atracción entre ellas y tienen un movimiento al azar, o sea que los gases no tienen volumen ni forma definidas, adoptan la forma del recipiente que los contiene y lo llenan completamente. : .

A causa de que los líquidos y gases a temperaturas y presiones ordinarias no resisten la acción de un esfuerzo cortante y continúan deformándose bajo su acción, son conocidos como **fluidos**.

La rama de la Física que estudia los efectos de las fuerzas que actúan sobre 1os fluidos se denomina **Mecánica de Fluidos**, tradicionalmente subdividida en dos partes estática y dinámica.

Estática de los fluidos, estudia el equilibrio de los fluidos bajo la acción de fuerzas estacionarias.

Dinámica de los fluidos, estudia el movimiento de los fluidos y las causas que la producen, sostienen o se oponen a este movimiento.

DENSIDAD, DENSIDAD RELATIVA Y PESO ESPECÍFICO

Densidad o masa especifica

En un fluido, es importante la densidad o masa específica ella permite calcular el peso del elemento de volumen que se considere, que es una posible fuerza exterior actuando sobre cada elemento de fluido. Para un elemento de volumen dV ubicado en algún punto del fluido y que contenga una masa dm, la densidad ρ en ese punto se define mediante

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

La unidad de densidad en SI será kg/m^3 pero se usa generalmente densidades en g/cm^3,

1 g/cm^3 =1000 kg/m^3.

Densidad relativa

Es posible utilizar una escala de densidades relativas a la de alguna sustancia específica, por ejemplo existen las densidades de los fluidos respecto al agua, es decir

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{agua}}$$, cantidad adimensional.

Densidad del agua a 4º C = 1g/cm^3

Peso específico

El peso específico denotado por γ se define como el peso por unidad de volumen del fluido, es decir $\gamma = \rho g$, la unidad SI será N/m^3.

Ejemplo 1. Suponga que usted es capaz de llevar un peso de 400 N. ¿Cuál sería el tamaño del cubo hecho de oro podría usted llevar? La densidad del oro es 19300 kg/m^3.

Solución.

$$W = mg = \rho Vg = \rho a^3 g \Rightarrow$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{W}{\rho g}} = \sqrt[3]{\frac{400}{(19300)(9,8)}} = 0,13$$

Lado del cubo = a = 13 cm

LA PRESIÓN EN LOS FLUIDOS. El concepto de presión es muy general y por ello puede emplearse siempre que exista una fuerza actuando sobre una superficie. Sin embargo, su empleo resulta especialmente útil cuando el cuerpo o sistema sobre el que se ejercen las fuerzas es deformable. Los fluidos no tienen forma propia y constituyen el principal ejemplo de aquellos casos en los que es más adecuado utilizar el concepto de presión que el de fuerza.

Cuando un fluido está contenido en un recipiente, ejerce una fuerza sobre sus paredes y, por tanto, puede hablarse también de presión. Si el fluido está en equilibrio las fuerzas sobre las paredes son perpendiculares a cada porción de superficie del recipiente, ya que de no serlo existirían componentes paralelas que provocarían el desplazamiento de la masa de fluido en contra de la hipótesis de equilibrio. La orientación de la superficie determina la dirección de la fuerza de presión, por lo que el cociente de ambas, que es precisamente la presión, resulta independiente de la dirección; se trata entonces de una magnitud escalar.

La presión se designa con la letra p, y se define como la fuerza de compresión por unidad de área perpendicular a la fuerza.

$$p = \frac{\text{Fuerza normal sobre un área}}{\text{Area sobre la que se distribuye la fuerza}} = \frac{F}{A}$$

O bien $p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$

Unidades de presión. En el Sistema Internacional (SI) la unidad de presión es el pascal, se representa por Pa y se define como la presión correspondiente a una fuerza de un newton de intensidad actuando perpendicularmente sobre una superficie plana de un metro cuadrado.

1 Pa = 1 N/m^2.

Otras unidades:

Atmósfera (atm) se define como la presión que a 0 ºC ejercería el peso de una columna de mercurio de 76 cm de altura y 1 cm^2 de sección sobre su base.

1 atm = 1,013x10^5 Pa.

Bar es realmente un múltiplo del pascal y equivale a 10^5 N/m^2.

En meteorología se emplea con frecuencia el milibar (mb) o milésima parte del bar

1 mb = 10^2 Pa ó 1 atm = 1013 mb.

También tenemos:

Milímetros de mercurio

1 mmHg = 133,322 Pa

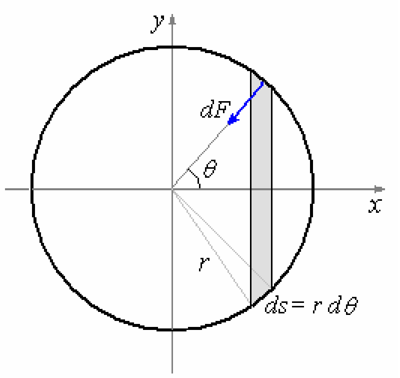
Torr

1 torr = 133, 322 Pa

1 torr = 1 mmHg

Ejemplo 2. En 1654, Otto Van Guericke, alcalde de Magdeburgo e inventor de la bomba de aire, demostró que dos equipos de caballos no podrían separar dos hemisferios de bronce evacuados. ¿Si los diámetros de los hemisferios fueron 0,30 m, qué fuerza sería requerida para separarlos?

Solución.



Consideremos el hemisferio orientado con su eje a lo largo del eje *x*. Tomemos una tira estrecha de la ancho *ds* que circunda el hemisferio. El componente de *x* de la fuerza en esta tira es

$$dF_x = p_a dA\cos\theta = p_a(2\pi r\operatorname{sen}\theta)ds\cos\theta$$ y

$$ds = rd\theta$$

Así

$$F_x = \int_0^{\pi/2} 2\pi r p_a \operatorname{sen}\theta\cos\theta r d\theta$$

$$= 2\pi r^2 p_a \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta$$

$$= 2\pi r^2 p_a\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \pi r^2 p_a$$

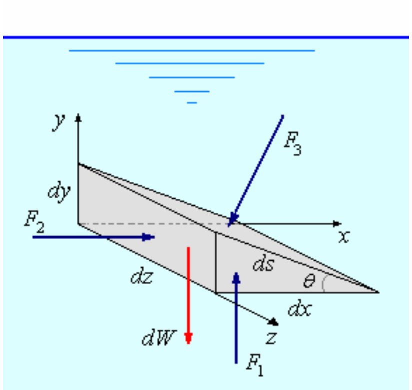
Reemplazando valores:

$$F_x = \pi(0,15)^2\left(1,013\times10^5\right) = 7160 \text{ N}$$

HIDROSTÁTICA

PRESIÓN EN UN PUNTO DE UN FLUIDO.

La presión sobre un punto totalmente sumergido en un fluido en reposo es igual en todas las direcciones. Para demostrar esto consideremos un pequeño prisma triangular como se muestra en la figura.



Los valores de presiones promedio sobre cada una de las tres superficies son p_1, p_2, y p_3, en la dirección *x* las fuerzas son iguales y opuestas y se cancelan mutuamente.

Haciendo la sumatoria de fuerzas obtenemos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_2 - F_3\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$p_2(dydz) - p_3(dsdz)\operatorname{sen}\theta = 0$$

Con $dy = ds\operatorname{sen}\theta$:

$$p_2(dydz) - p_3(dydz) = 0$$

$$\Rightarrow p_2 = p_3$$

También

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 - F_3\cos\theta - dW = 0$$

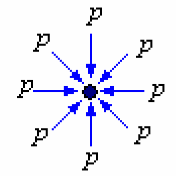
$$p_1(dxdz) - p_3(dsdz)\cos\theta - \rho g\left(\frac{1}{2}dxdydz\right) = 0$$

Con $dx = ds\cos\theta$:

$$p_1(dxdz) - p_3(dxdz) - \rho g\left(\frac{1}{2}dxdydz\right) = 0$$

$$\Rightarrow p_1 - p_3 - \frac{1}{2}\rho g dy = 0$$

Cuando el prisma triangular se aproxima a un punto,



$dy \to 0$, y las presiones promedio se hacen uniformes, esto es la presión para un "punto"

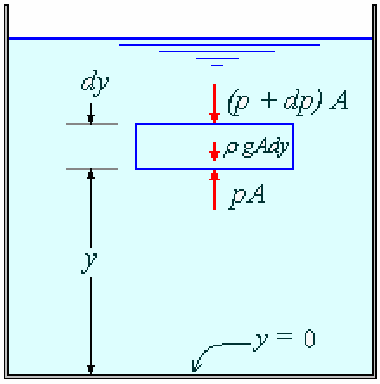
$p_1 = p_3$.

Por lo tanto finalmente:

$$p_1 = p_2 = p_3$$

VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA PROFUNDIDAD EN UN LÍQUIDO

Para encontrar la variación de presión con la profundidad, consideremos el estudio una porción de fluido como se muestra en la figura, consistente en un prisma de área A y altura dy, a una altura y un nivel de regencia arbitrario.



La presión a la altura y es p y la presión en $(y + dy)$ es $(p + dp)$.

El peso del elemento es $\rho gAdy$, donde ρ es la densidad del fluido.

Como el elemento está en equilibrio:

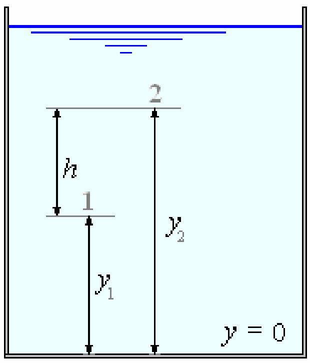
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow pA - (p + dp)A - \rho gAdy = 0$$

Simplificando: $-Adp - \rho gAdy = 0$

O $dp = -\rho gdy \Rightarrow \dfrac{dp}{dy} = -\rho g$

Esta ecuación nos da el cambio de presión con la altura.

DIFERENCIA DE PRESIÓN ENTRE DOS PUNTOS EN UN FLUIDO.



Diferencia de presión entre dos puntos cualquiera (1 y 2) en un fluido en reposo, será

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho gdy \Rightarrow p_2 - p_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho gdy$$

Para fluidos que pueden considerarse incompresibles (por lo general los líquidos), ρ es constante, adicionalmente para diferencias de altura no muy grandes g se puede considerar constante.

En este caso $p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$, llamando a $(y_2 - y_1) = h$

$$p_2 - p_1 = -\rho gh \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho gh$$

Cuando el punto 2 está en la superficie p_2 es la presión atmosférica p_a y se tendrá.

$$p_1 = p_a + \rho gh$$

Donde h representa la profundidad de un punto cualquiera en el fluido y p su presión:

Ejemplo 3. Un dispositivo de exploración de las profundidades del mar tiene una ventana de área 0,10 m^2. ¿Qué fuerza se ejercida sobre ella por la agua de mar (densidad 1030 kg/m^3) a la profundidad de 5000 m?

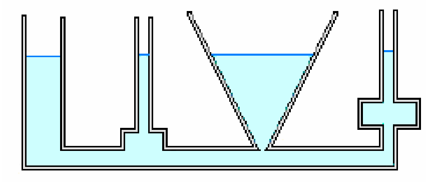
Solución.

$F = pA = \rho ghA$ = (1030)(9,8)(5000)(0,1)

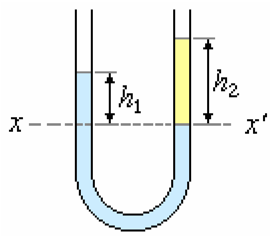
= 5,05 x 10^6 N

PARADOJA HIDROSTÁTICA

Una consecuencia de la ecuación $p_1 = p_a + \rho gh$ es el fenómeno que se ilustra en la figura, llamado paradoja hidrostática. Podría parecer que el vaso cónico ejerce una mayor presión en su base que el que tiene la base más ancha, con lo cual el líquido pasaría del cónico al otro, y alcanzaría una mayor altura en este último. Sin embargo, ya hemos visto que la ecuación $p_1 = p_a + \rho gh$ establece que la presión depende únicamente de la profundidad, y no de la forma de la vasija.



Ejemplo 4. Un experimentador desea determinar la densidad de una muestra de aceite que ha extraído de una planta. A un tubo de vidrio en U abierto en ambos extremos llena un poco de agua con colorante (para la visibilidad). Después vierte sobre el agua una pequeña cantidad de la muestra del aceite en un lado del tubo y mide las alturas h_1 y h_2, según como se muestra en la figura. ¿Cuál es la densidad del aceite en términos de la densidad del agua y de h_1 y de h_2?



Solución.

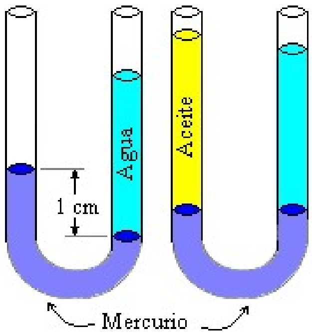
La presión en el nivel $x - x'$ es igual en ambos lados del tubo.

$$\rho_{agua} gh_1 = \rho_{aceite} gh_2 \Rightarrow \rho_{aceite} = \frac{h_1}{h_2} \rho_{agua}$$

Ejemplo 5. Si la presión manométrica del agua en la tubería a nivel del depósito de un edificio es de 500 kPa, ¿a qué altura se elevará el agua?
Solución.

$$p = \rho_a g h \Rightarrow h = \frac{p}{\rho_a g} = \frac{5\times 10^5}{10^3 \times 9{,}8} = 51 \text{ m}$$

Ejemplo 6. En unos vasos comunicantes hay agua y mercurio. La diferencia de alturas de los niveles del mercurio en los vasos es h = 1 cm. Calcular la altura de aceite que se debe añadir por la rama de mercurio para que el nivel de éste en los dos casos sea el mismo.
Densidad del mercurio = 13,6 g/cm^3.
Densidad del aceite = 0,9 g/cm^3.



Solución.
La ley de los vasos comunicantes nos da para valor de la altura del agua:

$$\frac{h_{Hg}}{h_{agua}} = \frac{\rho_{agua}}{\rho_{Hg}} \Rightarrow \frac{1}{h_{agua}} = \frac{1}{13{,}6} \Rightarrow$$

$$h_{agua} = 13{,}6 \text{ cm}$$

Una vez añadido el aceite los líquidos quedarán en la disposición de la figura segunda. Las presiones en las superficies de separación deben ser iguales y, por tanto:

$$\rho_{agua} g h_{agua} = \rho_{aciete} g h_{aceite} \Rightarrow$$

$$h_{acite} = h_{agua}\frac{\rho_{agua}}{\rho_{aceite}} = \frac{13{,}6}{0{,}9} = 15{,}11 \text{ cm}$$

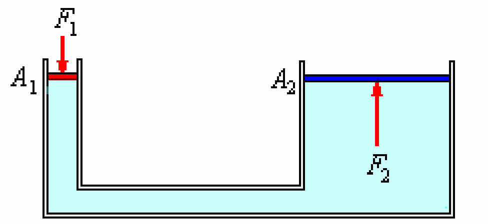
EL PRINCIPIO DE PASCAL.

Si mediante algún método o sistema externo aumentamos la presión en la superficie, la presión en todos los puntos del fluido sufrirá igual aumento, es decir, "el cambio de presión en alguna parte del fluido confinado introduce el mismo cambio de presión en todas partes del fluido". Enunciado que corresponde al Principio de Pascal. Frecuentemente utilizado en la práctica de la ingeniería con la prensa hidráulica.

La prensa hidráulica, representada en la figura a continuación. Mediante un pistón de sección transversal pequeña, A_1 se ejerce una fuerza F_1 sobre un líquido. La presión se trasmite a un cilindro de mayor área A_2 sobre el que ejerce una fuerza F_2 mucho mayor:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1\frac{A_2}{A_1}$$

Mientras mayor sea la relación entre las áreas de los pistones, mayor es la fuerza ejercida sobre el pistón mayor.



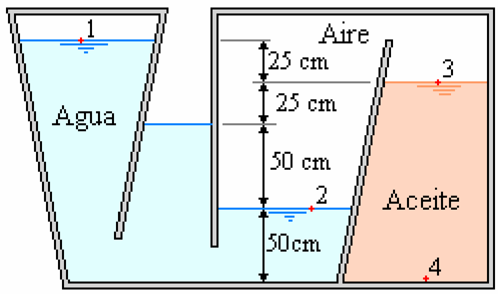
Ejemplo 7. Una gata hidráulica consiste en un cilindro grande del área A conectado con un cilindro pequeño del área a.. Ambos cilindros se llenan de aceite. Cuando la fuerza f se aplica al cilindro pequeño; la presión que resulta se transmite al cilindro grande, que entonces ejerce una fuerza ascendente F. Suponer que u auto pesa 12.000 N sobre el cilindro grande de área 0,10 m^2. ¿Qué fuerza se debe aplicar al cilindro pequeño del área 0,002 m^2 para soportar al auto?

Solución. $p = \frac{F}{A} = \frac{f}{a}$, tal que

$$f = \frac{a}{A}F = \frac{0{,}002}{0{,}10}(12000) = 240 \text{ N}$$

La gata tiene una ventaja mecánica de 50.

Ejemplo 8. Calcular la presión en los puntos 1, 2, 3 y 4 en el sistema mostrado en la figura.
Densidad específica del aceite = 0,9

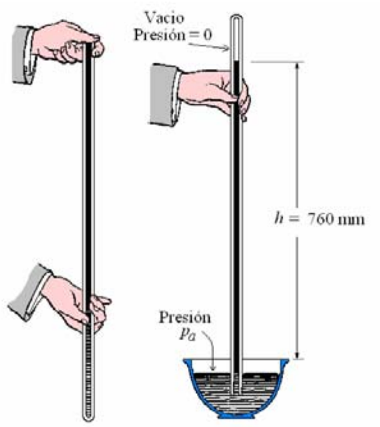


Solución.
Considerando la disposición y geometría mostrada en la figura:
Presión en 1:
$p_1 = p_{atm} - (0{,}25 + 0{,}25)\rho_{agua}\, g$
$= 1{,}033 \times 10^5 - 4900$
$= 98400$ Pa
Presión en 2:
$p_2 = p_{atm} + (0{,}50)\rho_{agua}\, g$
$= 1{,}033 \times 10^5 + 4900$
$= 108200$ Pa
Presión en 3:

$p_3 = p_2 - (0,75)\rho_{aire}\, g$
Como la densidad del aire es 1000 veces manos que la del agua podemos considerar
$p_3 = p_2 = 108200$ Pa
Presión en 4:
$p_4 = p_3 + (1,25)\rho_{aceite}\, g$
$= 108200 + 11025$
$= 119225$ Pa

MEDIDA DE LA PRESIÓN.

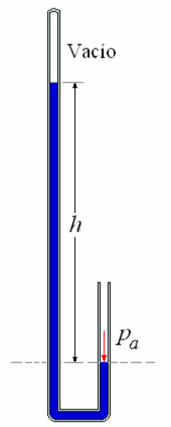
Barómetro
La presión en la superficie de un fluido que se encuentra en un recipiente abierto a la atmósfera no es nula, sino igual a la presión atmosférica. Esta última se debe a que estamos inmersos en un fluido compresible constituido por el aire. La atmósfera de la Tierra ejerce una presión sobre todos los objetos con los que está en contacto. La presión atmosférica sobre la superficie terrestre la denotaremos por p_a, y es igual a la presión ejercida por el peso de toda la columna de aire que está por encima. La presión atmosférica p_a no es despreciable o insignificante como algunas personas suelen creer. Por el contrario, la presión atmosférica juega un papel importante en numerosos aparatos y máquinas de la vida diaria.
Considere un tubo de 1 m de largo y sección transversal A, cerrado por uno de los extremos. Llenemos el tubo con mercurio y coloquemos el tubo, con el extremo abierto hacia abajo, en un recipiente con mercurio. Observaremos que el nivel de mercurio se situará aproximadamente 760 mm del nivel del recipiente.



El extremo superior del tubo queda al vacío.
Apliquemos la segunda ley de Newton a la columna de mercurio (que sobresale de la superficie del líquido en el recipiente). ¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella?
Hay sólo dos: por una parte está la presión que el fluido que está en el recipiente ejerce sobre el mercurio que está en el tubo: tal fuerza es $F_1 = p_a A$; por otra, está el peso del mercurio al interior de la columna $Peso = \rho_{Hg} gV = \rho_{Hg} ghA$. Como el fluido está en reposo la fuerza neta debe ser nula, o sea:

$p_a A = \rho_{Hg} ghA$
La densidad del mercurio es ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3. Con esto obtenemos para p_a el valor
$p_a \approx 1{,}013 \times 10^5$ Pa = 1 atm .
La fuerza que eleva al mercurio al interior del tubo es la presión atmosférica. El dispositivo que acabamos de describir es un **barómetro de mercurio**. La altura de la columna de mercurio mide la presión atmosférica. La presión atmosférica promedio a nivel del mar corresponde a 760 mm de mercurio.
AL repetir el mismo experimento, pero con una columna de agua, la altura será 13,6 veces mayor (recuerde que la densidad del mercurio es 13,6 g/cm^3 y la del agua 1 g/cm^3). Multiplicando los 76 cm por 13,6 se obtienen 10,34 m. Este dato es muy importante, ya que interviene en varias aplicaciones tecnológicas. Por ejemplo, al intentar elevar agua de un pozo (cuya superficie está en contacto con el aire que nos rodea) succionando por el extremo superior de un tubo largo, sólo se tendrá éxito si el nivel de agua no está a más de 10,34 metros de profundidad (en la práctica esta altura es menor ya que el agua comienza a hervir bastante antes de llegar a los 10,34 metros).

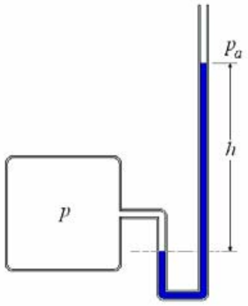
Barómetro de mercurio en U
Considere la figura donde se muestra un tubo cerrado en un extremo, doblado en forma de U, abierto por el otro extremo donde actúa la presión atmosférica que se desea medir. El mercurio alcanza una cierta posición de equilibrio, donde por el extremo cerrado por existir vacío, la presión es nula. Al nivel indicado, la presión debe ser la misma, de modo que podemos igualar
$p_a = h\,\text{mmHg} = h\ \text{torr}$



Manómetro simple.
Otra aplicación práctica de la ecuación $p_1 = p_2 + \rho gh$ son los instrumentos de medida de la presión:

Manómetro en U de líquido, para presiones relativas de gases
La columna en U contiene un líquido (líquido manométrico), por ejemplo agua, de modo que en la

situación de equilibrio, cuando la presión p en el recipiente que contiene un gas es mayor que la atmosférica, la condición de equilibrio indicada en la figura da $p = p_a + \rho_L gh$, de modo que si se mide la altura *h* tenemos una medida de la presión relativa.



Presión relativa y la presión absoluta:
La presión relativa (a la atmosférica) será

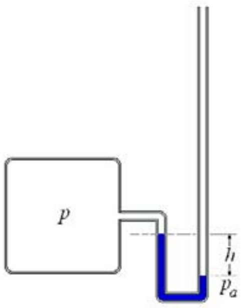
$p - p_a = \rho_L gh$.

La presión absoluta p puede también calcularse de allí si se conoce o se mide la presión atmosférica mediante un barómetro.
Si la presión en el recipiente que contiene el gas es menor que la atmosférica, la situación de equilibrio será como se indica en la figura siguiente de modo que la condición de equilibrio será

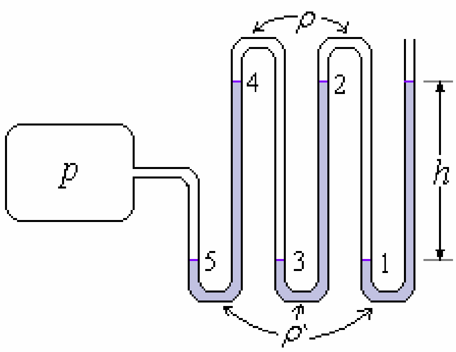
$p + \rho_L gh = p_a$, dando para la presión relativa

$p - p_a = -\rho_L gh$, un valor negativo que refleja que la presión en el interior del recipiente es menor que la atmosférica. Igualmente se puede calcular la presión (absoluta) si la presión atmosférica es conocida

$$p = p_a - \rho_L gh$$



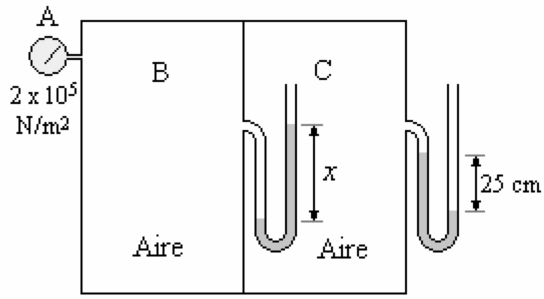
Ejemplo 9. Determinar la presión *p* de un gas, en el manómetro mostrado en la figura.



Solución.
Podemos determinar sucesivamente las presiones de los puntos indicados en la figura:

$$p_1 = p_a + \rho' gh$$
$$p_2 = p_1 - \rho gh = p_a + (\rho' - \rho)gh$$
$$p_3 = p_2 + \rho' gh = p_a + (2\rho' - \rho)gh$$
$$p_4 = p_3 - \rho gh = p_a + 2(\rho' - \rho)gh$$
$$p_5 = p_4 + \rho' gh = p_a + (3\rho' - 2\rho)gh$$
$$p = p_5 = p_a + (3\rho' - 2\rho)gh$$

Ejemplo 10. Los compartimientos B y C en la figura están cerrados y llenos con aire, el barómetro lee 76 cm de mercurio cuando los manómetros leen *x* y 25 cm. ¿Cuál será el valor de *x*?
Los tubos en U están llenos de mercurio de mercurio.



Solución.
Cálculo de p_C

$p_C = p_a - 0{,}25\rho_{Hg} g$ = 1,033 x 10^5 – 0,25 x 13700 x 9,8 = 69735 Pa

El valor de la presión en B se lee en el manómetro A:

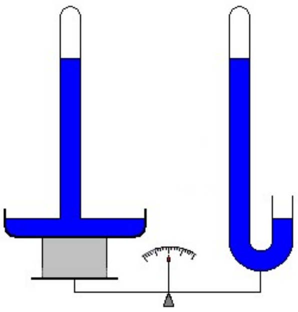
p_B = 2 x10^5 Pa

La lectura del manómetro entre los tanques B y C es la diferencia entre las presiones de dichos tanques:

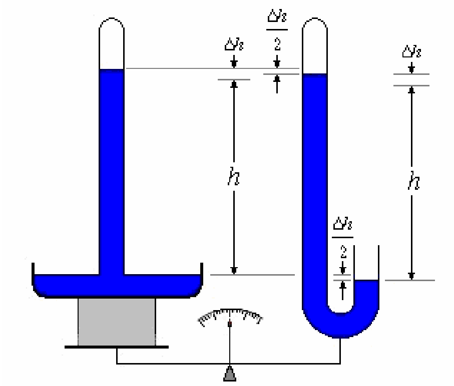
$$p_B - p_C = \rho_{Hg} g(x)$$

200000 – 69735 = 13700 x 9,8 *x*
De aquí se obtiene: *x* = 0,97 m

Ejemplo 11. En una balanza de gran sensibilidad fueron equilibrados dos barómetros de mercurio: uno en forma de platillo (con un plato ancho) y el otro en forma de U. Los barómetros están hechos del mismo material, tienen el mismo diámetro de los tubos y contienen la misma cantidad de mercurio. Las distancias entre las partes soldadas de los tubos y los niveles superiores del mercurio en ellos son iguales. ¿Cómo variará el equilibrio de la balanza si aumenta la presión atmosférica?



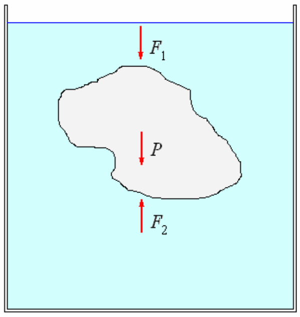
Solución.
Como resultado de la variación de la presión atmosférica, la fuerza de Arquímedes que actúa sobre los barómetros por parte del aire se varía tanto por el cambio de la densidad del aire, como por el cambio del volumen de los barómetros, cuando se cambian los niveles del mercurio en sus secciones abiertas. Tomando en consideración todas las condiciones del problema, los barómetros tienen no sólo el mismo peso, sino también el mismo volumen. Por eso, para cada uno de ellos la variación de la fuerza de empuje, debido a la primera causa, es la misma. La variación de los volúmenes, como es evidente, será diferente. En el barómetro en forma de U, para una variación de la diferencia de niveles en un determinado valor, el nivel del mercurio en cada caño acodado debe cambiar sólo en la mitad de este valor. En el barómetro de cubeta el nivel del mercurio en la cubeta cambia muy poco y en el tubo cambia prácticamente en todo el valor de variación de la diferencia de niveles. Además, en la misma cantidad en que cambia el volumen del mercurio dentro del tubo variará el volumen en la cubeta. Por consiguiente, para el barómetro de cubeta, la variación del volumen será dos veces mayor que para el barómetro en forma de U (a diámetros iguales de los tubos). Al aumentar la presión, el volumen del barómetro de cubeta se hace menor que el volumen del barómetro en forma de U, la fuerza de Arquímedes que actúa sobre el barómetro de cubeta también será menor y por eso él pesa más.
Explicación gráfica



La figura ilustra la variación en los barómetros con el aumento de presión.
Las alturas de las columnas de mercurio son iguales a $(h+\Delta h)$. Mientras la variación en el volumen de la cubeta corresponde al volumen de una columna de altura Δh del tubo, para el barómetro en U solo corresponde al volumen de una columna de altura $\Delta h/2$, por lo tanto desaloja menor volumen y el empuje es menor que en barómetro de cubeta.

EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES.
Cuando un objeto se sumerge en un fluido (un líquido o un gas), experimenta una fuerza ascendente de la flotabilidad porque la presión en el fondo del objeto es mayor que en la parte superior. El gran científico griego Arquímedes (287-212 B.C.) hizo la observación cuidadosa siguiente, ahora llamada el principio de Arquímedes.
Cualquier objeto totalmente o parcialmente sumergido en un fluido es empujado para arriba por una fuerza igual al peso del fluido desplazado.
Para ver que esto es verdad, considere una porción pequeña de agua en un recipiente como se muestra en la figura. El agua sobre esta porción actúa hacia abajo, al igual que su peso. El agua bajo la porción empuja hacia arriba. Puesto que la porción de agua está en equilibrio, la fuerza hacia arriba equilibra las fuerzas hacia abajo.

$$F_1 + P = F_2$$



La fuerza neta hacia arriba debido al fluido se llama la fuerza **Empuje**, así

$$F_E = F_2 - F_1 = P$$

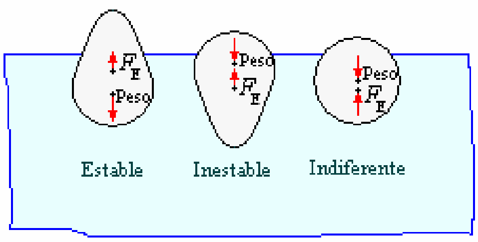
Aquí *P* es el peso del fluido desplazado por el objeto. Si la porción de agua de peso *P* es substituido por un objeto de la misma forma y tamaño, este objeto también sentiría la fuerza de empuje hacia arriba
$F = P$
O sea que la fuerza de empuje F_E es $F_E = \rho g V$, donde ρ es la densidad del fluido, y V es el volumen del cuerpo sumergido.
Si el peso del objeto es mayor que *P* (el peso del fluido desplazado), el objeto se hundirá (siempre experimenta la fuerza de empuje, razón por la que un objeto no se siente tan pesado cuando se sumerge que cuando se saca del agua). Si el peso del objeto es menor que el peso de agua desplazada cuando se sumerge totalmente, experimentará una fuerza neta hacia arriba y flotará a la superficie. Algo del objeto resaltará sobre la superficie, de modo que la porción todavía sumergida desplace un peso de fluido igual al peso del objeto.

CENTRO DE EMPUJE

Es el punto a través del cual actúan las fuerzas de empuje, y está en el centro de gravedad del volumen de líquido desplazado. Si el cuerpo es homogéneo y está totalmente sumergido, su centro de gravedad coincide con el centro de empuje.

EQUILIBRIO ROTACIONAL DE OBJETOS FLOTANTES.

Un cuerpo tiene estabilidad vertical cuando un pequeño desplazamiento vertical en cualquier sentido origina fuerzas restauradoras que tienden a volver al cuerpo a su posición original y tiene estabilidad rotacional cuando al aplicar un pequeño desplazamiento angular se origina un par restaurador. En la figura se muestran los diversos casos de equilibrio que se presentan.



a) Estable. Ocurre cuando el centro de gravedad del cuerpo está por debajo del centro de empuje, para una pequeña rotación el par de fuerzas hará retornar al cuerpo a su posición inicial.,

b.) Inestable. Ocurre cuando el centro de gravedad del cuerpo esta por encima del centro de empuje para una pequeña rotación el par de fuerzas tenderá a hacer rotar el cuerpo hacia una nueva posición de equilibrio.

c) Indiferente. Ocurre para cilindro recto horizontal y esfera, ya que su peso y fuerza de empuje son siempre colineales al aplicarle cualquier rotación.

Ejemplo 12. Un hombre que está pescando en el Mar Egeo pesca accidentalmente un artefacto antiguo de oro. La densidad del oro es 19,3 x 10^3 kg/m^3, y la densidad del agua de mar es 1,03 x 10^3 kg/m^3. ¿Mientras está levantando el tesoro, la tensión en su línea es 120 N. ¿Cuál será la tensión cuando saque el objeto del agua?

Nota: Si usted engancha un tesoro o un pez grande, no lo levante del agua. El cordel puede romperse.

Solución.

Si el objeto de peso *mg* se levanta lentamente, está en equilibrio y

$mg = T_1 + F_E$, donde $m = \rho V$, (ρ es la densidad del objeto, *V* es el volumen del objeto)

T_1 es la tensión en la línea mientras está en el agua y

F_E es la fuerza de empuje,

$F_E = \rho_a g V$, (ρ_a es la densidad del agua)

Así: $\rho V g = T_1 + \rho_a V g \Rightarrow V = \dfrac{T_1}{(\rho - \rho_a)g}$

Cuando el objeto está en aire, la tensión es igual al peso *mg*.

$$\text{Peso} = mg = \rho g V$$

$$= \frac{\rho g T_1}{(\rho - \rho_a)g} = \frac{\rho/\rho_a}{[(\rho/\rho_a) - 1]} T_1$$

$$= \frac{19{,}3}{(19{,}3 - 1)}(120N) = 127 \text{ N}$$

Ejemplo 13. Un bloque de madera de la gravedad específica 0,8 flota en agua. ¿Qué fracción de volumen del bloque se sumerge?

Solución.

Si *V* es el volumen del bloque y *xV* es el volumen sumergido (*x* es la fracción de volumen sumergido), entonces

$mg = F_B$ o $\rho g V = \rho_a x V g$

$$\Rightarrow x = \frac{\rho}{\rho_a} = 0{,}8$$

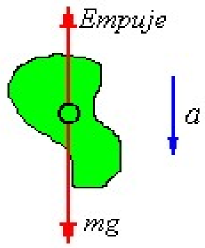
Ejemplo 14. Consideremos el movimiento de un objeto de volumen *V* y masa *M* que cae a través de un fluido con viscosidad cero (sin rozamiento).

a) Dibuja las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

b) ¿La aceleración del objeto en caída es independiente de su masa?, ¿y de su volumen?

Solución.

a)



b) Ecuación del movimiento

$ma = mg - Empuje$

ρ_c = densidad del cuerpo, ρ_f = densidad del fluido, *V* = volumen del cuerpo

$\rho_c V a = \rho_c V g - \rho_f V g$

$a = g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_c}\right)$, *a* es independiente de la masa y el volumen, depende de las densidades del cuerpo y del fluido.

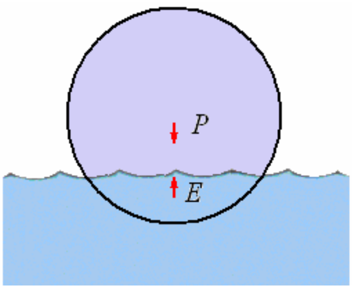
Ejemplo 15. Una pelota de plástico tiene 25 cm de radio y flota en agua con el 25% de su volumen sumergido.

a) ¿Qué fuerza deberemos aplicar a la pelota para sostenerla en reposo totalmente sumergida en agua?

b) Si se suelta la pelota, ¿qué aceleración tendrá en el instante en que se suelte?

Solución.

Primero calcularemos la densidad de la pelota. Utilizando la primera condición:



Fuerza de empuje: $E = \rho_a 0{,}25Vg$

Peso: $P = \rho_p Vg$

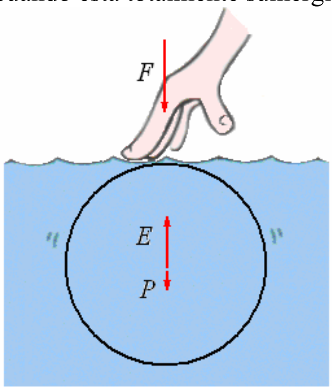
$\sum F_v = 0$

Peso = empuje

$\rho_p Vg = \rho_a 0{,}25Vg \Rightarrow$

$\rho_p = 0{,}25\rho_a = 0{,}25$ g/cm^3.

a) Empuje cuando está totalmente sumergida en agua;



Fuerza de empuje: $E = \rho_a Vg$

Peso: $P = \rho_p Vg$

$\sum F_v = 0$

$E - F - P = 0 \Rightarrow F = E - P$

La fuerza que se necesaria para mantenerla en equilibrio totalmente sumergida es:

Empuje – peso = $(\rho_a - \rho_p)Vg$

$$= (1000 - 250)\left(\frac{4}{3}\pi 0{,}25^3\right)9{,}8$$

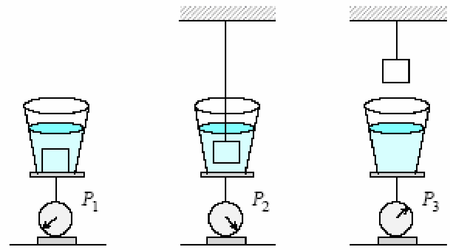
$= 481{,}06$ N.

b) Sea a la aceleración de la pelota en el instante en que se suelte

$F = ma \Rightarrow$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{481{,}06}{(250)\left(\frac{4}{3}\pi 0{,}25^3\right)} = 29{,}4 \text{ m/s}^2.$$

Ejemplo 16. Considere las tres mediciones mostradas en la figura adjunta:



I) P_1 es el peso de un recipiente con agua con un objeto sumergido en él.
II) P_2 es el peso cuando el objeto está sumergido en el agua, pero colgado de una cuerda sin que toque el fondo del recipiente.
III) P_3 es el peso del recipiente con agua.
Encuentre la densidad promedio del objeto.

Solución.

Sean: m masa del objeto, V volumen del objeto, ρ densidad del objeto.

Restando (III) de (I):

$$P_1 - P_3 = mg \Rightarrow m = \frac{P_1 - P_3}{g},$$

Como $V = \dfrac{m}{\rho}$

$$\Rightarrow V = \frac{P_1 - P_3}{\rho g} \quad (1)$$

De (II) y (III):

$P_2 = P_3 + E \Rightarrow E = P_2 - P_3$,

como $E = \rho_{agua} gV$

$\Rightarrow P_2 - P_3 = \rho_{agua} gV$

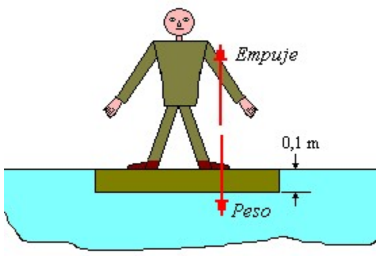
y $V = \dfrac{P_2 - P_3}{\rho_{agua} g}$ (2)

Igualando (1) y (2):

$$\frac{P_1 - P_3}{\rho g} = \frac{P_2 - P_3}{\rho_{agua} g} \Rightarrow \rho = \frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3}\rho_{agua}$$

Ejemplo 17. Disponemos de una plancha de corcho de 10 cm de espesor. Calcular la superficie mínima que se debe emplear para que flote en agua, sosteniendo a un náufrago de 70 kg. La densidad del corcho es de 0,24 g/cm^3.
Nota: entendemos por superficie mínima la que permite mantener al hombre completamente fuera del agua aunque la tabla esté totalmente inmersa en ella.

Solución.



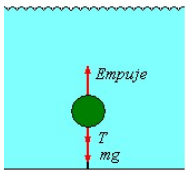
Peso = empuje

$$[70 + 240(0{,}1A)]g = 1000(0{,}1A)g$$

0,1 A es el volumen de la plancha de corcho.

$$70 = 100A - 24A \Rightarrow A = \frac{70}{76} = 0{,}92\text{m}^2$$

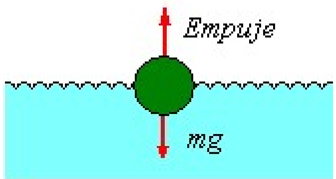
Ejemplo 18. Un cable anclado en el fondo de un lago sostiene una esfera hueca de plástico bajo su superficie. El volumen de la esfera es de 0,3 m^3 y la tensión del cable 900 N.

a) ¿Qué masa tiene la esfera? b) El cable se rompe y la esfera sube a la superficie. Cuando está en equilibrio, ¿qué fracción del volumen de la esfera estará sumergida? Densidad del agua de mar 1,03 g/cm^3	

Solución.

a) $E = mg + T$ E = Empuje,
T = Tensión del cable.
1030 x 0,3 x 9,8 = m x 9,8 + 900 $\Rightarrow$ m = 217,2 kg
b) $E = mg$ V = Volumen sumergido.
1030 x V x 9,8 = m x 9,8 $\Rightarrow$ V = 0,21 m^3

Fracción del cuerpo sumergido = $\frac{0{,}21}{0{,}3} = 0{,}7$



Ejemplo 19. Un pedazo de aluminio se suspende de una cuerda y se sumerge completamente en un recipiente con agua. La masa del trozo de aluminio es de 1 kg. Calcule la tensión de la cuerda antes y después de sumergir el trozo de aluminio.

Solución.

La tensión antes es simplemente el peso del trozo de aluminio es decir

$$P = mg = 1 \times 9{,}8 = 9{,}8N$$

Cuando se sumerge la fuerza de empuje es

$E = \rho_{agua} V_{al} g$, pero el volumen del aluminio es

$$V_{Al} = \frac{m}{\rho_{Al}}$$

de modo que la fuerza de empuje será:

$$E = \rho_{agua}\frac{m}{\rho AL}g = 10^3\frac{1}{2{,}70 \times 10^3}9{,}8 = 3{,}6 \text{ N.}$$

y finalmente la tensión en la cuerda será la diferencia
T = 9,8 - 3,6 = 6,2 N

Ejemplo 20. En un vaso de agua flota un pedazo de hielo,- ¿Cómo cambia el nivel del agua en el vaso cuando el hielo se derrite? Analizar los siguientes casos:

a) el hielo es completamente homogéneo;

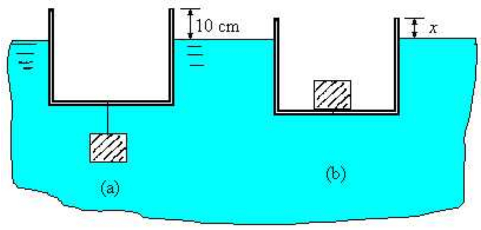
b) en el hielo se encuentra una piedra fuertemente adherida;

c) dentro del pedazo de hielo hay una burbuja de aire.

Solución.

a) Como el pedazo de hielo flota, el peso de toda el agua desplazada por éste es igual al peso del propio hielo o del agua recibida de éste. Por eso el agua que se forma después del deshielo ocupará un volumen igual al volumen de la parte hundida del pedazo de hielo y por consiguiente el nivel del agua no cambiará.
b) El volumen de la parte sumergida del pedazo de hielo con la piedra es mayor que la suma de los volúmenes de la piedra y el agua que se obtiene después del deshielo. Por lo tanto, el nivel del agua en el vaso se descenderá.
c) El peso del agua desplazada es igual al peso del hielo (el peso del aire en la burbuja puede prescindirse). Por eso igualmente como en el caso a), el nivel del agua no cambia.

Ejemplo 21. Se tiene un cilindro vacío de radio 10 cm, que flota en agua dejando fuera del nivel del agua una altura de 10 cm cuando de el cuelga externamente un bloque de hierro de peso 10 kg y densidad 7,8 g/cm^3 tal como lo muestra la figura (a). Calcular la altura que quedara afuera del agua si el bloque de hierro se introduce dentro del cilindro como lo muestra la figura (b).



Solución.

Sea h la altura del cilindro.
De la figura (a):

$$1000g(h - 0{,}1)\pi 0{,}1^2 + 1000g\frac{10}{7800} = 10g$$

$\Rightarrow$ h = 0,38 m
De la figura (b):

$$1000g(h - x)\pi 0{,}1^2 = 10g$$

$\Rightarrow$ x = 0,06 m

Ejemplo 22. Un cuerpo homogéneo y compacto, colocado en un líquido con peso específico γ_1, pesa P_1; y colocado en un líquido con peso específico γ_2, pesa P_2 Determinar el peso específico ρ del cuerpo.

Solución: El peso del cuerpo hundido en el líquido en el primer caso es igual a $P_1 = (\gamma - \gamma_1)V$; en el segundo caso es igual a $P_2 = (\gamma - \gamma_2)V$. donde *V* es el volumen del cuerpo; de allí resulta que

$$\gamma = \frac{(P_2\gamma_1 - P_1\gamma_2)}{(P_2 - P_1)}$$

Ejemplo 23. En el centro de un lago grande congelado han hecho Un claro. El grosor del hielo resultó igual a 1,0 m. ¿De qué longitud será necesaria la cuerda para sacar un balde de agua?

Solución.

Solamente en los pequeños lagos el hielo puede mantenerse suspenso gracias a la orilla. En el centro de un lago grande éste obligatoriamente flotará. La relación de las densidades del hielo y del agua es 0,9. Por consiguiente, 0,9 de todo el espesor del hielo se encuentra en el agua. La distancia entre la superficie del hielo y el agua es 1 m.

Ejemplo 24. En una taza con agua flota una cajita de fósforos dentro de la cual hay una piedra pequeña. ¿Variará el nivel del agua en la taza si la piedra se saca de la cajita y se pone en el agua?

Solución.

Al retirar la piedra de la caja se hizo más ligera en un peso igual al de la piedra y. por lo tanto, el volumen del agua desplazada por la caja disminuyó en $V_1 = P/\rho_1 g$, donde *P* es el peso de la piedra y ρ_1, la densidad del agua. Al sumergirse en el agua, la piedra desalojará un volumen de agua igual a su propio volumen, o sea, $V_2 = P/\rho_2 g$, donde ρ_2 es la densidad de la sustancia de la piedra. Como $\rho_2 > \rho_1$. entonces $V_1 > V_2$ y por consiguiente el nivel del agua en la taza disminuirá.

Ejemplo 25. Un cubo de Hielo flota en agua. Determine la fracción del hielo que queda sobre la superficie del agua.

Solución.

Sea *m* la masa de hielo. Su peso será

$$P = mg$$

Su volumen total será

$$V = \frac{m}{\rho_{Hielo}},$$

De modo que podemos escribir el peso en términos del volumen como

$$P = \rho_{Hielo} V g$$

Cuando una fracción V_S del volumen queda sumergida, la fuerza de empuje es

$$E = \rho_{agua} V_s g .$$

En la situación de equilibrio el peso iguala al empuje de modo que

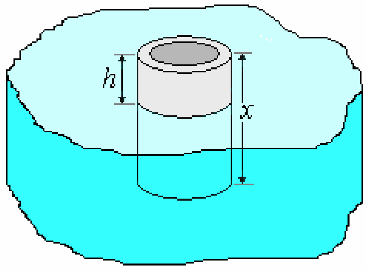
$$\rho_{Hielo} V g = \rho_{agua} V_s g ,$$

De donde

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_{Hielo}}{\rho_{agua}} = 0{,}917$$

O sea hay un 91,7% sumergido y por lo tanto 8,3 % sobre el nivel del agua.

Ejemplo 28. Un tubo flota en el agua en posición vertical. La altura del tubo que sobresale del agua es *h* = 5 cm. Dentro del tubo se vierte aceite de densidad ρ' = 0,9 g/cm^3. ¿Cuál deberá ser la longitud del tubo para llenarlo totalmente de aceite manteniendo la altura *h*?

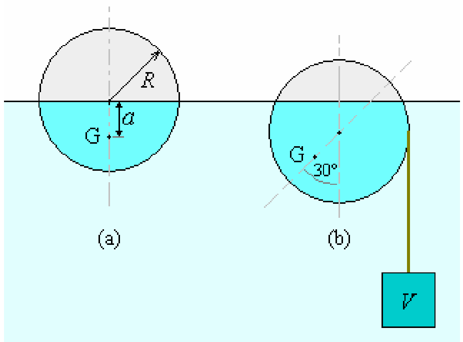


Solución.

La longitud del tubo *x* se halla de la condición $\rho' g x = \rho g (x - h)$ que expresa la igualdad de las presiones en la profundidad del extremo inferior del tubo. Aquí ρ es la densidad del agua. Obtenemos, entonces, que

$$x = \frac{\rho}{(\rho - \rho')} h = 50 \text{ cm.}$$

Ejemplo 29. La posición estable de un cilindro de longitud *L*, flotando en un liquido de densidad ρ , es como se muestra en la figura (a). Cuando el bloque de concreto (densidad ρ') se suspende del cilindro toma la posición mostrada en la figura (b) Si se desprecia el volumen y peso del cable. ¿Cuál es el volumen del bloque?



Solución.

En la posición (a)

$$\text{peso} = \frac{\pi R^2 L}{2} \rho g$$

En la posición (b.)

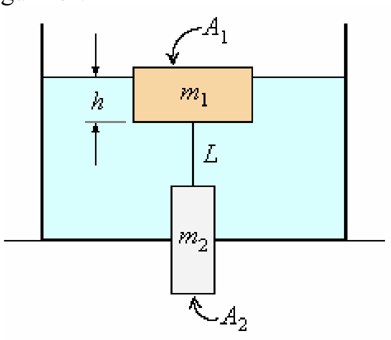
Tomando momentos con respecto al eje vertical por el que pasa el empuje, tenemos:

$$\text{Peso}(a \operatorname{sen} 30^\circ) = (V\rho' g - V\rho g)R$$

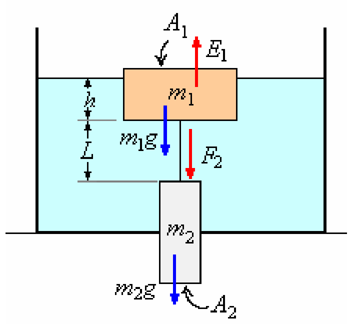
$$\frac{\pi R^2 L}{2}\left(\frac{a}{2}\right) = VRg(\rho' - \rho)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi R L \rho a}{4(\rho' - \rho)}$$

Ejemplo 30. Un corcho cilíndrico de masa m_1 y sección transversal A_1 flota en un líquido de densidad ρ. El corcho está conectado por medio de una cuerda sin masa, de largo L, a un cilindro de aluminio de masa m_2 y sección transversal A_2.
El cilindro de aluminio puede deslizarse sin roce por un orificio hermético en el fondo del recipiente. Calcular la profundidad h a la que debe hallarse la base del corcho para que el sistema de los dos cilindros esté en equilibrio. La presión atmosférica, ¿juega algún rol?



Solución.



$$E_1 - F_2 - (m_1 + m_2)g = 0$$

$$E_1 = A_1 h\rho g\ ,\ F_2 = \rho g(h + L)A_2$$

$$A_1 h\rho g - \rho g(h + L)A_2 - (m_1 + m_2)g = 0$$

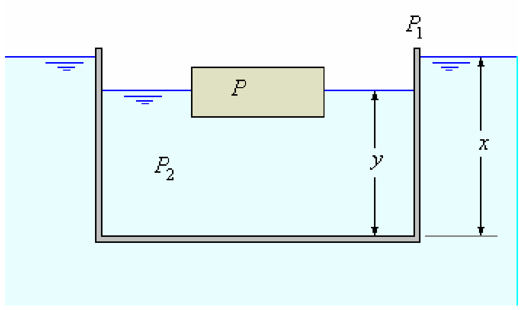
$$A_1 h\rho g - A_2 h\rho g - A_2 L\rho g = (m_1 + m_2)g$$

$$(A_1 - A_2)h\rho = (m_1 + m_2) + A_2 L\rho$$

$$h = \frac{(m_1 + m_2) + A_2 L\rho}{(A_1 - A_2)\rho}$$

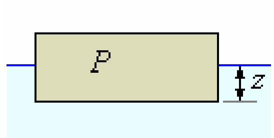
La diferencia de presión debido a la atmósfera para un caso como este, en que las diferencias de altura son pequeñas no juega un rol perceptible.

Ejemplo 29. Un depósito de peso P_1 flota en un líquido y al mismo tiempo tiene una cantidad del mismo líquido, de peso P_2, determinar el peso del flotador P para que la relación de las profundidades x/y se igual a n.
Sugerencia.
Para la solución considere lo siguiente
El P tiene una sección A, la parte sumergida es z.
La sección del depósito es A_1



Solución.
El peso P tiene una sección A y está hundido una altura z, de tal manera que:

$$P = \rho g A z$$



En el depósito: Peso P = empuje sobre P
La sección del depósito es A_1.

$$P_2 = \rho g(A_1 y - Az) = \rho g A_1 y - P\ ,$$

$$\Rightarrow P_2 + P = \rho g A_1 y \qquad (1)$$

Para el conjunto total:
Peso total = Empuje sobre P_2

$$\Rightarrow P + P_1 + P_2 = \rho g A_1 x \qquad (2)$$

Dividiendo (2) / (1):

$$\frac{\rho g A_1 x}{\rho g A_1 y} = \frac{P + P_1 + P_2}{P + P_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{(P + P_2) + P_1}{(P + P_2)} \Rightarrow n = 1 + \frac{P_1}{(P + P_2)}$$

Finalmente:

$$P = \frac{P_1}{(n - 1)} - P_2$$

Ejemplo 30. En una tentativa de identificar un espécimen de roca, un geólogo pesa una muestra en aire y también cuando que está sumergido en agua, usando una balanza de brazos iguales improvisada... ¿Obtiene en su medición 120 g y 78 g. cuál es la densidad de la muestra?
Solución.

En aire $m = \rho V = 120$ y en agua

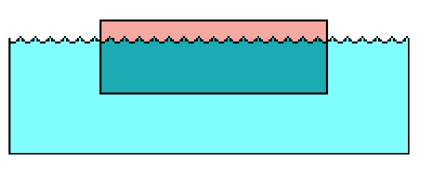
$$120 - \rho_a V = 78 \Rightarrow \rho_a V = 42$$

De estas relaciones obtenemos:

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{120}{42} = 2{,}86$$

La roca desconocida tiene una densidad 2,86 g/cm^3

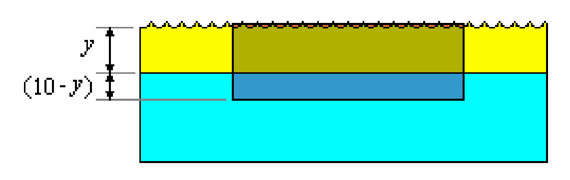
Ejemplo 31. Un cuerpo de forma rectangular de 10 cm de espesor está flotando en una laguna pequeña con tres cuartos de su volumen sumergido
a) Si un camión cisterna derrama en la laguna aceite de densidad 0,65 g/cm^3, quedando la cara superior del cuerpo justamente a nivel de la superficie del líquido. ¿Cuál es el espesor de la capa de aceite?
b) ¿Qué pasará si se para sobre el cuerpo un pajarito de masa m y luego se sale? Determinar la ecuación de movimiento considerando que el agua tiene una constante de viscosidad bA (A es área del cuerpo rectangular).



Solución.
a) Antes que se derrame el aceite, el poste está flotando en el agua simétricamente. Sea su sección transversal A y su densidad ρ_p, si ¾ de su volumen están sumergidos, sobresalen 2,5 cm y están sumergidos 7,5 cm. El peso es igual al empuje. La densidad del agua es ρ.

$$\rho_p gA(10) = \rho gA(7,5) \Rightarrow \rho_p = \frac{3}{4}\rho$$

Cuando el aceite de densidad ρ_a se derrama éste permanece sobre el agua y se extiende a una altura y sobre el agua, al agua le corresponde una altura (10 – y). Como se ha alcanzado el equilibrio:



$$\rho_p gA(10) = \rho gA(10-y) + \rho_a gAy \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}\rho gA(10) = \rho gA(10-y) + \rho_a gAy \Rightarrow$$

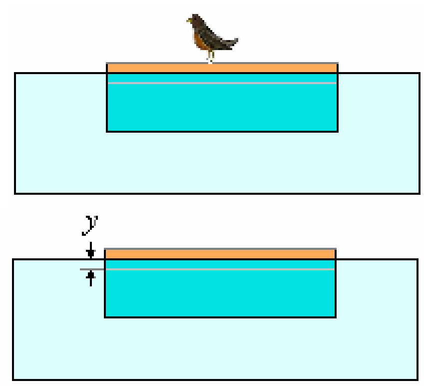
$$\frac{3}{4}\rho gA(10) = \rho gA(10) - \rho gAy + \rho_a gAy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\rho(10) = (\rho - \rho_a)y$$

$$\Rightarrow y = \frac{10\rho}{4(\rho-\rho_a)} = \frac{10(1)}{4(1-0,65)}$$

= 7,14 cm

b) Si se para sobre el cuerpo un pajarito de masa m y luego se sale, el cuerpo quedará en movimiento armónico simple vertical, como lo demostraremos a continuación.
Vamos a considerar antes de derramado el aceite.



$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow$$

Fuerza recuperadora por empuje extra (debido a y) + Fuerza de oposición por viscosidad
= masa de palo moviéndose verticalmente.

$$\Rightarrow -\rho gAy - bA\dot{y} = \rho_p A\ell\ddot{y}$$

$\ell = 0,1$ m , ρ_p = densidad del palo

$$\ddot{y} + \frac{b}{\rho_p \ell}\dot{y} + \frac{\rho g}{\rho_p \ell}y = 0,$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad 2\beta = \frac{b}{\rho_p \ell},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_p \ell}}$$

$$y = y_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

$$y_0 = \frac{m}{\rho A},\ \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ y } \omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|}.$$

Ejemplo 32. Un recipiente se llena parcialmente de agua. Aceite de densidad 750 kg/m^3 se vierte sobre el agua, y flota sin mezclarse. Un bloque de la madera de densidad 820 kg/m^3 se coloca en el recipiente, y flota en la interfase de los dos líquidos. ¿Qué fracción del volumen del bloque se sumerge en agua?

Solución.
Sea el bloque de madera de sección A y altura h, la parte sumergida en agua es x y la parte en aceite es (h - x).

El volumen en agua es $V_a = Ax$, y el volumen en aceite es $V_o = A(h-x)$

El peso del bloque es equilibrado por los empujes debidos al agua y al aceite.

$$\rho_m gAh = \rho_a gAx + \rho_o gA(h-x)$$

$$\Rightarrow \rho_m h = \rho_a x + \rho_o(h-x)$$

$$\Rightarrow \rho_m = \rho_a\frac{x}{h} + \rho_o - \rho_o\frac{x}{h}$$

$$\Rightarrow (\rho_a - \rho_o)\frac{x}{h} = \rho_m - \rho_o$$

$$\Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{(\rho_m - \rho_o)}{(\rho_a - \rho_o)}$$

$$\Rightarrow \frac{820 - 750}{1000 - 750} = 0{,}28$$

Ejemplo 33. Un gran bloque de hielo (densidad 917 kg/m^3) flota en la agua de mar (densidad 1030 kg/m^3). ¿Si el área superficial del hielo es 20 m^2 y tiene 0,20 m de espesor, cuál es la masa del oso polar más pesado que puede estar parado en el hielo sin hacerlo ir debajo de la superficie del agua?

Solución.

$m_a = \rho_a Ah$, $m_B = \rho_B Ah$

$m_B g + mg = m_a g$

$$\Rightarrow m = m_a - m_B = (\rho_a - \rho_B)Ah$$

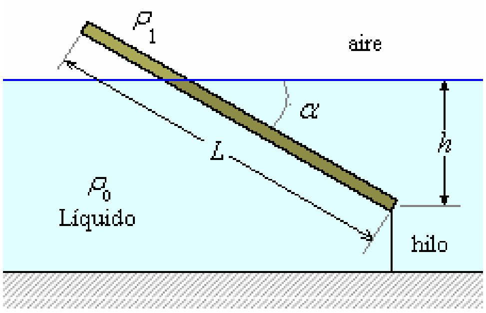
$$= (1030 - 917)(20)(0{,}2) = 452 \text{ kg}$$

Ejemplo 34. Una varilla de largo L y densidad ρ_1 flota en un líquido de densidad ρ_0 $(\rho_0 > \rho_1)$. Un extremo de la varilla se amarra a un hilo a una profundidad h (ver figura adjunta).

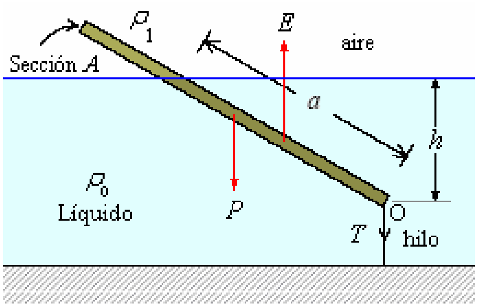
a) Encuentre el ángulo α.

b) ¿Cuál es el mínimo valor de h para el cual la varilla se mantiene en posición vertical?

c) ¿Cuál es la tensión del hilo?



Solución.



a) La fuerza de empuje se aplica en el lugar $\frac{a}{2}$ y la fuerza de gravedad en el lugar $\frac{L}{2}$ (medidos desde O).

Sea A la sección transversal de la varilla

El volumen de la barra es: AL

El peso de la barra es $P = \rho_1 ALg$

El largo a de la parte de la varilla sumergida es

$$a = \frac{h}{\text{sen}\alpha}.$$

La fuerza de empuje viene dada por:

$$E = \rho_0 Aag = \rho_0 A \frac{h}{\text{sen}\alpha} g$$

La fuerza de gravedad es

El torque ejercido por ambas fuerzas respecto a O debe ser nulo, o sea,

$$E\left(\frac{a}{2}\cos\alpha\right) = P\left(\frac{L}{2}\cos\alpha\right) \Rightarrow Ea = PL$$

Sustituyendo las expresiones para E y P se deduce que

$$\rho_0 Aa^2 g = \rho_1 AL^2 g \Rightarrow \rho_0 a^2 = \rho_1 L^2,$$

Reemplazando el valor de a.

$$\rho_0\left(\frac{h}{\text{sen}\alpha}\right)^2 = \rho_1 L^2$$

Despejando se encuentra finalmente que

$$\text{sen}\alpha = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}}\frac{h}{L}$$

b) Si el lado derecho de la última ecuación es mayor o igual a uno, la varilla se mantendrá en posición vertical. El mínimo valor de h para que la varilla esté en posición vertical es

$$h_{\min} = L\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}}$$

c) La tensión del hilo se obtiene exigiendo que la fuerza total sea nula. De esta manera se obtiene que

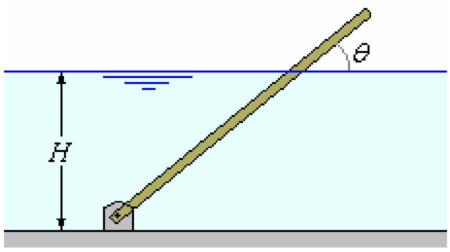
$$T = E - P = \rho_0 A \frac{h}{sen\alpha} g - \rho_1 ALg$$

$$= ALg\rho_1\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1\right) = Mg\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1\right),$$

Donde M es la masa de la varilla.

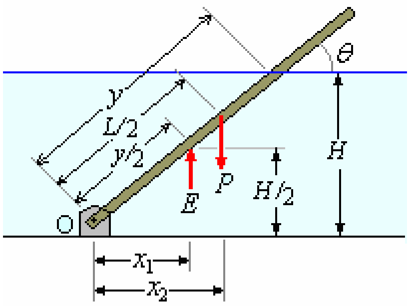
Ejemplo 35. Una barra homogénea de peso P, área de sección transversal A y longitud L flota en agua con uno de sus extremos anclados a una profundidad H, tal como se muestra en la figura. Considerando el espesor de la barra pequeño, determinar el ángulo θ de equilibrio.

Densidad del líquido = ρ.



Solución.

Geometría del problema



$$y=\frac{H}{\operatorname{sen}\theta},\ x_1=\frac{H}{2\tan\theta},\ x_2=\frac{L}{2}\cos\theta$$

Determinación del empuje:

$$E=\rho g V_{Sumergido}=\rho g A y=\rho g A\frac{H}{\operatorname{sen}\theta}$$

Estática, se tendrá equilibrio cuando:

$$\sum\tau_O=0$$

O sea, $Px_2=Ex_1$

Sustituyendo valores:

$$P\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)=\rho g A\frac{H}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{H}{2\tan\theta}\right)$$

$$=\frac{\rho g A H^2\cos\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta}$$

De aquí:

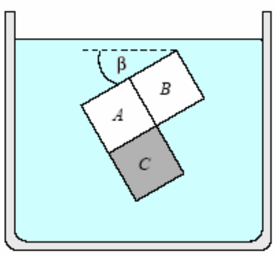
$$\operatorname{sen}^2\theta=\frac{\rho g A H^2}{PL}$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{sen}\theta=H\sqrt{\frac{\rho g A}{PL}}$$

Finalmente:

$$\theta=\operatorname{arc\,sen}H\sqrt{\frac{\rho g A}{PL}}$$

Ejemplo 36. Considere tres cubos del mismo tamaño, adheridos tal como se muestra en la figura. La densidad del material del cual están hechos los dos cubos *A* y *B* es ρ_1 = 0,5 g/cm^3, mientras que el cubo C está hecho de un material de densidad ρ_2 = 2 g/cm^3. Observe que la densidad media de los tres cubos es igual a la del agua ρ = 1 g/cm^3) y, por lo tanto, al sumergirlo en agua, la fuerza de empuje exactamente cancela el peso. ¿Cuál será la orientación de equilibrio estable que el objeto adquirirla cuando está "flotando" rodeado de agua?

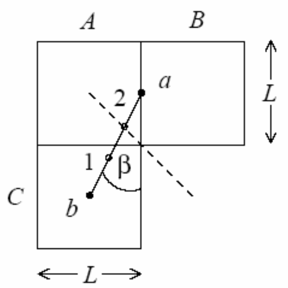


Solución.

Las únicas fuerzas que están actuando sobre el objeto son el peso *P* y el empuje
E. Ya sabemos que ambas fuerzas tienen la misma magnitud y apuntan en direcciones opuestas y, por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto es nula. Pero para que se encuentre en equilibrio también el torque neto debe ser nulo. Esto se logra solo si ambas fuerzas son colineales (actúan a lo largo de la misma recta).
Encontremos los puntos en que actúan las dos fuerzas.
La gravedad actúa en el centro de masas.
El centro de masas de los cubos *A* y *B* se encuentra en a y el centro de masas de *C* se encuentra en b. El centro de masas del objeto completo se encontrará sobre la recta que une *a* con *b*. Como el cubo *C* tiene el doble de masa de los dos cubos *A* + *B* juntos, el centro de masas del objeto completo se ubicará más cerca de *b* que de *a*. En la figura más abajo hemos designado el centro de masas del objeto completo con el numero 1. Se tiene que

$$\overline{b1}=\frac{\overline{ab}}{3}$$

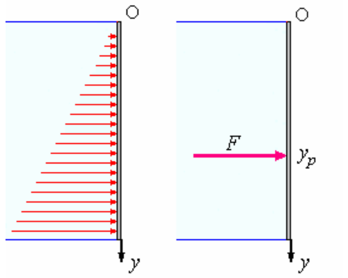
La fuerza de empuje, por otra parte, actúa en el centro de masas que se obtiene al sustituir los tres cubos por agua (en la figura lo hemos designado con el numero 2).



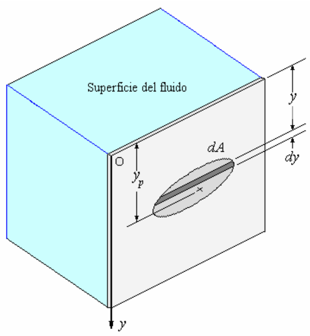
Nuevamente el centro de masas de los cubos *A* + *B* se encuentra en *a*, mientras que el de *C* se encuentra en *b*. El centro de masas de los centros de masas nuevamente se encontrará sobre la recta $\overline{ab}$. Pero ahora los cubos *A*+*B* pesan el doble de lo que pesa *C*, luego el centro de masas ahora estará mías cerca de *a* que de *b*. De hecho, el centro de masas cuando los tres cubos están hechos de agua debe estar sobre el plano de simetría indicado en la figura con una línea punteada.
En resumen, la fuerza de gravedad actúa en 1 y el empuje actúa en 2. Para que no haya torque sobre el sistema la recta $\overline{ab}$ debe orientarse a lo largo de la vertical.
Concluimos que el ángulo β de la figura del enunciado debe coincidir con el de la segunda figura. Se deduce inmediatamente que tan β = 1/2.
Convénzase de que el equilibrio es estable cuando el punto 2 está sobre el punto 1 e inestable cuando 1 está sobre 2.

FUERZAS SOBRE LAS PAREDES O COMPUERTAS

Ya hemos estudiado la variación de presión con la profundidad de un fluido, el conjunto de fuerzas que resultan de la acción del fluido sobre la cara de una superficie de área finita puede reemplazarse por una fuerza resultante. Luego, ahora nos ocuparemos de encontrar la magnitud de esta fuerza resultante y la determinación de su línea de acción o punto de aplicación.
Las fuerzas horizontales causadas por la presión sobre superficies que encierran al fluido, aumentan linealmente con la profundidad, de modo que se tienen fuerzas distribuidas no uniformes actuando sobre ellas. La resultante de ese sistema de fuerzas paralelas es en general una fuerza paralela aplicada en un punto llamado centro de presión, respecto al cual el torque de las fuerzas distribuidas es equivalente al torque de la fuerza resultante.



Para el caso de compuertas y situaciones similares, la fuerza debido a la presión atmosférica actúa por ambos lados, y entonces la omitiremos del análisis por no contribuir en forma neta a la fuerza horizontal actuando sobre la superficie.
La figura siguiente ilustra una situación típica, donde por el interior de una superficie hay un fluido y por el exterior está la atmósfera.



Para calcular la fuerza sobre superficie A en la pared vertical. Tomemos un elemento de área dA de ancho L y altura dy que se encuentra a una profundidad y. La fuerza sobre este elemento diferencial es:

$$dF = pdA = \rho gyLdy$$

La fuerza tota la encontramos integrando en toda la superficie: $F = \int_A pdA = \rho g\int_A ydA$

Como $\int_A ydA = y_G A$

Donde y_G es la posición del centroide del área de la superficie sobre la que actúa la fuerza.
A es el área total de la superficie.
Finalmente: $F = \rho g y_G A$

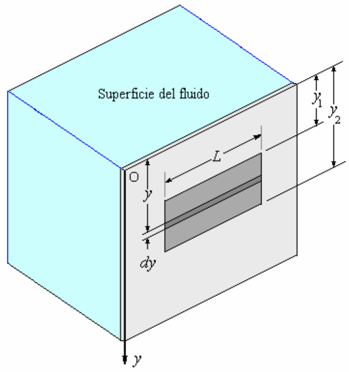
Centro de presión. El centro de presión lo encontramos de la siguiente manera
Torque de las fuerzas distribuidas = Torque de la fuerza resultante

$$y_p F = \int_A ydF \Rightarrow y_p \rho g y_G A = \int_A \rho g y^2 dA$$

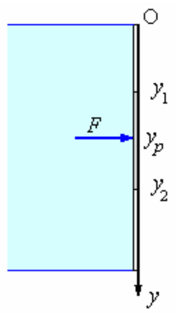
$$\Rightarrow y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I}{y_G A}$$

Donde I es el momento de inercia con respecto a un eje.

APLICACIÓN: Superficie rectangular



El caso más simple es si la superficie es rectangular como se indica en la figura que sigue donde se desea evaluar la fuerza resultante de las fuerzas distribuidas entre y_1 e y_2.



$$F = \int_A pdA = \rho g\int_A ydA$$

$$F = \rho gL\int_{y_1}^{y_2} ydy$$

$$= \rho gL\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{2}\rho gL\left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

También podríamos calcularlo de otra forma
El centroide está en

$$y_G = \frac{1}{2}\left(y_2 + y_1\right)$$

El área $A = L\left(y_2 - y_1\right)$
Y la fuerza es:

$$F = \rho g y_G A = \frac{1}{2}\rho gL\left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

Para calcular el centro de presión:

$$y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I}{y_G A}$$

$$I = \int_A y^2 dA = L\int_{y_1}^{y_2} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{3}L\left[y^3\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)$$

$$y_G = \frac{1}{2}\left(y_2 + y_1\right),\ A = L\left(y_2 - y_1\right)$$

Reemplazando:

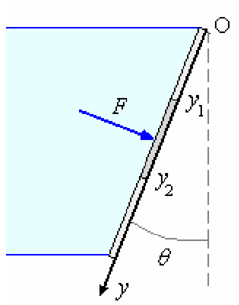
$$y_p = \frac{\frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)}{\frac{1}{2}L\left(y_2 + y_1\right)\left(y_2 - y_1\right)}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{2\left(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right)}{3\left(y_2 + y_1\right)}$$

En particular si la superficie está entre $y_1 = 0$ e $y_2 = h$ resultará

$$y_p = \frac{2}{3}h$$

APLICACIÓN: Fuerza sobre una superficie de forma rectangular inclinada



En una sección anterior se calculó la fuerza resultante y centro de la fuerza para un área vertical de sección rectangular. Para una sección rectangular inclinada un ángulo θ con la vertical, el cálculo es muy parecido, pero ahora, el eje O*y* está inclinado luego resultarán

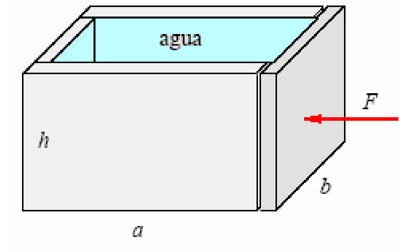
$$F = \frac{1}{2}\rho g L\left(y_2^2 - y_1^2\right)\cos\theta$$

y su punto de aplicación será

$$y_p = \frac{2\left(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right)}{3\left(y_2 + y_1\right)}$$

Note que la expresión para el centro de fuerza es la misma.

Ejemplo 37. Considere una caja de dimensiones *a*, *b* y *h*, llena de agua. Todos los lados de la caja están firmemente unidos entre sí, excepto uno de los lados laterales (de dimensión *b* · *h*). Evalúe la magnitud de la fuerza exterior mínima con que debe presionarse ese lado contra el resto de la caja para que el agua no escurra. Si la fuerza se aplica en un solo lugar, encuentre la posición en la que debe aplicarla.



Solución.
Elijamos el eje z a lo largo de la vertical, con el origen al fondo de la caja sobre la tapa móvil. La presión a una altura *z* es $p_{(z)} = \rho g\left(h - z\right)$.

Dividamos la tapa en franjas horizontales de largo *b* y ancho (altura) *dz*. La fuerza que ejerce el fluido sobre la franja que está a la altura *z* es

$$dF = p_{(z)} b dz .$$

Integrando la fuerza que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene la fuerza total

$$F = \int_0^h p_{(z)} b dz = \rho g b \int_0^h \left(h - z\right)dz = \frac{1}{2}\rho b g h^2 .$$

Para encontrar a qué altura h_p debemos aplicar esta fuerza sobre la tapa, evaluemos el torque que ejerce el fluido sobre la tapa respecto al origen.

El torque que el fluido ejerce sobre la franja que está a la altura z es

$$d\tau = z p_{(z)} b dz .$$

Integrando el torque que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene el torque total

$$\tau = \int_0^h z p_{(z)} b dz = \rho g b \int_0^h z\left(h - z\right)dz = \frac{1}{6}\rho g b h^3 .$$

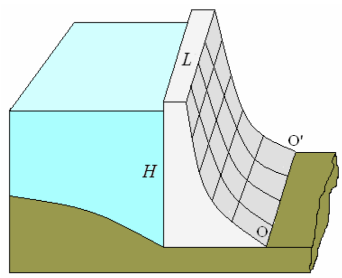
Para que la tapa esté en equilibrio el torque que ejerce la fuerza total externa *F* debe ser igual en magnitud con τ , es decir,

$$F h_p = \frac{1}{6}\rho g b h^3 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho g b h^2 h_p = \frac{1}{6}\rho g b h^3$$

De esta ecuación se deduce finalmente que $h_p = \frac{h}{3}$

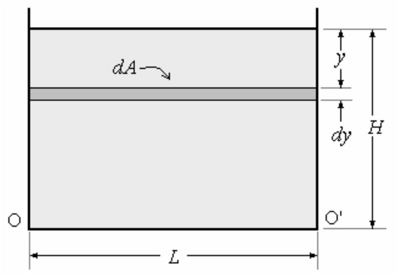
Ejemplo 38. La figura nos representa el dique de un embalse en el que el agua alcanza una profundidad *h* = 60 m en la pared vertical, y tiene una longitud *L* = 250 m. Calcular:

a) La fuerza resultante que actúa sobre el dique.
b) El torque o momento de la fuerza que tiende a hacer girar el dique alrededor de OO'.
c) Posición de la línea de acción de la resultante.



Solución.

a)



El valor de la fuerza sobre un elemento de área dA será:

$$dF = pdA$$

Con $p = \rho_a gh$ y $dA = Ldy$

$$\Rightarrow dF = \rho_a gLydy$$

Y la fuerza resultante es, por tanto:

$$F = \int_0^H dF = \rho_a gL\int_0^H ydy = \frac{1}{2}\rho_a gLH^2$$

Expresión que podíamos haber obtenido aplicando directamente:

$F = \rho gh_C A$, sustituyendo valores:

$$F = \frac{1}{2}(1000)(9,8)(250)(60)^2 = 4,42 \text{ x } 10^9 \text{ N}$$

b) El torque o momento de la fuerza dF respecto del eje O O' es:

$$d\tau = (H - y)dF = \rho_a gLy(H - y)dy$$

y el torque resultante es:

$$\tau = \int_0^H d\tau = \rho_a gL\int_0^H y(H - y)dy = \frac{1}{6}\rho_a gLH^3$$

Sustituyendo valores:

$$\tau = \frac{1}{6}(1000)(9,8)(250)(60)^3 = 8,82 \text{ x } 10^{10} \text{ N}$$

c) Llamando h a la distancia por encima de O a la fuerza F para producir el torque τ calculado en (b), obtenemos:

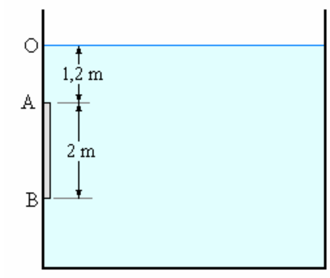
$$\tau = hF \Rightarrow \frac{1}{6}\rho_a gLH^3 = h\left(\frac{1}{2}\rho_a gLH^2\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{H}{3}$$

Sustituyendo valores:

$$h = \frac{60}{3} = 20 \text{ m}$$

Ejemplo 39. Determine la fuerza resultante y su punto de aplicación debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular de altura AB = 2 m y de ancho 1 m (hacia adentro del papel), donde el punto A está a profundidad de 1,2m.



Solución.

Cálculo de la fuerza resultante

$$F = \int_A pdA = \rho g\int_A ydA$$

$$F = \rho gL\int_{y_1}^{y_2} ydy = \rho gL\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{1}{2}\rho gL\left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}1000(9,8)(1)\left(3,2^2 - 1,2^2\right)$$

$= 43120$ N

Cálculo del centro de presión:

$$y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I}{y_G A}$$

$$I = \int_A y^2 dA = L\int_{y_1}^{y_2} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{3}L\left[y^3\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)$$

$$y_G = \frac{1}{2}(y_2 + y_1),\ A = L(y_2 - y_1)$$

Reemplazando:

$$y_p = \frac{\frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)}{\frac{1}{2}L(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}$$

$$= \frac{2\left(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right)}{3(y_2 + y_1)}$$

En particular si la superficie está entre $y_1 = 1,2$ e $y_2 = 3,2$ resultará:

$$y_p = \frac{2\left(3,2^2 + 3,2 \times 1,2 + 1,2^2\right)}{3(3,2 + 1,2)}$$

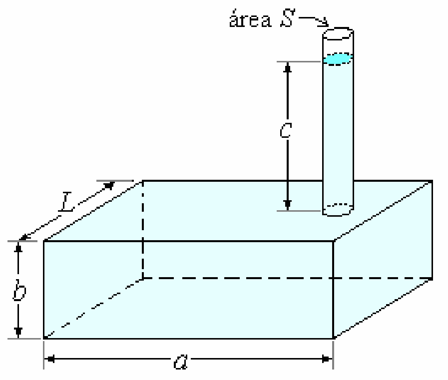
$= 2,35$ m.

Ejemplo 40. El agua se eleva hasta la altura c en el tubo soldado al tanque mostrado en la figura. Despreciando el peso del tubo:

a) Determinar y localizar la fuerza resultante que actúa sobre el área Lb.

b) Determinar la fuerza total en la base del tanque.

c) Comparar el peso total del agua con el resultado obtenido en (b) y explicar la diferencia.



Solución.
a) La fuerza sobre el área $A_1 = Lb$.

$$F_{1_1} = \rho g h_{G1} A_1 = \rho g\left(c + \frac{b}{2}\right)Lb$$

$$y_{p1} = \frac{\int_{A1} y^2 dA}{y_{G1}A_1} = \frac{L\int_c^{(c+b)} y^2 dy}{\left(c+\frac{b}{2}\right)Lb}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left[(c+b)^3 - c^3\right]}{\left(c+\frac{b}{2}\right)b} = \frac{2\left[(c+b)^3 - c^3\right]}{3(2c+b)b}$$

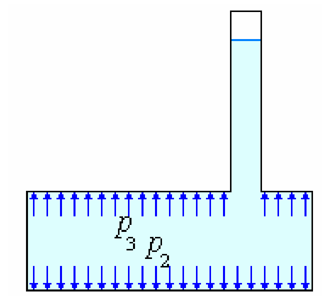
b) La fuerza total en la base $A_2 = La$ del tanque.

$$F_2 = \rho g h_2 A_2 = \rho g(c+b)La$$
$$= \rho g(Lac + Lab)$$

c) El peso total del agua

$$P = \rho g(Lab - Sc)$$

Resultado diferente al obtenido en (b)
Explicación: porque el peso es:



$$P = F_2 - F_3$$

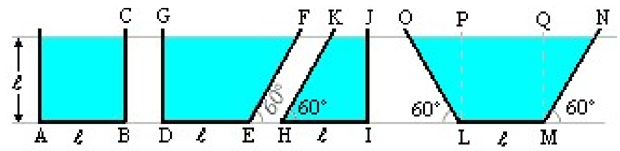
Donde: $F_2 = \rho g(Lac + Lab)$ y

$$F_3 = \rho g h_3 A_3 = \rho g c(La - Sc)$$

Luego: $P = \rho g(Lac + Lab) - \rho g(La - Sc)$

$$= \rho g(Lab - Sc)$$

Ejemplo 41. Supongamos los recipientes de la forma indicada en la figura. El primer recipiente es cúbico, de 10 cm de arista; los otros tres recipientes tienen la misma base e igual altura y están llenos de agua. Calcular:
a) El peso del agua en cada recipiente.
b) La fuerza sobre el fondo de cada uno.
c) La fuerza sobre las caras BC, EF y HK.
d) La fuerza sobre la cara vertical LMNO del cuarto recipiente.



Solución.
a)

$$V_1 = \ell^3 \quad \Rightarrow$$
$$P_1 = \ell^3 \rho_a g$$
$$V_2 = \ell^3\left(1 + \frac{1}{2}\text{cotan}60^\circ\right) \quad \Rightarrow$$
$$P_2 = \ell^3\left(1 + \frac{1}{2}\text{cotan}60^\circ\right)\rho_a g$$
$$V_3 = \ell^3\left(1 - \frac{1}{2}\text{cotan}60^\circ\right) \quad \Rightarrow$$
$$P_3 = \ell^3\left(1 - \frac{1}{2}\text{cotan}60^\circ\right)\rho_a g$$
$$V_4 = \ell^3\left(1 + \text{cotan}60^\circ\right) \quad \Rightarrow$$
$$P_4 = \ell^3\left(1 + \text{cotan}60^\circ\right)\rho_a g$$

Sustituyendo valores:
$P_1 = 10$ N $P_2 = 12{,}89$ N
$P_3 = 7{,}11$ N $P_4 = 15{,}77$ N
b) La fuerza sobre el fondo de cada uno.

$$F = \rho g \ell\left(\ell^2\right) = 10 \text{ N}$$

c) La fuerza sobre las caras BC, EF y HK.

$$F_{BC} = \frac{1}{2}\ell^3 \rho_a g = 5N$$
$$F_{BF} = F_{HK} = 5{,}8N$$

d) La fuerza sobre la cara vertical LMNO del cuarto recipiente.

$$F = \rho_a g h_c A$$

$$h_c = \frac{2\frac{\ell}{3}\left(\frac{\ell^2}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{\ell}{2}\left(\ell^2\right)}{\frac{\ell^2}{\sqrt{3}} + \ell^2} = 0{,}44\ell,$$

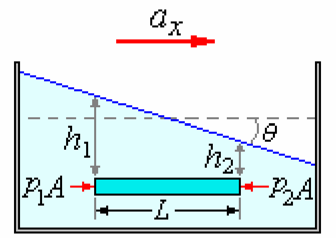
$$A = \frac{\ell^2}{\sqrt{3}} + \ell^2 = 1{,}58\ell^2$$

$$F = 1000 \times 9{,}8(0{,}44\ell)\left(1{,}58\ell^2\right) = 7N$$

TRASLACIÓN DE FLUIDOS.
Un fluido puede estar sujeto a traslación o rotación con aceleración constante si movimiento relativo entre partículas. Esta condición de equilibrio relativo hace que el fluido este libre de esfuerzos cortantes y

se aplican las leyes de la estática de fluidos teniendo en cuenta los efectos de la aceleración.

Traslación horizontal.
Si el recipiente que contiene un líquido de densidad ρ se traslada horizontalmente con aceleración constante a_x, la superficie inicialmente horizontal se inclina con una pendiente que calcularemos a continuación.



En la figura consideremos un prisma de líquido a lo largo de una línea horizontal. La presión no varía igual que en un líquido en reposo, por lo tanto el efecto de la aceleración a_x será en la dirección x.
Para el cuerpo libre se tiene:

$$\sum F_x = ma_x$$

$p_1 A - p_2 A = \rho L A a_x$, como $p_1 = \rho g h_1$ y

$$p_2 = \rho g h_2$$

Podemos escribir:

$$\rho g h_1 A - \rho g h_2 A = \rho L A a_x$$

Simplificando

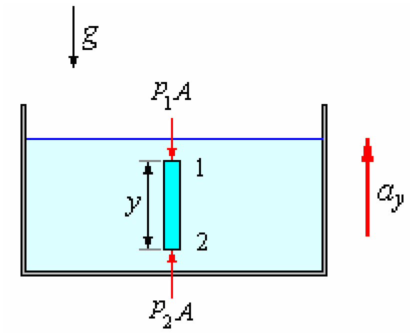
$$g(h_1 - h_2) = L a_x \Rightarrow \frac{(h_1 - h_2)}{L} = \frac{a_x}{g}$$

Siendo $\frac{(h_1 - h_2)}{L}$ la pendiente de la superficie libre, se tendrá finalmente:

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g}$$

Como a_x es constante, la superficie libre es un plano inclinado.

Traslación vertical.
Si el recipiente que contiene un líquido de densidad ρ se mueve con aceleración vertical a_y, la superficie libre permanece horizontal. La presión es constante en planos horizontales, pero es diferente a cuando está en reposo, valor que calcularemos a continuación.



Para el prisma de líquido en la figura tenemos:

$$\sum F_y = ma_y$$

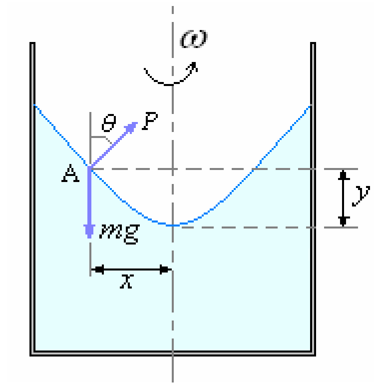
$$p_2 A - p_1 A - \rho y A g = \rho y A a_x$$

Simplificando: $p_2 - p_1 = \rho g y\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)$

Si el punto 1 estuviera en la superficie del líquido, la presión en un punto cualquiera bajo la superficie a un a profundidad h sería:

$$p = p_a + \rho g y\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)$$

Rotación uniforme alrededor de eje vertical.
Si un recipiente abierto parcialmente lleno con un líquido rota alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante, no hay movimiento relativo entre las partículas, la superficie que inicialmente era horizontal toma una forma parabólica como lo demostraremos a continuación.



En la figura, consideremos una partícula de masa m en el punto A, aplicando la segunda ley de Newton se tiene:

En el eje x: $\sum F_x = ma_x$

$$\Rightarrow P\text{sen}\theta = m\omega^2 x \quad (1)$$

En el eje y: $\sum F_y = 0$

$$\Rightarrow P\cos\theta - mg = 0 \text{ o } P\cos\theta = mg \quad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Como la pendiente de la curva en A es $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$, tenemos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g} \Rightarrow dy = \frac{\omega^2}{g} x dx$$

Integrando: $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C$

Para evaluar la constante, tenemos que para $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 0$, por lo tanto $C = 0$.

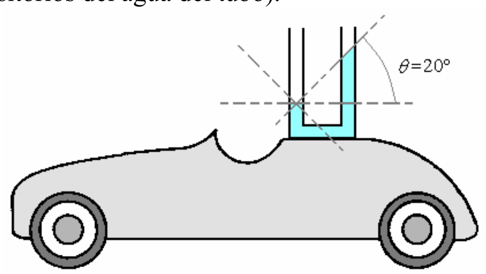
Finalmente:

$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$, ecuación de la parábola.

La presión manométrica a una profundidad h del vértice de la parábola será:

$$p = \rho g(h + y) = \rho g\left(h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}\right)$$

Ejemplo 42. Sobre un automóvil de carreras se instala un tubo en U lleno de agua. El conductor acelera uniformemente desde el arranque, al cabo de 5 segundos el agua contenida en el tubo tiene la posición señalada en la figura. ¿Cuáles son la aceleración y la velocidad del automóvil en ese instante? (No tome en cuenta los efectos viscosos transitorios del agua del tubo).



Solución.

Observamos en el esquema que la gravedad efectiva es normal a la línea trazada por los extremos de la columna de agua. Sus extremos están a la presión atmosférica y quedan en una línea de presión constante. Podemos calcular fácilmente la magnitud de a:

$$a = g\tan\theta = g\tan 20^\circ = 9{,}81 \times 0{,}364$$
$$= 3{,}57 \text{ m/s}^2$$

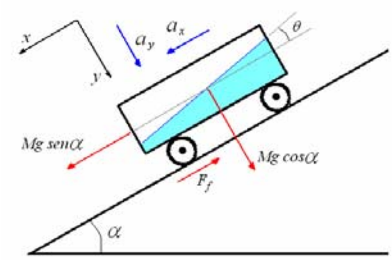
La magnitud de la velocidad del automóvil se determina de la siguiente ecuación:

$$a = \frac{dx}{dt} = 3{,}57\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Integramos y para $t = 5$ s:

$$v = 3{,}57t = (3{,}57)(5) = 17{,}85\frac{\text{m}}{\text{s}} = 64\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ejemplo 43. Un tanque abierto, lleno de agua, rueda sobre un plano inclinado, que forma un ángulo α con la horizontal. Si el tanque tiene una masa M y la fuerza producida por la resistencia del aire y la fricción en ruedas es F_f, ¿qué ángulo formaría la superficie del agua con el fondo del tanque?



Solución.

Primeramente hallemos la aceleración a_x del tanque que desciende por el plano.

$$\sum F_x = Ma_x \Rightarrow$$
$$Mg\text{sen}\alpha - F_f = Ma_x$$

La aceleración será: $a_x = g\text{sen}\alpha - \frac{F_f}{M}$

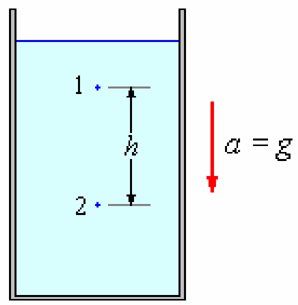
La aceleración perpendicular al fondo del tanque es $a_y = g\cos\alpha$

El ángulo θ que forma la superficie del agua con el fondo del tanque (dirección *x*) se encuentra de la siguiente manera:

$$a_x = a_y \tan\theta \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \frac{a_x}{a_y} = \frac{g\text{sen}\alpha - F_f/M}{g\cos\alpha}$$

Ejemplo 44. Un tanque sufre una caída libre. Encuentre la diferencia de presión entre dos puntos separados por una distancia vertical h.



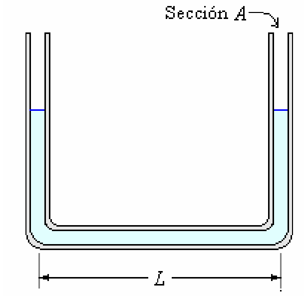
Solución.

La diferencia de presiones entre dos puntos de un fluido que se mueve verticalmente con aceleración a es $(p_2 - p_1) = \rho gh\left(1 + \frac{a}{g}\right)$

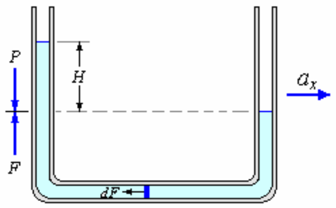
Luego $(p_2 - p_1) = 0$, consecuentemente $p_2 = p_1$

Ejemplo 45. Se tiene un tubo en U de área *A* y con un fluido de densidad ρ, como se muestra en la

figura. Determinar la diferencia de altura H que se producir entre las alturas que alcanza el líquido en cada una de las ramas cuando,
a) Se le imprime una aceleración lineal horizontal.
b) Rote con una velocidad angular constante a alrededor de un eje vertical que coincide con una de sus ramas.



Solución.
a) Solamente la masa de líquido que está en la parte horizontal podrá desplazarse bajo la acción de la aceleración, pues, la masa de líquido que esta en las ramas verticales tiene su movimiento restringido, por ser perpendiculares.



Como todos los elementos diferenciales de masa en la parte horizontal tienen la misma aceleración, la fuerza total será:

$$F = ma = \rho Va = \rho ALa$$

Esta fuerza, al alcanzarse el equilibrio, debe ser igual al peso de la columna de líquido de altura H, que es:

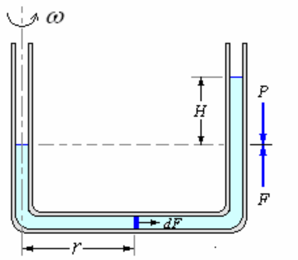
$$P = pA = \rho gHA$$

Luego, igualando $F = P \Rightarrow \rho ALa = \rho gHA$

De donde $H = \dfrac{a}{g}L$

b) En este caso se tiene la acción de la aceleración centrípeta $a_c = \omega^2 r$, al ser horizontal, como en el caso anterior, solo actúan sobre la masa de líquido que está en la parte horizontal del tubo, pero, como es variable, función del radio r, la fuerza sobre cada elemento diferencial de masa será:

$$dF = (dm)a = (\rho Adr)\omega^2 r$$



Integrando, tendremos la fuerza total F:

$$F = \int dF = \omega^2 A\rho\int_0^L rdr = \omega^2 A\rho\frac{L^2}{2}$$

Nuevamente, en equilibrio, la igualaremos:
al peso de la columna de líquido de altura H,

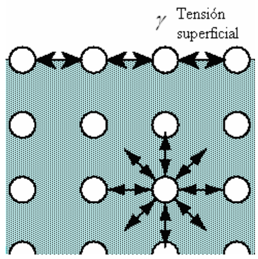
$$F = P \Rightarrow \omega^2 A\rho\frac{L^2}{2} = \rho gHA$$

Finalmente: $H = \dfrac{\omega^2 L^2}{2g}$

TENSION SUPERFICIAL - CAPILARIDAD

TENSIÓN SUPERFICIAL

Entre dos moléculas de un fluido actúan fuerzas. Estas fuerzas, llamadas fuerzas de van der Waals o fuerzas cohesivas son de origen eléctrico. Una de las características de estas fuerzas es que su alcance es muy pequeño (rápidamente se desvanecen cuando la distancia entre las moléculas es dos o tres veces su tamaño); otra característica es que mientras las moléculas no se traslapan, la fuerza es atractiva.
El efecto neto de las fuerzas de cohesión sobre una molécula que está en el interior del líquido es nulo, pero no así para una molécula que se encuentra en la superficie.



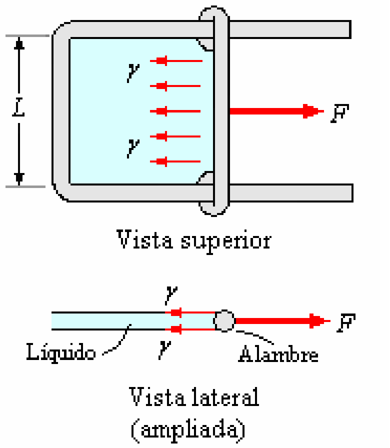
Para poner una molécula en la superficie hay que realizar un trabajo. O sea, la existencia de una superficie en un fluido introduce una energía potencial. Esta energía es proporcional a la superficie y se tiene que

$$dW = \gamma\, dA$$

Aquí γ es una constante que depende del fluido y se llama tensión superficial y *dA* es un elemento (infinitesimal) de superficie. En realidad la tensión superficial depende de las dos sustancias que están en contacto.

Medición de la tensión superficial.

Para medir la tensión superficial se puede usar el dispositivo mostrado en la figura. Un alambre movible, inicialmente sumergido, se tira lentamente, extrayéndolo del líquido (con una película del líquido adosada).



La energía para desplazar la longitud d es Fd y el área de la película se incrementa en $2dL$, considerando que existen dos superficies.
La relación entre la energía necesaria para realizar el desplazamiento y el área incrementada es la tensión superficial

$$\gamma = \frac{\text{Energía}}{\text{Area formada}}$$

En el caso del dispositivo empleado:

$$\gamma = \frac{Fd}{2Ld} = \frac{F}{2L}$$

F es la fuerza paralela a la superficie de la película necesaria para mantener la película extendida. Esta fuerza por unidad de longitud es la tensión superficial γ.
Así la tensión superficial γ no sólo es igual a la fuerza por unidad de longitud; sino también es igual al trabajo hecho por unidad de incremento del área superficial. De ahí que y pueda especificarse en N/m o en J/m^2.

Ejemplo 46. Deseamos encontrar la diferencia de presión entre el interior y exterior de una pompa de jabón de radio R = 1 cm.
Solución.
Si, soplando con una pajita, aumentamos el radio de la pompa de R a $R + dR$, entonces la superficie aumenta en

$$dA = 2\left[4\pi(R+dR)^2 - 4\pi R^2\right] = 16\pi R dR$$

El factor 2 nuevamente se debe a que hay que considerar tanto la superficie interior como exterior de la pompa.
El cambio de energía debido al aumento de la superficie es por lo tanto

$$dW = \gamma\, dA = 16\gamma\pi R dR$$

Por otra parte, podemos evaluar el trabajo directamente, multiplicando el desplazamiento dR por la fuerza $\Delta p\left(4\pi R^2\right)$, es decir,

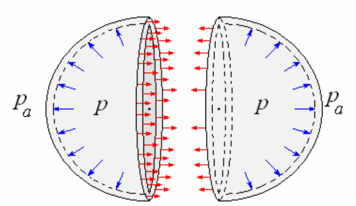
$$dW = \Delta p . 4\pi R^2 dR .$$

Igualando las dos últimas expresiones se encuentra la diferencia de presión

$$\Delta p = \frac{4\gamma}{R} .$$

Con γ = 0,025 N/m y R = 0,01 m se obtiene
Δp = 10 N/m^2.
Si se deja de soplar por la pajita, la pompa se desinfla.
Observe que la presión al interior de una pompa de jabón es mayor tanto más pequeño es su radio. De esta observación se deduce que al juntarse una pompa de jabón grande con una pequeña, la pequeña inflará a la más grande. De esta manera la pompa grande aumentará su tamaño mientras que la pequeña disminuirá: en otras palabras, la más grande absorberá a la más pequeña.
Otra manera.

La pompa es una película delgada sostenida por la tensión superficial de dos superficies (la superficie externa y la superficie interna).



$$\Delta p = p - p_a$$

Fuerza debida a la presión dentro de la pompa.

$$F_p = (p - p_a)\pi R^2 = \Delta p \pi R^2$$

Fuerza debida a la tensión superficial de las dos caras de la pompa

$$F_\gamma = \gamma 2(2\pi R) = \gamma 4\pi R$$

Como están en equilibrio:

$$F_p = F_\gamma$$

$$\Delta p \pi R^2 = \gamma 4\pi R$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{4\gamma}{R}$$

La gota y la burbuja.

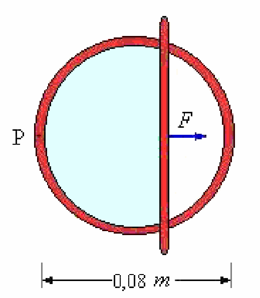
En el caso de la gota y la burbuja solamente hay una superficie que las encierra por lo tanto:

$$F_\gamma = \gamma 2\pi R$$

La diferencia de presión es:

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$$

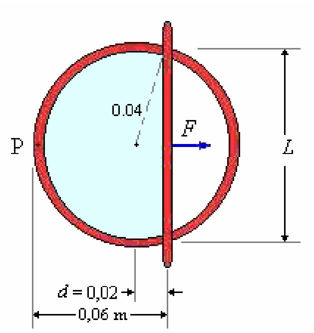
Ejemplo 47. Un alambre con forma circular, 0,08 m de diámetro, con un alambre que puede deslizar en él, está en un plano horizontal. Se forma una película líquida, limitada por los alambres, en el lado izquierdo, como se muestra en la figura. La tensión superficial del líquido es 25 mN/m. una fuerza aplicada *F*, perpendicular al alambre deslizante mantiene a la película en equilibrio.



a) Cuando el alambre deslizante se encuentra a 0,06 m del punto P, la fuerza aplicada *F*, es:
b) Cuando la fuerza *F* es 1,5 mN, la distancia del alambre deslizante al centro del círculo es:
c) Cuál es el valor máximo de la fuerza *F*:

Solución.

a)



$$L = 2\sqrt{0{,}04^2 - 0{,}02^2} = 0{,}069 \text{ m}$$

$$F = \gamma(2L) = 25\frac{\text{mN}}{\text{m}}(2\times 0{,}069 \text{ m}) = 3{,}46 \text{ mN}$$

b)

$$F' = \gamma(2L') \Rightarrow L' = \frac{F'}{2\gamma}$$

$$L' = \frac{1{,}5}{2\times 25} = 0{,}03 \text{ m}$$

Luego

$$d = \sqrt{0{,}04^2 - 0{,}03^2} = 0{,}026 \text{ m}$$

c)

$$F_{\max} = \gamma(2L_{\max}) = 25(2\times 0{,}08)$$
$$= 4{,}0 \text{ mN}$$

Ejemplo 48. Cuál es el trabajo requerido para formar una pompa de jabón de radio R, usando una solución jabonosa de tensión superficial γ.

Solución.

Como $\gamma = \dfrac{\text{Energía}}{\text{Area formada}} = \dfrac{\Delta W}{\Delta A}$

$\Rightarrow \Delta W = \gamma\, \Delta A$

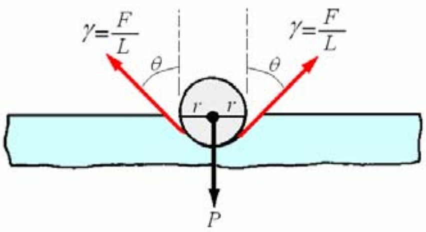
Siendo $\Delta A = 2(4\pi R^2) = 8\pi R^2$

Obtenemos:

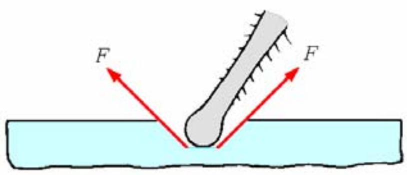
$\Delta \text{W} = \gamma 8\pi R^2$

INSECTOS QUE CAMINAN SOBRE EL AGUA.

Debido a la tensión superficial, los insectos pueden caminar sobre el agua y cuerpos más densos que ésta, como una aguja de acero, pueden flotar realmente sobre la superficie. La figura muestra cómo puede soportar el peso *P* de un objeto la tensión superficial. En realidad, *P* es el "peso efectivo" del objeto (su peso verdadero menos la fuerza de empuje) puesto que el objeto se sumerge ligeramente en el fluido.



Si el objeto tiene forma esférica, que es aproximadamente la forma que tienen las patas de los insectos, la tensión superficial actúa en todos los puntos a lo largo de un círculo de radio r. Sólo la componente vertical, $\gamma\cos\theta$, actúa para equilibrar *P*. En consecuencia la fuerza neta ascendente debida a la tensión superficial es $2\pi r\gamma\cos\theta$.



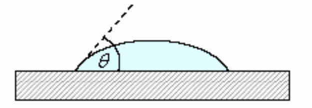
Tensión superficial actuando sobre la pata de un insecto.

ADHESIÓN Y COHESIÓN.

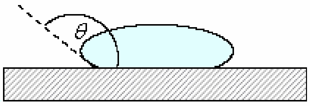
En las superficies de un líquido algunas de sus moléculas dejan el líquido por evaporación, pero no todas. Existe una fuerza de atracción entre las moléculas de un líquido, por ejemplo una gota de mercurio tiene la tendencia a asumir la forma esférica, esto es, una superficie de área mínima, consistente con la fuerza atractiva entre moléculas, esta propiedad es conocida como **cohesión.**

La atracción que existe entre las moléculas de dos sustancias diferentes, como la atracción que hay entre el líquido y las paredes del recipiente que lo contiene, es la propiedad conocida como **adhesión.**

Consideremos una pequeña cantidad de líquido en contacto con una superficie sólida plana y ambos en contacto con un gas.
Si la fuerza de adhesión (entre el líquido y el sólido) es mucho mayor que la fuerza de cohesión (entre las moléculas del líquido), entonces el líquido tenderá a esparcirse sobre el sólido. En este caso se dice que el líquido moja al sólido,

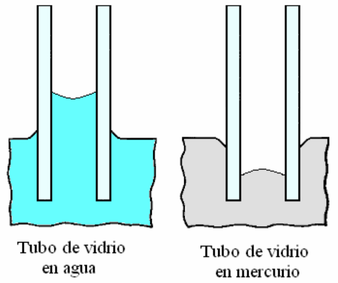


Si la fuerza de cohesión es mayor entonces el líquido tenderá a concentrarse, adquiriendo una forma compacta tipo gota

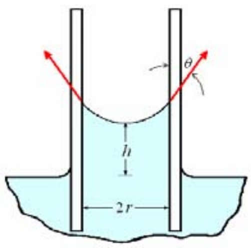


Como resultado de esta competencia entre las distintas fuerzas de adhesión y cohesión, se forma un ángulo de contacto θ bien característico entre el líquido y el sólido.
Experimentalmente se determina que este ángulo de contacto para las substancias, en el caso $\theta < 90^\circ$ el fluido es humectante, o sea moja al sólido y cuando $\theta > 90^\circ$ el fluido es no humectante.

CAPILARIDAD
En tubos que tienen diámetros muy pequeños se observa que los líquidos se elevan o se hunden en relación con el nivel del líquido de los alrededores. Este fenómeno se conoce por capilaridad y dichos tubos delgados se llaman capilares. El que un líquido suba o baje depende de los esfuerzos relativos de las fuerzas adhesivas y cohesivas. Así, el agua sube en un tubo de vidrio en tanto que mercurio baja.



La cantidad real que sube (o que baja) depende de la tensión superficial (puesto que es ésta la que mantiene unida a la superficie del líquido), así como del ángulo de contacto θ, y el radio r del tubo. Para calcular h, la altura que nos referiremos a la figura siguiente.



La tensión superficial γ actúa en un ángulo θ alrededor de un círculo de radio r. La magnitud de la fuerza vertical F debida a la tensión superficial es $F = (\gamma \cos\theta)(2\pi r)$. Esta fuerza está equilibrada por el peso del líquido de abajo que es aproximadamente un cilindro de altura h y volumen $V = \pi r^2 h$. En consecuencia,

$$2\pi r\gamma \cos\theta = mg$$

Como $mg = \rho V g = \rho\pi r^2 hg$, donde ρ es la densidad del líquido, tenemos:

$$2\pi r\gamma \cos\theta = \rho\pi r^2 hg$$

Resolviendo para h encontramos

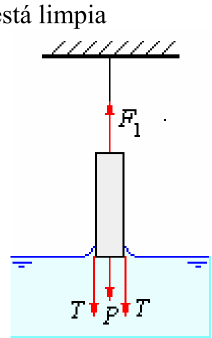
$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

Para mayor parte de los líquidos como el agua en un vaso, θ, es casi cero y

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}$$

Esta ecuación también se cumple cuando desciende el líquido, como en el caso del mercurio en un tubo de vidrio. En esta situación, el ángulo de contacto mayor que 90° y $\cos\theta$ será negativo; esto hace h negativa lo que corresponde a un descenso de nivel.
Note que mientras más delgado sea el tubo mayor será el ascenso (o descenso) del líquido.

Ejemplo 49. Un cuadrado cuyas aristas miden 6 cm hecho de una placa delgada de metal se suspende verticalmente de una balanza tal que el borde inferior de la hoja se moja en agua de tal forma que es paralela a la superficie. Si la hoja está limpia, el ángulo de contacto es 0º, y la hoja parece pesar 0,047 N. Si la hoja esta grasosa, el ángulo de contacto es 180º y el peso parece ser 0,030 N. ¿Cuál es la tensión superficial del agua?
Solución.
Cuando la hoja está limpia



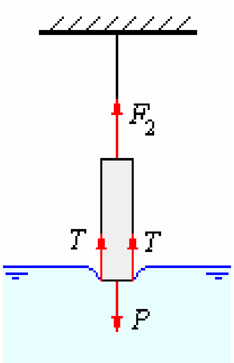
La fuerza de tensión superficial en cada cara de la placa es:

$$T = \gamma L$$

No tomaremos en cuenta las partes del espesor, por ser placa delgada.
Como hay equilibrio vertical

$$F_1 = P + 2T, \qquad (1)$$

Cuando la hoja está grasosa



$$F_2 = P - 2T \qquad (2)$$

Restando (2) de (1):

$$T = \frac{F_1 - F_2}{4} \Rightarrow \gamma L = \frac{F_1 - F_2}{4}$$

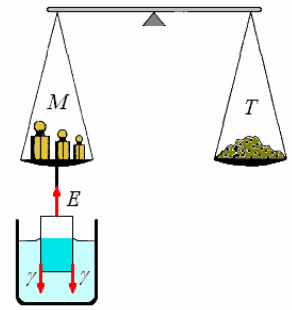
$$\Rightarrow \gamma = \frac{F_1 - F_2}{4L}$$

Reemplazando valores:

$$\gamma = \frac{0{,}047 - 0{,}030}{4(0{,}06)} = \frac{0{,}017}{0{,}24}$$

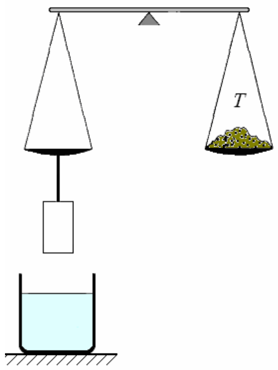
= 0,071 N/m

Ejemplo 50. Del platillo de una balanza se cuelga un cuerpo cilíndrico de vidrio cerrado por su base inferior, de 1 cm de radio y 4 cm de altura, y se pone tara en el otro platillo hasta conseguir el equilibrio. Se sumerge el cuerpo en agua destilada a 4º C hasta la mitad de su altura exactamente. Para restablecer el equilibrio hace falta poner en el platillo del cuerpo pesas por valor de 5,8 g. Calcular el coeficiente de tensión superficial del agua. El ángulo de contacto se supone de cero grados, es decir, que el menisco es tangente a la superficie lateral del cilindro.



Solución.

La tara *T* equilibra al sistema

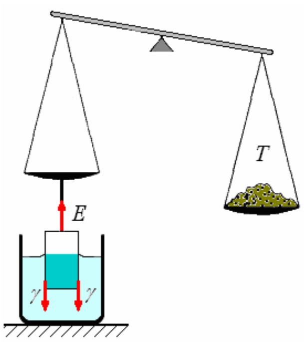


Cuando el cuerpo cilíndrico de vidrio cerrado se sumerge en agua aparecen las fuerzas de empuje y la de tensión superficial

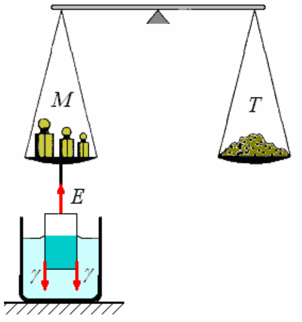
La tensión superficial actúa a lo largo del contacto del líquido con el cilindro. La fuerza hacia abajo debida a ella es:

$$F = 2\pi R\gamma$$

El empuje vale: $E = V_s \rho_a g = \pi R^2 \frac{h}{2} \rho_a g$



Para volver al equilibrio (balanza horizontal) se colocan las pesas en el platillo izquierdo de la balanza (peso *Mg*), esto anula la acción del empuje *E* y a la fuerza de la tensión superficial *F*.



Por lo tanto

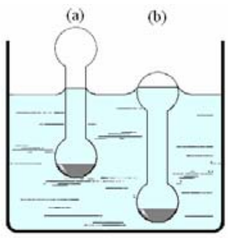
$$E = F + Mg \Rightarrow \pi R^2 \frac{h}{2} \rho_a g = 2\pi R\gamma + Mg$$

$$\gamma = \frac{\pi R^2 hg - 2Mg}{4\pi R}$$

$$= \frac{\pi(10^{-2})^2(4\times10^{-2})(10^3)(9{,}8) - 2(5{,}8\times10^{-3})(9{,}8)}{4\pi(10^{-2})}$$

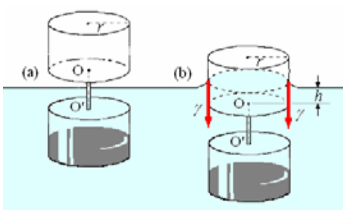
= 75,36 x 10^{-3} N/m

Ejemplo 51. Tenemos unas ampollitas de vidrio de paredes muy estrechas en la forma indicada en la figura. La ampollita va lastrada en su parte inferior con mercurio para que se mantenga en la posición de la figura (a) al dejarla sobre el nivel de un recipiente con agua. Sumergimos el sistema hasta la posición de la figura (b). Debería recobrar la posición a, pero se queda en la b. ¿Por qué? El ángulo de contacto se supone de cero grados



Solución.
Llamamos *r* y *R* los radios de la parte cilíndrica y de la esferita, respectivamente: $R > r$.
En la posición (a) el valor de la tensión superficial es:
$F = 2\pi r\gamma$
Y al estar en equilibrio, el empuje ha de ser igual al peso más la fuerza correspondiente a la tensión superficial:
$E = P + 2\pi r\gamma$
Al sumergir la ampollita la fuerza debida a la tensión superficial es: $F' = 2\pi R\gamma$
Y se habrá de verificar:
$E' = P + 2\pi R\gamma$.
Y como el peso es el mismo, nos queda:
$$E - 2\pi r\gamma = E' - 2\pi R\gamma \Rightarrow$$
$$V\rho g - 2\pi r\gamma = V'\rho g - 2\pi R\gamma$$
$$\Rightarrow \frac{V' - V}{R - r} = \frac{2\pi\gamma}{\rho g}$$
Condición que se debe cumplir para que exista el segundo equilibrio.

Ejemplo 52. Los cilindros huecos y cerrados de la figura son de vidrio y están unidos por la varilla OO'; el inferior se ha lastrado con el mercurio necesario para que el sistema flote en un líquido, con el cilindro inferior sumergido. Sumergimos el sistema hasta que quede también flotando en la forma de la figura (b), sin recobrar la primitiva posición (a).
Demostrar que se debe cumplir:
$rh = 2\gamma / \rho g$,
γ es la tensión superficial y
ρ es la densidad del líquido respectivamente.
Se supone la varilla OO' infinitamente delgada, que el líquido moja al vidrio y que el ángulo de contacto es nulo.
Solución.



En el primer equilibrio: $Mg = V\rho g$.
V = volumen del cilindro inferior.
En el segundo equilibrio:
$$Mg + 2\pi r\gamma = V\rho g + \pi r^2 h\rho g$$
Luego teniendo en cuenta la primera, nos queda:
$$2\pi r\gamma = \pi r^2 h\rho g \Rightarrow rh = \frac{2\gamma}{\rho g}$$

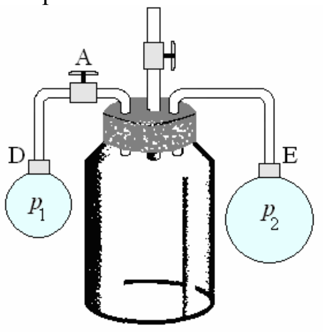
Ejemplo 53. Ocho gotas de mercurio de radio *r* se unen para formar una sola. ¿Qué relación existe entre las energías superficiales antes y después de la unión?
Solución.
El volumen de la gota formada, que tendrá por radio *R*, será ocho veces mayor que el volumen de una de las gotas pequeñas:
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 8\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R^3 = 8r^3 \Rightarrow \frac{R}{r} = 2$$
La energía superficial de las ocho gotas será ocho veces la energía de una sola:
$$W = 8\gamma 4\pi r^2 = 32\gamma\pi r^2$$
Y de la gota resultante: $W' = \gamma 4\pi R^2 = 4\gamma\pi R^2$
Dividiendo: $\frac{W}{W'} = 8\frac{r^2}{R^2} = 8\frac{1}{4} = 2$
La disminución que experimenta la superficie del mercurio (o de otro líquido cualquiera) al juntarse las gotas pequeñas para formar una grande, libera una determinada energía que se emplea en calentar la gota. Por el contrario cuando una gota grande se divide en otras más pequeñas, se produce un aumento de energía en la película superficial y, como consecuencia un determinado enfriamiento de las gotas.

Ejemplo 54. El aceite de olivo tiene una tensión superficial respecto del aire de 32 mN/m. Una gota esférica tiene un diámetro de 4 mm. Calcular:
a) La presión a que está sometida.
b) La fuerza total a la que está sometida, debida a la tensión superficial que actúa sobre su superficie.
c) La energía potencial de superficie.
Solución.
a) $p = \frac{2\gamma}{r} = \frac{2\left(32 \times 10^{-3}\right)}{2 \times 10^{-3}}$
= 32 Pa
b) $F = pA = p4\pi R^2 = 32 \times 4\pi\left(2 \times 10^{-3}\right)^2$
= 1,608 mN
c) $W = \gamma A = \gamma 4\pi R^2 = \left(32 \times 10^{-3}\right)4\pi\left(2 \times 10^{-3}\right)^2$
= 1,608 μJ

Ejemplo 55. Calcular la energía superficial de una pompa de agua jabonosa de 1 cm de radio y la presión debida a su curvatura. Consideramos el espesor de la película líquida como despreciable. Tensión superficial = 35 x 10^{-5} N/cm.
Solución.
$$W = 2\gamma A = 2\gamma 4\pi R^2 = 2\left(35 \times 10^{-3}\right)4\pi\left(10^{-2}\right)^2$$
= 87,96 μJ
$$p = 2\frac{2\gamma}{r} = \frac{4\left(35 \times 10^{-3}\right)4\pi\left(10^{-2}\right)^2}{10^{-2}}$$

= 14 Pa

Ejemplo 56. En un dispositivo como el de la figura se han conseguido dos pompas de agua jabonosa en los extremos D y E de los tubos. La llave A incomunica el aire interior de las dos pompas. Abierta tal llave, la pequeña se achica y la grande aumenta de volumen. ¿Por qué?



Solución.
Las presiones del gas interior de las pompas pequeña y grande, respectivamente, exceden a la atmosférica en: $p_1 = 2\dfrac{2\gamma}{r}$ $p_2 = 2\dfrac{2\gamma}{R}$.
Al ser $r < R$, se ha de verificar que $p_1 > p_2$, y el aire pasa de la pompa pequeña a la grande

Ejemplo 57. Sabiendo que la tensión superficial del agua es 75 x 10^{-3} N/m. Calcular la altura a que asciende el agua en un tubo de 1 mm de diámetro y en unas láminas cuadradas paralelas cuya distancia es 0,05 mm. Se supone el ángulo de contacto igual a cero.
Solución.
Como el líquido no moja: $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$, luego:

$$h_1 = \frac{2\gamma}{r\rho g} = \frac{2\left(75\times10^{-3}\right)}{\left(5\times10^{-4}\right)\left(10^3\right)(9,8)}$$

= 0,031 m

La altura alcanzada entre dos láminas paralelas es:

$$h_2 = \frac{2\gamma\cos\theta}{d\rho g} = \frac{2\left(75\times10^{-3}\right)}{\left(5\times10^{-5}\right)\left(10^3\right)(9,8)}$$

= 0,31 m

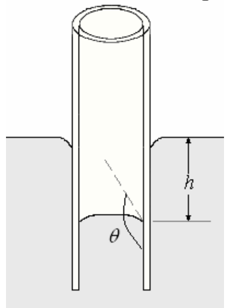
Ejemplo 58. El tubo de un barómetro de mercurio (tensión superficial, 547 x 10^{-3} N/m; ángulo de contacto, 125°) tiene 3 mm de diámetro. ¿Qué error introduce en las medidas la tensión superficial?
Solución.

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g} = \frac{2\left(547\times10^{-3}\right)\cos125^{\circ}}{\left(1,5\times10^{-3}\right)(13600)(9,8)}$$

= -0,003 m

El signo menos nos indica que la medida es inferior a la correcta.

Ejemplo 59. Sabiendo que la tensión superficial del mercurio es 547 dina/cm y que el ángulo de contacto con un tubo de 1 mm de diámetro y con unas láminas paralelas separadas 0,05 mm es de 125°, calcular la altura que desciende el mercurio al introducir tubo y láminas en una cubeta con dicho líquido.



Solución.
Hacemos este problema y los dos siguientes en el sistema cgs.
a) En el tubo

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g}$$

$$= \frac{2(547)\cos125^{\circ}}{(0,05)(13,6)(980)} = -1 \text{ cm}$$

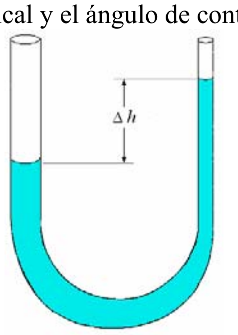
b) En las láminas

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{d\rho g}$$

$$= \frac{2(547)\cos125^{\circ}}{(0,005)(13,6)(980)} = -10 \text{ cm}$$

El signo menos indica el descenso.

Ejemplo 60. En un tubo en U cuyas ramas son de 0,6 mm y 0,6 cm de diámetro se introduce un líquido de densidad 1,8 g/cm^3 y de 32 dina/cm de tensión superficial. ¿Cuál será la diferencia de nivel del líquido en las dos ramas del tubo, si éste se encuentra en posición vertical y el ángulo de contacto es 32°?



Solución.

$$\Delta h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$$= \frac{2(32)\cos32^{\circ}}{(1,8)(980)}\left[\frac{1}{0,03} - \frac{1}{0,3}\right] = 1 \text{ cm}$$

Ejemplo 61. En un experimento para calcular el ángulo de contacto entre un líquido y el vidrio se han obtenido los siguientes datos: densidad del líquido, 0,8 g/cm^3; radio del capilar, 0,5 mm; elevación en el

tubo capilar, 1,2 cm; tensión superficial del líquido 28 dina/cm. Calcular dicho ángulo.
Solución.

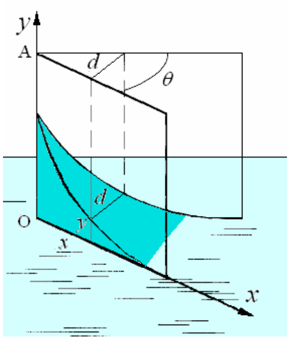
$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{r\rho g h}{2\gamma} = \frac{(0{,}05)(0{,}8)(9{,}8)(1{,}2)}{2(28)}$$

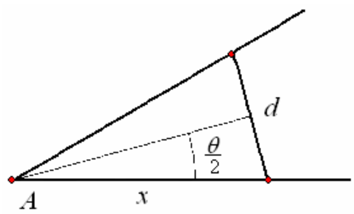
$$= 0{,}84$$

$$\Rightarrow \theta = 32^{\circ}\ 51'\ 36''$$

Ejemplo 62. Demostrar que la línea de contacto de un líquido con dos láminas de vidrio verticales que forman entre sí un ángulo diedro muy pequeño es una hipérbola equilátera.



Solución.



Tomaremos los ejes sobre una de las láminas:

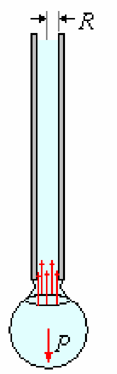
$$y = \frac{2\gamma\cos\theta}{d\rho g} \quad d = 2x\text{sen}\frac{\theta}{2}$$

Luego

$$y = \frac{\gamma\cos\theta}{x\rho g\text{sen}\frac{\theta}{2}} \Rightarrow$$

$$xy = \frac{\gamma\cos\theta}{g\rho\text{sen}\frac{\theta}{2}} = \text{constante (l. q. d.)}$$

Ley de Tate de la formación de gotas mediante un cuentagotas.
Consideremos un gotero con agujero de salida de radio *R*,
El liquido ira saliendo formando la gota, la que se mantendrá unida al cuentagotas mientras la tensión superficial la mantenga. Cuando el peso de la gota iguale a la tensión superficial, esta caerá como gota suelta.



Sea γ la tensión superficial del líquido, consideremos el ángulo de contacto cero.

$$\sum F_V = 0$$

$$P - 2\pi R\gamma = 0 \Rightarrow P = Mg = 2\pi\gamma R$$

Ejemplo 63. El estalagmómetro, aparato destinado a la medida de tensiones superficiales, es una pipeta de la que se vierte gota a gota, en una primera experiencia, el líquido problema, contándose el número de gotas *n* correspondientes a un determinado volumen: se repite el recuento para el mismo volumen de agua, obteniéndose *n*' gotas. Determina la tensión superficial del líquido (γ) conocida la del agua (γ') y las densidades $(\rho\ y\ \rho')$ de ambos líquidos.
Solución.
Las masas de una gota de líquido y de agua son:

$$M = \frac{V\rho}{n} \quad M' = \frac{V\rho'}{n'}$$

Por división, y teniendo en cuenta la ley de Tate (ley del cuentagotas):

$$\frac{M}{M'} = \frac{\rho}{\rho'}\frac{n'}{n} = \frac{\gamma}{\gamma'} \Rightarrow \gamma = \gamma'\frac{\rho}{\rho'}\frac{n'}{n}$$

Ejemplo 64. En el platillo izquierdo de una balanza se coloca una tara; en el derecho un vasito y pesas de masa M_1 hasta equilibrarla. Se quitan las pesas y se vierte en el vaso con un cuentagotas, *n* gotas de un líquido; se vuelve a equilibrar la balanza (la misma tara) con pesas de masa M_2. Se quitan éstas y se vierten en el vasito, sobre el líquido, *n* gotas de agua. Se consigue de nuevo el equilibrio con pesas de masa M_3. Conocida la constante de tensión superficial del agua γ' determinar la del líquido (γ).
Solución.
Masa de n gotas de líquido:

$$nM = M_1 - M_2$$

Masa de *n* gotas de agua:

$$nM' = M_2 - M_3$$

Por división obtenemos:

$$\frac{M}{M'} = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

Aplicando la fórmula de Tate al líquido y al agua, nos da:

$$\left.\begin{array}{l} P = Mg = 2\pi r\gamma \\ P' = M'g = 2\pi r\gamma' \end{array}\right\} \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

Igualando:

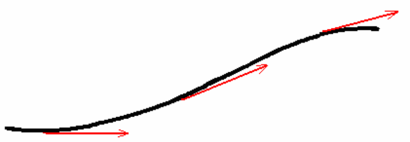
$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

$$\Rightarrow \gamma = \gamma' \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

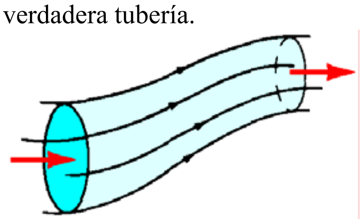
DINÁMICA DE FLUIDOS - MOVIMIENTO DE UN FLUIDO

El flujo describe el cambio en la posición de las partículas del fluido en el tiempo.
La descripción op1eta del movimiento de un fluido es compleja por lo tanto, en el tratamiento que utilizaremos será necesario suponer algunas simplificaciones.
En particular, no analizaremos el comportamiento de cada una de las partículas con los conceptos de la mecánica, sino más bien describiremos las características del movimiento en cada punto del espacio conforme transcurre el tiempo.

LÍNEA DE FLUJO. Es una línea imaginaria continua que denota en cada uno de sus puntos la dirección del vector velocidad del fluido. Las líneas de flujo de un sistema estable nunca se cruzan una a otra (pues una partícula podría seguir dos direcciones) y representan
Un patrón instantáneo de flujo el cual en otro instante puede ser completamente diferente.



Si seleccionamos un número finito de líneas de corriente como se muestra en la figura, esta región tubular se denomina **tubo de flujo**, las fronteras de este son líneas de corriente y por lo tanto ninguna partícula puede cruzar este tubo, comportándose como una verdadera tubería.



CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL FLUJO DE FLUIDOS:

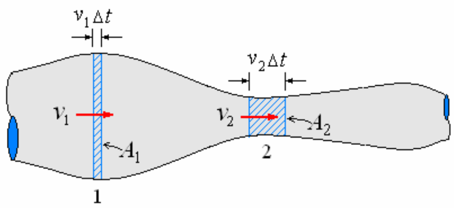
El flujo puede clasificarse como estacionario (o estable) y no estacionario uniforme y no uniforme, laminar (o irrotacional) o turbulento (o rotacional), compresible e incompresible y viscoso y no viscoso.
Un flujo es **estacionario** cuando los parámetros del flujo (velocidad, densidad., presión) son independientes del tiempo y la temperatura o sea que no cambian en el punto (puede ser diferente de punto a punto del espacio). Cuando ocurre lo contrario el flujo es **no estacionario.**
Un flujo en un campo es **uniforme** cuando el vector velocidades constante e igual n todos los puntos de aquel campo y es **no uniforme** cuando el vector velocidad está variando.
Un flujo es **turbulento** cuando las partículas del fluido tienen un movimiento irregular, caótico causando pérdidas de energía proporcionales al cuadrado de la velocidad, lo contrario ocurre cuando el movimiento es suave, ordenado, sus pérdidas son proporcionales a la velocidad y se conoce como flujo **laminar.** (en cada punto no hay velocidad angular respecto a ese punto).
Experimentalmente se ha encontrado que hay una combinación de cuatro factores que determinan si el f1ujo por un tubo es laminar. Esta combinación es conocida domo el **Número de Reynolds**, N_{Re} y se define como

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta}$$

Donde:
ρ = densidad
$\bar{v}$ = velocidad promedio
η = viscosidad .
D = diámetro de la tubería
El número de Reynolds no tiene dimensiones, por lo tanto, es independiente del sistema de unidades utilizado.
Se observa que hasta el va1or de 2000 el flujo es laminar y para valores mayores de 3000 el flujo es turbulento.

ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD.

De la conservación de la masa del líquido en un tubo del flujo, resulta inmediatamente la ecuación de la continuidad.



Consideremos un tubo de flujo constante de un líquido no viscoso; tal como el mostrado en la figura.
Sean 1 y 2 dos sectores cuyas secciones tienen áreas normales al flujo A_1 y A_2, con velocidades v_1 y v_2 respectivamente.
Considere las porciones sombreadas de los líquidos en 1 y 2. Luego, en un intervalo de tiempo Δt la masa de líquido Δm_1 pasa por la sección 1 y la masa Δm_2 que pasa por la sección 2 deben ser iguales, porque las mismas partículas son las que se mueven

en el tubo de flujo, sin haber ingresado o salido partículas. Tal que $\Delta m_1 = \Delta m_2$.

Pero $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$ y

$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$

Donde ΔV_1 y ΔV_2 son los volúmenes del líquido en las secciones 1 y 2 respectivamente y ρ_1 y ρ_2 son las densidades del líquido en 1 y 2.

De tal manera que: $\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow$

$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

Si consideramos el fluido incompresible o poco incompresible como los líquidos.

$\rho_1 = \rho_2$, y $\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2 \Rightarrow Av = \text{Constante}$

Ahora $Av = \text{Constante}$

$$Av = \text{área} \times \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{Volumen}}{\text{tiempo}} = \text{Gasto } (G)$$

A esta razón de flujo de volumen $G = Av$ = constante, se le conoce con el nombre de GASTO o CAUDAL y sus unidades son m^3/s.

Ejemplo 65. El agua fluye en una manguera de jardín de diámetro interior 2 centímetros a una velocidad de 1,2 m/s. ¿Con qué velocidad emergerá de un eyector del diámetro 0,5 centímetros?

Solución.

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi (0,01)^2}{\pi (0,025)^2} (1,2) = 4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 66. Calcule la velocidad media de la sangre en la aorta (radio 1 centímetro) cuando el caudal es 5 litros/min.

Solución.

$$Caudal = \frac{5 \text{ litros}}{\text{min}} = \frac{5000 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}} = 83,33 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$Caudal = Av$$

$$\Rightarrow v = \frac{Caudal}{A} = \frac{83,33}{\pi (1)^2} = 26,54 \text{ cm/s}$$

Ejemplo 67. Una manguera de 2 cm. de diámetro por la que fluye agua a una velocidad de 3m/s. termina en un tubo cerrado que tiene 50 orificios pequeños de 0,2cm de diámetro. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua en cada agujero?

Solución.

Por la ecuación de la continuidad

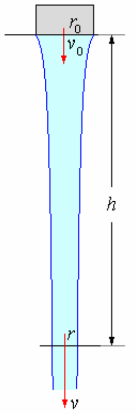
$$A_1 v_1 = 50 A_2 v_2 \Rightarrow \pi (1)^2 (3) = 50 \pi (0,2)^2 v_2$$

$$v_2 = \frac{3}{50(0,01)} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 68. Cuando se abre poco a poco un caño de agua, se forma un pequeño chorro, un hilo cuyo radio va disminuyendo con la distancia al caño y que al final, se rompe formando gotas.

¿Cuál es la velocidad del agua cuando a recorrido una distancia *h*.?

Solución. La ecuación de continuidad nos proporciona la forma de la superficie del chorrito de agua que cae del grifo, tal como apreciamos en la figura.



La sección trasversal del chorro de agua cuando sale del caño es A_0, y la velocidad del agua es v_0. Debido a la acción de la gravedad la velocidad *v* del agua se incrementa. A una distancia *h* del grifo la velocidad es

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

Aplicando la ecuación de continuidad

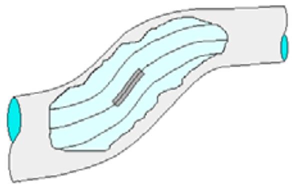
$$A_0 v_0 = Av \Rightarrow \pi r_0^2 v_0 = \pi r^2 v$$

Despejamos el radio *r* del hilo de agua en función de la distancia *h* al caño.

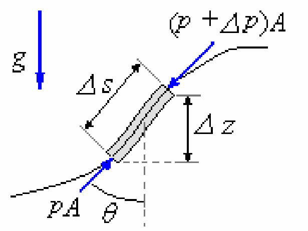
$$r = r_0 \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gh}}$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI.

Al aplicar las leyes de Newton a los fluidos en movimiento se obtiene la ecuación de Bernoulli.



Tomemos una partícula de fluido de forma prismática (sección A largo Δs) que se mueve a lo largo de una línea de flujo en la dirección s . La partícula prismática se muestra en detalle en la siguiente figura.



Considerando un fluido no viscoso, o sea, que no hay pérdidas de energía, aplicamos la segunda ley de Newton

$$\sum F_s = ma_s$$

Las fuerzas que actúan son el peso y las fuerzas debido a las presiones p y $p + dp$, la masa de la partícula es $\Delta m = \rho A \Delta s$

Luego:

$$pA - (p + \Delta p)A - \rho g A \Delta s \cos\theta = \rho A \Delta s\, a_s$$

Simplificando y dividiendo entre Δs :

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} + \rho g \cos\theta + \rho a_s = 0$$

En el límite $\Delta s \to 0$

$$\frac{dp}{ds} + \rho g \cos\theta + \rho a_s = 0 \quad (1)$$

Como

$$\cos\theta = \frac{dz}{ds} \text{ y } a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds}$$

Por consiguiente la ecuación (1) puede escribirse:

$$\frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} + \rho v \frac{dv}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \; dp + \rho g dz + \rho v dv = 0$$

Si ρ constante, integrando obtenemos:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$$

Expresión que es la ecuación de Bernoulli. La misma que puede ser obtenida por la conservación de la energía, siendo por supuesto, equivalente.

Como la ecuación de Bernoulli es válida para cualquier sección, entre dos puntos cualesquiera, se podrá escribir:

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Adicionalmente podemos decir que cuando existen pérdidas por la presencia de fuerzas viscosas, ésta expresión de la ecuación de Bernoulli se modificará escribiéndose.

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \text{pérdidas}$$

APLICACIONES:

Fluido en reposo

$$v_1 = v_2 = 0 \;\rightarrow\; p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

$$p_2 - p_1 = \rho g (y_1 - y_2)$$

Es decir, la presión disminuye con la altura (aumenta con la profundidad).

Fórmula de Torricelli: Permite calcular la velocidad v_2 con que sale un líquido de un recipiente con un agujero a una distancia h de la superficie.

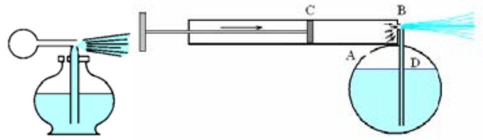
$$p_1 = p_2 = p_a,\; y_1 = 0,\; y_2 = -h \text{ y } v_1 \approx 0$$

$$p_a = p_a - \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \;\Rightarrow\; v_2 = \sqrt{2gh}$$

que es la misma velocidad que tendría en caída libre desde una altura h .

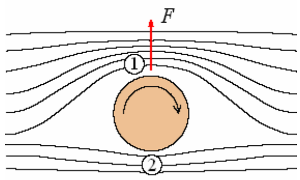
El atomizador.

La presión en el aire soplado a alta velocidad a través de la parte superior del tubo vertical de **atomizador.** Un atomizador de perfume o de un rociador de insecticida es menor que la presión normal del aire que actúa sobre la superficie del líquido en el frasco, así el perfume es empujado hacia arriba del tubo debido a la presión reducida en la parte superior.



EFECTO MAGNUS.

Consideremos un cilindro (o una esfera) en un fluido en movimiento. Si el cilindro rota en torno a un eje perpendicular a la corriente del fluido, y además hay roce viscoso entre le cilindro y el fluido, entonces el cilindro arrastrará al fluido haciendo que las velocidades del fluido a ambos lados del cilindro no sean iguales. En el caso mostrado en la figura adjunta, la velocidad es mayor arriba que abajo.

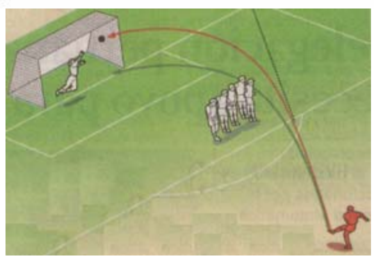


De acuerdo a la ecuación de Bernoulli, la presión en el lugar 1 serán inferior que en el lado 2 $(p_1 < p_2)$.

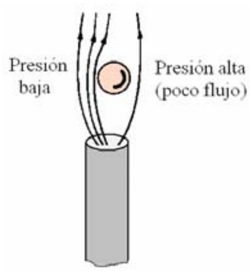
Esta diferencia de presión genera una fuerza neta sobre el cilindro hacia arriba.

Es este efecto, llamado efecto Magnus, el responsable de los así llamados "efectos" que pueden observarse en numerosos juegos de pelota.

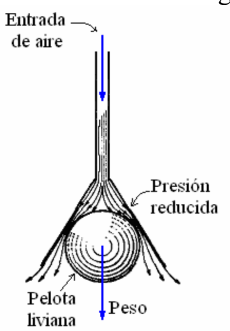
Suponga que una bola es pateada de tal manera que va rotando a la derecha sobre un perpendicular del eje a su dirección móvil durante su movimiento a la izquierda (véase la figura). Entonces la bola experimentaría la fuerza de Magnus. Así la bola se mueve con una trayectoria curvada hacia la derecha del arquero.



Una bola en un chorro de aire.
Una bola ligera se puede mantenido en un chorro de aire como se muestra en la figura. Una pelota de ping-pong puede hacerse flotar sobre un chorro de aire (algunas aspiradoras pueden soplar aire), si la pelota comienza a dejar el chorro de aire, la presión más alta de afuera del chorro empuja la pelota de nuevo hacia éste como se muestra en la figura siguiente.



Levantar una bola con un embudo.
En el espacio entre la superficie del embudo y la superficie de la bola la presión es menor que la presión atmosférica, y esta diferencia de presión soporta la bola contra la acción de la gravedad.



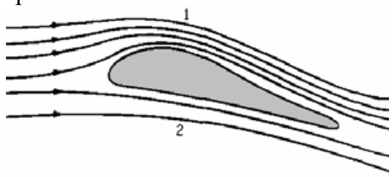
Una bola ligera apoyada por un jet del aire. La presión sobre la bola es menos que debajo de ella.

Efecto chimenea.
¿Por qué sube el humo por una chimenea? En parte se debe a que el aire caliente se eleva (es decir, debido a la densidad). Pero el principio de Bernoulli también tiene un lugar importante. Debido a que el viento sopla a través de la parte superior de la chimenea, la presión es menor ahí que dentro de la casa. Por eso el aire y el humo son empujados hacia arriba de la chimenea. Incluso en una noche calmada, existe el flujo de aire suficiente en el ambiente en el extremo superior de 1 chimenea para permitir el flujo ascendente del humo.
Si las tuzas, perros de la pradera, conejos y otros animales que viven bajo el no se asfixian, el aire debe circular en sus madrigueras. Estas siempre tienen por lo menos dos entradas. La velocidad del flujo del aire a través de los diferentes hoyos por lo regular será un poco distinta. Esto conduce a una pequeña diferencia de presión que fuerza al flujo de aire a través de la madriguera por el principio de Bernoulli. El flujo de aire se intensifica si un hoyo está más arriba que el otro (lo que a menudo hacen los animales) puesto que la velocidad del viento tiende a incrementarse con la altura.

La ventilación en una mina.

La ventilación en una mina responde a tres propósitos principales: para proporcionar el aire fresco para la respiración de los mineros, diluir los gases nocivos que puedan ser formados subterráneamente.
En un túnel horizontal simple de minería generalmente es suficiente la ventilación natural utilizando la diferencia en la presión de aire asociada a la diferencia en nivel entre dos aberturas, la entrada de la mina y la parte superior de un eje de ventilación (efecto chimenea).

Empuje sobre las alas de un avión.
Una superficie aerodinámica como el ala de un avión se diseña de tal modo que perturba las líneas de corriente del fluido en una región de espacio, dejando la otra no perturbada.

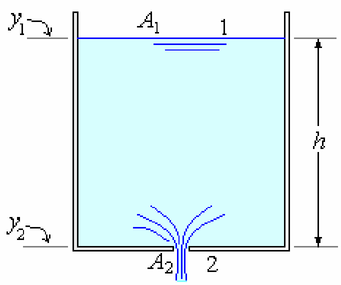


Las, líneas de corriente encima del ala son comprimidas y las que se encuentran debajo del ala permanecen no perturbadas, resultando el flujo mayor en la parte superior.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como $v_1 > v_2$, resulta $p_2 > p_1$
Produciendo una fuerza de empuje hacia arriba.
En realidad, el principio de Bernoulli es sólo un aspecto de la sustentación de un ala. Las alas se inclinan un poco hacia arriba, de modo aire que choca contra la superficie inferior se desvíe hacia abajo; el cambio en la cantidad de movimiento de las moléculas de aire que rebotan deviene en una fuerza ascendente adicional sobre el ala. De igual modo la turbulencia desempeña una función de gran importancia.

Ejemplo 69. Velocidad de salida de un líquido
Velocidad de salida de un líquido a través de un orificio



Solución. Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 tenemos

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como en 1 y 2 la presión es la presión atmosférica, la expresión se reduce a

$$\rho g y_1 - \rho g y_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow$$

$$g(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad (1)$$

Por la ecuación de la continuidad $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 \quad (2)$$

Como $(y_1 - y_2) = h$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$gh = \frac{1}{2}\left[v_2^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}v_2\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow gh = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]v_2^2$$

Finalmente:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

Si $A_1 >> A_2$:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Resultado que es igual al caso de un orificio lateral.

Tiempo de vaciado. Podemos calcular el tiempo de vaciado.

Para este cálculo usaremos la velocidad con que baja el fluido, es decir v_1

Como $v_1 = \frac{dy}{dt} = \frac{A_2}{A_1} v_2$

$$v_1 = \frac{dy}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{\frac{2gy}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

$$dt = -\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g}}\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

Integrando: $t = -\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g}}\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{y}}$

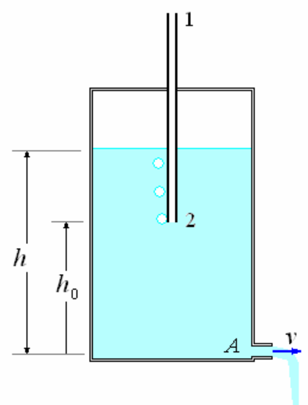
$$= \frac{2A_1}{A_2}\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g}} h^{1/2}$$

El frasco de Mariotte.

La velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en su fondo es la misma que la que adquiere un cuerpo que cayese libremente en el vacío desde una altura *h*, siendo *h* la altura de la columna de fluido.

$$v = \sqrt{2gh}$$

A medida que el fluido sale por el orificio, la altura *h* de fluido en el depósito va disminuyendo. Si *A* es la sección del orificio, el gasto $G = Av$, o volumen de fluido que sale por el orificio en la unidad de tiempo no es constante. Si queremos producir un gasto constante podemos emplear el denominado frasco de Mariotte.



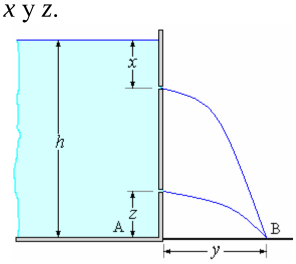
Consiste en un frasco lleno de fluido hasta una altura h_0, que está cerrado por un tapón atravesado por un tubo cuyo extremo inferior está sumergido en el líquido. El fluido sale del frasco por un orificio practicado en el fondo del recipiente. En el extremo inferior 2 del tubo, la presión es la atmosférica ya que está entrando aire por el tubo, a medida que sale el líquido por el orificio.

La velocidad de salida del fluido no corresponderá a la altura h_0 desde el orificio a la superficie libre de fluido en el frasco, sino a la altura *h* o distancia entre el extremo inferior 2 del tubo y el orificio.

Dado que *h* permanece constante en tanto que el nivel de líquido esté por encima del extremo inferior del tubo, la velocidad del fluido y por tanto, el gasto se mantendrán constantes. Cuando la altura de fluido en el frasco h_0 es menor que *h*, la velocidad de salida *v* del fluido deja de ser constante.

La velocidad de salida *v* puede modificarse subiendo o bajando el extremo inferior 2 del tubo en el frasco.

Ejemplo 70. En la pared vertical de un depósito hay dos pequeños orificios, uno está a la distancia *x* de la superficie del líquido, y el otro está a una altura *z* sobre el fondo. Los chorros de líquido que salen encuentran el suelo en el mismo punto, en que relación está *x* y *z*.



Solución.

Si v_1 es la velocidad por la salida superior y t_1 el tiempo que se tarda en alcanzar el punto B:

$$\left.\begin{array}{l} y = v_1 t_1 \\ v_1 = \sqrt{2gx} \\ h - x = \frac{1}{2} g t_1^2 \end{array}\right\} h - x = \frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_1^2} = \frac{y^2}{4x}$$

Análogamente, para el orificio inferior:

$$\left.\begin{array}{l} y = v_2 t_2 \\ v_1 = \sqrt{2g(h-z)} \\ z = \frac{1}{2} g t_2^2 \end{array}\right\} z = \frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_2^2} = \frac{y^2}{4(h-z)}$$

Eliminando y se tiene:

$$x(h-x) = z(h-z)$$

Por lo tanto: $x = z$

Ejemplo 71. Cuando el viento sopla entre dos edificios grandes, se puede crear una caída significativa de presión. La presión del aire normalmente es una atmósfera dentro del edificio, así que la caída de la presión en el exterior puede hacer que una placa de vidrio de la ventana estalle hacia fuera del edificio y estrellarse en la calle abajo.¿Qué diferencia de presión resultaría de un viento de 27 m/s? ¿Qué fuerza sería ejercida sobre la placa de vidrio de 2 x 3 m de una ventana? La densidad del aire es 1,29 kg/m^3 a 27° C y 1 atmósfera.

Solución.

Alejado de los edificios la presión es 1 atmósfera, y la velocidad del viento es aproximadamente cero. Así

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_a + 0$$

$$p - p_a = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}(1{,}29)(27)^2 = 470 \text{ Pa}$$

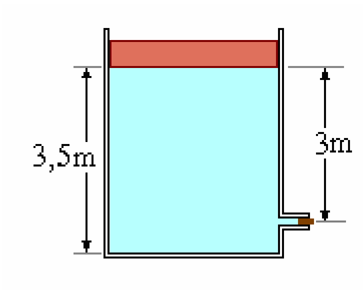
y $F = pA = (470)(2 \times 3) = 2820$ N

Ejemplo 72. Un depósito de agua está cerrado por encima con una placa deslizante de 12 m^2 y 1200 kg.

a) El nivel del agua en el depósito es de 3,5 m de altura. Calcular la presión en el fondo.

b) Si se abre un orificio circular de 5 cm de radio a medio metro por encima del fondo, calcúlese el volumen de agua que sale por segundo por este orificio. (Se considera que el área del orificio es muy pequeña frente al área del depósito).

Considere la presión atmosférica como 10^5 Pa, $g \approx 10\, m/s^2$



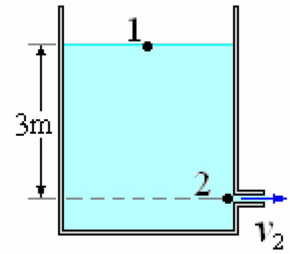
Solución.

a) Presión en el fondo = p atmosférica + p ejercida por la placa + p columna de fluido

$$p = 10^5 + \frac{1200 \times 10}{12} + 1000 \times 10 \times 3{,}5$$

= 1,36 x 10^5 Pa

b) Ecuación de bernoulli



$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

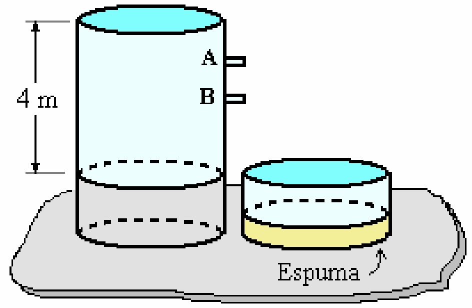
$$p_1 = 10^5 + \frac{1200 \times 10}{12} = 1{,}01 \text{ x } 10^5 \text{ Pa}$$

y_1 = 3m, y_2 = 0, $v_1 \approx 0$, ρ = 1000 kg/m^3

$$31000 = \frac{1}{2} 1000 v_2^2 \Rightarrow v_2 = 7{,}87 \text{ m/s}$$

Gasto = $A_2 v_2$ = π (0,05)^2(7,87) = 0,062 m^3/s

Ejemplo 73. Un tanque cilíndrico de radio 1 m y altura 4 m, lleno de agua, puede desaguar sobre un recipiente, como se muestra en la figura. El recipiente receptor se encuentra sobre una espuma de 10 cm de espesor y módulo de Young 0,79 x 10 N/m^2. El tanque posee 2 agujeros, el primero A de área 5 cm^2 ubicado a 3H/4 de su base y el segundo agujero B de 3 cm^2 de área a H/2 de la base del tanque.



a) Calcule la velocidad de salida del agua por cada uno de los agujeros suponiendo abierto solo uno a la vez.
b) Si se permite desaguar al tanque durante 3 minutos por sólo uno de los agujeros, determine en que caso el esfuerzo de compresión sobre la espuma será mayor. Justifique su respuesta
Solución.

a) La velocidad de salida está dada por: $v = \sqrt{2gh}$

$$v_A = \sqrt{2g(1)} = 4{,}43\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

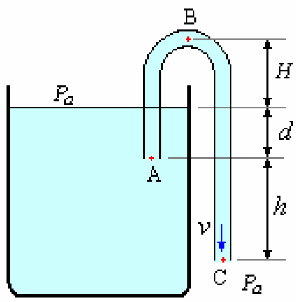
$$v_B = \sqrt{2g(2)} = 6{,}26\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) El esfuerzo de compresión depende del peso al que esté expuesto la espuma.

$$G_A = A_A v_A = (5\times10^{-4})(4{,}43)$$
$= 22{,}15 \times 10^{-4}$ m^3/s
$$G_B = A_B v_B = (3\times10^{-4})(4{,}43)$$
$= 13{,}29 \times 10^{-4}$ m^3/s

Con estos valores obtenemos para un tiempo de 3 min = 180 segundos:
$V_A = 0{,}3987$ m^3 y $V_B = 0{,}2392$ m^3
Luego $S_A > S_B$

Ejemplo 74. Un sifón es un dispositivo para sacar el líquido de un envase que sea inaccesible o que no pueda ser inclinado fácilmente. La salida C debe estar más baja que la entrada A, y el tubo se debe llenar inicialmente del líquido (esto generalmente se logra aspirando el tubo en el punto C). La densidad del líquido es ρ .
a) ¿Con qué velocidad el líquido fluye hacia fuera en el punto C?
b) ¿Cuál es la presión en el punto B?
c) ¿Cuál es la altura máxima H que el sifón puede levantar el agua?



Solución.
a) Compare la superficie (donde la presión es la presión atmosférica p_a y la velocidad es aproximadamente cero) con el punto C.
Aplicando la ecuación de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{Constante}:$$

$$p_a + 0 + \rho g(h + d) = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2g(h + d)}$$

b) Compare la superficie con el punto B.

$$p_a + 0 + \rho g(h + d) = p_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(h + d + H)$$

$$\Rightarrow p_B = p_a - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho g H$$

Reemplazando el valor de v, hallado en (a).

$$p_B = p_a - \frac{1}{2}\rho[2g(h + d)] - \rho g H$$
$$= p_a - \rho g(h + d + H)$$

c) Cuando H es un máximo, la velocidad y la presión en ese punto se aproxima a cero, así que comparando la superficie y el punto B obtenemos:

$$p_a + 0 + \rho g(h + d) = 0 + 0 + \rho g(h + d + H)$$

$\Rightarrow p_a = \rho g H$, de donde obtenemos:

$$H = \frac{p_a}{\rho g} = \frac{1{,}013\times10^5\ N/m^2}{(1000\,kg/m^3)(9{,}8\,m/s^2)} = 10{,}3 \text{ m}$$

Ejemplo 75. Un tanque de almacenaje abierto grande se llena de agua. Se hace un agujero pequeño en un lado del tanque a una profundidad h debajo de la superficie del agua. ¿Con qué velocidad el agua fluirá del agujero?
Solución.
En la superficie $p = p_a$ y $v \approx 0$. En el agujero $p = p_a$ y $v = v$, tal que

$$p_a + 0 + \rho g h = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\rho g h}$$

Ejemplo 76. Los bomberos utilizan una manguera del diámetro interior 6,0 centímetros para entregar 1000 litros de agua por minuto. Un inyector se une a la manguera, y se quiere lanzar el agua hasta una ventana que está 30 m sobre el inyector.
a) ¿Con qué velocidad debe el agua dejar el inyector?
b) ¿Cuál es el diámetro interior del inyector?
c) ¿Qué presión en la manguera se requiere?
Solución.

$$G = 1000\frac{\text{litros}}{\text{minuto}} = 1000\frac{10^{-3}\,\text{m}^3}{60\,\text{s}} = 0{,}017 \text{ m}^3/\text{s}$$

a) Cuando el agua deja el inyector, $p = p_a$ y $v = v$, en el punto más alto $v = 0$, tal que aplicando la ecuación de Bernoulli:

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + o = p_a + 0 + \rho g h$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8)(30)}$$
$= 24{,}2$ m/s

b) El caudal $G = Av = \pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^2 v$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{4G}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4(0{,}017\ \mathrm{m^3/s})}{\pi(24{,}2\ m/s)}}$$

= 0,03 m

c) La velocidad en la manguera es v_m ,

$$A_m v_m = G \Rightarrow$$

$$v_m = \frac{G}{A_m} = \frac{4G}{\pi D_m^2} = \frac{4(0{,}017)}{\pi(0{,}06)^2}$$

= 6,02 m/s

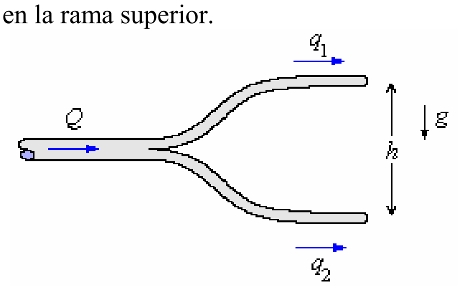
$$p_m + \frac{1}{2}\rho v_m^2 + 0 = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$\Rightarrow p_m - p_a = \frac{1}{2}\rho\left(v^2 - v_m^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1000)\left(24{,}2^2 - 6{,}02^2\right)$$

= 2,75 x 10^5 Pa = 2,71 atm

Ejemplo 77. Un tubo horizontal por el que fluye líquido de densidad ρ_0 a razón de Q m^3/s, se bifurca en dos ramas en el plano vertical, una superior y otra inferior, de secciones transversales $a_1 = a_2 = a$, abiertas a la atmósfera (ver figura). Si la distancia entre las ramas es h, determinar:
a) Las cantidades q_1 y q_2 de líquido (en m^3/s) que fluyen por ambas ramas.
b) La condición que debe cumplir Q para que haya flujo en la rama superior.

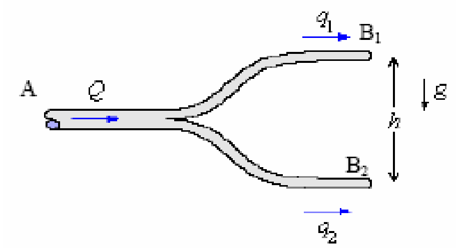


Solución.
a) La relación de Bernoulli se puede aplicar entre los puntos A y B$_1$ y también entre
A y B$_2$. Por transitividad, la relación de Bernoulli también es valida entre los puntos
B$_1$ y B$_2$. Se tiene

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Pero $p_1 = p_2 = p_a$ (la presión atmosférica),
$h_1 = h$ y $h_2 = 0$, luego

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



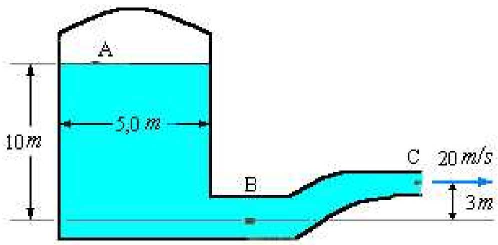
Los flujos que circulan por la rama superior e inferior vienen dados por $q_1 = av_1$ y $q_2 = av_2$, respectivamente. También se tiene que
$Q = q_1 + q_2$. De las relaciones anteriores se deduce que

$$q_1 = \frac{Q^2 - 2a^2 gh}{2Q} \text{ y } q_2 = \frac{Q^2 + 2a^2 gh}{2Q}$$

b) Para que circule líquido por la rama superior se debe tener que

$$Q > a\sqrt{2gh}\ .$$

Ejemplo 78. El tanque cilíndrico presurizado de 5,0 m de diámetro, contiene agua la que sale por el tubo en el punto C, con una velocidad de 20 m/s. El punto A está a 10 m sobre el punto B y el punto C está a 3 m sobre el punto B. El área del tubo en el punto B es 0,03 m^2 y el tubo se angosta a un área de 0,02 m^2 en el punto C. Asuma que el agua es un líquido ideal en flujo laminar. La densidad del agua es 1000 kg/m^3.



a) ¿Cuál es el gasto o flujo en el tubo ?:
b) ¿A que razón está bajando el nivel de agua del tanque?
c) ¿Cuál es la presión en B?
d) ¿Cuál es la presión absoluta del aire encerrado en el tanque?
Solución.

a) El gasto o flujo en el tubo:

$$G = A_C v_C = \pi R^2 v_C = (0{,}02)(20) = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}$$

b) La razón a la que está bajando el nivel de agua del tanque:

$$A_A v_A = G = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}$$

$$A_A = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 19{,}625\mathrm{m^2}$$

$$v_A = \frac{G}{A_A} = \frac{0{,}4}{19{,}625} = 0{,}02\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) La presión en B:
Por Bernoulli

$$p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \rho g h_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$p_B = ?$$

$$h_B = 0$$

$$v_B = \frac{0{,}4}{0{,}03} = 13{,}33\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_C = p_a = 1{,}013\times 10^5\,\text{Pa}$$

$$h_C = 3\text{m}$$

$$v_C = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_B + \frac{1}{2}(1000)(13{,}33)^2$$

$$= 1{,}013\times 10^5 + (1000)(9{,}8)(3) + \frac{1}{2}(1000)(20)^2$$

$$\Rightarrow p_B = \frac{1}{2}(1000)\left[(20)^2 - (13{,}33)^2\right]$$

$$+ 1{,}013\times 10^5 + (1000)(9{,}8)(3)$$

$\Rightarrow p_B = 2{,}418 \text{ x } 10^5$ Pa

d) ¿Cuál es la presión absoluta del aire encerrado en el tanque (en atmósferas)?

$$p_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B$$

$$\Rightarrow p_A = p_B + \rho g\left(h\mathrm{B}_B - h_A\right) + \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$\Rightarrow p_A = 2{,}418\times 10^5 + (1000)(9{,}8)(-10)$$

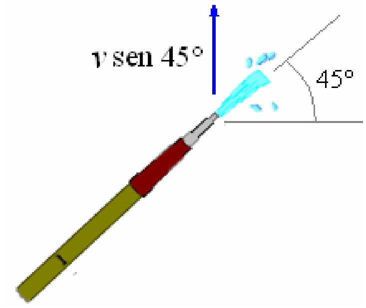
$$+ \frac{1}{2}(1000)\left(13{,}33^2 - 0{,}02^2\right)$$

$\Rightarrow p_A = 2{,}32644$ Pa

Ejemplo 79. Un bombero lanza agua con su manguera hacia un incendio formando un ángulo de 45º con la horizontal. El agua que emerge del pitón penetra horizontalmente por una ventana del tercer piso que se encuentra a una altura h = 10 m.
La manguera que transporta el agua desde el carro bomba tiene un diámetro D de 6 cm y concluye en un pitón cuya abertura tiene un diámetro d de 1,5 cm.
a) ¿Cuantos litros de agua emergen del pitón por minuto?
b) ¿Cuál es la presión p que debe soportar la manguera (en atmósferas)?

Solución.

a) Sea v la velocidad con que emerge el agua del pitón.



La velocidad hacia arriba será:

$$v_v = v\text{sen}45^\circ = v\frac{\sqrt{2}}{2}$$

El agua alcanza a subir una altura h = 10 m, luego su velocidad es:

$$v_v = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

Luego: $v\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2gh} \Rightarrow$

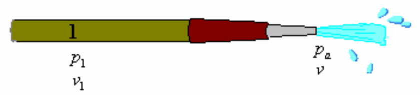
$$v\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2(9{,}8)(10)} \Rightarrow v = 19{,}8\text{ m/s}$$

El volumen de agua que emerge del pitón por minuto:

$$V = vt\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = (19{,}8)(60)\pi\left(\frac{0{,}015}{2}\right)^2$$

$= 0{,}212$ m^3 =212 litros.

b) A la salida del pitón la presión es la atmosférica



Aplicando el principio de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho g v_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho g v^2$$

Aplicando la ecuación de la continuidad:

$$A_1 v_1 = Av \Rightarrow v_1 = v\frac{A}{A_1} = v\left(\frac{1{,}5}{6}\right)^2 = \frac{v}{16}$$

Luego tenemos:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho g\left(\frac{v}{16}\right)^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho g v^2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_a = \frac{1}{2}\rho g v^2\left(1 - \frac{1}{16^2}\right)$$

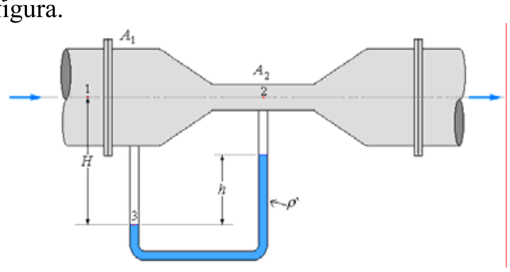
$$= \frac{1}{2}(1000)(9{,}8)(19{,}8)^2(0{,}996)$$

= 1913312,16 Pa

Como p_a = 101325 Pa

p_1 = 2014637,16 Pa
Aproximadamente 2 atm.

Ejemplo 80. El medidor de venturi, es un manómetro colocado en el tubo para medir la velocidad de flujo líquido
Un líquido de densidad ρ fluye por un tubo de sección transversal A_1. En el cuello el área se reduce a A_2 y se instala el tubo manométrico como se indica en la figura.



Solución.
Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como están a la misma altura

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Por la ecuación de la continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

Luego

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right) \qquad (1)$$

Por otra parte, la presión en el, nivel 3 por la rama 1 es

$$p_3 = p_1 + \rho g H$$

y por la rama 2 es

$$p_3 = p_2 + \rho g(H - h) + \rho' g h$$

Luego

$$p_1 + \rho g H = p_2 + \rho g(H - h) + \rho' g h \quad (2)$$

y $p_1 - p_2 = gh(\rho' - \rho)$

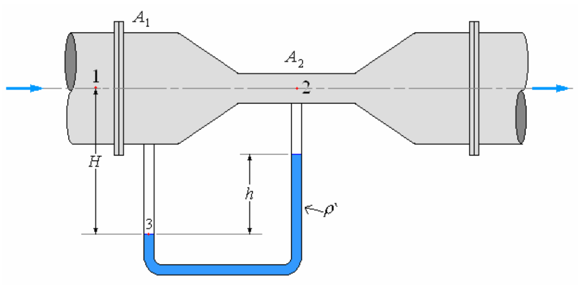
igualando las expresiones (1) y (2)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right) = gh(\rho' - \rho)$$

Finalmente

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2gh(\rho' - \rho)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}}$$

Ejemplo 81. La sección transversal del tubo de la figura tiene 8 cm^2 en las partes anchas y 4 cm^2 en el estrechamiento. Cada segundo salen del tubo 4 litros de agua a la atmósfera.



a) ¿Cuál es la velocidad en A_1 ?
b) El agua proviene de un gran depósito abierto. ¿A qué altura se encuentra el nivel de agua?
c) ¿Cuál es la diferencia de presión entre 1 y 2?
d) ¿Cuál es la diferencia de alturas entre las columnas de mercurio del tubo en U?

Solución.

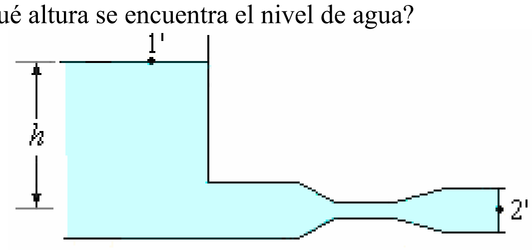
a) $G = 4\dfrac{\text{litros}}{\text{s}} = 4\dfrac{\text{dm}^3}{\text{s}}$ = 4 x 10^{-3} m^3/s

$$A_1 = 8\,\text{cm}^2 = 8\times10^{-4}\ \text{m}^2$$

$$G = Av \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{G}{A_1} = \frac{4\times10^{-3}}{8\times10^{-4}} = 5\ \text{m/s}$$

b) El agua proviene de un gran depósito abierto. ¿A qué altura se encuentra el nivel de agua?



$$p_{1'} + \rho g y_{1'} + \frac{1}{2}\rho v_{1'}^2 = p_{2'} + \rho g y_{2'} + \frac{1}{2}\rho v_{2'}^2$$

$$p_{1'} = p_{2'} = p_a,\ y_{'1} = h,\ y_{2'} = 0.\ v_{'1} = 0,$$

$$v_{2'} = v_2 = \frac{4\times10^{-3}}{8\times10^{-4}} = 5$$

Reemplazando:

$$p_a + \rho h + \frac{1}{2}\rho v(0)^2 = p_a + \rho g(0) + \frac{1}{2}\rho(5)^2$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho(5)^2 \Rightarrow h = \frac{25}{2g} = 1{,}28\ \text{m.}$$

c)

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$y_1 = y_2 = 0,$$

$$v_1 = 5\ \text{m/s},\ v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{8}{4}5 = 10\ \text{m/s}$$

$$p_1 + \rho g(0) + \frac{1}{2}\rho(5)^2 = p_2 + \rho g(0) + \frac{1}{2}\rho(10)^2$$

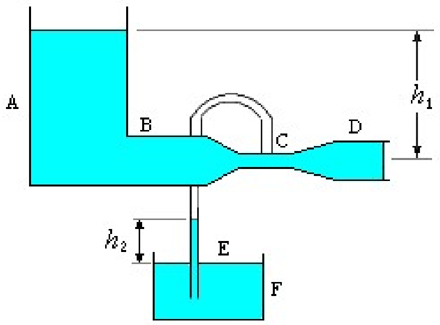
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(100-25) = \frac{1000}{2}(75)$$
$= 37500$ Pa

d) ¿Cuál es la diferencia de alturas entre las columnas de mercurio del tubo en U?

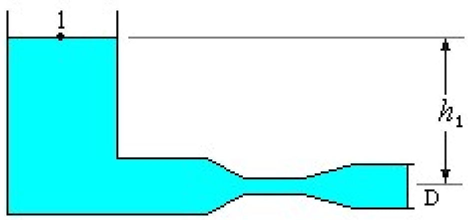
$$p_1 - p_2 = \rho_{Hg} g \Delta y$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{p_1 - p_2}{\rho_{Hg} g} = \frac{37500}{(13600)(9,8)} = 0,28 \text{ m.}$$

Ejemplo 82. Dos depósitos abiertos muy grandes A y F, véase la figura, contienen el mismo líquido. Un tubo horizontal BCD que tiene un estrechamiento en C, descarga agua del fondo del depósito A, y un tubo vertical E se abre en C en el estrechamiento y se introduce en el líquido del depósito F. Si la sección transversal en C es la mitad que en D, y si D se encuentra a una distancia h_1 por debajo del nivel del líquido en A.
a) ¿Cuál es la velocidad de salida del líquido?
b) ¿Cuál es la presión en el estrechamiento (C)?
c) ¿A qué altura h_2 alcanzará el líquido en el tubo E? Expresar la respuesta en función de h_1.



Solución.
a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y D:



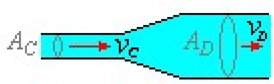
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Con $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $h_2 = 0$, $\Rightarrow$

$$v_1 \approx 0 \quad p_{atm} + \rho g h_1 + 0 = p_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho v_D^2$$

$$v_D = \sqrt{2gh_1}$$

b) Por la ecuación de continuidad entre las secciones C y D



:

$$A_C v_C = A_D v_D$$

Como $A_D = 2A_C \Rightarrow v_C = 2v_D$

Por la ecuación de Bernoulli:

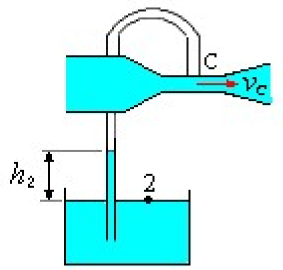
$$p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_D^2$$

$$p_C = p_{atm} - \frac{1}{2}\rho\left(4v_D^2 - v_C^2\right) \Rightarrow$$

$$p_C = p_{atm} - \frac{3}{2}\rho v_D^2$$

Finalmente $p_C = p_{atm} - 3\rho g h_1$

c) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 2 y C:

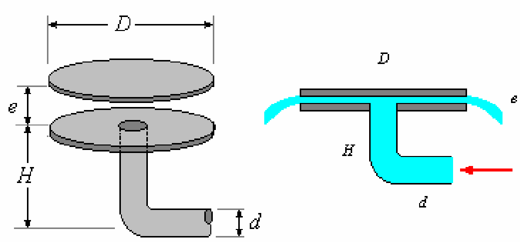


Como $p_{atm} = p_C + \rho g h_2$

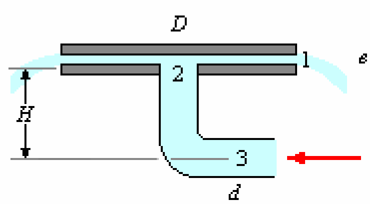
Comparando con $p_C = p_{atm} - 3\rho g h_1$

Obtenemos $h_2 = 3h_1$

Ejemplo 83. Una regadera de jardín tipo hongo de las características mostradas en la figura, tiene la velocidad de salida del agua de 1m/s. El diámetro del hongo *D* es de 30cm, el diámetro de la tubería horizontal *d* es de 5 cm, la altura *H* del tramo vertical es de 20 cm, y el espacio entre los platos del hongo *e* es igual a 2 cm.
a) Encontrar el caudal de agua en la tubería horizontal.
b) Calcular la velocidad en el tramo horizontal
c) Calcular la presión en la parte más alta del tubo vertical
d) Calcular la presión en cualquier punto del tramo horizontal.



Solución.
El gráfico indica los puntos de interés del problema.



a) El caudal de agua en la tubería horizontal.

$$G = A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3$$

$$A_1 v_1 = \pi De = (\pi 0{,}3)(0{,}02)$$

$= 0{,}019$ m^3/s

b) La velocidad en el tramo horizontal

Como $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{0{,}006\pi}{0{,}025^2 \pi} = 9{,}6 \text{ m/s}$$

Siendo $A_2 = A_3 \Rightarrow$

$v_3 = v_2 = 9{,}6$ m/s

c) La presión en la parte más alta del tubo vertical

Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$y_1 = y_2$$

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\Rightarrow \; p_2 = p_a - \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$v_1 = 1\,\text{m/s}$, $v_2 = 9{,}6\,\text{m/s}$, $p_a = 1{,}013 \times 10^5$ Pa

Reemplazando valores:

$$p_2 = 1{,}013 \times 10^5 - \frac{1}{2}10^3\left(9{,}6^2 - 1^2\right)$$

$= 0{,}5572 \times 10^5$ Pa

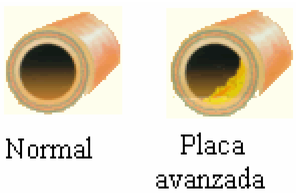
d) La presión en cualquier punto del tramo horizontal.

$p_3 = p_2 + \rho g H = 0{,}5572 \times 10^5 - 10^3 (9{,}8)(0{,}20)$

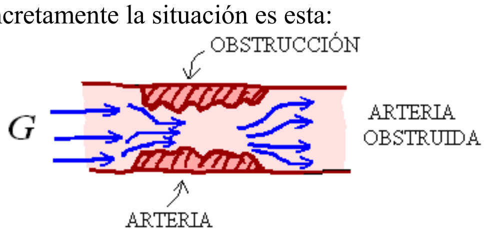
$= 0{,}5376 \times 10^5$ Pa

ARTERIA O VENA CON UNA OBSTRUCCIÓN

Parece que en la medicina es bastante común que las arterias o las venas se taponen con cosas tipo colesterol y demás.



Concretamente la situación es esta:



Si se le pregunta a una persona que cree que va a ocurrir con la arteria cuando se obstruye, la respuesta más común es esta: La sangre se va a frenar al chocar con la obstrucción, y va a empezar a presionar hacia fuera porque quiere pasar. Por lo tanto la arteria se va a dilatar y se va a formar como un globo.

Este razonamiento es muy lindo y muy intuitivo pero está MAL. Lo que pasa es justo al revés. El caudal que manda el corazón es constante. Este caudal no se frena por ningún motivo.

Para poder pasar por la obstrucción lo que hace la sangre es aumentar su velocidad.

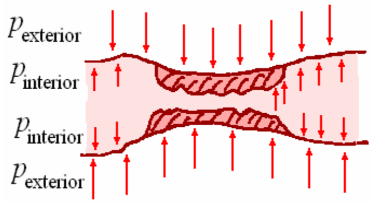
(La velocidad aumenta porque el diámetro de la arteria disminuye).

Al aumentar la velocidad dentro de la arteria, la presión adentro tiene que disminuir. Pero afuera de la arteria la presión sigue siendo la misma. Entonces la presión de afuera le gana a la presión de adentro y la arteria se comprime.

¿Y qué pasa al comprimirse la arteria?

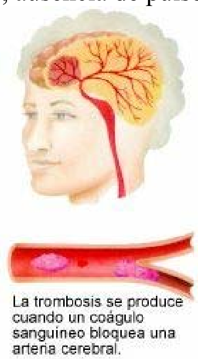
La obstrucción se cierra más. Esto provoca un aumento de la velocidad dentro de la obstrucción, lo que a su vez obliga a la arteria a cerrarse más todavía. De esta manera, la arteria se va cerrando más y más hasta que sobreviene el COLAPSO.

Esto significa que la arteria tiende a cerrarse del todo e impide el pasaje de sangre.



SITUACIÓN FINAL DE LA ARTERIA OBSTRUIDA

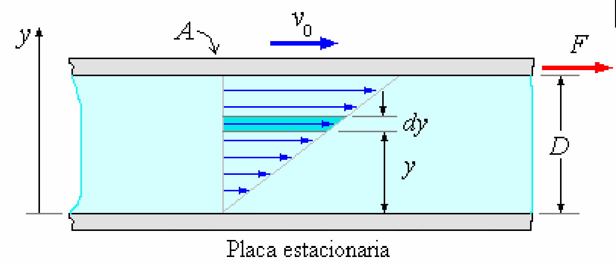
Esto es lo que ocurre cuando una persona tiene un ataque cardíaco. También pasa en el cerebro y en otros lados. Los médicos lo llaman trombosis. Dependiendo del tamaño y localización del trombo pueden variar algunos de los síntomas, dolor, isquemia, frialdad, ausencia de pulso, etc.



VISCOSIDAD

Viscosidad de un fluido es la resistencia de un fluido a una fuerza cortante. Propiedad que se debe fundamentalmente al tipo de interacción entre las moléculas del fluido.

Para poder definirla, debemos considerar el estudio de la ley de Newton de la viscosidad. Consideremos dos placas paralelas muy grandes como se muestra en la figura, el espacio entre las placas esta lleno con un fluido



La placa superior bajo la acción de una fuerza constan te F se mueve con una velocidad constante v_0. El fluido en contacto con la placa superior se adherirá y se moverá con velocidad v_0, y el fluido en contacto con la placa fija tendrá velocidad cero si la distancia D y la velocidad v_0 no son muy grandes, la variación de velocidad será lineal.
Experimentalmente se ha demostrado que la fuerza F varía directamente con la superficie A de la placa, con la velocidad v_0, e inversamente con la distancia D, o sea: $F \propto \dfrac{Av_0}{D}$

Más aún, en general, depende como varía v_0 con respecto a D, esto es: $\dfrac{v_0}{D} \Rightarrow \dfrac{dv}{dy}$

Luego: $F \propto A\dfrac{dv}{dy}$

Aquí introducimos una constante de proporcionalidad η, llamada la viscosidad absoluta (dinámica).

$$F = \eta A\frac{dv}{dy}$$

O sea la fuerza de viscosidad es proporcional al área A y al gradiente (derivada) de la velocidad. Los fluidos que cumplen con esta relación se llaman fluidos newtonianos.

Como $\eta = \dfrac{\frac{F}{A}}{\frac{dv}{dy}}$, sus unidades son: $\dfrac{N.s}{m^2}$

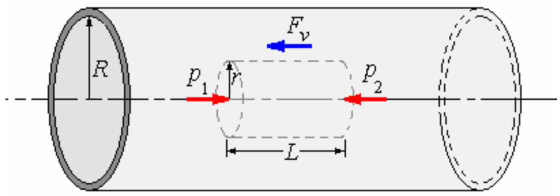
Otra unidad usada para medir la viscosidad es el poise (p): 1 p = 0,1 Ns/m^2
La siguiente tabla da la viscosidad para algunas sustancias:

Fluido	**Temp. ºC**	**η (N.s/m^2)**
Agua	0	1,79 x 10^{-3}
Agua	20	1,00 x 10^{-3}
Agua	100	0,28 x 10^{-3}
Alcohol	20	1,2 x 10^{-3}
Glicerina	0	12,11
Glicerina	20	1,49
Aire	-31,6	1,54 x 10^{-5}
Aire	20	1,83 x 10^{-5}
Aire	230	2,64 x 10^{-5}
Helio	20	1,94 x 10^{-5}

De la tabla se observa que la viscosidad es mucho mayor para los líquidos que para los gases. También se observa una fuerte dependencia de la temperatura. Para los líquidos la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura, mientras que para los gases aumenta.

FLUJO VISCOSO EN UNA TUBERIA CIRCULAR

Para poder encontrar la expresión para la caída de presión en una tubería circular debido a la viscosidad consideremos un elemento de fluido que se desplaza a velocidad constante como se muestra en la figura, corno el fluido no está acelerado, las fuerzas asociadas con la presión y la viscosidad se cancelan.



Aplicando la segunda ley de Newton al elemento, se tiene;

$$\sum F_x = 0$$

$$p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2 - F_v = 0$$

Donde F_v e s la fuerza viscosa (Tangencial).

$$F_V = \left(\frac{F}{A}\right)\times(\text{área})$$

Por viscosidad $\eta = -\dfrac{F/A}{dv/dr} \Rightarrow \dfrac{F}{A} = -\eta\dfrac{dv}{dr}$

El signo menos indica que la velocidad disminuye con un incremento del radio r.
Siendo el área = $2\pi rL$, tenemos:

$$F_v = -\eta 2\pi rL\frac{dv}{dr}$$

Reemplazando

$$p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2 + 2\pi\eta Lr\frac{dv}{dr} = 0$$

Sim1ificando y agrupando términos

$$(p_1 - p_2) = -2\pi\eta Lr\frac{dv}{dr}$$

$$\Rightarrow -dv = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L}rdr$$

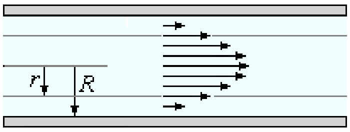
Integrando de r a R,

$$-\int_v^0 dv = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L}\int_r^R rdr$$

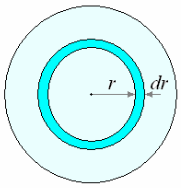
$$\Rightarrow v = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)$$

Esta ecuación corresponde a una parábola.
La velocidad máxima en la parte central (r = 0) es:

$$v_{\max} = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta L}$$



Para determinar el gasto Q, consideremos el fluido que pasa por un elemento diferencial de sección como se muestra en la figura siguiente:



El volumen que atraviesa el elemento en un tiempo dt es

$dV = vdAdt$, donde $dA = 2\pi rdr$

Luego

$$dV = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}(R^2 - r^2)(2\pi rdr)dt$$

y el gasto en la sección diferencial es

$$dG = \frac{dV}{dt} = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}(R^2 - r^2)(2\pi rdr)$$

Por lo tanto el gasto total, será

$$G = \int dG = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2)(2\pi rdr)$$

$$= \frac{\pi}{8}\frac{R^4(p_1 - p_2)}{\eta L}$$

Esta expresión podemos escribirla como

$$G = \pi R^2 \frac{\left[\frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta L}\right]}{2}$$

La expresión entre corchetes corresponde a $v_{máx}$, luego

$$G = \pi R^2\left(\frac{v_{máx}}{2}\right)$$

Como la velocidad promedio es $\overline{v} = \frac{v_{máx}}{2}$

Finalmente

$G = \pi R^2\overline{v}$ = Área de la sección x velocidad promedio

Ejemplo 84. Un oleoducto de 30 cm de diámetro y con seis estaciones de bombeo igualmente espaciadas en sus 7,2 x 10^5 m, la primera estación está al inicio del oleoducto. El petróleo a presión atmosférica pasa en cada una de las estaciones y es lanzado a la siguiente estación a la a la máxima presión permitida, el petróleo finalmente llega al final a la presión atmosférica. La densidad y la viscosidad del petróleo son 850 kg/m^3 1 poise respectivamente, y 10^6 kg de petróleo son conducidos diariamente. ¿Cuál es la presión máxima permitida por el oleoducto?

Solución.

$$G = \frac{10^6\,\text{kg/dia}}{(850\text{kg/m}^3)(24\text{hr/dia})(60\text{min/hr})(66\text{s/min})}$$

= 1,36 x 10^{-2} m^3/s

La fórmula de Poiseuille:

$$G = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}$$

$$\Rightarrow\ p_1 - p_2 = \frac{8G\eta L}{\pi R^4}$$

Entre dos estaciones de bombeo la distancia es:

$\frac{7{,}2\times 10^5}{6}$ = 1,2 x 10^5 m.

1 poise = 0,1 Ns/m^2

Luego la diferencia de presión entre las estaciones de bombeo es:

$$p_1 - p_2 = \frac{8(1{,}36\times 10^{-2}\,\text{m}^3/\text{s})(0{,}1\text{Ns/m})(1{,}2\times 10^5\,\text{m})}{\pi(0{,}15\text{m})^4}$$

= 8,2 x 10^5N/m^2 = 8,1 atm

Como el oleoducto finalmente da el petróleo a presión atmosférica, la presión máxima permisible es 9,1 atm.

FÓRMULA DE STOKES

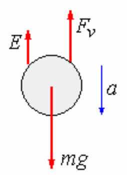
Una burbuja de aire el agua, partículas de polvo cayendo en el aire, objetos que caen en fluidos todos ellos experimentan la oposición de fuerzas viscosas. George Stokes encontró la relación para esta fuerza viscosa sobre un cuerpo en un fluido

$F_v = 6\pi R\eta v$, donde r es el radio, v la velocidad de la esfera y η el coeficiente de viscosidad.

Esta expresión se denomina fórmula de Stokes.

Medida del coeficiente de viscosidad

La fórmula de Stokes permite determinar el coeficiente de viscosidad de un líquido, midiendo la velocidad terminal de esferas cayendo en el fluido.



La esfera se mueve bajo la acción de las siguientes fuerzas: el peso, el empuje (se supone que el cuerpo está completamente sumergido en el seno de un fluido), y una fuerza de viscosidad.
El peso es el producto de la masa por la aceleración de la gravedad *g*. La masa es el producto de la densidad del material ρ' por el volumen de la esfera de radio *R*.

$$mg = \rho' \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

De acuerdo con el principio de Arquímedes, el empuje es igual al producto de la densidad del fluido ρ, por el volumen del cuerpo sumergido, y por la aceleración de la gravedad.

$$E = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

La ecuación del movimiento será, por tanto:

$$mg - E - F_v = ma .$$

La velocidad límite, se alcanza cuando la aceleración sea cero, es decir, cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero.

$$mg - E = F_v$$

$$\rho' \frac{4}{3}\pi R^3 g - \rho \frac{4}{3}\pi R^3 g = 6\pi R \eta v_l$$

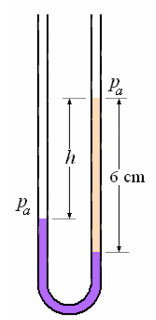
Despejamos la velocidad límite v_l

$$v_l = \frac{2g(\rho' - \rho)R^2}{9\eta}$$

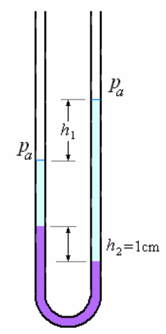
De aquí: $\eta = \dfrac{2g(\rho' - \rho)R^2}{9v_l}$, ecuación que permite determinar el coeficiente de viscosidad de un líquido de densidad ρ, midiendo la velocidad límite de una esfera de radio R y densidad ρ'

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

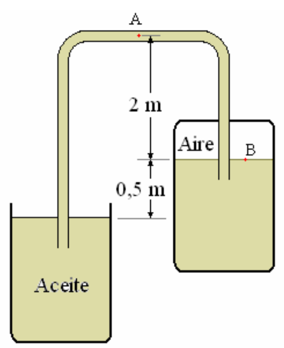
1. Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua. Después se vierte kerosén de densidad 0,82 g/cm^3 en uno de los lados que forma una columna de 6 cm de altura. Determine la diferencia de altura *h* entre las superficies de los dos líquidos.



2. Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con mercurio. Después se vierte agua en ambos lados obteniéndose una situación de equilibrio ilustrada en la figura, donde h_2 = 1 cm. Determine la diferencia de altura h_1 entre las superficies de los dos niveles de agua.



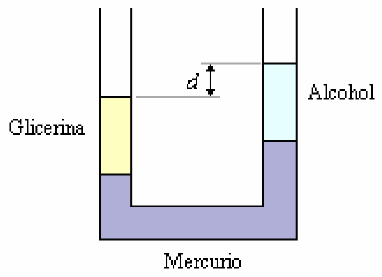
3. Considere el sistema de la figura donde el tubo está lleno de aceite de densidad ρ = 0,85gcm^3. Uno de los recipientes está abierto a la atmósfera y el otro está cerrado y contiene aire. Determine la presión en los puntos A y B.



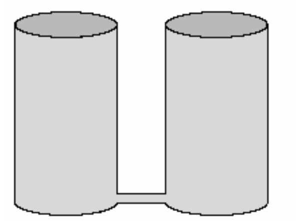
Respuesta.
P_A = 82475 Pa

$P_B = 99135$ Pa

4. Considere un vaso comunicante de 2 cm^2 de sección transversal que contiene mercurio ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3). A un lado se echan 360 gramos de glicerina ρ_{gl} = 1,2 g/cm^3) y en el otro 1/4 de litro de alcohol ρ_{al} = 0,8 g/cm^3). Encuentre el desnivel *d* que existe entre los niveles superiores de la glicerina y el alcohol. Haga un grafico cualitativo de la presión "hidrostática" en función de la profundidad para cada uno de los dos "brazos" del vaso comunicante (grafique las dos curvas en el mismo grafico).

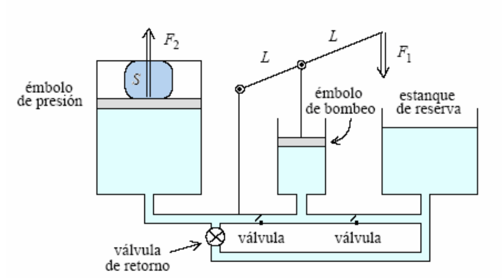


5. Considere un sistema de vasos comunicantes formado por dos tubos de sección transversal de 50 cm^2 que están unidos por un tubito corto de sección transversal muy pequeña (o sea, para efectos de este problema podemos despreciar la cantidad de fluido que se encontrará en el tubito). Inicialmente en este sistema de vasos comunicantes se encuentran dos litros de agua.



a) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos se le agregan 2 litros de un líquido cuya densidad es 0,8 g/cm^3.
b) Para la situación descrita en la parte a), encuentre la presión en el fondo de los vasos comunicantes.
c) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos, en lugar de 2, se le agregan 3 litros de un líquido cuya densidad es 0,8 g/cm^3.

6. Considere una prensa hidráulica (ver figura adjunta). Sean R_1 = 25 cm y R_2 = 150 cm los radios de los émbolos de bombeo y de presión, respectivamente.
Si de la palanca que actúa sobre el embolo de bombeo se tira con una fuerza F_1 = 100 N, ¿qué fuerza ejercerá el émbolo de presión sobre el objeto S?



7. Un cuerpo de material desconocido pesa 4N en el aire y 2,52 N sumergido en agua. Encuentre la densidad del material.

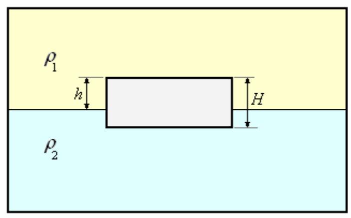
8. Una balsa de área *A*, espesor *h* y masa 400kg flota en aguas tranquilas con una inmersión de 5cm. Cuando se le coloca una carga sobre ella, la inmersión es de 7,2 cm. Encuentre la masa de la carga.

9. Un cuerpo homogéneo prismático de 20cm de espesor, 20 cm de ancho y 40 cm de longitud se mantiene en reposo sumergido en agua a 50cm de profundidad a aplicar sobre él una tensión de 50 N. ¿Cuánto pesa en aire y cuál es su densidad relativa?

10. ¿Qué fracción del volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa al agua 7,25 flotará sobre un mercurio de densidad relativa 13,57?

11. Un tarro cilíndrico de 20cm de diámetro flota en agua con 10cm de su altura por encima del nivel del agua cuando se suspende un bloque de hierro de 100 N de peso de su fondo. Si el bloque se coloca ahora dentro del cilindro ¿qué parte de la altura del cilindro se encontrará por encima de la superficie del agua? Considere la densidad del hierro 7,8gcm^3.

12. Un bloque con una sección transversal de área *A*, altura *H* y densidad ρ, está en equilibrio entre dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2 con $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Suponga que los fluidos no se mezclan. Determine la fuerza de empuje sobre el bloque y encuentre la densidad del bloque en función de ρ_1, ρ_2, *H* y *h*.

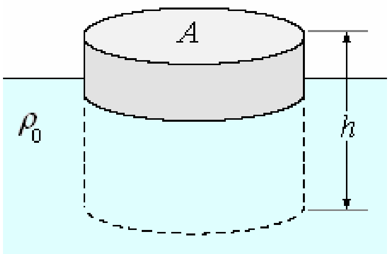


13, En una piscina se encuentra flotando una balsa que tiene forma de un paralelepípedo de densidad relativa (al agua) de 0,3 y cuyas dimensiones son 120 cm de largo, 100 cm de ancho y 25 cm de alto. Determine
a) La fuerza de empuje.
b) La altura medida desde el fondo de la balsa a la que se encuentra la línea de flotación.
c) El peso que debería colocarse sobre la balsa para que esta se hundiera 6cm más.

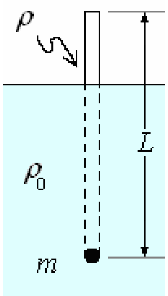
14. El rey Hierón de Siracusa pidió a Arquímedes que examinara una corona maciza que había ordenado hacer de oro puro. La corona pesaba 10 kg en el aire y 9,375 kg sumergida en agua. Arquímedes concluyó que la corona no era de puro oro. Asumiendo que en su interior contenía plata, ¿cuánto oro tenia la corona de Hierón? La densidad del oro es 19,3 g/cm^3; la de la plata, 10,5 g/cm^3.

15. Considere un vaso de agua lleno hasta el borde, con un trozo de hielo flotando en el. Por supuesto que el hielo, al flotar, sobrepasará por encima del borde del vaso. A medida que el hielo se derrite. ¿Se derramará el vaso?
Suponga ahora que en el mismo vaso flota un pequeño barco de juguete hecho de latón. Suponga además que el barquito tiene un pequeño orificio por el cual penetra agua, haciendo que el barquito lentamente se llene de agua. Durante este proceso, o sea mientras el barco se llena de agua pero aún no se hunde, el nivel del agua del vaso ¿baja, queda a igual altura o sube? Cuando finalmente el barquito se hunde, que pasa con el nivel del agua?

16. Considere un cilindro de masa *M*, área *A* y altura *h*, que flota "parado" en un liquido de densidad ρ_0.
a) ¿Hasta qué alguna estará sumergido el cilindro en el líquido?
b) Si el recipiente que contiene le líquido es muy grande (por ejemplo, un lago), ¿qué trabajo debe realizarse para sacar el cilindro del líquido?
c) ¿Varía la respuesta si el recipiente que contiene el líquido es un tambor cilíndrico de área A_0?



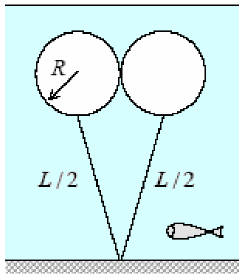
17. Considere una varilla de madera muy liviana, de largo *L*, sección transversal *A* y densidad ρ, que se hace flotar en el agua (designe la densidad del agua por ρ_0).
a) Convénzase de que no es posible que la varilla flote "parada".
b) Para lograr que la varilla flote parada, agreguémosle una masa puntual m en el extremo inferior.
¿Cual es la mínima masa *m* que debe agregarse para lograr el objetivo?



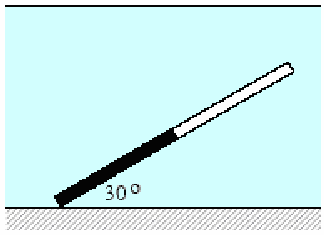
18. ¿Qué volumen de helio se requiere si debe elevarse un globo con una carga de 800 kg (incluido el peso del globo vacío)? Las densidades del aire y del helio, a la presión de una atmósfera, son ρ_{aire} = 1,29 kg/m^3 y ρ_{He} = 0,18 kg/m^3, respectivamente.

21. Se quiere confeccionar aluminio poroso (algo así como queso suizo) que se mantenga en suspensión en agua. Determine la razón entre el volumen de los poros y el volumen del aluminio poroso. (La densidad del aluminio 2700 kg/m^3).

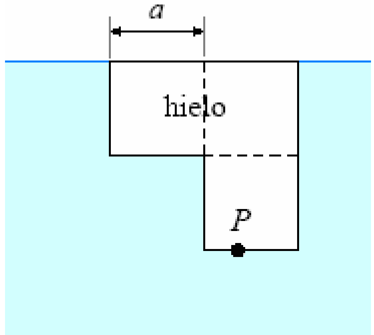
22. Dos globos esféricos inflados con aire, ambos de radio R, se unen mediante una cuerda de longitud L. Los dos globos se mantienen bajo el agua con el punto medio de la cuerda fijo al fondo. Calcular la fuerza de contacto entre los globos.



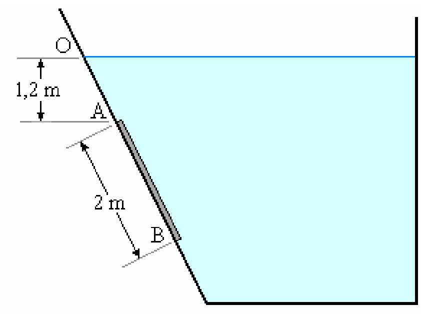
23. Una varilla yace en el fondo de un recipiente con agua formando un ángulo de 60º con la vertical. La varilla es de sección uniforme y está formada por dos pedazos iguales en longitud pero de distinta densidad. La densidad de una de las porciones de la varilla es la mitad de la del agua. Determine la densidad de la otra porción.



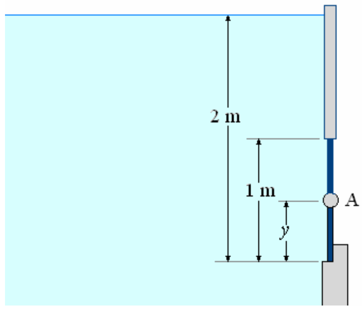
24. Considere un bloque de hielo (densidad = 920 kg/m^3) en forma de "L", formado de tres cubos de 25 cm por lado. Mediante un peso se desea sumergir el hielo en agua como se indica en la figura.
Determine la masa del peso y la ubicación en el hielo donde debería adherirse de modo que el hielo se mantenga justo sumergido lo más estable posible.



25. Repita el problema anterior si la línea OAB forma un ángulo de 30° respecto a la vertical.



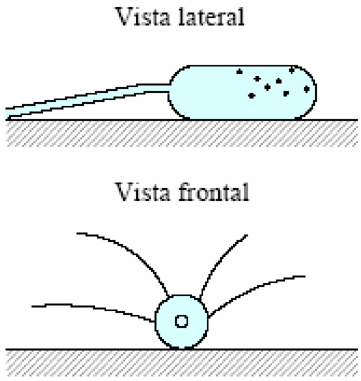
26. Determine la ubicación "*y* "del pivote fijo A de manera que justo se abra cuando el agua está como se indica en la figura.



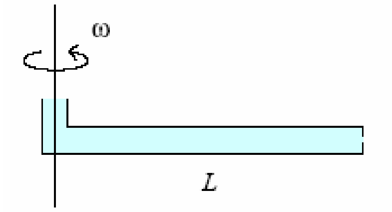
27. Una gotita de agua de 1 mm de radio se pulveriza en gotitas de 10^{-4} mm de radio. ¿En qué factor aumenta la energía superficial (debido a la tensión superficial)?

28. Considere dos placas planas de vidrio, separadas por una distancia de 0,1 mm, con un extremo sumergidas en agua en forma vertical. ¿Qué distancia se elevará el agua entre las placas debido a la capilaridad?

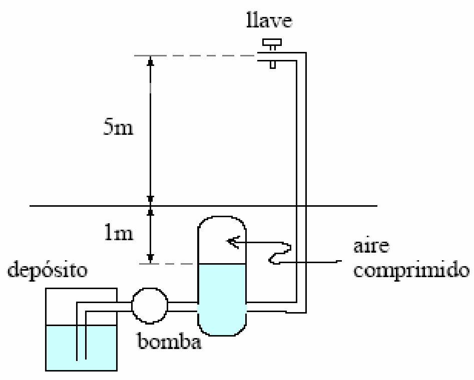
29. Un jardín es regado con un regador casero que consiste en una botella plástica, con numerosos agujeros de 1 mm de diámetro, acostada sobre el jardín y conectada aun a manguera. Asuma que una bomba de agua se encarga de generar un flujo de agua constante de 0,2 litros por segundo. ¿Cuántos agujeros debe tener la botella para que el agua llegue a mojar el prado a 8 metros de distancia de la botella? ¿Cuál es la presión al interior de la manguera si ésta tiene una sección transversal de 4 cm^2?



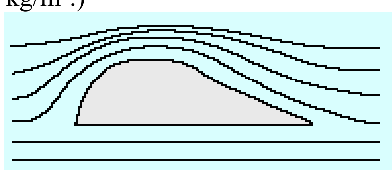
30. Un tubo de largo *L*, lleno de agua, gira en el plano horizontal en torno a un eje vertical que pasa por uno de sus extremos. En el extremo junto al eje, el tubo está abierto, coincidiendo por lo tanto la presión del fluido con la presión atmosférica. El tubo gira con velocidad angular constante ω. Si en el otro extremo, en cierto instante, se abre un pequeño orificio, ¿con qué velocidad emergerá el agua del tubo? (Especifique la rapidez y dirección de la velocidad.)



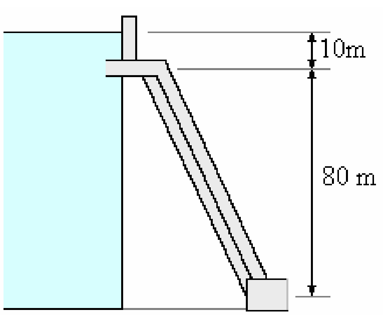
31. Para abastecer de agua a una casa de dos pisos se recurre a un "hidropack".
Este sistema consiste en un depósito subterráneo, una bomba y un cilindro con agua y aire. La bomba inyecta agua a presión al cilindro, que en su parte superior queda con aire comprimido. Un medidor de presión detiene la bomba cuando la presión del cilindro alcanza el valor deseado (el mismo medidor vuelve a encender la bomba cuando la presión baja de cierto nivel). Si el nivel del agua en el cilindro se sitúa 1 metro por debajo del suelo, calcule la presión necesaria en el aire comprimido para que una llave de 1 cm^2 de sección, a una altura de 5 metros sobre el suelo, entregue un caudal de 12 litros por minuto. (La sección transversal del cilindro es grande respecto a la de la llave.)
También encuentre la presión del aire al interior del cilindro.



32. La fuerza de sustentación de un avión moderno es del orden de 1000 N por metro cuadrado de ala. Suponiendo que el aire es un fluido ideal y que la velocidad del aire por debajo del ala es de 100 m/s, ¿cuál debe ser la velocidad requerida por sobre el ala para tener la sustentación deseada? (La densidad del aire es 1, kg/m^3.)

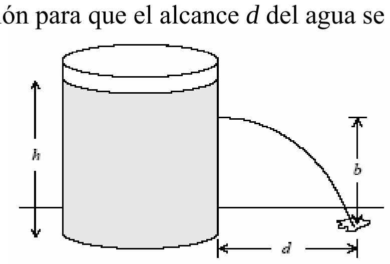


33. Considere la tubería que lleva el agua de una represa hacia una turbina. Suponga que la bocatoma se encuentra a 10 metros bajo el nivel de las aguas y que la turbina se encuentra 80 metros por debajo de ese nivel. Al inicio, es decir a la salida de la represa, la tubería tiene un diámetro de 40 cm. Suponga que el fluido se comporta como un fluido ideal.
a) ¿Cuál es el diámetro máximo que puede tener la tubería en su extremo inferior para que no se produzcan cortes de la columna de agua al interior de la tubería?
b) ¿Cual sería la cantidad de agua que pasaría en ese caso por la tubería y cuál la velocidad del agua emergente?
c) Si el proceso de generación de energía eléctrica usando la presente turbina fuese 100% eficiente, ¿cuál sería la potencia de esta central? ¿Esto corresponde al consumo promedio de cuántas casas?
d) Haga un grafico cualitativo de la presión al interior de la tubería en función de la altura. ¿Cómo cambia esta presión si la sección de la tubería, en el punto emergente, se disminuye a la mitad? ¿A la centésima parte?



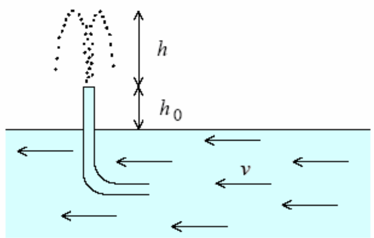
34. Considere una tubería de una calefacción. En el sótano su diámetro es de 4,0 cm y en el segundo piso, 5 metros más arriba, la tubería tiene un diámetro de sólo 2,6 cm. Si en el sótano una bomba se encarga de bombear el agua con una velocidad de 0,5 m/s bajo una presión de 3,0 atmósferas, ¿cuál será la rapidez de flujo y la presión en el segundo piso?

35. Suponga que el nivel de un líquido (agua) en un tambor tiene una altura *h*. A una altura *b* se hace una pequeña perforación lateral que permite que el agua emerja horizontalmente. ¿A qué altura debe hacerse la perforación para que el alcance *d* del agua se máximo?



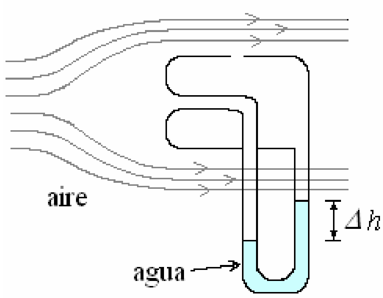
Respuesta. $b = h/2$.

36. En un torrente de agua se sumerge un tubo doblado, tal como se muestra en la figura adjunta. La velocidad de la corriente con respecto al tubo es v = 2,5 m/s.
La parte superior del tubo se encuentra a h_0 = 12 cm sobre el nivel del agua del torrente y tiene un pequeño agujero.
¿A qué altura *h* subirá el chorro de agua que sale por el agujero?



Respuesta. Llegará a 20 cm.

37. La figura muestra un tubo de Pitot, instrumento que se usa para medir la velocidad del aire. Si el líquido que indica el nivel es agua y Δh = 12 cm, encuentre la velocidad del aire. La densidad del aire es 1,25 kg/m^3.



Respuesta. 43, m/s = 156 km/h.

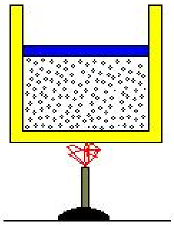
38. Considere un oleoducto de 5 km y 50 cm de diámetro por el cual se desea bombear 1 m^3 por segundo. Si uno de los extremos está abierto a la presión atmosférica, ¿qué presión p_1 debe existir en el otro extremo? Suponga que la densidad del petróleo es 950 kg/m^3 y el coeficiente de viscosidad es 0,2 Pa s aproximadamente. ¿Cual es la potencia dW/dt (energía por unidad de tiempo) disipada por la fricción interna originada por la viscosidad?
Respuesta. p_1 7,5 atm; potencia 650 kW.

39. Un líquido viscoso, teniendo una viscosidad del equilibrio 80 poises, está entre dos placas separadas 4,0 centímetros. Ambas placas están en el movimiento, en direcciones opuestas, con velocidades de 3,0 centímetros/s, y el líquido entre ellas está en flujo laminar. El esfuerzo cortante aplicado al líquido, en unidades SI, es:
Respuesta. 12

40. Encuentre la velocidad terminal que adquiere una esfera de cobre de 0,5 cm de diámetro, cuando cae en agua (ρ_{Cu} = 8,92 g/cm^3). ¿En qué factor disminuye la velocidad terminal si el diámetro se achica en un factor 10?

CAPÍTULO 5. Termodinámica

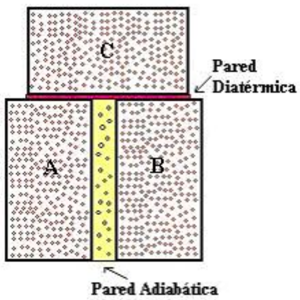
INTRODUCCION.
Sistemas Termodinámicos
Variables termodinámicas macroscópicas.
Consideremos un gas encerrado en un tubo cilíndrico cerrado a uno de sus extremos y provisto de una tapa deslizante (pistón) en el otro. Como se muestra en la figura.



El sistema descrito ocupa determinado **volumen** el cuál puede conocerse en determinado momento por la posición del pistón, otra cantidad indispensable para la descripción del sistema es la **presión** del gas en el cilindro, que también se puede conocer, mediante un manómetro. Finalmente, para tener una idea completa de lo que sucede en el cilindro hay que conocer la **temperatura**, la cual puede medirse en forma simple al igual que las otras dos cantidades. Estas cantidades obtenidas por medición directa, que describen al sistema, nos proporcionarán lo que se conoce como la **Descripción microscópica** del sistema.
Otro punto de vista de describir el sistema es asumiendo que el gas esta formado por un gran número de partículas, moléculas o átomos, todos de igual masa y cada uno moviéndose con una velocidad independiente de las otras es imposible aplicar las leyes de Newton del movimiento a cada molécula por separado e incluso tabular las coordenadas de cada molécula, en este caso es necesario usar métodos estadísticos las cantidades que lo especifican no están directamente asociadas, con nuestro sentido de percepción, esta descripción es conocida como **Descripción microscópica del Sistema.**
La descripción macroscópica o sea las propiedades apreciadas por nuestros sentidos son el punto de partida para todas las investigaciones y aplicaciones prácticas. Por ejemplo, en la mecánica do un cuerpo rígido, considerando los aspectos, externos, especificamos su centro de masa con referencia a un eje de coordenadas en un tiempo particular.
La posición y e1 tiempo y la combinación de ambos, tal como la. Velocidad, constituyen algunas de las cantidades macroscópicas usadas en mecánica y son llamadas coordenadas mecánicas y estas sirven para determinar la energía potencial y cinética del cuerpo rígido. Estos dos tipos de energía, constituyen la energía mecánica o externa del cuerpo rígido. El propósito de la mecánica es encontrar relaciones entre las coordenadas de posición y el tiempo consistentes con las leyes de Newton del movimiento.
En la termodinámica la atención se dirige al exterior del sistema. Se determinan experimentalmente: las cantidades macroscópicas que son necesarias y suficientes para describir el estado interno del sistema, estas son llamadas coordenadas termodinámicas.
El propósito de la termodinámica es encontrar las relaciones entre las coordenadas termodinámicas consistentes con las leyes fundamentales de la termodinámica.
Finalmente, puntualizaremos que dentro de la física, las leyes que relacionan las cantidades macroscópicas, se denomina termodinámica clásica o simplemente termodinámica y, las fórmulas matemáticas que relacionan las cantidades microscópicas, constituyen la Mecánica Estadística, o Teoría atómica del calor, o bien, cuando se usan técnicas simples estadístico-matemáticas se le llama teoría cinética.

LEY CERO DE LA TERMODINÁMICA Y EQUILIBRIO TÉRMICO.
Supongamos que tenemos dos sistemas A y B, separados cada uno y definidos por las coordenadas (presión y temperatura) p, T y p', T' respectivamente.
El estado de un sistema en el cual las velocidades macroscópicas tienen valores que permanecen constantes mientras que las condiciones externas no se cambien, se conoce como estado de equilibrio térmico.

Equilibrio térmico. Los experimentos demuestran que la existencia de un estado de equilibrio depende de la proximidad de otros sistemas y de la naturaleza de la pared que los separa. Si cuando un sistema está en un estado de equilibrio y este no cambia con cualquier cambio en el ambiente, el sistema se dice que está "Aislado" o rodeado por una pared "Pared Adiabática". Cuando las variables macroscópicas de dos sistemas que se encuentran conectadas por una pared diatérmica no varían, se dice que se encuentran equilibrios térmicos entre ellas.
Imaginemos a los sistemas A y B separados en contacto, o separados por una pared diatérmica, con un sistema C.



El sistema A estará en equilibrio con el sistema C y el sistema B también estará en equilibrio con el sistema C, luego los sistemas A y B estarán en equilibrio térmico uno con el otro.
Esto se conoce como la **Ley cero de la termodinámica**,
"Si dos sistemas se encuentran en equilibrio térmico con un tercer sistema, los dos sistemas se encuentran en equilibrio entre sí".
Esta ley está de acuerdo a nuestra experiencia diaria de nuestros sentidos, es sencilla pero no obvia, es un hecho que sucede pero podría no haber sido así. Nos expresa la idea fundamental de temperatura. Cuando decimos que las variables macrosc6picas no varían, nos hace falta definir una propiedad que asegure esto.
Esta propiedad la llamaremos **Temperatura**.
Nosotros queremos asignar un número de cada estado de equilibrio de un sistema que tenga la propiedad que dos sistemas con el mismo número estén en equilibrio térmico entre ellos.
"La temperatura de un sistema es una propiedad que determina si un sistema está en equilibrio o no con otros sistemas".

TEMPERATURA Y ESCALAS
La temperatura se determina por la medición de alguna cantidad mecánica, eléctrica u óptica cuyo valor se correlaciona con la temperatura.
Generalmente la temperatura de una sustancia, sino en el termómetro el cual, se pone en contacto íntimo con la instancia y adquiere la misma temperatura.
Se llama TERMOMETRO, a un aparato que permite medir la temperatura por medio de su propiedad termométrica o variable macroscópica que es sensible al estado térmico de la sustancia. Los principales termómetros y sus propiedades termométricas se muestran en la tabla.

TERMOMETRO	PROPIEDAD TERMOMETRICA
Gas a volumen constante	Presión
Gas a presión constante	Volumen
Resistencia eléctrica	Resistencia eléctrica
Termocupla	Fuerza electromotriz
Columna líquida en un tubo capilar	Longitud

Construyamos una escala de temperatura, para esto tomemos como termómetro una columna líquida de mercurio en un tubo capilar de vidrio, observamos que la columna de mercurio aumentará cuando aumenta la temperatura, como la compresibilidad del mercurio es tan pequeña podemos considerar como si fuera a presión constante. La relación más simple entre temperatura y longitud de la columna que podemos elegir, es una relación lineal de y.

$$t_{(y)} = ay + b$$

Donde las constantes *a* y *b* se evalúan de acuerdo a un conjunto definido de reglas. Asignemos números arbitrarios a dos puntos fijos.

Escala Celsius o centígrada.
En la escala Celsius o centígrada uno de ellos el punto de congelación del agua, es decir el punto en que el agua y el hielo están en equilibrio a la presión atmosférica, a esta temperatura le damos el valor cero grados Celsius o grados centígrados (0°C).

$$t = ay_c + b = 0^o\mathrm{C}$$

El otro punto, el de ebullición del agua a presión atmosférica, a este le llamamos Cien grados (100°C).

$$t = ay_e + b = 100^o\mathrm{C}$$

Al resolver las dos ecuaciones simultáneamente encontramos los valores de *a* y *b*.

$$a = \frac{100^o\mathrm{C}}{y_e - y_c} \quad \text{y} \quad b = -\frac{100^o\mathrm{C}}{y_e - y_c} y_c$$

Sustituyendo la expresión original

$$t = 100^o\mathrm{C}\frac{(y - y_c)}{(y_e - y_c)}$$

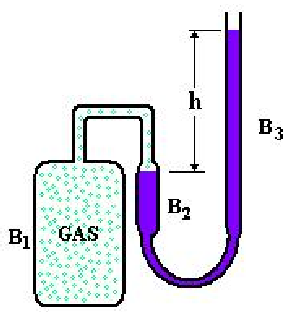
Para un termómetro a gas a Volumen Constante la expresión sería

$$t = 100^o\mathrm{C}\frac{(p - p_c)}{(p_e - p_c)}$$

y para un termómetro a gas a presión constante la expresión sería

$$t = 100^o\mathrm{C}\frac{(V - V_c)}{(V_e - V_c)}$$

El termómetro a gas a volumen constante consiste en un balón B_1 lleno de gas (hidrógeno por ejemplo) ligado a un tubo en forma de U lleno de mercurio, el volumen de gas en el balón se mantiene constante subiendo o bajando B_3 hasta que el mercurio en B_2 se encuentra en la marca cero.



La presión p que equilibra la presión del gas es

$$p = 76\,\mathrm{cm} + h$$

La experiencia muestra que la dependencia de la presión con relación a la temperatura es lineal con esto se obtiene la escala de un termómetro colocando el balón en un baño de hielo en fusión, marcando p_c y después repitiendo la operación con vapor de agua, marcando p_e.

La distancia entre esos dos puntos se toma, por convención igual a 100°.
Medidas usando el gas hidrógeno como sustancia termométrica muestra que

$$\frac{p_e}{p_c} = 1{,}366$$

o sea que la relación con la temperatura, sería:

$$t = 100^o C \frac{\left(\frac{p}{p_c} - 1\right)}{\left(\frac{p_e}{p_c} - 1\right)} = \frac{100^o C}{(1{,}366 - 1)}\left(\frac{p}{p_c} - 1\right)$$

$$t = 273{,}15\left(\frac{p}{p_c} - 1\right)^o \mathrm{C}$$

En esta expresión se ve que cuando la temperatura es -273.15 la presión es Cero. Como no es posible para la presión tomar valores menores que cero, a este valor de la temperatura se le torna como origen de una nueva escala de temperatura, escala ABSOLUTA de Temperaturas en grados KELVIN.

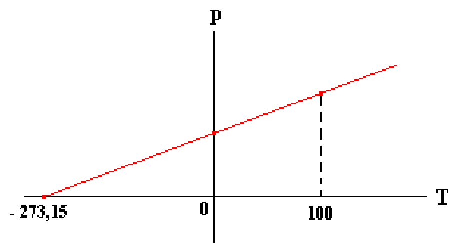
$$T(\mathrm{K}) = t(^o\mathrm{C}) + 273{,}15^o \mathrm{C}$$

En realidad para calibrar el termómetro, no se toma como referencia el punto de fusión del hielo, sino que se especifica corno "punto fijo patrón" al llamado "Punto triple de agua", único punto en el que coexisten en equilibrio hielo, líquido y vapor de agua, dándose solamente a la presión de 4,58 mm Hg.
Obteniéndose:
t = 0,01 °C
T = 273,16 K

$$T = 273{,}16\frac{p}{p_c}\mathrm{K}$$

El termómetro de gas a volumen constante se toma como standard porque es el que experimentalmente mas nos conviene, pues es el que nos da las variaciones más pequeñas y también porque cuando el termómetro contiene gas a baja presión, la diferencia de lectura en temperatura usando diferentes gases es reducida.

Ejemplo 1. Cuando el bulbo de un termómetro de gas a volumen constante se coloca en un recipiente con agua a 100 °C, la presión del gas es 227 mm de Hg. Cuando el bulbo se mueve a una mezcla de hielo - sal la presión del gas cae a 162 mm de Hg. Asumiendo el comportamiento ideal, como en la figura, ¿cuál es la temperatura Celsius de la mezcla de hielo – sal?



Solución.
Considerando el comportamiento del termómetro con la linealidad mostrada en la figura.
Para la presión del gas es 227 mm de Hg corresponde una temperatura 100 + 273,5 =373,15 K
Para la presión 162 mm de Hg corresponde

$$x = \frac{373{,}15}{227}162 = 266{,}30 \text{ K o } -6{,}85°\text{C}$$

Ejemplo 2. En un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm de mercurio introducimos un termómetro centígrado en hielo fundente y luego en vapor de agua hirviendo. El termómetro, mal graduado, marca 2° para el primero y 102,5° para el segundo

a) ¿Qué fórmula de reducción deberemos emplear para calcular la temperatura real en todos los casos? Si el termómetro marca 50°,
b) ¿cuál es la verdadera temperatura?
c) ¿A qué temperatura sería correcta la lectura del termómetro?

Solución.
a) El cero de un termómetro correcto corresponde al 2 del mal graduado, y el 100 corresponde 102,5°.
El intervalo fundamental está, por tanto, dividido en: 102,5 - 2 = 100,5
Llamando A a la temperatura marcada por el incorrecto y C a la del centígrado perfecto, la fórmula será:

$$\frac{C}{100} = \frac{A-2}{100{,}5}$$

b) $\frac{C}{100} = \frac{50-2}{100{,}5} \Rightarrow$

$$C = \frac{48 \times 100}{100{,}5} = 47{,}76^o \mathrm{C}$$

c) Si la indicación fuese correcta, se verificaría:

$$\frac{C}{100} = \frac{C-2}{100{,}5} \Rightarrow 100{,}5C = 100C - 200$$

$$\Rightarrow C = \frac{-200}{0{,}5} = -400^o \mathrm{C}$$

Lo cual es imposible, puesto que el cero absoluto es - 273,16 °C, menor temperatura a la que puede aproximar un sistema.

Ejemplo 3. Un termómetro centígrado mal graduado marca 8° en el punto de fusión del hielo y 99° en el de ebullición del agua, en un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm. Resolver para este termómetro las preguntas del problema anterior.

Solución.

1) El intervalo fundamental será: 99 - 8 = 91

Luego la fórmula de reducción es:

$$\frac{C}{100} = \frac{A-8}{91}$$

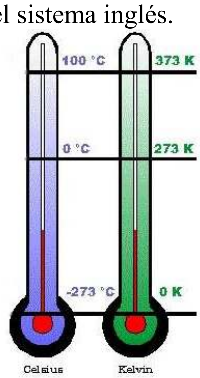
2) $\frac{C}{100} = \frac{50-8}{91} \Rightarrow C = \frac{4200}{91} 46{,}15^o C$

3) $\frac{C}{100} = \frac{C-8}{91} \Rightarrow 91C - 800 = 100C$

$$\Rightarrow C = \frac{800}{9} = 88{,}9^o \mathrm{C}$$

Otras escalas de temperatura.

Así como la escala Celsius (Centígrado) y su correspondiente en la escala absoluta Kelvin, existen otras escalas en el sistema inglés.



La escala FAHRENHEIT, al cero de la escala Celsius corresponde a 32° F y los 100°C corresponden a 9 divisiones de °F, la relación de equilibrio es:

$$t(°\mathrm{F}) = \frac{9}{5} t\,(°\mathrm{C}) + 32°\mathrm{F}$$

y

$$t(°\mathrm{C}) = \frac{5}{9} t\,(°\mathrm{F}) - 32°\mathrm{F}$$

La escala absoluta correspondiente a la escala Fahrenheit es la escala RANKINE.

$$T(\mathrm{R}) = t(^o\mathrm{F}) + 459{,}67(\mathrm{R})$$

$$T(\mathrm{R}) = \frac{9}{5} T(\mathrm{K})$$

Ejemplo 4. a) La temperatura de la superficie del Sol es de unos 600 ºC. Exprésese esa temperatura en la escala Fahrenheit.

b) Exprese la temperatura normal del cuerpo humano 98,6 ºF, en la escala Celsius.

c) exprese la temperatura de pasteurización, 165 ºF, en la escala Celsius.

d) Exprese el punto normal de ebullición del Oxígeno –183 ºC, en la escala Fahrenheit.

Solución.

a) Como $T_C = \frac{5}{9}\left(T_F - 32\right)$ y

$T_C = T_K - 273{,}15$, igualando ambas expresiones, encontramos para la temperatura Fahrenheit:

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot \left(T_K - 255{,}37\right) = 10340{,}33^{\mathrm{o}}\,\mathrm{F}.$$

b) $T_C = \frac{5}{9}\left(T_F - 32\right) = 37°\mathrm{C}$

c) $T_C = \frac{5}{9}\left(T_F - 32\right) = 73{,}89^{\mathrm{o}}\,\mathrm{C}.$

d) $T_F = \frac{9}{5} T_C + 32 = -297{,}4^{\mathrm{o}}\,\mathrm{C}.$

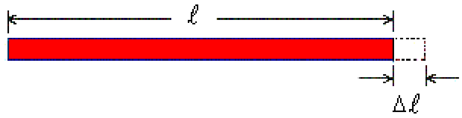
DILATACION TERMICA.

Efectos frecuentes en los materiales al presentarse cambios de temperatura, son variaciones en sus dimensiones y cambios de estado. En primer lugar consideraremos aquí, las variaciones de dimensiones que ocurren sin cambios de estado.

Cuando la temperatura de un cuerpo aumenta, este por lo general se dilata. Una excepción es el agua que se contrae entre 0ºC y 4°C, este comportamiento es crítico en la manera como los lagos y los océanos polares se congelan de la superficie hacia abajo, en lugar de hacerlo del fondo hacia la superficie, ya que el agua mas fría que 4°C se eleva en lugar de hundirse y el agua a 0°C está en la superficie en lugar de estar en el fondo. (La densidad del agua a 4°C es máxima, = 1 g/cm^3).

Expansión lineal.

El cambio de una dimensión lineal de un sólido tal como el largo, el ancho, alto o una distancia entre dos marcas se conoce como la expansión lineal.



Experimentalmente se encuentra, para un amplio rango de temperaturas, que el cambio de longitudes $\Delta\ell$, es proporcional al cambio de temperatura Δt y a la longitud ℓ, de tal manera que podemos escribir: $\Delta\ell = \alpha\ell\Delta t$, donde α es el coeficiente de expansión lineal. Este coeficiente tiene diferentes valores para los diferentes materiales y tiene por unidad l/grado.

O bien,

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha\Delta t$$

Para encontrar la longitud final después de un cambio de temperatura Δt, escribimos $\frac{d\ell}{\ell} = \alpha\, dt$, e integramos considerando la longitud ℓ para $t = t_1$, y ℓ' para $t = t_2$, siendo $t_2 - t_1 = \Delta t$

$$\int_{\ell}^{\ell'} \frac{d\ell}{\ell} = \alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \Rightarrow \ln \ell \Big|_{\ell}^{\ell'} = \alpha t \Big|_{t_1}^{t_2} \Rightarrow$$

$$\ln \frac{\ell'}{\ell} = \alpha(t_2 - t_1) \Rightarrow \ln \frac{\ell'}{\ell} = \alpha \Delta t$$

$$\frac{\ell'}{\ell} = e^{\alpha \Delta t} \Rightarrow \ell' = \ell e^{\alpha \Delta t}$$

Desarrollando $e^{\alpha \Delta t}$ en series de Taylor

$$\left[e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... - \infty < x < \infty \right]$$

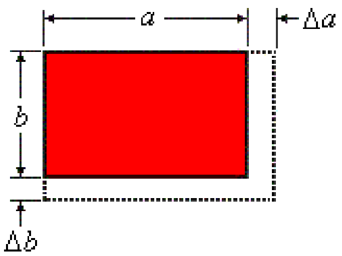
Obtenemos:

$$\ell' = \ell e^{\alpha \Delta t} = \ell \left[1 + \frac{\alpha \Delta t}{1!} + \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2!} + \frac{(\alpha \Delta t)^3}{3!} + ... \right]$$

Como a es una cantidad muy pequeña podemos no considerar los términos con α^2, α^3, …..
y finalmente

$$\ell' = \ell(1 + \alpha \Delta t) = \ell + \Delta \ell$$

Expansión de superficie.
Consideremos ahora el área al elevar la temperatura Δt, para esto tomamos una superficie como se muestra en la figura, antes de la expansión su área es $A = ab$.



a se expande en $\Delta a = \alpha_1 a \Delta t$

b se expande en $\Delta b = \alpha_2 b \Delta t$

Luego $a' = a + \Delta a = a(1 + \alpha_1 \Delta t)$ y

$$b' = b + \Delta b = b(1 + \alpha_2 \Delta t)$$

$$A' = a'b' = a(1 + \alpha_1 \Delta t) b(1 + \alpha_2 \Delta t)$$

$$A' = a'b' = ab\left[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t + \alpha_1 \alpha_2 \Delta t^2\right]$$

En esta expresión el último término se puede despreciar ya que α_1 y α_2 son valores muy pequeños, y $A = ab$ tenemos

$$A' = A\left[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t\right]$$

En el caso de ser un cuerpo isotrópico, los coeficientes de expansión lineal α_1 y α_2 son iguales a α, luego

$$A' = A(1 + 2\alpha \Delta t)$$

Como $A' = A + \Delta A$, tenemos:

$$\Delta A = 2\alpha A \Delta t = \gamma A \Delta t$$

Donde $\gamma = 2\alpha$ es el coeficiente de expansión de área.

Expansión de volumen.
Usando el mismo argumento se demuestra que el cambio de volumen de un sólido de volumen V, al elevarse la temperatura Δt es

$$\Delta V = 3\alpha V \Delta t = \beta V \Delta t$$

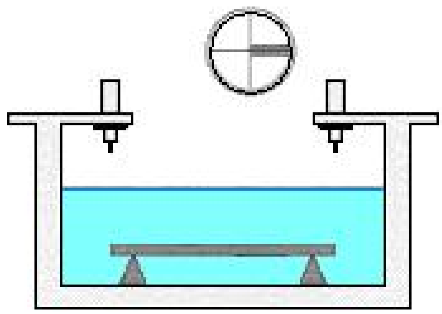
Donde $\beta = 3\alpha$ es el coeficiente de expansión de volumen.

Coeficiente de dilatación lineal de algunos de los materiales más usuales.

Sólidos	α (° C^{-1})
Concreto	0,7 – 1,2 x 10^{-5}
Plata	2,0 x 10^{-5}
Oro	1,5 x 10^{-5}
Invar	0,04 x 10^{-5}
Plomo	3,0 x 10^{-5}
Zinc	2,6 x 10^{-5}
Hielo	5,1 x 10^{-5}
Aluminio	2,4 x 10^{-5}
Latón	1,8 x 10^{-5}
Cobre	1,7 x 10^{-5}
Vidrio	0,4 – 0,9 x 10^{-5}
Hierro	1,2 x 10^{-5}
Cuarzo	0,04 x 10^{-5}
Acero	1,2 x 10^{-5}

Líquidos	β (° C^{-1})
Glicerina	5,1 x 10^{-5}
Alcohol etílico	7,5 x 10^{-5}
Mercurio	1,8 x 10^{-5}
Bisulfuro de carbono	11,5 x 10^{-5}
Agua (20 ° C)	2,0 x 10^{-5}

Ejemplo 5. En el comparador de la figura se mide la dilatación de una barra de hierro, de 1 m de longitud a 0 °C, obteniéndose para los 50 °C una dilatación de 0,06 cm.



Calcular:
a) El coeficiente de dilatación lineal del hierro.
b). Si tiene una sección de 10 cm^2 a 0°C, ¿cuáles son su sección y su volumen a 100 °C?
Solución.

a) $\alpha = \dfrac{L' - L_0}{L_0 \times \Delta T} = \dfrac{0,060}{100 \times 50}$

$= 12 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$

b) $\gamma = 2\alpha = 24\times 10^{-6}{}^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$

Como

$$A' = A_0(1+\gamma\Delta T) = 10(1+24\times 10^{-6}\times 100)$$
$$= 10{,}024\mathrm{cm}^2$$

Siendo $\beta = 3\alpha = 36\times 10^{-6}\,{}^{o}C^{-1}$

Obtenemos:

$$V' = V_0(1+\beta\Delta T) = 10\times 100(1+36\times 10^{-6}\times 100)$$
$$= 1003{,}6\mathrm{cm}^3$$

Ejemplo 6. Un herrero ha de colocar una llanta circular de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la temperatura ambiente es de 20 °C y su coeficiente de dilatación lineal es 12,2 x 10^{-6} °C^{-1}, calcular la temperatura en grados centígrados a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.

Solución.

$$\ell' = \ell(1+\alpha\Delta T) = 2\pi r'(1+\alpha\Delta T)$$
$$d' = d(1+\alpha\Delta T)$$

Luego

$$\Delta T = \frac{d'-d}{\alpha d} = \frac{4\times 10^{-3}}{12{,}2\times 10^{-6}\times 1} = 327^{o}\mathrm{C}$$
$$\Rightarrow T = 20+\Delta T = 347^{o}\mathrm{C}$$

Ejemplo 7. Un anillo de acero, de 75 mm de diámetro interior a 20 °C, ha de ser calentado e introducido en un eje de latón de 75,05 mm de diámetro a 20 °C.

a) ¿A qué temperatura ha de calentarse el anillo?

b) ¿A qué temperatura tendríamos que enfriar el conjunto para que el anillo saliera él solo del eje?

(Coeficiente de dilatación del acero: 12 x 10^{-6} °C^{-1}; coeficiente de dilatación del latón: 20 x 10^{-6} °C^{-1})

Solución.

a) $D' = D(1+\alpha\Delta T)$

$$\Rightarrow 75{,}05 = 75(1+12\times 10^{-6}\Delta T)$$
$$\Rightarrow \Delta T = \frac{75{,}05-75}{75\times 12\times 10^{-6}} = 55^{o}\mathrm{C}$$
$$\Rightarrow T' = T+\Delta T = 20+55 = 75^{o}\mathrm{C}$$

b) Los diámetros a la temperatura que nos piden deberán ser iguales:

$$D(1+\alpha_a\Delta T') = D''(1+\alpha_l\Delta T')$$

D = diámetro del anillo a 20° C;

D''= diámetro del eje a 20 °C;

α_a y α_l, coeficiente de dilatación del acero y del latón, respectivamente). Luego:

$$\Delta T' = \frac{D-D''}{D''\times 20\times 10^{-6} - 75\times 12\times 10^{-6}}$$
$$= -83{,}2^{o}\mathrm{C}$$
$$T'' = T+\Delta T' = 20-83{,}2 = -63{,}2°\mathrm{C}$$

Ejemplo 8. La varilla de un reloj de lenteja sin compensar, que bate segundos a 0° C, es de latón. Averiguar cuánto se retrasa el reloj en un día si se introduce en un ambiente a 200° C. Coeficiente de dilatación del latón: α = 17 x 10^{-6} °C^{-1}. (Considerar el péndulo como simple, de longitud la misma que la varilla.)

Solución.

A 0° el semiperíodo (1 s) será: $1 = \pi\sqrt{\dfrac{\ell_0}{g}}$

A 200°: $\tau = \pi\sqrt{\dfrac{\ell_0(1+\alpha\Delta T)}{g}}$

Dividiendo:

$$\tau = \sqrt{1+\alpha\Delta T} = \sqrt{1+17\times 10^{-6}\times 200}$$
$$= \sqrt{1{,}0034s} = 1{,}0017\ \mathrm{s}$$

Como un día dura 86400 segundos el péndulo dará

$$\frac{86400}{1{,}0017} = 86253 \text{ semioscilaciones}$$

El péndulo da en 1 día 86 400 - 86 253 = 147 semioscilaciones menos que en su marcha correcta: El reloj se retrasará en 147 s = 2 min 27 s

Ejemplo 9. Una varilla de cobre de densidad uniforme y de sección constante oscila como un péndulo colgada de uno de sus extremos, con un periodo de 1,6 s cuando se encuentra a una determinada temperatura ambiente. Siendo el coeficiente de dilatación lineal del cobre 19 x 10^{-6} °C^{-1}, determínese el incremento de temperatura que habría que darle al ambiente para que el período aumente en 3 milésimas de s.

Solución.

El período a la temperatura inicial T es:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}M\ell^2}{Mg\frac{\ell}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

y a la temperatura T + ΔT será:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell(1+\alpha\Delta T)}{3g}}$$

dividiendo los dos:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{(1+\alpha\Delta T)} \Rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - 1}{\alpha} = \frac{\left(\frac{1{,}603}{1{,}6}\right)^2 - 1}{19\times 10^{-6}} = 197^{\circ}\mathrm{C}$$

Ejemplo 10. La densidad del mercurio a 0°C es 13,6 g/cm^3; su coeficiente de dilatación, 182 x 10^{-6} °C^{-1}. Calcular la densidad del mercurio a 100 °C.
Solución.

$$\rho' = \frac{\rho}{1+\beta\Delta T} = \frac{13{,}6}{1+182\times 10^{-6}100}$$
$= 13{,}36$ g/cm^3

Ejemplo 11. Una vasija de cinc (coeficiente de dilatación lineal: 29 x 10^{-6} °C^{-1}) está llena de mercurio a 100 °C, teniendo entonces una capacidad de 10 ℓ. Se enfría hasta 0°C. Calcular la masa de mercurio, medida a 0 °C, que hay que añadir para que la vasija quede completamente llena.
Coeficiente de dilatación del mercurio, 182 x 10^{-6} °C^{-1}.
Densidad del mercurio a 0 °C, 13,6 g/cm^3.
Solución.
El volumen de la vasija a 0° quedará determinado por la ecuación:
$$V' = V(1-\beta\Delta T)$$
$$\Rightarrow V = \frac{V'}{(1-\beta\Delta T)},$$
en la que: β = 3 x 29 x10^{-6}°C^{-1} = 87 x10^{-6} °C^{-1}
$V' = 1000$ cm^3 $\Delta T = (0-100)$ = - 100°C
Por tanto: $V = \dfrac{1000}{1+87\times 10^{-6}\times 100}$ = 991,38 cm^3

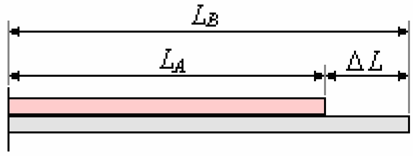
El volumen del mercurio a 0° quedará determinado por la misma ecuación en la que
$\beta_{Hg} = 182\times 10^{-6}\,{}^oC^{-1}$:
$$V_{Hg} = \frac{V'}{1+\beta_{Hg}\Delta T} = \frac{1000}{1+182\times 10^{-6}\times 100} =$$
982,13 cm^3

La diferencia es el volumen que queda por llenar:
$V - V_{Hg}$ = 991,38 – 982,13 = 9,25 cm^3

La masa del mercurio que hay que agregar es:
$\Delta M = \rho_{Hg}\Delta V$ = 13,6 x 9,25 = 125,8 g

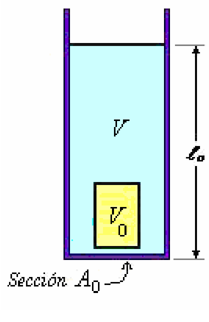
Ejemplo 12. Una vasija de Zn está llena de mercurio a 0°C, teniendo una capacidad de 5 ℓ. Calcular el volumen de mercurio que se derrama a 100 °C por efecto de la mayor dilatación de este último. (Tomar los datos necesarios del problema anterior.)
Solución.
β = 87 x10^{-6} °C^{-1}
Vasija: $V' = V(1+\beta\Delta T)$ = 5000(1 + 87x 10^{-6} x 100) = 5043,5 cm^3
El volumen del mercurio a 100 °C es:
V'_{Hg} = 5000 (1 + 182 x 10^{-6} x 100)
= 5091 cm^3
El volumen del mercurio que se derrama 100 °C es:
$V_x = V' - V'_{Hg}$ = 5091 - 5043,5
= 47,5cm^3

Ejemplo 13. Dos barras de longitudes L_A, L_B coeficientes de dilatación lineal α_A y α_B respectivamente se sujetan en un extremo, existiendo en el extremo libre una diferencia de longitud ΔL. Qué relación debe existir entre sus coeficientes de dilatación lineal tal que dicha diferencia de longitud se mantenga constante cuando el conjunto se somete a una variación de temperatura.
Solución.



Como ΔL = constante
$$L_B - L_A = L'_B - L'_A,$$
$$L_B - L_A = L_B(1+\alpha_B\Delta T) - L_A(1+\alpha_A\Delta T)$$
De aquí: $L_B\alpha_B\Delta T = L_A\alpha_A\Delta T$
Finalmente: $\dfrac{\alpha_B}{\alpha_A} = \dfrac{L_A}{L_B}$

Ejemplo 14. Un tubo de acero, cuyo coeficiente de expansión lineal es α = 18 x 10^{-6}, contiene mercurio, cuyo coeficiente de expansión de volumen es β = 180 x 10^{-6} °C^{-1}; el volumen de mercurio contenido en el tubo es 10^{-5} m^3 a 0 °C, se desea que la columna de mercurio permanezca constante para un rango normal de temperaturas. Esto se logra insertando en la columna de mercurio una varilla de silicio, cuyo coeficiente de dilatación es despreciable.
Calcular el volumen de la varilla de silicio.



Solución.
A 0°C, sea V_o el volumen de la varilla de silicio y V el volumen de mercurio, a esta condición tenemos
$$\ell_0 A_0 = V + V_0$$
A una temperatura t la sección A_o se incrementa a $A_o(1+2\alpha t)$.
Similarmente el volumen de mercurio cambia de V a $V(1+\beta t)$.
Como se requiere que ℓ_o permanezca constante, se tiene
$\ell_o A_o(1+2\alpha t) = (V+V_o)(1+2\alpha t)$

Por otro lado este volumen es: $V(1+\beta t)+V_o$
igualando ambas expresiones
$(V+V_o)(1+2\alpha t) = V(1+\beta t)+V_o$
$\Rightarrow V_o(1+2\alpha t-1) = V(1+\beta t-2\alpha t)$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{V(\beta-2\alpha)t}{2\alpha t} = \frac{V(\beta-2\alpha)}{2\alpha}$$

$$= \frac{V(180-36)10^{-6}}{36x10^{-6}} = 4V$$

$= 4 \times 10^{-5} m^3$
La varilla de silicio ocupa los 4/5 del volumen total a 0°C.

Ejemplo 15.
Una barra de acero, $\alpha_{ACERO} = 11\times10^{-6}\ /^oC$, tiene un diámetro de 3 cm a la temperatura de 25 ºC. Un anillo de bronce, $\alpha_{BRONCE} = 17{,}10^{-6}\ /^oC$, tiene un diámetro interior de 2,992 cm a la misma temperatura. ¿A qué temperatura común entrará justamente el anillo en la varilla?
Solución.
Puesto que los diámetros son cantidades lineales, éstas se dilatarán con la temperatura. Como la temperatura inicial es de 25 ºC y la final T donde los diámetros deben coincidir, se tiene:

$$d_A = d_{0A}\left[1+\alpha_{ACERO}(T-25)\right]$$

$$d_B = d_{0B}\left[1+\alpha_{BRONCE}(T-25)\right]$$

Despejando T, encontramos:

$$T = \frac{d_{0A}(1-25\alpha_A)+d_{0B}(25\alpha_B-1)}{(d_{0B}\alpha_B - d_{0A}\alpha_A)}$$

= 472,83 ºC.

Ejemplo 16. Un vaso de vidrio de 75 cm^3 se llena completamente de mercurio a la temperatura ambiente de 25 ºC. A la temperatura de 20 ºC, ¿Cuál será el volumen de mercurio derramado?
$\beta_{Hg} = 18{,}21 \times 10^{-5}$ / ºC,
$\alpha_V = 9{,}6 \times 10^{-6}$ / ºC .
Solución.
El volumen derramado V_D corresponde a la diferencia entre el volumen de mercurio V_{Hg} menos el volumen del vaso V_V, es decir:

$$V_D = V_{Hg} - V_V$$

$$= V_0(1+\beta_{Hg}\Delta T) - V_0(1+3\alpha_V\Delta T)$$

$$= V_0\Delta T(\beta_{Hg} - 3\alpha_V)$$

$$= (75)(-5)(18{,}21-2{,}88)\times10^{-5}$$

$= -0{,}058$ cm^3
Se derraman 0,058 cm^3 de mercurio

Ejemplo 17. En el centro de un disco de acero hay un orificio de diámetro $d = 4{,}99$ mm (a 0 °C). ¿Hasta que temperatura hay que calentar al disco para que por el orificio empiece a pasar una bola de diámetro $D = 5{,}00$ mm? El coeficiente de dilatación lineal del acero es $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-5}$ K^{-1}.
Solución.
$d(1+\alpha\Delta T) = D$, reemplazando valores:

$$4{,}99(1+1{,}1\times10^{-5}\Delta T) = 5{,}00$$

Resolviendo encontramos $\Delta T = 182$, como la temperatura inicial es 0°C, es necesario elevar la temperatura hasta 182°C.

Ejemplo 18. Una bola de vidrio de coeficiente de dilatación cúbica es β, se pesa tres veces en el aire y en un líquido a las temperaturas t_1 y t_2. Las indicaciones de las balanzas para las tres pesadas son: P, P_1 y P_2. Determinar el coeficiente de dilatación cúbica del líquido.
Solución.
Supongamos que el volumen de la bola a la temperatura t_1 es igual a V, entonces a la temperatura t_2 será igual a $V(1+\beta\Delta t)$, donde $\Delta t = t_2 - t_1$
Escribamos las indicaciones de las balanzas para las tres pesadas:

$$P = \rho V g\ ,$$

$$P_1 = P - \rho_1 V g\ ,$$

$$P_2 = P - \rho_1 V g\,\frac{(1+\beta\Delta t)}{(1+\beta_1\Delta t)}\ .$$

Donde ρ es la densidad del vidrio y ρ_1 la densidad del líquido (ambas a la temperatura t_1).
En la fórmula de P despreciamos la fuerza de empuje por ser pequeña la densidad del aire. Por eso no tiene importancia la temperatura a que hizo esta pesada.
De las tres ecuaciones se obtiene β_1 en función de P, P_1, P_2, t_1, t_2 y β que son conocidos:

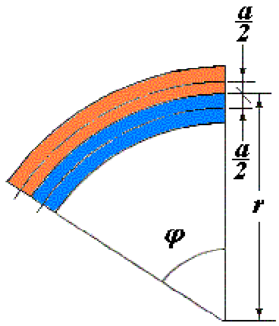
$$\beta_1 = \frac{P_2 - P_1 + (P-P_1)\beta(t_2-t_1)}{(P-P_2)(t_2-t_1)}$$

En la práctica se suele utilizar una bola de vidrio de cuarzo cuyo coeficiente de dilatación cúbica es mucho menor que el coeficiente de dilatación cúbica de la inmensa mayoría de los líquidos. En este caso la respuesta se puede simplificar:

$$\beta_1 = \frac{(P_2-P_1)}{(P-P_2)(t_2-t_1)}$$

Ejemplo 19. Dos láminas, una de acero y otra de bronce, de igual espesor $a = 0{,}2$ mm, están remachadas entre sí por sus extremos de manera que a la temperatura $T_1 = 293$ K forman una lámina bimetálica plana. ¿Cuál será el radio de flexión de esta lámina a la temperatura $T_2 = 393$ K?
El coeficiente de dilatación lineal:
Acero es $\alpha_1 = 1{,}1\times10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ y del
Bronce es $\alpha_1 = 2\times10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$.

Solución.



Vamos a suponer que la línea media de cada lámina conserva la longitud que tendría en estado no curvado. El radio r se determina por las condiciones

$$\varphi(r-\frac{a}{2})=\ell+\Delta\ell_1,\ \ \Delta\ell_1=\ell\alpha_1\Delta T\ ,$$

$$\varphi(r+\frac{a}{2})=\ell+\Delta\ell_2,\ \Delta\ell_2=\ell\alpha_2\Delta T\ ,$$

$$(1+\alpha_1\Delta T)(r+\frac{a}{2})=(1+\alpha_2\Delta T)(r-\frac{a}{2}),$$

Por consiguiente

$$r=\frac{a\left[2+(\alpha_1+\alpha_2)\Delta T\right]}{2(\alpha_2-\alpha_1)\Delta T}=22{,}5\text{cm}$$

FATIGA DE ORIGEN TÉRMICO.
Consideremos una barra de sección A sujeta en ambos extremos

Al aumentar la temperatura Δt, debería producirse un cambio de longitud

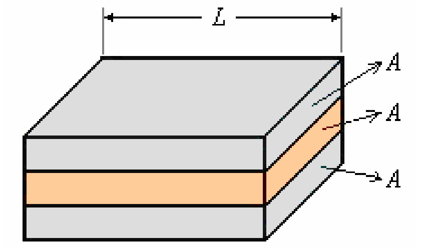
$$\frac{\Delta\ell}{\ell}=\alpha\Delta t$$

pero como no se puede dilatar por estar sujeta, la tensión debe aumentar hasta un valor suficiente para producir el mismo cambio pero de sentido inverso, este esfuerzo es:

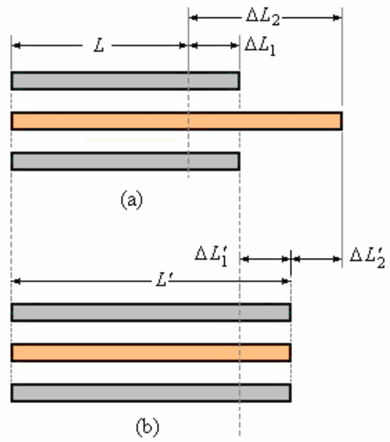
$\dfrac{F}{A}=Y\dfrac{\Delta\ell}{\ell}$, reemplazando obtenemos:

$$\frac{F}{A}=Y\alpha\Delta t$$

Ejemplo 20. Una platina de cobre se suelda con dos platinas de acero, como se muestra en la figura. Las tres platinas son iguales, teniendo exactamente la misma longitud a temperatura ambiente. Calcular las fatigas que se producirán al aumentar la temperatura en Δt grados.



Solución.
En el esquema se muestran las dilataciones que se producirían en cada barra si no estuvieran soldadas (a) y las deformaciones por estarlo (b).



También se tiene que la distribución de fuerzas elásticas que igualan la longitud del sistema, por simetría se puede considerar de la siguiente forma siguiente:

$F_2=2F_1$

De este esquema tenemos las siguientes relaciones geométricas entre las deformaciones:

Dividiendo esta expresión entre L_0, tenemos una relación entre las deformaciones unitarias

$$\frac{\Delta L_2}{L}-\frac{\Delta L'_2}{L}=\frac{\Delta L_1}{L}+\frac{\Delta L'_1}{L}$$

Como:

$$\frac{\Delta L_1}{L}=\alpha_1\Delta t\ \text{ y }\ \frac{\Delta L'_1}{L}=\frac{F_1}{AY_1}$$

$$\frac{\Delta L_2}{L}=\alpha_2\Delta t\ \text{ y }\ \frac{\Delta L'_2}{L}=\frac{F_2}{AY_2}$$

Reemplazando se tiene:

$$\alpha_1\Delta t-\frac{F_1}{AY_1}=\alpha_2\Delta t+\frac{F_2}{AY_2}$$

Con $F_2=2F_1$

$$\alpha_1\Delta t-\frac{F_1}{AY_1}=\alpha_2\Delta t+\frac{2F_1}{AY_2}$$

Despejando F_1/A

$$\frac{F_1}{A}=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1}+\frac{2}{Y_2}\right)}$$

Y las fatigas serán:

$$S_1=\frac{F_1}{A}=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1}+\frac{2}{Y_2}\right)} \text{ y}$$

$$S_2=\frac{F_2}{A}=\frac{2F_1}{A}=\frac{2(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1}+\frac{2}{Y_2}\right)}$$

Nota: Por sencillez de exposición, se ha omitido precisar que al determinar las deformaciones unitarias $\frac{\Delta L'_1}{L}$ y $\frac{\Delta L'_2}{L}$ se han despreciado los términos de segundo orden.

$$\frac{\Delta L'_1}{L+\Delta L_1}\approx\frac{\Delta L'_1}{L}=\frac{F_1}{AY_1} \text{ y}$$

$$\frac{\Delta L'_2}{L+\Delta L_2}\approx\frac{\Delta L'_2}{L}=\frac{F_2}{AY_2}$$

Debido a $L >> \Delta L_1$ y $L >> \Delta L_2$.

Ejemplo 21. Dos varillas del mismo diámetro, una de bronce de 25 cm. de longitud, y la otra de acero de 50 cm. De longitud se colocan extremo a extremo y aseguradas entre dos soportes rígidos.
La temperatura de las varillas se eleva 40°C. ¿Cuál es el esfuerzo en cada varilla?
Módulo de Young del acero 20 x 10^{11} dina cm^{-2}
Módulo de Young del bronce: 10 x 10^{11} dina cm^{-2}
Coeficiente de dilatación térmica acero 1,2x10^{-5} por °C
Coeficiente de dilatación térmica bronce 1,8x10^{-5} por °C

Solución.
Al elevarse la temperatura las varillas deberían expandirse si les fuera permitido, pero al no ser así sufren esfuerzo de compresión, las fuerzas en las dos varillas debe ser la misma. Por lo tanto, la unión debe de desplazarse hasta alcanzar el equi1ibrio. Entonces los esfuerzos son iguales.

$$\frac{F}{A}=\frac{Y_A\Delta\ell_A}{\ell_A}=\frac{Y_B\Delta\ell_B}{\ell_B} \qquad (1)$$

Pero la longitud $(\Delta\ell_A+\Delta\ell_B)$ es igual a la cantidad que no se deje expandir por dilatación

$$\Delta\ell'_A+\Delta\ell'_B=\ell_A\alpha_A\Delta t+\ell_B\alpha_B\Delta t$$

Luego:

$$\Delta\ell_A+\Delta\ell_B=(\ell_A\alpha_A+\ell_B\alpha_B)40 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos

$$\Delta\ell_A=\frac{(\ell_A\alpha_A+\ell_B\alpha_B)40}{(1+\frac{\ell_B}{\ell_A}\frac{Y_A}{Y_B})}$$

$$\Delta\ell_B=\frac{(\ell_A\alpha_A+\ell_B\alpha_B)40}{(1+\frac{\ell_A}{\ell_B}\frac{Y_B}{Y_A})}$$

Reemplazando valores tenemos:

$\Delta\ell_A = 2{,}1 \text{ x } 10^{-2}$ cm y

$\Delta\ell_B = 2{,}1 \text{ x } 10^{-2}$ cm.

y el esfuerzo en cada varilla

$$\frac{F}{A}=\frac{Y_A\Delta\ell_A}{\ell_A}=\frac{Y_B\Delta\ell_B}{\ell_B}$$

$$= 10 \text{ x } 10^{11}\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} \text{ x } \frac{2{,}1 \text{ x } 10^{-2} \text{ cm}}{25 \text{ cm}}$$

$$= 0{,}84 \text{ x } 10^9\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$$

Ejemplo 22. Una barra de bronce se enfría en nitrógeno líquido hasta la temperatura T_1 = 72 K. Así enfriada, esta barra se introduce ajustadamente en la abertura rectangular de una abrazadera rígida, que está a la temperatura T_2 = 293 K, de manera que la holgura entre los extremos de la barra y los planos correspondientes de la abertura de la abrazadera puede considerarse nula. ¿Qué presión ejercerá la barra sobre la abrazadera cuando se caliente hasta la temperatura T_2 = 293 K? El coeficiente de dilatación lineal del bronce es α = 1,75 x10^{-5} K^{-1} y el módulo de Young Y = 1,04 x 10^{11} Pa.

Solución.
Al enfriarse, la barra se contrae. Su longitud se hace igual a $\ell=\ell_0[1-\alpha(T_2-T_1)]$, de donde

$\frac{(\ell_0-\ell)}{\ell_0}=\alpha(T_2-T_1)$, Después de calentar la barra, apretada en la abrazadera, su longitud sigue siendo ℓ, y la compresión $(\ell-\ell_0)$ estará ahora motivada por las fuerzas elásticas.

Escribamos la ley de Hooke: $\frac{(\ell_0-\ell)}{\ell_o}=\frac{p}{Y}$, donde p es la presión que ejerce 1a abrazadera sobre la barra en la dirección del eje de ésta.

Comparando las expresiones de $\frac{(\ell_0-\ell)}{\ell_o}$ hallamos que 1a presión que buscábamos:

$$p=Y\alpha(T_2-T_1)=4\times10^8 \text{ Pa}.$$

Conviene advertir que la presión no depende de la longitud de la barra.

Ejemplo 23. Entre dos paredes se encuentra una barra, de sección A, compuesta de dos partes de

igual longitud $\ell/2$ que tienen los coeficientes de dilatación lineal α_1 y α_2 y los módulos de Young Y_1 y Y_2. A 1a temperatura T_1 los extremos de la barra apenas tocan las paredes.
¿Con qué fuerza presionará dicha barra sobre las paredes si se calienta hasta la temperatura T_2. Despréciese la deformación de las paredes. ¿Cuánto se desplazará la junta de las partes de la barra?

Solución.

Cuando la barra se calienta desde la temperatura T_1 hasta la temperatura T_2, sin paredes que la limiten, se alarga en la magnitud

$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)(\alpha_1 + \alpha_2)(T_2 - T_1).$$

Con las paredes limitadoras la barra calentada resulta comprimida en esta misma magnitud. Por la ley de Hooke (la fuerza compresora F es la misma en ambas partos de la barra)

$$\Delta\ell = \frac{\ell_1 F}{Y_1 S} + \frac{\ell_2 F}{Y_2 S} \approx \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2}\right)\frac{F}{A}$$

Esta relación, en términos generales, es aproximada, ya que las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 de !as partes de la barra a la temperatura T_2 las hemos sustituido por su longitud $\ell/2$ a la temperatura T_1. No obstante, se comprende fácilmente que el error relativo que se comete al determinar $\Delta\ell$ por esta f6rmula será del orden do $\Delta\ell/\ell$ y, por lo tanto, nuestra aproximación es muy buena ($\Delta\ell << \ell$) De las relaciones antes escritas hallamos.

$$F = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{(Y_1 + Y_2)} Y_1 Y_2 A (T_2 - T_1).$$

El desplazamiento $\Delta\ell$ de la junta de las partes de la barra se puedo determinar tomando en consideración que éste se compone del desplazamiento debido a la dilatación (por ejemplo, de la primera parte de la barra) y del desplazamiento inverso causado por compresión:

$$\Delta\ell = \frac{\ell}{2}\left[\alpha_1(T_2 - T_1) - \frac{F}{Y_1 A}\right]$$

$$= \frac{\ell}{2}\frac{(\alpha_1 Y_1 - \alpha_2 Y_2)}{(Y_1 + Y_2)}(T_2 - T_1)$$

Ejemplo 24. Un anillo de latón de varios centímetros de diámetro se calienta hasta la temperatura T_1 = 573 K y se encaja ajustadamente sobre un cilindro de acero cuya temperatura es T_2 = 291 K. ¿Qué esfuerzo de rotura experimentará el anillo una vez enfriado hasta 291 K? .El coeficiente de dilatación lineal del latón *es* α = 1,84 x 10^{-6} K^{-1} y su módulo de Young Y = 6,47 x 10^{10} Pa. Las dimensiones de la sección del anillo son 2 x 5 mm^2.

Solución.

Al ser calentada, la longitud de la circunferencia interna del anillo aumentó:

$$\ell_1 = \ell_2[1 + \alpha(T_1 - T_2)],\ \frac{(\ell_1 - \ell_2)}{l_2} = \alpha(T_1 - T_2),$$

Donde ℓ_1 y ℓ_2 son las longitudes de la circunferencia interna a las temperaturas T_1 = 573 K y T_2= 291 K. Despreciando la disminución del diámetro del cilindro de acero bajo la acción de los esfuerzos compresoras por parte del anillo, consideraremos que, después de enfriarse el anillo, la longitud do su circunferencia interna sigue siendo igual a ℓ_1 y el anillo resulta estirado por las fuerzas elásticas. Como en nuestro caso el grosor del anillo es pequeño en comparación con su diámetro se puede suponer que el alargamiento relativo de todas sus capas es el mismo e igual a $\dfrac{(\ell_1 - \ell_2)}{\ell_2}$.

Entonces la extensión del anillo se puede relacionar con el esfuerzo de tracción por medio de la ley de Hooke: $\dfrac{(\ell_1 - \ell_2)}{\ell_2} = \dfrac{F}{YA}$, donde F es el esfuerzo do tracción; *A,* la sección del anillo, y *Y,* el módulo de Young. En definitiva se obtiene que
$F = Y\alpha\,(T_1 - T_2)$ = 3360 N.
Esta solución no es exacta totalmente debido o sólo a que hemos sustituido la deformación no homogénea del anillo por su alargamiento uniforme, sino también a que las tensiones radiales provocan en el anillo la variación de la longitud de su circunferencia. Cuanto menor sea el espesor del anillo en comparación con su diámetro, tanto menores serán las correcciones a introducir por estas circunstancias.

Ejemplo 25. Un tubo de acero de 28,0 m de longitud, se instaló cuando la temperatura era de 15º C, se usa para transportar vapor sobrecalentado a la temperatura e 110º C. El coeficiente de expansión lineal del acero es 1,2 x 10^{-5} K^{-1}, el módulo de Young es 2,0 x 10^{11} Pa, y el esfuerzo de ruptura es 5,0 x 10^8 Pa.
a) El tubo puede expandirse libremente cuando transporta vapor. ¿En cuánto incrementa su longitud?
b) A la temperatura de 15º C la tubería se aseguró al piso de concreto tal que se impide la expansión lineal. ¿Cuál es la relación entre el esfuerzo térmico en el tubo y el esfuerzo de ruptura del acero, cuando se transporta el vapor?

Solución.

a)
α =1,2 x 10^{-5} K^{-1}, L = 28,0 m

$$\Delta\theta = 110 - 15 = 95^\circ C.$$

$$\Delta L = \alpha L \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta L = (1{,}2\times10^{-5})(28)(95) = 3{,}192 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

b) $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{F}{YA} = \dfrac{S}{Y}$

$$\Rightarrow \; S = Y\frac{\Delta L}{L} = Y\left(\frac{\alpha L\Delta\theta}{L}\right) = Y\alpha\Delta\theta$$

Este es el esfuerzo térmico

$$S = 2{,}0\times10^{11}\left(1{,}2\times10^{-5}\right)(95) = 2{,}28 \text{ x } 10^8 \text{ Pa}$$

$$\frac{\text{esfuerzo térmico}}{\text{esfuerzo de rúptura}} = \frac{2{,}28\times10^8}{5{,}0\times10^8} = 0{,}456$$

Ejemplo 26. Una esfera hueca del metal está flotando en el agua a 0 ºC. Si la temperatura del agua se eleva a θ ºC, la esfera se sumerge completamente en el agua sin hundirse. Desprecie la expansión de la esfera. Encuentre la expresión para determinar coeficiente de dilatación cúbica del agua.

Solución.

Dados:

ρ_e , la densidad de la esfera,

ρ_0 , la densidad del líquido

β, Coeficiente de dilatación cúbica del líquido

$$(\rho_\theta)_{agua} = (\rho_e)_{esfera}$$

Como $V_{a\theta} = V_{a0}\left(1+\beta\theta\right) \Rightarrow$

$$\frac{m_a}{\rho_\theta} = \frac{m_a}{\rho_0}\left(1+\beta\theta\right) \Rightarrow \frac{1}{\rho_\theta} = \frac{1}{\rho_0}\left(1+\beta\theta\right) \Rightarrow$$

$$\rho_\theta = \rho_0\left(1-\beta\theta\right)$$

Igualando $\rho_0\left(1-\beta\theta\right) = \rho_e$

Finalmente $\beta = \dfrac{\rho_0 - \rho_e}{\theta\rho_e}$

CALOR Y TRABAJO

Cuando dos sistemas a diferente temperatura se hallan en contacto térmico, el calor fluye del sistema mas caliente al más frío, hasta que alcanzan el equilibrio a una temperatura común, la cantidad de calor que sale de un cuerpo es igual a la cantidad de calor que entra en el otro. Inicialmente se elaboró la teoría del calórico, para explicar este flujo, esta sustancia no podía ser creada ni destruida, pero si transferida de un cuerpo a otro. La teoría del calórico servía para describir la transferencia de calor, pero se descartó al observar que el calórico se creaba por fricción y no habría una desaparición correspondiente de ca1órico en ningún otro sitio.

En 1778 el Conde Rumford, como punto de sus observaciones en el taladro de cañones propuso que él calor debe estar asociado con el movimiento. Pero no se estableció sino hasta medio siglo después de esta observación que había una relación definida entre la cantidad de trabajo hecho contra la fricción y el calor producido.

En 1843 James Prescott Joule empleó un aparato en el cual el agua se agitaba por un conjunto de paletas giratorias y la energía mecánica suministrada para rotar las paletas podía medirse con aproximación. El efecto térmico del trabajo mecánico hecho sobre el agua, era la elevación de la temperatura. El experimento de Joule demostró que la elevación de la temperatura era proporcional a la cantidad de trabajo hecho sobre el agua. Por consiguiente el trabajo realizado en agitar el agua es equivalente al calor añadido al agua.

A pesar de que no necesitamos unidades especiales para el calor, una vez reconocido que es una forma de energía medible en Joules, o cualquier otra unidad de energía, se sigue utilizando la unidad histórica del calor, es decir la CALORIA. La caloría se define cuantitativamente como la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua desde 14,5°C a 15,5°C. La cantidad de energía para elevar la temperatura de un kilogramo de agua desde 14,5°C a 15,5°C es la kilocaloría. La “caloría” utilizada para medir el equivalente energético de los alimentos es realmente la kilocaloría. En el sistema ingles la unidad es el British thermal unit (BTU)

1 BTU = 252 calorías

El equivalente exacto entre el trabajo realizado y el calor añadido está dado por la relación experimental.

1 cal = 4,186 Joules

1 BTU = 778 libra pie

Esta relación es conocida como el EQUIVALENTE MECANICO DE CALOR

CAPACIDAD CALORIFICA. CALOR ESPECÍFICO

La cantidad de calor necesario para producir un aumento de temperatura en una cierta masa depende de la sustancia. Definamos primero:

La CAPACIDAD CALORIFICA. (C) de un cuerpo es la cantidad de calor requerido para elevar la temperatura de un cuerpo en un grado,

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

Sus unidades son: Caloría/°C, BTU/°F.

Luego, definamos:

El CALOR ESPECIFICO (c) es la capacidad calorífica por unidad de masa:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{dQ/dT}{m} = \frac{dQ}{mdt}$$

Sus unidades son cal/gr x °C ó BTU/libra x °F

Observe que: $1\dfrac{\text{kcal}}{\text{kg°C}} = 1\dfrac{\text{cal}}{\text{g°C}}$

Y que:

$$\frac{1\,\text{BTU}}{1\,\text{libra°F}} = \frac{250\,\text{cal}}{453{,}6\text{ g } \; 5/9°\text{C}} = 1\frac{\text{cal}}{\text{g°C}} = 1\frac{\text{kcal}}{\text{kg°C}}$$

O sea que el valor numérico del calor específico es el mismo en esas tres unidades.

A pesar que el calor específico de la sustancias varía ligeramente con la temperatura, será adecuado para nuestra discusión, asumir que el calor específico es constante independiente de la temperatura. Luego podemos determinara el calor Q necesario para elevar la temperatura de la masa m de una sustancia Δt grados, de la siguiente manera:

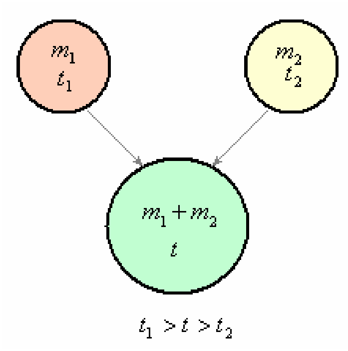
$$Q = m\int_{T_i}^{T_f} cdt = mc\left(T_f - T_i\right) mc\Delta T$$

CALOR ESPECIFICO			
Aluminio	0,212	Hielo	0,48
Acero	0,11	Carbón	0,3
Bronce	0,090	Concreto	0.16
Cobre	0,094	Vidrio	0,12 - 0,20
Oro	0,031	Parafina	0,69
Plata	0,056	Caucho	0,48
Platino	0,032	Madera	0,3 – 0,7
Plomo	0,031	Agua	1,00
Tungsteno	0,032	Alcohol	0,6
Zinc	0,094	Petróleo	0,51
		Agua de mar	0,93

La capacidad calorífica depende del tipo de proceso que se realiza durante la transferencia de calor. Tiene valores definidos solamente para procesos definidos.

En particular manteniendo la presión constante se denomina capacidad calorífica a presión constante *Cp* y si se mantiene el volumen constante se denomina capacidad calorífica a volumen constante *Cv*. En general *Cp* y *Cv* son diferentes y se analizarán con algún detalle más adelante.

Ejemplo 27. Dos sustancias m_1 y m_2 de calores específicos c_1 y c_2 están a temperatura t_1 y t_2 respectivamente ($t_1 > t_2$).
Calcular la temperatura final que alcanzan al ponerlos en contacto, sabiendo que no se presentan cambios de estado.
Solución.



Por conservación de energía:

$$\sum Q = 0$$

Como: $Q = mc\,(t_f - t_f)$
Se tiene:

$$m_1c_1\left(t - t_1\right) = m_2c_2\left(t - t_2\right)$$

o bien

$$-m_1c_1\left(t - t_1\right) + m_2c_2\left(t - t_2\right) = 0$$

o sea: Calor perdido = calor ganado

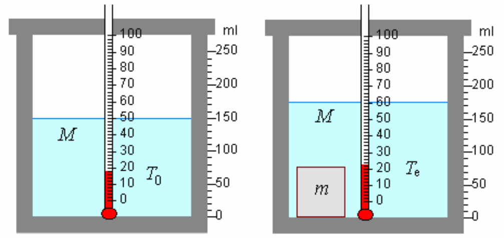
$$m_1c_1t_1 - m_1c_1t = m_2c_2t - m_2c_2t_2$$

$$m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2 = \left(m_1c_1 + m_2c_2\right)t$$

Despejando el valor de la temperatura final *t*:

$$t = \frac{m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$$

Determinación del calor específico de un sólido
La experiencia se realiza en un calorímetro consistente en un vaso (Dewar) o en su defecto convenientemente aislado. El vaso se cierra con una tapa hecha de material aislante, con dos orificios por los que salen un termómetro y el agitador.



Se pesa una pieza de material sólido de calor específico c desconocido, resultando m su masa. Se pone la pieza en agua casi hirviendo a la temperatura T.
Se ponen M gramos de agua en el calorímetro, se agita, y después de un poco de tiempo, se mide su temperatura T_0. A continuación, se deposita la pieza de sólido rápidamente en el calorímetro. Se agita, y después de un cierto tiempo se alcanza la temperatura de equilibrio T_e.
m_c es la masa del vaso del calorímetro y c_c su calor específico.
m_t la masa de la parte sumergida del termómetro y c_t su calor específico
m_a la masa de la parte sumergida del agitador y c_a su calor específico
M la masa de agua que contiene el vaso, su calor específico es la unidad
Por otra parte:
Sean m y c las masa y el calor específico del cuerpo problema a la temperatura inicial T.
En el equilibrio a la temperatura T_e se tendrá la siguiente relación.

$$\left(M + k\right)\left(T_e - T_0\right) + mc\left(T_e - T\right) = 0$$

La capacidad del calorímetro dada por
$k = m_cc_c + m_tc_t + m_ac_a$, se le denomina equivalente en agua del calorímetro, y se expresa en gramos de agua, y es una constante para cada calorímetro.
El calor específico desconocido del será por tanto

$$c = \frac{(M+k)(T_e - T_0)}{m(T - T_e)}$$

En esta fórmula tenemos una cantidad desconocida k, que debemos determinar experimentalmente.

Determinación del equivalente en agua del calorímetro

Se ponen M gramos de agua en el calorímetro, se agita, y después de un poco de tiempo, se mide su temperatura T_0. A continuación se vierten m gramos de agua a la temperatura T. Se agita la mezcla y después de un poco de tiempo, se mide la temperatura de equilibrio T_e.
Como el calorímetro es un sistema aislado tendremos que

$$(M+k)(T_e - T_0) + m(T_e - T)$$

$$\Rightarrow\ k = \frac{(T - T_e)}{(T_e - T_0)} m - M$$

Ejemplo 28. Calcule el calor específico de un metal con los siguientes datos. Un recipiente ("calorímetro") hecho de metal cuya masa es 3,64 kg contiene 13,6 kg de agua. Un pedazo de metal de 1,82 kg de masa, del mismo material del recipiente y con temperatura de 176,7 ºC se echa en el agua. El agua y el recipiente tienen inicialmente una temperatura de 15,5 ºC y la temperatura final de todo el sistema llega a ser de 18,33 ºC.
Solución.
Debido a que se trata de un problema de intercambio de calor, el calor entregado por el metal = calor recibido por el (agua y recipiente). Llamando Q_1 al calor liberado por el metal, Q_2, Q_3 a los recibidos por el agua y recipiente respectivamente:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.$$

Considerando que el metal y recipiente tienen un calor específico c_m, reemplazando en la expresión anterior:

$$Q_1 = m_{metal} c_m (T_{final} - T_{metal}),$$

$$Q_2 = m_{agua} c_{agua} (T_{final} - T_{agua}) \text{ y}$$

$$Q_3 = m_{recipiente} c_m (T_{final} - T_{recipiente})$$

$$m_m c_m (T_f - T_m) + m_a c_a (T_f - T_a) + m_r c_m (T_f - T_r) = 0,$$

Es decir:

$$c_m = \frac{-m_a c_a (T_f - T_a)}{m_m (T_f - T_m) + m_r (T_f - T_r)}$$

$$= 1{,}38 \times 10^{-2} \left[\frac{\text{cal}}{\text{g ºC}}\right].$$

Ejemplo 29. ¿Cuántas calorías se requieren para elevar la temperatura de 3 kg de aluminio de 20ºC a 50ºC?

Solución.
Tomemos como calor específico del aluminio
c = 0,215 cal/g ºC, entonces
$Q = mc\Delta t$ = 3000 x 0,215 x (50 - 20) = 1,935 x 10^4 cal

Ejemplo 30. Un trozo de 300 g de cobre se calienta en un horno y en seguida se deja caer en un calorímetro de 500 g de aluminio que contiene 300 g de agua. Si la temperatura del agua se eleva de 15ºC a 30ºC ¿cuál era la temperatura inicial del cobre? (Suponga que no se pierde calor.) ¿Cuánto calor se debe agregar a 20 g de aluminio a 20ºC para fundirlo completamente?
Solución.
c_{Al} = 0,215 cal/g.ºC
c_{H2O} = 1 cal/g.ºC
c_{Cu} = 0,0924 cal/g.ºC
$Q_{\text{absorbido}}$ = 300 x 1 x (30 - 15) + 500 x 0,215 x (30 - 15)
Q_{cedido} = 300 x 0,0924 x (t_i - 30)
Entonces
300 x 1 x (30 - 15) + 500 x 0,215 x (30 - 15) = 300 x 0,0924 x (t_i - 30), de donde la temperatura inicial del Cobre resulta ser t_i = 250,51 ºC.
Para saber las calorías necesarias para fundir 20 gramos de aluminio a 20 ºC, de las tablas obtenemos para el calor de fusión:
$L_{f(Al)}$ = 3,97x10^5 J/kg a t = 660 ºC, de modo que el calor necesario será
Como 1 J = 0,24 cal de modo que
$L_{f(Al)}$ = 3,97 x 102 x 0,24 = 95,28 cal/g
Entonces $Q = mc\Delta t + mL_f$
Q = 20 x 0,215(660 - 20) + 20 x 95,28 = 4657,6 cal

Ejemplo 31. Una moneda de cobre de 3 g a 25ºC, cae al piso desde una altura de 50 m.
a) Sí 60% de su energía potencial inicial se gasta en aumentar su energía interna, determine su temperatura final.
b) ¿Depende el resultado de la masa del centavo? Explique.
Solución.
c_{Cu} = 0,0924 cal/g ºC
m_{Cu} = 3 g
a) La energía potencial será
$U = mgh$ = 0,003 x 9,8 x 50 = 1,47 J = 0,35 cal
Entonces

$$t_f = t_i + \frac{Q}{mc_{Cu}} = 25 + \frac{0{,}6 \times 0{,}35}{3 \times 0{,}0924} = 25{,}76\ ºC$$

b) No depende de m: porque Q es proporcional m y el aumento de temperatura es inversamente proporcional a m.

Ejemplo 32. Para medir el calor específico de un líquido se emplea un calorímetro de flujo. Se añade calor en una cantidad conocida a una corriente del líquido que pasa por el calorímetro con un volumen conocido. Entonces, una medición de la diferencia de temperatura resultante entre los puntos de entrada y salida de la corriente de líquido nos permite calcular el calor específico del líquido. Un líquido de 0,85 g/cm^3 de densidad fluye a través de un calorímetro a razón de 8,2 cm^3/s. Se añade calor por medio de un calentador eléctrico en espiral de 250 W, y se establece una diferencia de temperatura de 15°C en condiciones de estado estacionario entre los puntos de entrada y salida del flujo. Halle el calor específico (c) del líquido.

Solución.

El flujo de calor $\dot{Q} = 250\text{W}$ que se pone produce una elevación de temperatura ΔT = 15°C.

El calor absorbido por una masa *m* es $Q = mc\Delta T$,

Como es masa que fluye y la entrada de calor es estacionariamente

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \frac{dm}{dt} c\Delta T .$$

De aquí

$$c = \frac{\dot{Q}}{\Delta T \frac{dm}{dt}} \text{, como } m = \rho V ,$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = 0{,}85 \times 8{,}2 = 6{,}97 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

Reemplazando valores, tenemos:

$$c = \frac{250}{15^o C \times 6{,}97 \times 10^{-3}} = 2391 \frac{\text{J}}{\text{kg}^o\text{C}}$$

FASES DE LA MATERIA

Otro de los efectos comunes de los cambios de temperatura son los cambios de estado de los materiales (sólido, líquido, gaseoso, plasma y CBE).

SÓLIDO. Manteniendo constante la presión, a baja temperatura los cuerpos se presentan en forma sólida tal que los átomos se encuentran entrelazados formando generalmente estructuras cristalinas, lo que confiere al cuerpo la capacidad de soportar fuerzas sin deformación aparente. Son, por tanto, agregados generalmente rígidos, duros y resistentes. El estado sólido presenta las siguientes características:

Fuerza de cohesión (atracción).

Vibración.

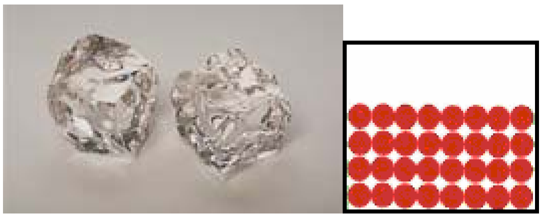
Tiene forma propia.

Los sólidos no se pueden comprimir.

Resistentes a fragmentarse.

Volumen definido.

Puede ser orgánico o inorgánico



LÍQUIDO. Incrementando la temperatura el sólido se va "descomponiendo" hasta desaparecer la estructura cristalina alcanzándose el estado líquido, cuya característica principal es la capacidad de fluir y adaptarse a la forma del recipiente que lo contiene. En este caso, aún existe una cierta ligazón entre los átomos del cuerpo, aunque de mucha menor intensidad que en el caso de los sólidos. El estado líquido presenta las siguientes características:

Fuerza de cohesión menor (regular)

Movimiento-energía cinética.

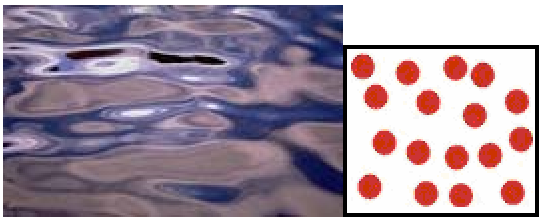
Sin forma definida.

Toma el volumen del envase que lo contiene.

En frío se comprime.

Posee fluidez.

Puede presentar fenómeno de difusión.



Gaseoso. Por último, incrementando aún más la temperatura se alcanza el estado gaseoso. Los átomos o moléculas del gas se encuentran virtualmente libres de modo que son capaces de ocupar todo el espacio del recipiente que lo contiene, aunque con mayor propiedad debería decirse que se distribuye o reparte por todo el espacio disponible. El estado gaseoso presenta las siguientes características:

Fuerza de cohesión casi nula.

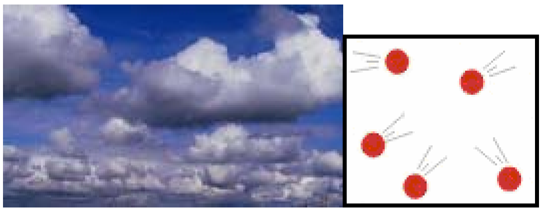
Sin forma definida.

Sin volumen definido.

Se puede comprimir fácilmente.

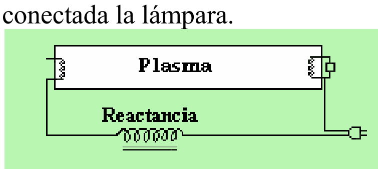
Ejerce presión sobre las paredes del recipiente que los contiene.

Los gases se mueven con libertad.



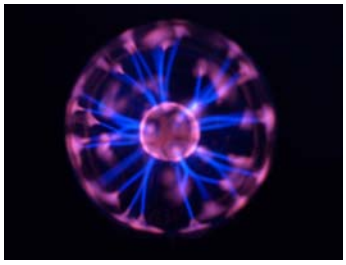
PLASMA. Al plasma se le llama a veces "el cuarto estado de la materia", además de los tres "clásicos", sólido, líquido y gas. Es un gas en el que los átomos se han roto, que está formado por electrones negativos y por iones positivos, átomos que han perdido electrones y han quedado con una carga eléctrica positiva y que están moviéndose libremente.

La lámpara fluorescente, muy usada en el hogar y en el trabajo, contiene plasma (su componente principal es el vapor de mercurio) que calienta y agita la electricidad, mediante la línea de fuerza a la que está conectada la lámpara.



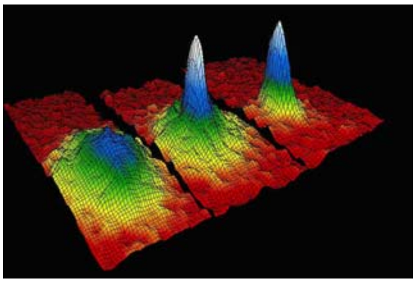
La línea hace positivo eléctricamente a un extremo y el otro negativo causa que los iones (+) se aceleren hacia el extremo (-), y que los electrones (-) vayan hacia el extremo (+). Las partículas aceleradas ganan energía, colisionan con los átomos, expulsan electrones adicionales y así mantienen el plasma, incluso aunque se recombinen partículas. Las colisiones también hacen que los átomos emitan luz y, de hecho, esta forma de luz es más eficiente que las lámparas tradicionales. Los letreros de neón y las luces urbanas funcionan por un principio similar y también se usan (o usaron) en electrónica.

La lámpara de plasma (también llamada "globo de plasma" o "esfera de plasma") es un objeto novedoso, que alcanzó su popularidad en los años 1980. Fue inventada por Nikola Tesla tras su experimentación con corrientes de alta frecuencia en un tubo de cristal vacío con el propósito de investigar el fenómeno del alto voltaje.

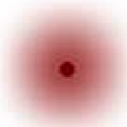


CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN (CBE). Otro estado de la materia es el condensado de Bose-Einstein (CBE), predicho en 1924 por Satyendra Nath Bose y Albert Einstein, y obtenido en 1995 (los físicos Eric A. Cornell, Carl E. Wieman y Wolfgang Ketterle compartieron el Premio Nobel de Física de 2001 por este hecho). Este estado se consigue a temperaturas cercanas al cero absoluto y se caracteriza porque los átomos se encuentran todos en el mismo lugar, formando un superátomo.

La figura siguiente muestra la Condensación de Bose-Einstein a 400, 200, y 50 nano-Kelvins



El Condensado de Bose-Einstein se ve como una pequeña masa en el fondo de una trampa magnética. Esta masa de condensado es como una gota de agua que se condensa del aire cuando éste es enfriado. Cuando se forma inicialmente, el condensado está rodeado todavía de átomos normales de gas, así que parece la semilla dentro de una cereza.



¿Para qué sirve la Condensación de Bose-Einstein? Es muy reciente y sabemos muy poco a cerca de ella para dar una respuesta. Es algo así como si viviéramos en una isla tropical hace 400 años y un pedazo de iceberg llegara a la costa. Sin que nadie hubiera visto hielo antes, pasaría algún tiempo antes de que alguien se diera cuenta de que puede usarse para hacer helados.

También hay ciertos problemas de ingeniería que deben ser resueltos antes de que la CBE pueda usarse para mucho.
Sin embargo las similitudes entre CBE y la luz de láser sugieren que probablemente lo sea.

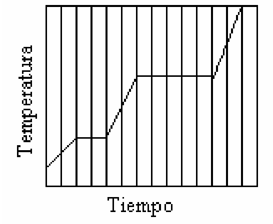
CAMBIOS DE ESTADO - CALOR LATENTE
Cuando la temperatura de un cuerpo aumenta por causa de un calor suministrado, se origina un aumento de la energía cinética del movimiento de las moléculas. Cuando un material pasa de la forma líquida a la fase gaseosa, las moléculas, que, por causa de sus atracciones naturales se mantenían originalmente en contacto, se alejan más de las otras. Esto requiere se realice un trabajo en contra de las fuerzas de atracción, es decir hace falta que se suministre una energía a las moléculas para separarlas. De este modelo podemos deducir que un cambio de fase de líquido a gas requiere calor aún cuando no se produzca elevación de la temperatura, lo mismo sucede para sólido a líquido.
Para sustancias puras", los cambios de fase se producen a cualquier presión, pero a determinadas temperaturas. Se requiere una determinada cantidad de calor para cambios de fase de una cantidad de sustancia dada.
Esto es, el calor es proporcional a la masa de la sustancia.

$$Q = mL$$

Donde L es una constante característica de la sustancia y de cambio de fase que se produce.
Si el cambio es de sólido a líquido, será L_f (calor latente de fusión) y si el cambio el de líquido a gas, será L_v (calor latente de vaporización).
En el caso del agua a presión atmosférica la fusión se produce a 0°C y L_f vale 79,7 cal/gr. Y la vaporización se produce a 100°C y L_v vale 539.2 cal/gr.
Similarmente ocurre para los procesos inversos de solidificación y condensación.

Sublimación.
También bajo ciertas condiciones de temperatura y presión se puede pasar directamente de sólido a gas son pasar por líquido y se denomina sublimación, L_s (calor de sublimación).

Ejemplo 33. Se añade calor a una sustancia pura en un recipiente cerrado a una razón constante. El gráfico muestra la temperatura de la sustancia como una función del tiempo. Si L_f es el calor latente de fusión y L_v es el calor latente de vaporización. ¿Cuál es el valor de la relación L_v/L_f para esta sustancia?



Solución.
La relación de los tiempos empleados en absorber calor para la vaporización y la fusión es 5/2, como se trata de la misma masa en ambos casos, esta relación será igual a la relación de los calores latentes; esto es: $\dfrac{L_V}{L_F} = \dfrac{5}{2}$

Ejemplo 34. Determinar el calor necesario para vaporizar 200 gr. De hielo que se encuentra a la temperatura de –5°C.
Solución.
Como ocurren cambios de estado debemos calcular las calorías requeridas en cada proceso.
Utilicemos los siguientes valores:
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g°C
Calor específico del agua: 1 cal/g°C
Calor de fusión del agua: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g

Calor para elevar la temperatura del hielo de –5°C a 0°C
$Q_1 = m \times c \times \Delta t = m \times 0{,}5 \times [0 - (-5)]$
$= m \times 2{,}5$ cal

Calor para pasar de hielo a agua (fusión)
$Q_2 = m \times L = m \times 80$ cal

Calor para elevar la temperatura del Agua de 0°C a 100°C
$Q_3 = m \times c \times \Delta t = m \times 1 \times (100-0)$
$= m \times 100$ cal

Calor para pasar de Agua a Vapor (vaporización)
$Q_4 = m \times 540$ cal

Finalmente,
$Q = \sum Q = Q_2 + Q_2 + Q_3 + Q_4$
$= m(2{,}5+80+100+540) = 200 \times 722{,}5$
$= 144500$ cal.

Ejemplo 35. Calcular la temperatura final cuando se mezclan 2 kg. de hielo a -20°C con 10 kg. de agua a 60°C.

Solución.

Como ocurren cambios de estados es preciso primero, hacer un balance de energía para determinar si el agua se convierte en hielo o el hielo en agua, u ocurre una conversión parcial.

Trabajemos en Kilocalorías utilizando los siguientes valores:

Calor específico del hielo : 0,55 kcal/kg °C
Calor específico del agua : 1 kcal/kg °C
Calor de fusión del agua : 80 kcal/kg

Calor necesario para convertir el hielo en agua a 0 °C.

$Q_1 = m_H \text{ x } c_H \text{x} \Delta t = 2 \text{ x } 20 = 22$ kcal

$Q_2 = m_H \text{ x } L = 2 \text{ x } 80 = 160$ kcal

$Q_H = \sum Q = Q_1 + Q_2 = 182$ kcal (1)

Calor liberado al llevar el agua de 60°C a 0ºC.

$Q_1' = m_a \text{x } c_H \Delta t = 10 \text{ x } 1 \text{ x } 60 = 600$ kcal

$Q_a = \sum Q' = Q'_1 = 600$ kcal (2)

Comparando (1) y (2), como $Q_a > Q_H$, nos indica que el agua dispone de las calorías necesarias para convertir todo el hielo en agua y más aún elevar su temperatura a más de 0°C. Esto es, la temperatura final t estará entre, $0°C < t < 60°C$ y se determinará igualando el calor ganado al calor perdido.

Calor ganado

$Q_1 = 22$ (valor ya determinado)

$Q_2 = 160$ (valor ya determinado)

$Q_3 = m\, c\, \Delta t = 2 \text{ x } 1 \text{ x } (t-0) = 2t$

$Q_G = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$= 22 + 160 + 2t = 182 + 2t$ (3)

Calor perdido

$Q_P = m\, c\, \Delta t$

$= 10 \text{ x } 1\text{x } (60-t) = 10(60 - t)$ (4)

Finalmente, igualando (3) y (4)

$Q_G = Q_P$

$182 + 2t = 10(60 - t)$

Despejando t, se obtiene la temperatura final de la mezcla (agua)

$T = 34{,}8°C$

Ejemplo 36. Determinar la temperatura final cuando se mezclan 1/2 kg de hielo a -16°C con 1 kg de agua a 20°C que se encuentra contenida en un recipiente o calorímetro de cobre de 1/2 kg.

Solución.

Como en el ejemplo anterior es necesario hacer un balance de energía.

Nuevamente trabajando en kilocalorías y con Calor específico del cobre = 0,09 kcal/kg °C

Calor necesario para convertir el Hielo en Agua a °C.

$Q_1 = m_H \text{ x } c_H \text{ x } \Delta t = 0{,}55 \text{ x } 16 = 4{,}4$ kcal

$Q_2 = m_H \text{ x } L = 0{,}5 \text{ x } 80 = 40{,}0$ kcal

$Q_H = \sum Q = Q_1 + Q_2 = 44{,}4$ kcal (1)

Calor liberado para llevar el Agua a °C (incluyendo el recipiente)

$Q'_1 = m_a \text{ x } c_a \text{ x } \Delta t = 1 \text{ x } 1 \text{ x } 20 = 20{,}0$ kcal

$Q'_2 = m_c \text{ x } c_c \text{ x } \Delta t = 0{,}5 \text{ x } 0{,}09 \text{ x } 20 = 0{,}9$ kcal

$Q_{ac} = \sum Q' = Q'_1 + Q'_2 = 20{,}9$ kcal (2)

Comparando (1) y (2), como $Q_{ac} < Q_H$, nos indica que no se dispone de las calorías necesarias para convertir el hielo en agua a °C. Pero, como $Q_{ac} > Q_1$ si se elevara la temperatura del hielo a 0°C y solo parte del hielo se podrá convertir en agua.

Luego, la temperatura final es 0°C, $t = 0°C$

¿Cuáles serán las masas finales de hielo y Agua?

La energía que resta después de elevar la temperatura del hielo a 0°C es:

$Q_{ac} - Q_1 = 20{,}9 - 4{,}4 = 16{,}5$ kcal.

Con estas calorías se convertirá en agua:

$Q = M \text{ x } L$

$\Rightarrow 16{,}5 = M \text{ x } 80 \Rightarrow M = 0{,}21$ Kg.

y se quedarán como hielo a 0°C:

(0,50 – 0,21) = 0,29 kg.

Por lo tanto, se tendrá finalmente,

1,21 kg. de Agua y 0,29 kg. de Hielo

Por supuesto todo a 0°C, incluyendo el calorímetro.

Ejemplo 37. Un trozo de hielo de 10 g y temperatura –10 ºC se introducen en 1,5 kg de agua a 75 ºC. Determine la temperatura final de la mezcla.

$c_{hielo} = 0{,}45 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$,

$L_{fusión,hielo} = 80 \text{ cal/g}$

Solución.

El calor cedido por el agua es igual al ganado por el hielo. El hielo gana una porción calor desde la temperatura –10 ºC hasta 0 ºC, otra para cambiar de estado manteniendo la temperatura constante de 0 ºC y otra cuando se ha convertido en agua al cambiar la temperatura de 0 ºC hasta la temperatura de equilibrio T_e. De este modo:

$$m_h c_h[0-(-10)] + m_h L_f$$
$$+ m_h c_a (T_e - 0) + m_a c_a (T_e - 75) = 0.$$

Despejando T_e encontramos:

$T_e = 73{,}94^\circ C$

Ejemplo 38. Un recipiente de cobre de masa 0.5 kg contiene 1 kg de agua a 20°C se le añade 0,5 kg de hielo a –16°C

a) encontrar la temperatura de equilibrio

b) Cuanto hielo y cuanta agua quedan.

$c_{cobre} = 390 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$, $c_{agua} = 4190 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$

$c_{hielo} = 2100 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$, $L_{fusión\ hielo} = 334x10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$

Solución.

Calor cedido por el agua y el calorímetro al llevarlo de 20ºC a 0ºC

$$Q_1 = (m_c c_c + m_a c_a)\Delta\theta$$

$$= (0{,}5 \times 390 + 1{,}0 \times 4190)20 = 87700 \text{ J}$$

Calor para llevar el hielo -18ªC a 0ºC

$Q_2 = m_h c_h \Delta\theta$ = 0,5x2100x16 = 16800 J

Calor para fundir el hielo

$Q_3 = L_f m_h$ = 334x10^{3}x0,5 = 167x10^3 J

Análisis:

Tenemos 87700 J , esa cantidad puede elevar la temperatura del hielo hasta los 0ºC

Nos quedan 87700 -16800 = 70900 J

Esto no puede fundir todo el hielo, solamente alcanza para fundir $\dfrac{70{,}900 \times 10^3 \text{ J}}{334 \times 10^3 \text{ J/kg}}$ = 0,212 kg

a) Temperatura de equilibrio 0ºC

b) Finalmente quedan 1 + 0,212 = 1,212 kg de agua y 0,5 – 0,212 = 0,288 kg de hielo

Ejemplo 39. Un recipiente metálico de masa 200 g, aislado del exterior, contiene 100 g de agua en equilibrio térmico a 22º C. Un cubo de hielo de 10 g, en el punto de fusión, se suelta en el agua, cuando se alcanza el equilibrio térmico la temperatura es 15º C. Asumir que no hay intercambio de calor con el exterior.

Para el agua el calor específico es 4190 J/kg K y el calor de fusión es 3,34 x 10^5 J/kg.

¿Cuál es el calor específico del metal?

Solución.

Calor cedido = Calor ganado

$$c_x(0{,}2)(22-15) + 4190(0{,}1)(22-15)$$

$$= 0{,}01(3{,}34 \times 10^5) + 4190(0{,}01)(15-0)$$

$$\Rightarrow c_x = 739{,}64 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Ejemplo 40. Determine el estado final cuando se mezclan 20 g de hielo a 0 ºC con 10 g de vapor a 100 ºC.

Solución.

C_{agua} = 1 cal/g. ºC

L_f = 3,33 x 10^5 J/kg = 80 cal/g

L_v = 2,26 x 10^6 J/kg = 542,4 cal/g

M_{hielo} = 20 g

M_{vapor} = 10 g

Si se condensa todo el vapor cede 5424 cal.

Si se funde todo el Hielo absorbe 80x20 = 1600 cal quedando agua que para ser llevada a 100 ºC absorbería a lo más 20 x 100 = 2000 cal.

De aquí se concluye que no puede condensarse todo el vapor, pero sí fundirse todo el Hielo. De modo que la temperatura final, en presencia de vapor debe ser t_F = 100 ºC: Supongamos entonces que condensa *m* gramos de vapor

Q_{cedido} = 542,4 x *m* cal

$Q_{absorbido}$ = 20 x 80 + 20 x 1 x 100 = 3600 cal

542,4 x *m* = 3600 $\Rightarrow$ $m = \dfrac{3600}{542{,}4}$ = 6,6 g

Luego el estado final consiste en una mezcla a 100 ºC de 4,4 g de vapor y 26,6 g de agua líquida.

Ejemplo 41. Un recipiente de cobre de 0,1 kg contiene 0,16 kg de agua y 0,018 kg de hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica. Si se introduce un trozo de plomo de 0,75 kg de masa a 255°C, ¿qué temperatura final de equilibrio se alcanza? (Considere que no hay intercambio de calor con el entorno)

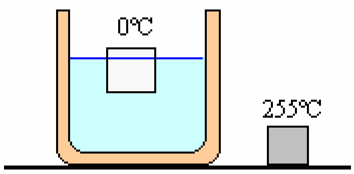
c_{Pb} = 130 J/kgK

c_{Cu} = 390 J/kgK

c_{agua} = 4190 J/kgK

$c_{fusión\ agua}$ = 334×10^3 J/kg

Solución.



Cobre $\begin{cases} m_{cu} = 0{,}1\text{kg} \\ t_{cu} = 0^\circ\text{C} \end{cases}$, Agua $\begin{cases} m_{agua} = 0{,}16\text{kg} \\ t_{cu} = 0^\circ\text{C} \end{cases}$,

Hielo $\begin{cases} m_{hielo} = 0{,}018\text{kg} \\ t_{cu} = 0^\circ\text{C} \end{cases}$

Plomo $\begin{cases} m_{Pb} = 0{,}75\text{kg} \\ t_{Pb} = 255^\circ\text{C} \end{cases}$

Para fundir el hielo = 334x10^3 (0,018) = 6012 J

m_{agua} = 0,16 + 0,018 = 0,178 kg

El plomo puesto a 0ºC nos proporciona = 130 (0,75)(255) = 24862,5 J

Nos quedarían 24862,5 – 6012 = 18850,5 J

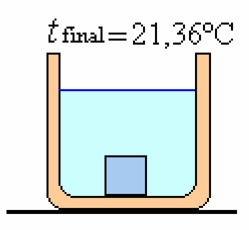
Los que se emplearía para elevar la temperatura del sistema:

$$(mc + mc + mc)\Delta t = Q_{disponible}$$

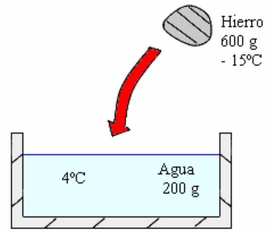
$$(0{,}178 \times 4190 + 0{,}1 \times 390 + 0{,}75 \times 130)\Delta t = 18850{,}5$$

$$\Delta t = \frac{18850{,}5}{(745{,}82 + 39 + 97{,}5)}$$

$$= \frac{18850{,}5}{882{,}32} = 21{,}36^\circ\text{C}$$



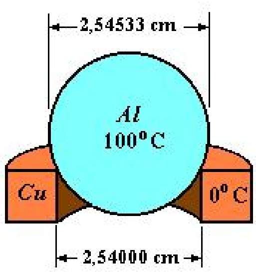
Ejemplo 42. Un trozo de hierro se deja caer en agua tal como se muestra en la figura. Determine la temperatura y fase del agua en el equilibrio. En caso de coexistir 2 fases del agua determine la masa final en cada fase.
c_{hierro} = 0,107 cal/g ºC, $c_{recipiente} \approx 0$



Solución.
Agua de 4ºC a 0ºC $\Rightarrow$
$Q_1 = 200 \times 1 \times 4$ = 800 calorías
Hierro de – 15ºC a 0ºC $\Rightarrow$
$Q_2 = 600 \times 0{,}107 \times 15$ = 963 calorías
En el balance 963 – 800 = 163 calorías, las que convertirán en hielo a una parte del agua
$$m = \frac{163}{80} = 2{,}04 \text{ gramos}$$
La temperatura de equilibrio es 0ºC, 2,04 gramos de hielo y 197,6 gramos de agua.

Ejemplo 43. Dilatación térmica y equilibrio térmico.
Un anillo de cobre de 21,6 g tiene un diámetro de 2,54000 cm a la temperatura de 0ºC. Una esfera de aluminio tiene un diámetro de 2,54533 cm a la temperatura de 100ºC. La esfera se sitúa sobre el anillo, y se deja que ambos lleguen al equilibrio térmico, sin que se disipe calor alguno al entorno. La esfera pasa justamente a través del anillo a la temperatura de equilibrio. Halle la masa de la esfera.

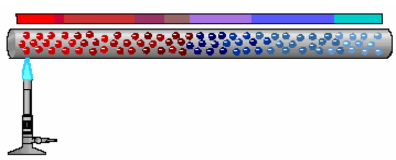
Calor específico del aluminio: 0,212 cal/gºC
Calor específico del cobre: 0,094 cal/gºC
Coeficiente de dilatación del aluminio: 24 x 10^{-6} ºC^{-1}
Coeficiente de dilatación del cobre: 17 x 10^{-6} ºC^{-1}



Solución.
La temperatura final de equilibrio del sistema es *t*.
Calor cedido por el aluminio = Calor ganado por el cobre
$$m_{aluminio} \times c_{aluminio}(100 - t) = m_{cobre} \times c_{cobre}(t - 0)$$
Poniendo valores
$$m_{aluminio} \times 0{,}212(100 - t) = 21{,}6 \times 0{,}094t$$
Diámetro final de la esfera de aluminio = diámetro final del anillo de cobre
$$D_{aluminio}\left[1 - \alpha_{aluminio}(100 - t)\right] = D_{cobre}\left[1 + \alpha_{cobre}(t - 0)\right]$$
Poniendo valores
$$2{,}5433\left[1 - 24 \times 10^{-6}(100 - t)\right] = 2{,}54\left[1 + 17 \times 10^{-6}t\right]$$
$$\Rightarrow \frac{2{,}5433}{2{,}54} = \frac{\left[1 + 17 \times 10^{-6}t\right]}{\left[1 - 24 \times 10^{-6}(100 - t)\right]}$$
El primer término por el binomio de Newton se puede escribir como:
$$\frac{2{,}5433}{2{,}54} = \frac{2{,}54}{2{,}54} + \frac{0{,}0033}{2{,}54} = 1 + 2{,}1 \times 10^{-3}$$
El segundo término por el binomio de Newton se puede escribir como:
$$\left[1 + 17 \times 10^{-6}t\right]\left[1 + 24 \times 10^{-6}(100 - t)\right]$$
$$\left[1 + 17 \times 10^{-6}t\right]\left[1 + 24 \times 10^{-6}(100 - t)\right] = 1 + 2{,}4 \times 10^{-3} - 7 \times 10^{-6}t$$
Luego:
$$1 + 2{,}1 \times 10^{-3} = 1 + 2{,}4 \times 10^{-3} - 7 \times 10^{-6}t$$
Resolviendo *t*:
$$t = \frac{0{,}3 \times 10^{-3}}{7 \times 10^{-6}} = 42{,}2^{o}\text{C}$$
Finalmente la masa de la esfera de aluminio será
$$m_{aluminio} = \frac{21{,}6 \times 0{,}094t}{0{,}212 \times (100 - 42{,}8)} = 7{,}17 \text{ gramos}$$
Es una esfera hueca.

TRANSFERENCIA DE CALOR
En este capítulo veremos en forma breve las formas en la cual la energía térmica fluye de u punto a otro en un medio dado, existen tres modos de transferencia, conducción, convección y radiación.

CONDUCCIÓN.
Cuando hay transporte de energía entre elementos de volumen adyacentes en virtud a la diferencia de temperatura entre ellas, se conoce como conducción de calor.



La expresión matemática fundamental de la conducción de calor es la generalización de los resultados de los experimentos en el flujo lineal de calor a través de una lámina de material de espesor Δx y de área A, una de las caras se mantienen a temperatura $\theta + \Delta\theta$, los resultado muestran que Q es proporcional al tiempo Δt.

$$Q \propto A \frac{\Delta\theta}{\Delta x}\Delta t$$

Este resultado podemos generalizar, en el límite:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = -kA\frac{d\theta}{dx}$$

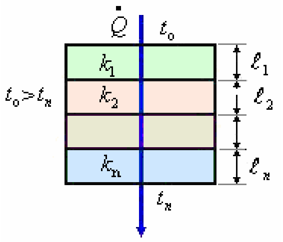
Donde k es la CONDUCTIVIDAD TERMICA del material.

El signo menos se introduce dado que Q fluye en la dirección de la disminución de la temperatura (del lado caliente al lado frío).

VALORES DE LA CONDUCTIVIDAD TERMICA	
Sustancias	k en $\dfrac{\text{kilocal}}{\text{s m °C}}$
Acero	0,011
Bronce	0,026
Aluminio	0,040
Ladrillo	$1{,}7 \times 10^{-4}$
Concreto	$4{,}1 \times 10^{-4}$
Madera	$0{,}3 \times 10^{-4}$
Vidrio	$1{,}4 \times 10^{-4}$
Hielo	$5{,}3 \times 10^{-4}$
Lana de vidrio o mineral	$0{,}09 \times 10^{-4}$
Caucho	$0{,}10 \times 10^{-4}$
Agua	$1{,}43 \times 10^{-4}$
Aire	$0{,}056 \times 10^{-4}$

Ejemplo 44. Flujo estacionario a través de una pared compuesta. Capas en "serie"

Determinación de la cantidad de calor que fluye en la dirección normal a través de un medio de capas múltiples entre las temperaturas externas t_0 y t_n constantes, como se muestra en la figura.



Solución.

Sea t_1 la temperatura entre la capa 1 y 2, t_2 la temperatura entre las capas 2 y 3 y así sucesivamente, luego tenemos:

En la primera capa

$$\dot{Q} = -k_1 A\frac{(t_1 - t_0)}{\ell_1} \Rightarrow t_0 - t_1 = \frac{\ell_1 \dot{Q}}{k_1 A}$$

En la segunda capa

$$\dot{Q} = -k_2 A\frac{(t_2 - t_1)}{\ell_2} \Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\ell_2 \dot{Q}}{k_2 A}$$

En la Capa n

$$\dot{Q} = -k_n A\frac{(t_n - t_{n-1})}{\ell_n} \Rightarrow t_{n-1} - t_n = \frac{\ell_n \dot{Q}}{k_n A}$$

Sumando miembro a miembro

$$t_o - t_n = \left(\frac{\ell_1}{k_1} + \frac{\ell_2}{k_2} + \ldots\ldots \frac{\ell_n}{k_n}\right)\frac{\dot{Q}}{A}$$

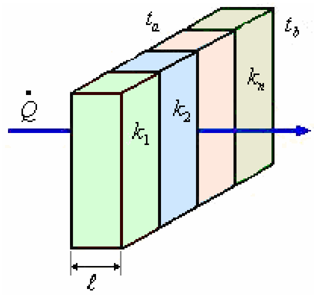
Luego

$$\dot{Q} = \frac{A(t_o - t_n)}{\dfrac{\ell_1}{k_1} + \dfrac{\ell_2}{k_2} + \ldots + \dfrac{\ell_n}{k_n}}$$

$$\dot{Q} = \frac{A(t_o - t_n)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\ell_i}{k_i}\right)}$$

Ejemplo 45. Flujo estacionario a través de una pared compuesta. Capas en "paralelo"

Determinación de la cantidad de calor $\dot{Q}$ que fluye en la dirección normal a un medio múltiple formado por placas paralelas como se muestra en la figura.



Solución.

El Flujo $\dot{Q}$ es la suma de los flujos $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_2$, ….. $\dot{Q}_n$ a través de cada una de las placas, de tal modo

$$\dot{Q} = -\frac{(k_1 A_1 + k_2 A_2 + \ldots k_n A_n)(t_b - t_a)}{\ell}$$

$$\dot{Q} = -\frac{(t_b - t_a)\sum_{i=1}^{n} k_i A_i}{\ell}$$

Ejemplo 46. Dos cuartos comparten una pared de ladrillos de 12 cm de grosor, pero están perfectamente aislados en las demás paredes. Cada cuarto es un cubo de 4,0 m de arista. Si el aire de uno de los cuartos está a 10 ºC y el otro a 30 ºC. ¿Cuántos focos de 100 W se necesitarán tener encendidas en el cuarto más caliente para mantener la misma diferencia de temperatura?

Solución.

Coeficiente de conductividad térmica del ladrillo k = 1,0 W/(m K).

$$\dot{Q} = -kA\frac{\Delta\theta}{L} = (1)(4,0\times 4,0)\frac{(30-10)}{0,12}$$

$$= (1)(4,0\times 4,0)\frac{20}{0,12} = 2666,67 \text{ W}$$

Número de focos de 100 W que se necesitarán tener encendidos en el cuarto más caliente para mantener la misma diferencia de temperatura

$$\frac{2666,67}{100} = 26,7$$

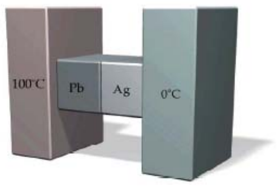
Se necesitan 27 focos de 100 W.

Ejemplo 47. Dos barras metálicas, cada una de longitud 5 cm y sección transversal rectangular de lados 2 y 3 cm, están encajadas entre dos paredes una a 100 ºC y otra a 0 ºC. Las barras son de Pb y Ag. Determinar:

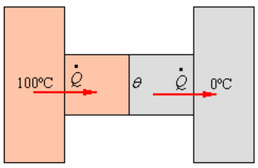
a) El flujo térmico total a través de las barras y

b) La temperatura en la interfase.

DATOS: $k(Pb)$ = 353 W/m K; $k(Ag)$ = 430 W/m K.



Solución.



Pb

$A = 6 \times 10^{-4}$ m, $L = 5\text{x}10^{-2}$ m k = 353 W/m K;

Ag

$A = 6 \text{ x}10^{-4}$ m, $L = 5\text{x}10^{-2}$ m k = 453 W/m K;

Flujo de calor en el plomo

$$\dot{Q} = 353\left(\frac{6\times 10^{-4}}{5\times 10^{-2}}\right)(100-\theta)$$

$$= 4,236(100-\theta)$$

Flujo de calor en la plata.

$$\dot{Q} = 453\left(\frac{6\times 10^{-4}}{5\times 10^{-2}}\right)(\theta-0)$$

$$= 5,436\theta$$

Igualando los flujos

$$4,236(100-\theta) = 5,436\theta$$

$$423,6 - 4,236\theta = 5,436\theta$$

$$9,672\theta = 423,6$$

$$\theta = 43,79^\circ \text{C}$$

El flujo es;

$$\dot{Q} = 5,436\theta = 5,436 \text{ x } 43,79 = 238,1 \text{ W}$$

Ejemplo 48.- Un excursionista usa prendas de vestir de 3,5 cm de grueso, cuya área superficial total es de 1,7 m^2. La temperatura de la superficie de las prendas es de –20 ºC y la de la piel de 34 ºC. Calcular el flujo de calor por conducción a través de la ropa

a) Suponiendo que ésta está seca y que la conductividad térmica k es la del plumón igual a $0,06\text{x}10^{-4}$ kcal/s m K

b) Suponiendo que la ropa está mojada, de modo que k es la del agua ($1,4\text{x}10^{-4}$ kcal/s m K) y que la ropa se ha comprimido hasta un espesor de 0,50 cm.

Solución.

a) $\dot{Q} = -kA\frac{\Delta\theta}{L} = 0,06\times 10^{-4}(1,7)\frac{(34+20)}{3,5\times 10^{-2}}$

$= 0,01,5737$ W

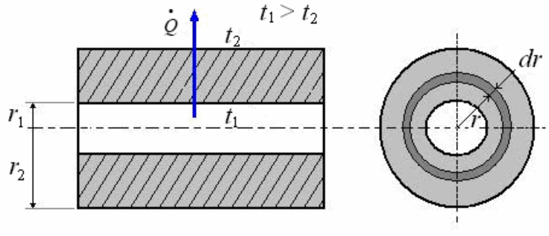
b) $\dot{Q} = -kA\frac{\Delta\theta}{L} = 1,4\times 10^{-4}(1,7)\frac{(34+20)}{0,50\times 10^{-2}}$

$= 2,5704$ W

Ejemplo 49. Flujo a través de un cilindro de radio interior r_1 y radio exterior r_2, conductividad térmica k, temperatura interior t_1 y temperatura exterior t_2.

Solución.

Tomemos una longitud L, y a una distancia r un elemento diferencial dr como se muestra en la figura,



El flujo a través del elemento diferencial es

$$\dot{Q} = -kA\frac{dt}{dr}$$

$\dot{Q}$ es constante a través de cualquier sección cilíndrica coaxial.

$A = 2\pi r L$

Luego

$$\dot{Q} = -k2\pi rL\frac{dt}{dr}$$

Despejando dt

$$dt = -\frac{\dot{Q}}{2\pi kL}\frac{dr}{r}$$

Integrando

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{\dot{Q}}{2\pi kL}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

$$t_1 - t_2 = -\frac{\dot{Q}}{2\pi kL}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

De aquí

$$\dot{Q} = \frac{2\pi kL}{\ln\frac{r_2}{r_1}}(t_1 - t_2)$$

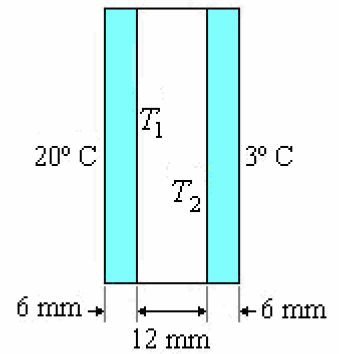
Ejemplo 50. Una ventana de un metro de alto por 2 de ancho tiene un vidrio cuyo espesor es de 0,006 m, conduce calor desde el interior a 20 ºC al exterior de 3 ºC. Encuentre la diferencia porcentual de la conducción del calor, cuando se pone dos vidrios del mismo espesor anterior, dejando una separación de aire entre los vidrios de 0,012 m. Considere que:

$k_{Vidrio} = k_V = 2\times 10^{-6}\,\text{kcal/sm°C}$,

$k_{Aire} = k_A = 6\times 10^{-6}\,\text{kcal/sm°C}$.

Solución.

a) Al poner los dos vidrios:



Sean T_1 y T_2 las temperaturas a la derecha del vidrio izquierdo e izquierda del vidrio derecho, respectivamente:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = k_V A\frac{(20 - T_1)}{0,006}, \qquad (1)$$

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = k_A A\frac{(T_1 - T_2)}{0,012}, \qquad (2)$$

$$\frac{\Delta Q_3}{\Delta t} = k_V A\frac{(T_2 - 3)}{0,006}. \qquad (3)$$

En el estado de régimen estable, es decir, cuándo la temperatura en cada punto es constante en el transcurso del tiempo, por lo cuál $\Delta Q/\Delta t$ es la misma en todas las secciones transversales:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_3}{\Delta t}.$$

Igualando ecuaciones (1) y (2), encontramos:

$$T_2 = T_1\left(1 + \frac{2}{3}\right) - \frac{40}{3}. \qquad (4)$$

De la igualación de (2) y (3) tenemos:

$$T_2 = \frac{\frac{3}{2}T_1 + 3}{5/2}. \qquad (5)$$

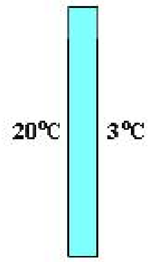
Por otro lado, de la diferencia de las ecuaciones (4) y (5), hallamos:

$T_1 = 13,63^\circ C$ y $T_2 = 13,63^\circ C$.

Reemplazando en ecuación (1):

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_V A\frac{(20 - T_1)}{0,006} = 4,25\frac{\text{cal}}{\text{s}}$$

b) Si la ventana está formada por un solo vidrio:



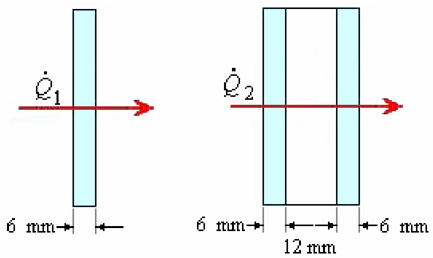
$$\frac{\Delta Q'}{\Delta t} = k_V A\frac{(30 - 3)}{\Delta X} = 11,3\frac{\text{cal}}{\text{s}},$$

Es decir, la diferencia con respecto a $\Delta Q/\Delta t = 7,05\,\text{cal/s}$. De este modo hay una diferencia de un 62,4%, con lo cuál, cuándo se coloca aire entre los dos vidrios se pierde un 62,4% menos de energía calórico que cuándo se usa un solo vidrio.

Ejemplo 51. Una ventana de un metro de alto por dos de ancho, está construida con láminas de vidrio cuyo espesor es de 0,006 m. La ventana puede ser ensamblada con un solo vidrio en ese caso el flujo de calor es $\dot{Q}_1$ o puede construirse con dos vidrios dejando una separación de 0,012 m de aire confinado entre las dos láminas de vidrio, en este caso el flujo de calor es $\dot{Q}_2$. Encontrar la relación entre los flujos de calor.

$k_{vidrio} = 2\times 10^{-6}\,\text{kcal/s m°C}$,

$k_{\text{aire confinado}} = 6\times 10^{-6}\,\text{kcal/s m°C}$



Solución.

Al poner los dos vidrios:

$$\dot{Q}_1 = -\frac{A}{\left(2\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}\right)}\Delta\theta$$

Al poner un solo vidrio

$$\dot{Q}_2 = -\frac{A}{\left(\frac{L_1}{k_1}\right)}\Delta\theta$$

La relación entre los flujos de calor es:

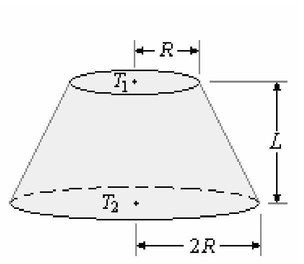
$$\frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} = \frac{-\frac{A}{\left(\frac{L_1}{k_1}\right)}\Delta\theta}{-\frac{A}{\left(2\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}\right)}\Delta\theta}$$

$$\frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} = \frac{\left(2\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}\right)}{\left(\frac{L_1}{k_1}\right)} = 2 + \frac{L_2 k_1}{L_1 k_2}$$

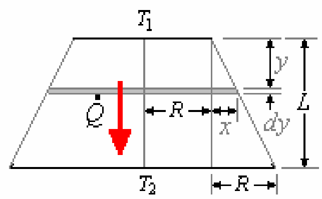
$$= 2 + \left(\frac{12}{6}\right)\left(\frac{2\times 10^{-6}}{6\times 10^{-6}}\right)$$

$$= 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}66$$

Ejemplo 52. El sólido de la figura tiene bases circulares de radio R y $2R$, altura L y conductividad térmica k. Si las bases se ponen en contacto con reservorios de temperatura T_1 y T_2 .Determine la corriente calorífica cuando el flujo es estacionario. Considere las paredes laterales forradas con un aislante térmico.



Solución.



El flujo a través de la porción de ancho dy y área

$A = \pi r^2 = \pi (R + x)^2$, es también igual a $\dot{Q}$

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dy} = -k\pi (R+x)^2 \frac{dT}{dy}$$

Por semejanza de triángulos: $\frac{x}{R} = \frac{y}{L} \Rightarrow x = \frac{R}{L}y$

Luego: $\dot{Q} = -k\pi\left(R + \frac{R}{L}y\right)^2 \frac{dT}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{(y+L)^2} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2} dT$$

Integrando $\int_0^L \frac{dy}{(y+L)^2} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2}\int_{T_1}^{T_2} dT$

$$\Rightarrow -\left.\frac{1}{(y+L)}\right|_0^L = -\frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2} T\Big|_{T_1}^{T_2}$$

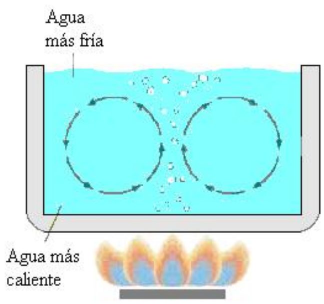
$$\Rightarrow -\frac{1}{(L+L)} + \frac{1}{(0+L)} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2}(T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2L} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q} L^2}(T_1 - T_2)$$

Finalmente: $\dot{Q} = \frac{2k\pi R^2}{L}(T_1 - T_2)$

CONVECCION.

Es el proceso de transferencia de calor de un lugar a otro por el movimiento de la masa calentada.



Las leyes que rigen el flujo de calor por convección son muy complejas porque involucra fenómenos de fluidos en movimiento y el cual todavía puede ser forzado o natural por diferencia de densidades. Sin embargo, se tiene una relación empírica dada por Newton, para un cuerpo dado:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = hA\Delta\theta$$

Donde h es el coeficiente de convección, A es el área de la pared, $\Delta\theta$ es la diferencia de temperatura entre la superficie de la pared y el fluido.

EL COEFICIENTE DE CONVECCION h depende de la posición de la pared y de las características del fluido y su movimiento.

COEFICIENTE DE CONVECCION EN AIRE A PRESION ATMOSFERICA

DISPOSICION	$h\left(\dfrac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\ °\text{C}}\right)$
Pared horizontal Mirando arriba	$0{,}576\text{x}10^{-3}(\Delta t)^{1/4}$
Pared horizontal Mirando abajo	$0{,}314\text{x}10^{-3}(\Delta t)^{1/4}$
Pared vertical	$0{,}424\text{x}10^{-3}(\Delta t)^{1/4}$
Tubo horizontal o vertical	$1{,}00\text{x}10^{-3}\left(\dfrac{\Delta t}{D}\right)^{1/4}$

Ejemplo 53. Una pared plana se mantiene a temperatura constante de 100°C, y el aire sobre ambas cara está a la presión atmosférica y a 20°C. ¿Cuánto calor se pierde por convección de un metro cuadrado de superficie en ambas caras en 1 hora?

a) Si la pared es vertical

b) Si la pared e horizontal

Solución.

a) Si la pared es vertical.

El flujo de calor de ambas caras es

$$\dot{Q} = -2hA\Delta t$$

Donde

$$h = 0{,}42\times10^{-3}(\Delta t)^{1/4}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,°C}$$

$$\Delta t = 80 \text{ y } (\Delta t)^{1/4} = 2{,}98$$

$A = 1\ \text{m}^2$

de aquí

$$h = 0{,}42\times10^{-3}\times2{,}98$$

$$= 1{,}12\times10^{-3}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,°C}$$

$$\dot{Q} = 2\times1{,}12\times10^{-3}\times80$$

$$= 0{,}179\frac{\text{kcal}}{\text{s}}$$

EL calor que se pierde en una hora será

$Q = 0{,}179 \text{ x } 3600 = 645$ kcal

b) Si la pared es horizontal.

En este caso tenemos los valores para h:

Para la cara que mira arriba

$$h_1 = 0{,}596 \text{ x } 10^{-3}\ (\Delta t)^{1/4}$$

$$= 1{,}77 \text{ x } 10^{-3}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,°C}$$

Para la cara que mira abajo

$$h_2 = 0{,}314 \text{ x } 10^{-3}\ (\Delta t)^{1/4}$$

$$= 0{,}94 \text{ x } 10^{-3}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,°C}$$

Luego: $\dot{Q} = -h_1\ A\,\Delta t - h_2\ A\,\Delta t$

$$\Rightarrow \dot{Q} = -(h_1 + h_2)\ A\,\Delta t$$

$$\dot{Q} = (2{,}71\times10^{-3})(1)(80) = 0{,}217\frac{\text{kcal}}{\text{s}}$$

y el calor que se pierde en una hora será:

$Q = 0{,}217 \text{ x } 3600 = 782$ cal

Ejemplo 54. El aire sobre la superficie de un lago está a una temperatura θ_A mientras que el agua está en su punto de congelación θ_c ($\theta_A < \theta_C$).

¿Cuál es el tiempo T que ha de transcurrir para que se forme una capa de hielo de espesor y

Asumir que el calor liberado cuando el agua se congela fluye a través del hielo por conducción y de la superficie al aire por convección natural.

DATOS:

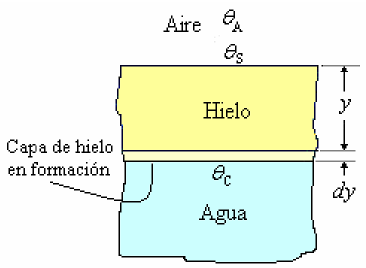
h = coeficiente de convección del hielo

ρ = densidad del hielo

L = calor de fusión del hielo

k = conductividad térmica del hielo

Solución.



En la figura observamos como se va formando la capa de hielo

Calor de solidificación de la capa de hielo en formación de área A y espesor dy.

$$dQ = dmL = \rho AdyL \qquad (1)$$

Éste calor se conduce a la superficie

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{(\theta_C - \theta_S)}{y}$$

$$dQ = kA\frac{(\theta_S - \theta_C)}{y}dt \qquad (2)$$

Igualando calores (1) y (2)

$$\rho AdyL = kA\frac{(\theta_S - \theta_C)}{y}dt$$

$$\int_0^Y ydy = \frac{k}{\rho L}(\theta_S - \theta_C)\int_0^T dt$$

$$\frac{Y^2}{2} = \frac{k}{\rho L}(\theta_S - \theta_C)T$$

$$\frac{Y^2\rho L}{2k} = (\theta_S - \theta_C)T \qquad (3)$$

El flujo de calor de la superficie al medio ambiente se produce por convección, o sea

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = -hA(\theta_S - \theta_A)$$

$$dQ = hA(\theta_A - \theta_S)dt$$

Este es el mismo calor y por lo tanto

$$\rho AdyL = hA(\theta_A - \theta_S)dt$$

$$dy = \frac{h}{\rho L}(\theta_A - \theta_S)dt$$

Integrando

$$\int_0^Y dy = \frac{h}{\rho L}(\theta_A - \theta_S)\int_0^T dt$$

$$Y = \frac{h}{\rho L}(\theta_A - \theta_S)T$$

$$\frac{Y\rho L}{h} = (\theta_A - \theta_S)T \qquad (4)$$

Sumando las expresiones (3) y (4) obtenemos

$$\left(\frac{Y^2}{2k} + \frac{Y}{h}\right)\rho L = (\theta_A - \theta_C)T$$

Finalmente,

$$T = \frac{\rho L}{(\theta_A - \theta_C)}\left(\frac{Y^2}{2k} + \frac{Y}{h}\right)$$

Ejemplo 55. El interior del ser humano se encuentra a 37°C, el espesor efectivo de la piel puede considerarse como de 3cm.
a) Para una persona cubierta de pies a cabeza por un vestido de lana de 0,5cm de espesor. Calcular el flujo de calor que pierde en Lima (t_{amb} = 15°C) y en las madrugadas de Puno (t_{amb} = -20°C).
b) ¿Cuál debería ser el grosor de su vestido de la persona en Puno para tener la misma pérdida de calor que una persona en Lima?
Datos:
k_{piel} = 0,01W/m°C
Área del cuerpo humano persona promedio = 1,5m^2
k_{lana} = 0,0209 W/ºC
h (del cuerpo vestido) = 9 W/m^2·K,

Solución.
a) El flujo de calor atraviesa la piel y el vestido por conducción y de la superficie del vestido al ambiente por convección.
Este flujo a través de este conjunto es:

$$\dot{Q} = \frac{A(t_{piel} - t_{ambiente})}{\frac{L_{piel}}{k_{piel}} + \frac{L_{lana}}{k_{lana}} + \frac{1}{h}}$$

En Lima: $\dot{Q} = \dfrac{1,5(37-15)}{\frac{0,03}{0,01} + \frac{0,005}{0,0209} + \frac{1}{9}} = 9,85$ W

En Puno: $\dot{Q} = \dfrac{1,5(37+20)}{\frac{0,03}{0,01} + \frac{0,05}{0,0209} + \frac{1}{9}} = 23,74$ W

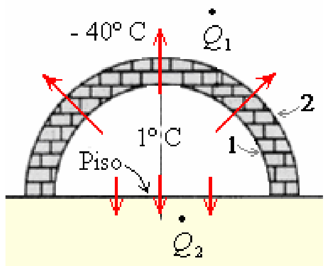
c) Para encontrar el grosor de su vestido de la persona en Puno para que tenga la misma pérdida de calor que una persona en Lima, aplicamos la misma ecuación.

$$9,85 = \frac{1,5(37+20)}{\frac{0,03}{0,01} + \frac{e}{0,0209} + \frac{1}{9}} \Rightarrow$$

$$e = 0,0209\left[\frac{1,5(57)}{9.85} - \frac{0,03}{0,01} - \frac{1}{9}\right] = 0,116 \text{ m}$$

Ejemplo 56. Se construye un iglú en forma de hemisferio con un radio interno de 1,8 m y paredes de nieve compactada de 0,5 m de espesor. En el interior del iglú el coeficiente de transferencia de calor por convección es 6 W/m^2·K; en el exterior, en condiciones normales de viento, es 15 W/m^{2}K. La conductividad térmica de la nieve compactada es 2,33 W/m K. La temperatura de la capa de hielo sobre la que se asienta el iglú es de -20 ºC y tiene la misma conductividad térmica que la nieve compactada.
a) Que calor debe proporcionar una fuente continua dentro del iglú, para que la temperatura del aire interior sea 1º C cuando la del aire exterior es - 40 ºC. Considere las pérdidas de calor a través del suelo.
b) ¿Cómo afecta el duplicar el espesor de las paredes?

Solución.
a)



Pérdida por convección en el piso

$$\dot{Q}_2 = -h_i A_p(\theta_p - \theta_i),\ A_p = \pi R_1^2$$

$$\dot{Q}_2 = -h_i(\pi R_1^2)(\theta_p - \theta_i)$$

$$\dot{Q}_2 = -[6](\pi 1,8^2)(-20-1) = 1388,02\text{W}$$

Pérdida de calor por el domo

Por convección del aire interior a la pared interior

$$\dot{Q}_1 = -h_i A_1(\theta_1 - \theta_i)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} 4\pi R_1^2$$

$$\dot{Q}_1 = -h_i \left(2\pi R_1^2\right)\left(\theta_1 - \theta_i\right)$$

$$\dot{Q}_1 = -6\left(2\pi 1{,}8^2\right)\left(\theta_1 - 1\right) = -122{,}08\left(\theta_1 - 1\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - 1\right) = \frac{\dot{Q}_1}{122{,}08} \qquad (1)$$

Por conducción en la pared del iglú:

$$A = \frac{1}{2} 4\pi r^2$$

$$\dot{Q}_1 = -k 2\pi r^2 \frac{d\theta}{dr} \Rightarrow d\theta = -\frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = -\frac{\dot{Q}}{2\pi k}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi(2{,}33)}\left(\frac{1}{1{,}8} - \frac{1}{2{,}3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{120{,}93} \qquad (2)$$

Por convección de la pared exterior al aire exterior

$$\dot{Q}_1 = -h_e A_2\left(\theta_e - \theta_2\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} 4\pi R_2^2.$$

$$\dot{Q}_1 = -h_e\left(2\pi R_2^2\right)\left(\theta_e - \theta_2\right)$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_1 = -(15)\left(2\pi 2{,}3^2\right)\left(-40 - \theta_2\right)$$

$$= (15)\left(2\pi 2{,}3^2\right)\left(\theta_2 + 40\right)$$

$$= 498{,}32\left(\theta_2 + 40\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_2 + 40\right) = \frac{\dot{Q}_1}{498{,}32} \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3):

$$\left(40 - 1\right) = \frac{\dot{Q}_1}{122{,}08} + \frac{\dot{Q}_1}{120{,}93} + \frac{\dot{Q}_1}{498{,}32}$$

$$\Rightarrow 39 = \dot{Q}_1\left(0{,}008 + 0{,}008 + 0{,}002\right)$$

$$= 0{,}018\,\dot{Q}_1$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_1 = \frac{39}{0{,}029} = 2166{,}67 \text{ W}$$

Salida total de calor
1388,02 + 2166.67 = 3554,69 W

La fuente debe proporcionar 3,554 kW

b) Si se duplica el espesor de la pared del domo

$$\left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi(2{,}33)}\left(\frac{1}{1{,}8} - \frac{1}{2{,}8}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{31{,}65} \qquad (2a)$$

Sumando (1), (2a) y (3):

$$\left(40 - 1\right) = \frac{\dot{Q}_1}{122{,}08} + \frac{\dot{Q}_1}{31{,}65} + \frac{\dot{Q}_1}{498{,}32}$$

$$\Rightarrow$$

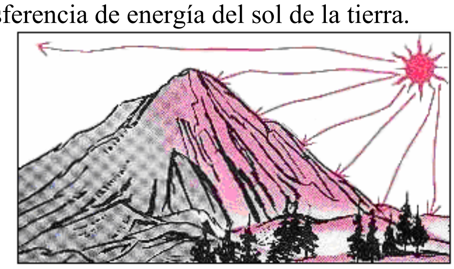
$$39 = \dot{Q}_1\left(0{,}008 + 0{,}032 + 0{,}002\right) = 0{,}042\,\dot{Q}_1$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_1 = \frac{39}{0{,}042} = 928{,}57 \text{ W}$$

Salida total de calor 1388,02 + 928,57 = 2316,59 W

La fuente debe proporcionar 2,316 kW

RADIACION.
Es el proceso de transferencia de calor por medio de ondas electromagnéticas durante el cual la masa del medio no interviene puesto que no se refiere a la convección, ni a la conducción, por ejemplo la transferencia de energía del sol de la tierra.



Una sustancia puede ser estimulada a emitir radiación electromagnética en varias formas, como por ejemplo un conductor eléctrico con corriente alterna de alta frecuencia emite ondas de radio, una placa bombardeada por electrones con alta velocidad emite rayos X, un líquido o sólido caliente emite radiación térmica, etc.

En esta parte trataremos solamente la radiación térmica.
Experimentalmente STEFAN y BOLTZMAN encontraron la ley que rige la radiación, mostraron que la radiación emitida, energía por unidad de tiempo y por unidad de área, por un cuerpo negro (Sustancia Capaz de absorber toda la energía que llega a él) a una temperatura *T* (Temperatura absoluta) θ es $R = \sigma T^4$
Donde σ es la llamada constante de Boltzman.

$$\sigma = 4,88 \times 10^{-8} \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{ hora K}^4}$$

$$= 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4}$$

El calor transferido por radiación de un cuerpo a una temperatura T al medio que lo rodea a una temperatura T_0, es:

$$\dot{Q} = Ae\sigma\left(T^4 - T_0^4\right)$$

Donde *e* es el factor de emisividad del cuerpo a temperatura T, siendo igual a 1 para el cuerpo negro.

Ejemplo 57. La temperatura de trabajo del filamento de tungsteno de una lámpara incandescente es 2450 K, y su emisividad es 0,30. ¿Cuál es la superficie del filamento de una lámpara de 25 watts?
Solución.

Como $\dot{Q} = Ae\sigma T^4 \Rightarrow A = \dfrac{\dot{Q}}{e\sigma T^4}$

Donde: $\dot{Q} = 25\,W$, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \dfrac{W}{m^2.K}$, $e = 0,30$ y $T = 2450$ K

Reemplazando valores obtenemos la superficie:

$$A = \frac{25}{5,67 \times 10^{-8}(2450)^4} = 0,408 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$
$$= 0,408\ \text{cm}^2$$

Ejemplo 58. Una persona desvestida tiene una superficie de 1,5 m^2 expuesta a un ambiente y a unos alrededores de 27 ºC. La temperatura de su piel es de 33 ºC y se puede considerar un emisor de radiación perfecto. Si el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 9 W/m^{2}K, hállese:
a) Las pérdidas de calor por convección y por radiación.
b) El gasto energético en kcal/día.
Solución.

a) $\dot{Q}_{conv} = -hA\Delta\theta$
$= (9)(1,5)(33-27) = 81$ W.

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$$
$= (5,67\text{x}10^{-8})(1)(1,5)(306^4-300^4)$
$= (5,67\text{x}10^{-8})(1)(1,5)(6,68\text{x}10^8)$
$= 56,8$ W

b) 2,846 kcal/día.
El gasto energético por día es:
(56,8 + 81) J/s x 3600x24 s/día = 4907520 J
Como 1 kcal = 4186 J
El gasto energético en kcal/día:
4907520 J/día x 1 kcal /4186 J = 2,846 kcal/día.

Ejemplo 59. Calcular la pérdida neta de energía radiante de una persona desnuda en una habitación a 20 ºC, suponiendo que la persona se comporta como un cuerpo negro. El área del cuerpo es igual a 1,4 m^2 y la temperatura de su superficie es de 33 ºC.
Solución.

$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right) = (5,67\text{x}10^{-8}$ W/m^{2}K^4)(1)(1,4 m^2)(306^{4}K-293^{4}K) = (5,67x10^{-8} W/m^{2}K^4)(1)(1,4 m^2)(13,98x10^{8}K) = 110, 97 W

Ejemplo 60. Los cables de calefacción de una estufa eléctrica de 1kW se encuentran al rojo a una temperatura de 900 K. Suponiendo que el 100% del calor emitido es debido a la radiación y que los cables actúan como radiadores ideales. ¿Cuál es el área efectiva de la superficie radiante? Suponer la temperatura ambiente de 20 ºC.
Solución.

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$$
$1000 = (5,67 \times 10^{-8})(1)(A)(1173^4-293^4) \Rightarrow$
$1000 = (5,67 \times 10^{-8})(1)(A)(1885 \times 10^8) \Rightarrow$
$1000 = 10687,95\,A \Rightarrow$

$$A = \frac{1000}{10687,95} = 0,094\ \text{m}^2$$

Ejemplo 61. a) ¿Cuánta potencia irradia una esfera de tungsteno (emisividad = 0,35) de 18 cm de radio a una temperatura de 25 º?
b) Si la esfera está encerrada en un recinto cuyas paredes se mantienen a –5 ºC ¿Cuál es el flujo neto de la energía liberada de la esfera?
Solución.

a) $A = \pi R^2 = \pi(0,18)^2 = 0,101736\text{m}^2$

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma eAT^4$$
$= (5,67\text{x}10^{-8})(0,35)(0,10173)(298^4)$
$= 15,92$ W

b)

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$$
$= (5,67\text{x}10^{-8})(0,35)(0,10173)(298^4\text{K}-278^4)$
$= 3,86$ W

Ejemplo 62. La Tierra recibe aproximadamente 430 W/m^2 del Sol, promediados sobre toda su superficie, e irradia una cantidad igual de regreso al espacio (es decir la Tierra está en equilibrio). Suponiendo nuestro planeta un emisor perfecto (e = 1,00), estime su temperatura superficial promedio.

Solución.

$$A = \pi R^2 = \pi(0{,}18)^2 = 0{,}101736 \text{m}^2$$

$$\frac{\dot{Q}_{rad}}{A} = \sigma e T^4 = (5{,}67\text{x}10^{-8})(1)(T^4) = 430$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{430}{5{,}67\times10^{-8}}} = 295K, \; t = 22{,}1 ºC$$

Ejemplo 63. a) Encontrar la potencia total radiada al espacio por el Sol. Suponiendo que éste es un emisor perfecto con T = 5500 K. El radio del Sol es $7{,}0\text{x}10^8$ m.
b) A partir del resultado anterior, determinar la potencia por unidad de área que llega a la Tierra, que se encuentra a una distancia del Sol de $1{,}5\text{x}10^{11}$ m.
Solución.
a)

$$A = \pi R^2 = \pi(7{,}0\times10^8)^2 = 153{,}86\times10^{16} \text{m}^2$$

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma e A T^4$$

$$= (5{,}67\text{x}10^{-8})(1)(153{,}86\text{x}10^{16})(5500^4)$$

$$= 79{,}83\text{x}10^{24} \text{ W}$$

b) $$\frac{Potencia}{Area} = \frac{79{,}83\times10^{24}}{4\pi(1{,}5\times10^{11})^2}$$

$$= 282{,}48 \text{ W/m}^2$$

DEFINICIÓN DE UN GAS IDEAL.
Los gases juegan un rol muy importante en muchos procesos termodinámicos, y antes de ir más allá, es importante considerar una forma ingeniosa de comprender las propiedades de los gases. Esta idea es llamada la teoría cinética de los gases, trata de explicar las propiedades macroscópicas de un gas examinando el comportamiento de los átomos y moléculas que forman un gas. A simple vista esto parece ser imposible porque el número de átomos involucrados es demasiado grande, alrededor de 10^{27} átomos llenan una habitación. Sin embargo utilizando la estadística, se puede predecir con mucha precisión las características de un gas. En lo siguiente asumiremos que estamos trabajando con un **gas ideal** con las propiedades siguientes:

Un gas está formado por partículas llamadas moléculas.

Las moléculas se mueven irregularmente y obedecen las leyes de Newton del movimiento.

El número total de moléculas es grande.

El volumen de las moléculas mismas es una fracción inapreciablemente pequeña del volumen ocupado por el gas.
Entre moléculas no obran fuerzas de consideración, salvo durante los choques.
Los choques son perfectamente elásticos y de duración insignificante.

Los gases reales no siguen exactamente este comportamiento, pero es una buena forma para comenzar.

El comportamiento de las masas encerradas de gases ideales se determina por las relaciones entre p, V o p, T, o V, T cuando la tercera cantidad T o V o p respectivamente, es mantenida constante; estas relaciones fueron obtenidas experimental por Boyle, Gay-Lussac y Charles respectivamente.

LEY DE BOYLE. La presión (p) de un gas ideal varía inversamente a su volumen (V) si la temperatura (T) se mantiene constante.

$$p \propto \frac{1}{V} \text{ con } T \text{ constante} \Rightarrow pV = \text{Constante}$$

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

LEY DE GAY-LUSSAC. La presión (p) de un gas ideal varía directamente a su temperatura (T) si el volumen (V) se mantiene constante.

$$p \propto T \text{ con } V \text{ constante} \Rightarrow \frac{p}{T} = \text{Constante}$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Nota: Esta ley se deduce con el termómetro de gas a volumen constante

$$t = 273{,}15\left(\frac{p}{p_C} - 1\right)^o C \Rightarrow \frac{t}{273{,}15} + 1 = \frac{p}{p_C}$$

$$\Rightarrow \frac{t + 273{,}15}{273{,}15} = \frac{p}{p_C} \Rightarrow \frac{T}{T_C} = \frac{p}{p_C}$$

o $$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

LEY DE CHARLES. El volumen (V) de un gas ideal varía directamente a su temperatura (T) si la presión (p) se mantiene constante.

$$V \propto T \text{ con } p \text{ constante} \Rightarrow \frac{V}{T} = \text{Constante}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Nota: Esta ley se deduce con el termómetro de gas a presión constante

$$t = 273{,}15\left(\frac{V}{V_C} - 1\right)^{\circ}C \Rightarrow \frac{t}{273{,}15} + 1 = \frac{V}{V_C}$$

$$\Rightarrow \frac{t + 273{,}15}{273{,}15} = \frac{V}{V_C} \Rightarrow \frac{T}{T_C} = \frac{V}{V_C}$$

o $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL.

El comportamiento de gases ideales se caracteriza en términos de p, V y T. Tal ecuación se llama la ecuación del gas ideal. El comportamiento de cualquier estado de la materia se puede caracterizar generalmente por una cierta relación entre la presión (p) y la densidad (ρ) que por supuesto corresponde al volumen (V). La ecuación de los gases ideales puede obtenerse por la combinación de dos de las tres leyes de los gases indicadas anteriormente.

Sea el gas encerrado con condiciones iniciales p_1, V_1 y T_1, llevado a un estado final p_2, V_2 y T_2 como sigue:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

o $\frac{pV}{T} = \text{Constante}$

Nota: Se encontró que el valor de la constante es dependiente en la masa del gas dado y también se encontró que no es igual para una unidad de masa de diferentes gases. Sin embargo, se encuentra que si lo es para 1 mol de masa (la masa numéricamente equivalente en gramos al peso molecular, ejemplo, 2 g para H_2, 32 g para el O_2, 28 g para el N_2, etc.) de cualquier gas ideal entonces el valor de la constante es igual para todos los gases. Esta constante igual para todos los gases es denotada generalmente por "*R*" y llamada la constante universal de los gases.

$$R = 8{,}314\frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 1{,}986\frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

La ecuación del gas ideal por lo tanto se escribe normalmente como

$$pV = nRT$$

Donde n = número de moles.

El número de moles se define como, el cociente de la masa de gas M a su peso molecular (M_0)

$$n = \frac{M}{M_0}$$

Si es m la masa de cada molécula de un gas y N es el número de las moléculas que hacen la masa total M.

N_A. = número de Avogadro = número de moléculas en 1 mol de gas (cualquier gas).

Entonces $M = mN$ y $M_0 = mN_A$.

Por lo tanto $n = \frac{N}{N_a}$

Luego $pV = nRT = \frac{M}{M_0}RT = \frac{N}{N_a}RT$

Ahora, $pV = \frac{M}{M_0}RT \Rightarrow pV = \frac{mN}{mN_A}RT$

$$\Rightarrow pV = N\frac{R}{N_A}T$$

El cociente entre las dos constantes R y N_A es la constante que designamos por k_B, la constante de Boltzmann.

$$k_B = \frac{8{,}314\text{J/mol K}}{6{,}022\times10^{23}/\text{mol}} = 1{,}38\times10^{-23}\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Ejemplo 64. Un conductor inicia su viaje en una mañana fría cuando la temperatura es 4ºC, y mide la presión de la llanta y ve que el manómetro lee 32 psi (2,2 x 10^5 Pa). Después de manejar todo el día, las llantas se han calentado, y por la tarde la temperatura de las llantas se ha elevado a 50ºC. Asumiendo que el volumen es constante , ¿a que presión se habrá elevado el aire en las llantas?

1 atm = 1,013 Pa = 14,7 psi

Solución.

Tomar en cuenta que un manómetro mide la presión manométrica ($p_m = p - p_a$). Luego la presión inicial es

$$p_1 = p_m + p_a \Rightarrow p_1 = 32 + 14{,}7 = 46{,}7\text{ psi}$$

$T_1 = 4 + 273{,}15 = 277{,}15\text{ K}$ y

$$T_2 = 50 + 273{,}15 = 323{,}15\text{ K}$$

$p_1V_1 = nRT_1$ y $p_2V_2 = nRT_2$, $V_1 = V_2$

Dividiendo estas ecuaciones:

$$\frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{nRT_1}{nRT_2} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 = \left(\frac{323,15}{277,15}\right)(46,7) = 54,5 \text{ psi}$$

absoluta

o 54,5 – 14,7 = 39,8 psi, presión manométrica.

Ejemplo 65. Un gas ideal ocupa un volumen de 100 cm^3 a 20 ºC y a una presión de 100 Pa. Determine el número de moles de gas en el recipiente.

Solución.

p = 100 Pa = 9,8692 x 10^{-4} atm

V = 100 x $10^{-6}m^3$ = 0,1 litros

t = 20 °C

T = 293,15 K

R = 0,082 litro atm/mol K = 8,31 J/mol K

Se puede hacer el cálculo en los dos sistemas de unidades usando

$$n = \frac{pV}{RT}$$

$$n = \frac{9,8692\times10^{-4}\times0,1}{00,082\times293,15} = 4,11 \text{ x } 10^{-6} \text{ mol}$$

$$n = \frac{100\times100\times10^{-6}}{8,31\times293,15} = 4,11 \text{ x } 10^{-6} \text{ mol}$$

Ejemplo 66. Se mantiene un gas ideal en un recipiente a volumen constante.

Inicialmente, su temperatura es 10ºC y su presión es 2,5 atmósferas ¿Cuál será la presión cuando la temperatura sea de 80ºC?

Solución.

p_1 = 2,5 atm, t_1 = 10 ºC, T_1 = 283,15K,

t_2 = 80 ºC, T_2 = 353,15 K

$$n = \frac{p_1V}{RT_1} = \frac{p_2V}{RT_2} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{p_1T_2}{T_1}$$

$$= \frac{2,5\times353,15}{283,15} = 3,118 \text{ atm}$$

Ejemplo 64. Un cilindro con un émbolo móvil contiene un gas a una temperatura de 127 ºC, una presión de 30 kPa y un volumen de 4 m^3 ¿Cuál será su temperatura final si el gas se comprime a 2,5 m^3 la presión aumenta a 90 kPa?

Solución.

p_1 = 30 x 10^3 Pa, V_1 = 4m^3, t_1 = 127 ºC,

T_1 = 400,15K

p_2 = 90 x 10^3 Pa, V_2 = 2,5m^3

De $n = \dfrac{p_1V_1}{RT_1} = \dfrac{p_2V_2}{RT_2}$

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{p_1V_1}T_1 = \frac{90\times10^3\times2,5}{30\times10^3\times4}400,15$$

= 750,28K = 477,13 ºC

Ejemplo 67. Se encuentra contenido un gas en una vasija de 8 L, a una temperatura de 20ºC y a una presión de 9 atmósferas:

a) Determine el número de moles en la vasija.

b) ¿Cuántas moléculas hay en la vasija?

Solución.

p = 9 atm, V = 8 litros, t = 20 ºC, T = 293,15K

a) $n = \dfrac{pV}{RT} = \dfrac{9\times8}{0,082\times293,15}$

= 3,0 mol

b) N_A = 6,0221367 x 10^{23} / mol

$N = n\, N_A$ = 3 x 6,0221367 x 10^{23}

= 1,81 x 10^{24} moléculas

Ejemplo 68. Se infla la llanta de un automóvil con aire inicialmente a 10 ºC y a presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime a 28% de su volumen inicial y su temperatura aumenta a 40 ºC. ¿Cuál es la presión del aire?

Después de manejar el automóvil a altas velocidades, la temperatura del aire de las ruedas aumenta a 85 ºC y el volumen interior de la rueda aumenta 2 %. ¿Cuál es la nueva presión en la rueda? Exprese su respuesta en Pa (absoluta) y en psi (lb/pulg^2) (manométrica).

(1 atm = 14,70 psi)

Solución.

Primera parte

p_1 = 1 atm, $V_1 = V$, t_1 = 10 ºC, T_1 = 283,15K

V_2 = 0,28V, t_2 = 40 ºC, T_2 = 313,15K

De $pV = nRT$ como la masa no varía

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow\ p_2 = p_1\frac{V_1T_2}{V_2T_1} = 1\times\frac{V\times313,15}{0,28V\times283,15}$$

= 3,95 atm = 4,0 x 10^5 Pa

Nota la presión manométrica p'_2, es la presión relativa a la atmosférica, es decir

p'_2 = 3,95 – 1 = 2,95 atm

= 2,95 x 14,7 = 43,365 psi

Segunda parte

t_2= 85 ºC, T_2 = 358,15 K, V_2 = 1,02 x 0,28V

$$p_2 = p_1\frac{V_1T_2}{V_2T_1} = 1\times\frac{V\times358,15}{1,02\times0,28V\times283,15}$$

= 4,43 atm = 4,42884 x 10^5 Pa

y la manométrica será

p'_2 = 4,43 -1 = 3,43 atm = 3,43 x 14,7 = 50,42 psi

Ejemplo 69. Una caja cúbica metálica de 20 cm de lado, contiene aire a la presión de 1 atm y a 300 K de temperatura. Se cierra herméticamente, de forma que el volumen sea constante y se calienta hasta 400 K. Hallar la fuerza neta desarrollada sobre cada pared de la caja.

Solución.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_a}{300} = \frac{p_2}{400} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{400}{300} p_a = \frac{4}{3}\left(1{,}013x10^5\right) = 1{,}35 \text{ x } 10^5 \text{ Pa}$$

Fuerza neta desarrollada sobre cada pared de la caja

$$(p_1 - p_a)A = \left(1{,}35x10^5 - 1{,}013x10^5\right)(0{,}2)^2$$
$$= 1{,}348\text{x}10^3 = 1348 \text{ N}$$

Ejemplo 70. Una campana de buzo cilíndrica de 3 m de diámetro y 4 m de altura con el fondo abierto se sumerge a una profundidad de 220 m en el océano. La temperatura en la superficie es de 25 ºC y en el fondo, a los 220 m, es de 5 ºC. La densidad del agua de mar es de 1025 kg/m^3. ¿Cuánto subirá el nivel del agua adentro de la campana cuando se sumerge?

Solución.

Sea h esa altura.

p_1 = 1 atm = 101325 Pa,

$V_1 = \pi r^2 H$, r = 1,5m, H = 4m

t_1 = 25 ºC, T_1 = 298,15 K

t_2 = 5 ºC, T_2 = 278,15 K

$V_2 = \pi r^2 (H - h)$

La campana está a una profundidad h' = 220m

El nivel del agua en la campana está a profundidad $h' - h$

La presión es $p_2 = p_1 + \rho g(h' - h)$

g = 9,8 m/s^2

ρ = 1025 kg/m^3

Donde tenemos $\dfrac{p_1 V_1}{RT_1} = \dfrac{p_2 V_2}{RT_2}$

o sea

$$\frac{p_1 H}{T_1} = \frac{(p_1 + \rho g)(h' - h)(H - h)}{T_2}$$

Poniendo los valores:

$$\frac{101325 \times 4}{298{,}15} = \frac{[101325 + 1025 \times 9{,}8(220 - h)(4 - h)]}{278{,}15}$$

Ecuación que tiene por solución

h = 3,834m

Ejemplo 71. Sube una burbuja de gas desde el fondo en un lago con agua limpia a una profundidad de 4,2 m y a una temperatura de 5 ºC hasta la superficie donde la temperatura del agua es de 12ºC. ¿Cuál es el cociente de los diámetros de la burbuja en los dos puntos?

(Suponga que la burbuja de gas está en equilibrio térmico con el agua en los dos puntos.)

Solución.

si p_a indica la presión atmosférica

h = 4,2m

$p_1 = p_a + \rho g h$

t_1 = 5 ºC, T_1 = 278,15 K

$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$

$p_2 = p_a$

t_2 = 12 ºC, T_2 = 285,15 K

$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T} \Rightarrow \frac{(p_a + \rho g h) d_1^2}{T_1} = \frac{b d_2^2}{T}$$

Supondremos que

p_a = 1 atm = 101325 Pa

ρ = 1025 kg/m^3

g = 9,8m/s^2

Entonces

$$\frac{(101325 + 1025 \times 9{,}8 \times 4{,}2) d_1^2}{278{,}15} = \frac{101325 d_2^2}{285{,}15}$$

o bien $\dfrac{d_2}{d_1} = 1{,}13$

Ejemplo 72. Una campana de buzo en forma de cilindro con una altura de 2,50 m está cerrada en la parte superior y abierta en la parte inferior. La campana se baja desde el aire al agua de mar (ρ = 1,025 gm/cm^3). El aire encerrado en la campana inicialmente está a 20ºC. La campana se baja a una profundidad (medida desde el nivel del agua dentro de la campana) de 82,3 m. A esta profundidad la temperatura del agua es de 4ºC, y la campana está en equilibrio térmico con el agua.(sugerencia: trate al aire como un gas ideal y al mar como un líquido en reposo)

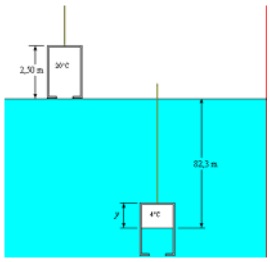
a) ¿Cuánto subirá el nivel del agua dentro de la campana?

b) ¿A qué presión se deberá someter el aire dentro de la campana para sacar el agua que entró?

Dato: la presión atmosférica es 1,013x10^5 Pa.

Solución.

a)



$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} V_1$$

p_1 = 1,013x10^5 Pa.

p_2 = 1,013x10^5 + 1025x9,8x82,3 = 9,28x10^5 Pa

T_1 = 20 + 273 = 293 K,

T_2 = 4 + 273 = 277 K

Con los datos:

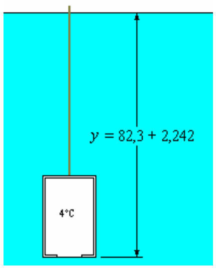
$$V_2 = \frac{(1{,}013x10^5)(277)}{(9{,}28x10^5)(293)} V_1 = 0{,}103 V_1$$

Como también $V_2 = Ay$:

$$Ay = 0{,}103A(2{,}5) \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}258\text{ m}$$

El nivel del agua dentro de la campana subirá (2,50 – 0,258) = 2,242 m

b)



Para que el volumen sea igual que en la superficie la presión interior debe de igualar a la presión en esa profundidad

$p = 1{,}013x10^5 + 1025x9{,}8x(82{,}3 + 2{,}242)$
$= 9{,}505x10^5$ Pa

Ejemplo 73. Un globo poroso tiene un volumen de 2 m^3 a una temperatura de 10ºC y a una presión de 1,1 atm. Cuando se calienta a 150ºC el volumen se expande a 2,3 m^3 y se observa que se escapa el 5% del gas.
a) ¿Cuánto gas había en el globo a 10ºC?
b) ¿Cuál es la presión en el globo a 150ºC?

$$R = 0{,}082\frac{\text{atmlitro}}{\text{molK}}$$

Solución.

$p_1 = 1{,}1\text{atm}$, $V_1 = 2$ m^3,
$t_1 = 10$ºC, $T_1 = 283{,}15$K, $n_1 = ?$
$p_2 = ?$, $V_2 = 2{,}3$ m^3,
$t_2 = 150$ºC, $T_2 = 423{,}15$ K, $n_2 = 0{,}95\, n_1$.

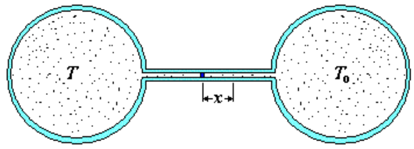
a) $n_1 = \dfrac{p_1V_1}{RT_1} = \dfrac{1{,}1\times 2000}{0{,}082\times 283{,}15} = 94{,}8$ mol

b) $p_2 = \dfrac{n_2RT_2}{V_2}$

$= \dfrac{0{,}95\times 94{,}8\times 0{,}082\times 423{,}15}{2300}$

$= 1{,}387$ atm

Ejemplo 74. El termómetro de gases consta de dos recipientes idénticos con gas de volumen V_0 cada uno, unidos por un tubo do longitud ℓ y sección A. Una gota de mercurio obstruye el tubo. Si las temperaturas do los gases en los volúmenes son iguales, el mercurio se encontrará en el centro del tubo. El volumen derecho se coloca un termostato con temperatura T_0. Gradúese el termómetro, buscando la dependencia entre la temperatura del gas en el volumen izquierdo y el desplazamiento x del mercurio con respecto a la posición de equilibrio.



Solución.
Como la cantidad de gas en los dos lados es igual, podemos escribir, cuando la temperatura del lado izquierdo sea T. La gota de mercurio se desplaza x, hasta que las presiones en ambos depósitos sea igual (p_0).

$$\frac{p_o\left[V_o + A\left(\frac{\ell}{2}+x\right)\right]}{T} = \frac{p_o\left[V_o + A\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\right]}{T_o}$$

$$\Rightarrow T = T_o\frac{2V_o + S(\ell + 2x)}{2V_o + S(\ell - 2x)}$$

Ejemplo 75. Un pez que se encuentra a 63,25m de profundidad en el mar donde la temperatura es 2° C produce burbujas de aire de 1 cm de radio aproximadamente. Determine el radio de las burbujas al llegar estas a la superficie del mar donde la temperatura es de 27° C. Considere que la densidad del agua de mar no varía con la profundidad y tiene un valor de 1,035 g/cm^3.

Solución.
$h = 63{,}25$ m
$p_1 = p_a + \rho g h$
$t_1 = 2$ ºC, $T_1 = 275{,}15$ K

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$$

$p_2 = p_a$
$t_2 = 27$ ºC, $T_2 = 300{,}15$ K

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$$

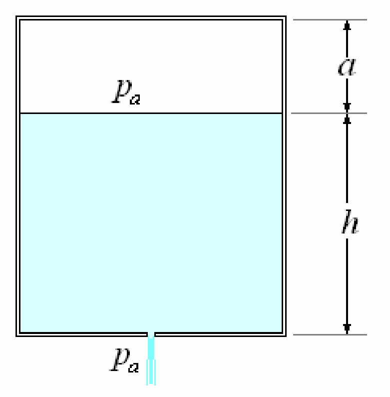
$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T} \Rightarrow \frac{(b+\rho g h)r_1^3}{T_1} = \frac{br_2^3}{T}$$

Supondremos que
$p_a = 1$ atm $= 101325$ Pa
$\rho = 1035$ kg/m^3
$g = 9{,}8$m/s^2
Entonces

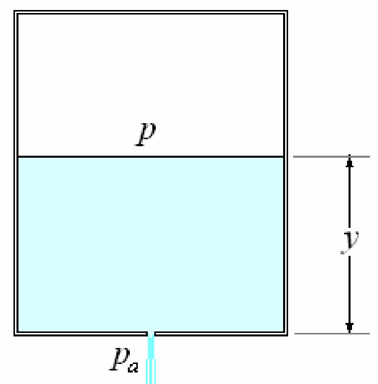
$$\frac{(101325 + 1035\times 9{,}8\times 63{,}25)r_1^3}{275{,}15} = \frac{101325r_2^3}{300{,}15}$$

o bien $\dfrac{r_2}{r_1} = 2 \Rightarrow r_2 = 2$ cm

Ejemplo 76. Un depósito cerrado contiene agua hasta una altura $h = 2{,}24$ m, y por encima $a = 1$m, aire a la presión del exterior $p_a = 1$ atm. Por un pequeño orificio de fondo se deja salir el agua. Calcular el descenso de nivel, suponiendo invariable la temperatura del agua.



Solución.
Sea y la distancia desde la superficie de nivel al fondo y p la presión del aire; se tiene:



$$p_a a = p(a + h - y)$$

Transformación isotérmica

El equilibrio se establecerá cuando

$$p + \rho g y = p_a \Rightarrow p = p_a - \rho g y$$

De aquí resulta

$$p_a a = (p_a - \rho g y)(a + h - y)$$

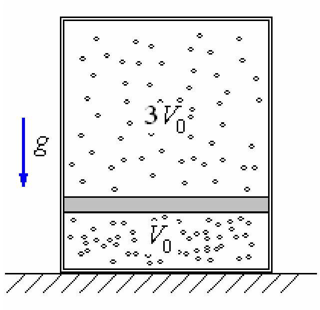
Reemplazando valores:

$$(1{,}033 \times 10^4)(1) = (1{,}033 \times 10^4 - 0{,}98 \times 10^4 y)(3{,}24 - y)$$

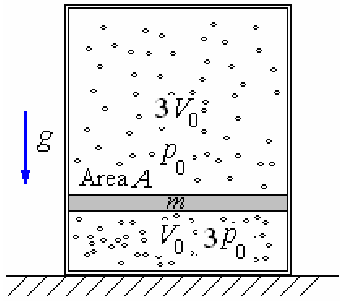
$$y = \begin{cases} 0{,}64 \\ 3{,}64 \end{cases}$$

La respuesta posible es y = 0,64 m.

Ejemplo 77. En un recipiente cilíndrico se encuentra en equilibrio un émbolo pesado. Por encima del émbolo y por debajo de él se hallan masas iguales de gas a temperatura idéntica. La relación entre el volumen superior y el inferior es igual a 3. ¿Cuál será la relación de los volúmenes si aumentamos la temperatura del gas al doble?



Solución.
Inicialmente



Arriba : $3V_0$, T_0, p_0

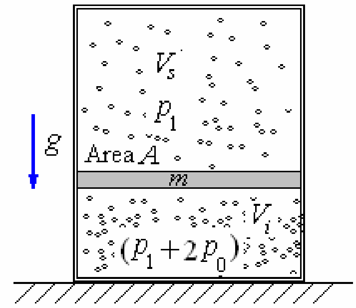
Abajo: V_0, T_0, $p_0 + \dfrac{mg}{A}$

Como las masas son iguales

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \dfrac{mg}{A}\right)V_0}{T_0} \Rightarrow \frac{mg}{A} = 2p_0$$

Luego $p_0 + \dfrac{mg}{A} = 3p_0$

Después de doblar la temperatura



Arriba : V_s, $2T_0$, p_1

Abajo: V_i, $2T_0$, $p_1 + 2p_0$

El volumen total es el mismo

$$V_i + V_s = 3V_0 + V_0 = 4V_0$$

En la parte superior

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_s}{2T_0} \Rightarrow p_1 = \frac{6p_0 V_0}{V_s}$$

En la parte inferior

$$\frac{3p_0 V_0}{T_0} = \frac{(p_1 + 2p_0)V_i}{2T_0} \Rightarrow V_i = \frac{6p_0 V_0}{(p_1 + 2p_0)}$$

$$V_i = \frac{6p_0V_0}{\left(\frac{6p_0V_0}{V_s} + 2p_0\right)} = \frac{3p_0V_0V_s}{(3V_0 + V_s)}$$

Como $V_i = 4V_0 - V_s$

Tenemos:

$$4V_0 - V_s = \frac{3p_0V_0V_s}{(3V_0 + V_s)}$$

$$\Rightarrow (4V_0 - V_s)(3V_0 + V_s) = 3p_0V_0V_s$$

$$\Rightarrow 12V_0^2 + 4V_0V_s - 3V_0V_s - V_s^2 = 3p_0V_0V_s$$

$$\Rightarrow 12V_0^2 - 2V_0V_s - V_s^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_s^2 + 2V_0V_s - 12V_0^2 = 0$$

Resolviendo:

$$V_s = -V_0 \pm \sqrt{V_0^2 + 12V_0^2} =$$

$$-V_0 \pm 3{,}6V_0 = \begin{cases} -4{,}6V_0 \\ 2{,}6V_0 \end{cases}$$

La respuesta posible es $V_S = 2{,}6V_0$, luego

$$V_i = 4V_0 - 2{,}6V_0 = 1{,}4V_0$$

Finalmente:

$$\frac{V_s}{V_i} = \frac{2{,}6V_0}{1{,}4V} = 1{,}86$$

Ejemplo 78. Una esfera de 20 cm de diámetro contiene un gas ideal a una presión de 1 atm y a 20 ºC. A medida que se calienta la esfera hasta 100 ºC se permite el escape de gas. Se cierra la válvula y se coloca la esfera en un baño de hielo a 0 ºC.

a) ¿cuántos moles de gas se escapan de la esfera al calentarse?

b) ¿Cuál es la presión en la esfera cuando está en el hielo?

Constante de los gases R = 0,082 litro atm/mol K

Respuesta. a) 0,04 moles; b) 0,695 atm

Solución.

a) 0,04 moles

$$V = \frac{4}{3}\pi(0{,}10)^3 = 4{,}19\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

p_1 = 1 atm = 1,033 x 10^5 Pa

T_1 = 20 ºC + 273,15 ºC = 293,15 K

$$n_1 = \frac{p_1V}{RT_1} = \frac{(1{,}033\times10^5)(4{,}19\times10^{-3})}{(8{,}314)(293{,}15)} = 0{,}178$$

moles

$p_2 = p_1$ = 1 atm = 1,033 x 10^5 Pa

T_2 = 100 ºC + 273,15 ºC = 373,15 K

$$n_2 = \frac{p_1V}{RT_2} = \frac{(1{,}033\times10^5)(4{,}19\times10^{-3})}{(8{,}314)(373{,}15)} =$$

0,139 moles

Escapan 0,1788 – 0,139 = 0,04 moles.

b) 0,695 atm

T_3 = 0 ºC + 273,15 ºC = 273,15 K

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \Rightarrow p_3 = \frac{T_3}{T_2}p_2 =$$

$$\frac{273{,}15}{373{,}15}1{,}033\times10^5 = 0{,}756 \times 10^5 = 0{,}732 \text{ atm}$$

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES IDEALES.

El concepto de los átomos y de las moléculas que eran los últimos bloques de edificio de la materia fue restablecido por Dalton para explicar las tres leyes de combinaciones químicas. En mediados del siglo diecinueve, estos conceptos, junto con ciertas asunciones con respecto la naturaleza, el tamaño, la distribución y a los movimientos de las moléculas y de los átomos, fueron sintetizados con la mecánica Newtoniana, para explicar el comportamiento de los gases ideales. Este trabajo realizado por Maxwell, Boltzman y otros, condujo al desarrollo de lo qué se conoce como la teoría cinética de gases.

Las asunciones de la teoría cinética son:

Cualquier gas se compone de un número muy grande de moléculas.

Las moléculas de un gas son idénticas, con respecto a la forma, tamaño y masa.

Las moléculas son esferas perfectamente rígidas del radio insignificante.

Las moléculas están en un estado incesante del movimiento caótico en todas las velocidades y direcciones posibles.

La distribución de moléculas es homogénea e isotrópica en cualquier envase que encierre el gas.

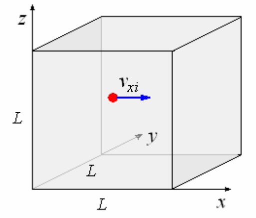
Las moléculas ejercen fuerzas una sobre otra solamente cuando chocan entre ellas o con las paredes del envase.

La colisión entre las moléculas o las moléculas y las paredes del envase son colisiones perfectamente elásticas, es decir, sólo tales colisiones pueden cambiar las direcciones del movimiento pero no de sus velocidades.

Entre las colisiones sucesivas las moléculas viajan libremente con velocidades constantes; la distancia viajada libremente se llama trayectoria libre. En promedio, la trayectoria libre media de todas las moléculas es igual.

La energía cinética media de una molécula es proporcional a la temperatura absoluta del gas.

Expresión para la presión ejercida por un gas.



Sea N el número de moléculas del gas ideal de masa M, encerrado en un cubo de lado L La molécula i se mueve con velocidad v_i , con v_{xi}, v_{yi} y v_{zi} son sus componentes x , y y z respectivamente.

Luego $v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$

Consideremos solamente la componente en x de la molécula i .

La fuerza ejercida por esta molécula a causa de sus colisiones periódicas con la pared cada $\Delta t = \dfrac{2L}{v_{xi}}$, y el cambio de cantidad de movimiento $-2mv_{xi}$ es:

$$f_{xi} = \frac{2mv_{xi}}{\Delta t} = \frac{2mv_{xi}}{2L/v_{xi}} = \frac{mv_{xi}^2}{L}$$

La fuerza sobre la pared debido a las N moléculas es:

$$F_x = \sum_{i=1}^{N} f_{xi} = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_{xi}^2}{L}$$

La presión sobre la pared es:

$$p_x = \frac{F_x}{L^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{mv_{xi}^2}{L}}{L^2} = \left(\frac{m}{L^3}\right)\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2$$

$$p_x = \left(\frac{m}{V}\right)\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2 , \quad (V = L^3 = \text{volumen del gas}).$$

$$p_x = \left(\frac{m}{V}\right)N\overline{v_x^2} \text{ , con } \begin{cases} V = L^3 \\ N\overline{v_x^2} = \sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2 \end{cases}$$

Siendo $v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$

Podemos promediar esta relación para todas las moléculas:

$$\overline{v_x} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

y como en nuestro modelo no hay una diferencia real entre las direcciones x , y y z debido a que las rapideces son muy altas en un gas típico, así que los efectos de la gravedad son despreciables. Se sigue que $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. Por lo tanto:

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$$

Con esta relación obtenemos:

$$p = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{V}\right)N\overline{v^2}$$

Ecuación del gas Ideal gas de la Teoría Cinética.

Considerando $p = \dfrac{1}{3}\dfrac{mN}{V}\overline{v^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{N}{V}\right)\left(\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}\right)$

Pero

$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}$ = Energía Cinética promedio de una molécula $\propto T$

Por consiguiente $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \dfrac{3}{2}k_BT$

La elección de la constante como $\dfrac{3}{2}k_B$ es mandataria para obtener la ecuación del gas ideal similar a la ya encontrada.

$$p = \frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{3}{2}k_BT\right) = \frac{Nk_BT}{V}$$

$$\Rightarrow \qquad pV = Nk_BT$$

Y también:

$$pV = Nk_BT = N\left(\frac{R}{N_a}\right)T = nRT$$

$$pV = nRT$$

La asunción $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \dfrac{3}{2}k_BT$ implica la interpretación de la energía térmica como energía mecánica de las moléculas, no obstante como concepto estadístico solamente; es decir, la temperatura es la manifestación del movimiento medio de una gran cantidad de moléculas; es absurdo decir $\dfrac{1}{2}m\overline{v_i^2} = \dfrac{3}{2}k_BT$ para cualesquier i.

ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL

Cuando añadimos calor a un cuerpo poniéndolo en contacto térmico con un cuerpo a mayor temperatura puede elevar su temperatura, fundirse o vaporizarse. Se pueden efectuar estos mismos cambios realizando trabajo que resulta en la disipación de energía mecánica por fricción.

Añadir calor y realizar trabajo sobre el cuerpo en tal forma de disipar energía son equivalentes en lo que concierne a efectos térmicos. Ambos, involucran una transferencia de energía.
La energía mecánica que se añade no desaparece, permanece dentro del cuerpo en forma de energía potencial y cinética asociada con los movimientos al azar de los átomos del cuerpo.
A esta energía térmica se le conoce como ENERGÍA INTERNA, a la que vamos a denotar con la letra *U*.

Como vimos anteriormente $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T$ indica que la energía cinética traslacional media por molécula depende solo de la temperatura; no de la presión, el volumen ni el tipo de molécula. Podemos obtener la energía cinética por mol multiplicando la ecuación por el número de Avogadro y usando la relación $M = N_A m$:

$$N_A \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}M\overline{v^2} = \frac{3}{2}RT$$ (energía cinética media por mol de gas)

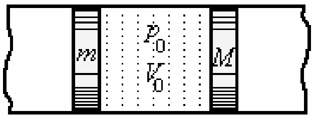
Esta ecuación ilustra un resultado general llamado el teorema del equipartición de la energía que dice que cada "grado de libertad" de un gas contribuye una cantidad de ½ $k_B T$ a la energía interna total. Un grado de libertad es un movimiento independiente que puede contribuir a la energía total. Por ejemplo, una molécula tal como O_2 tiene, en principio, 7 grados de libertad. Tres se asocian a la traslación a lo largo de los ejes *x*, *y*, y *z*, tres se asocian a rotaciones sobre los ejes *x*, *y*, y *z* , y uno se asocia a las vibraciones de la molécula a lo largo del eje de O-O (como las masas que vibran en los extremos de un resorte). Sin embargo, desde el momento de la inercia *I* para las rotaciones sobre el eje O-O es aproximadamente cero, las rotaciones sobre este eje no agrega casi nada a la energía $\left(K = 1/2\, I\omega^2\right)$.
Además, la mecánica cuántica demuestra que los modos vibratorios no están excitados apreciablemente sino hasta que la temperatura del gas es alta, así que para la mayoría de los propósitos asumimos que una molécula diatómica tiene 5 grados de libertad. Un gas monatómico como el helio tiene 3 grados de libertad.
La energía interna total de *n* moles de un gas monoatómico (con tres grados de libertad) es:

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

La energía interna total de n moles de un gas diatómico (con cinco grados de libertad) es:

$$U = \frac{5}{2}nRT$$

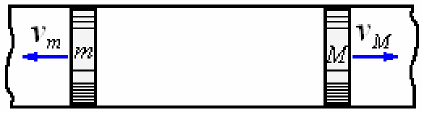
Ejemplo 79. En un tubo termo aislado liso e infinito se encuentran dos émbolos con masas *M* y *m*, entre los cuales hay un gas monoatómico de volumen V_0 a presión p_0. Los émbolos se dejan libres. Estímese sus velocidades máximas. Menospréciese la masa del gas en comparación con las masas de los émbolos.



Solución.
La energía interna del gas es

$$U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}p_0 V_0$$

Cuando se expande se convierte en energía cinética de los émbolos



$$K = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 \qquad (1)$$

Cantidad de movimiento inicial: 0
Cantidad de movimiento final: $Mv_M - mv_m$
Cantidad de movimiento inicial = Cantidad de movimiento final.

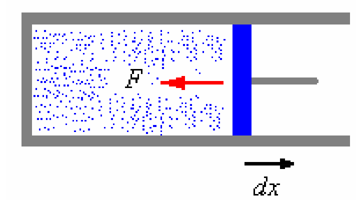
$$0 = Mv_M - mv_m \Rightarrow Mv_M = mv_m \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$v_M = \sqrt{\frac{3p_0V_0m}{M(M+m)}}, \quad v_m = \sqrt{\frac{3p_0V_0M}{m(M+m)}}$$

TRABAJO REALIZADO POR UN GAS

Consideremos, por ejemplo, un gas dentro de un cilindro. Las moléculas del gas chocan contra las paredes cambiando la dirección de su velocidad, o de su momento lineal. El efecto del gran número de colisiones que tienen lugar en la unidad de tiempo, se puede representar por una fuerza *F* que actúa sobre toda la superficie de la pared



Si una de las paredes es un pistón móvil de área *A*, y éste se desplaza *dx*, el intercambio de energía del sistema con el mundo exterior puede expresarse como el trabajo realizado

$dW = Fdx$ y $F = pA$

Se tiene:

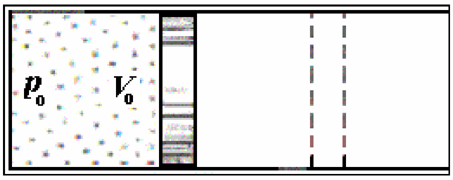
$$dW = (pA)dx = p(Adx) \Rightarrow dW = pdV$$

Siendo *dV* el cambio del volumen del gas.

Expresión que nos permite al integrarla, calcular e trabajo entre dos estados, conociendo la relación entre la presión y el volumen.

$$W_{A\to B} = \int_A^B pdV$$

Ejemplo 76. En cierto cilindro un émbolo móvil encierra un volumen V_o con presión p_o. El émbolo se deja libre. ¿Qué trabajo ejecutará el gas sobre el émbolo?, si el volumen del gas, al desplazarse el émbolo, aumenta al doble, en tanto que la presión del gas en este caso:
a) permanece constante;
b) crece linealmente hasta la presión $2p_o$ a medida que aumenta el volumen.

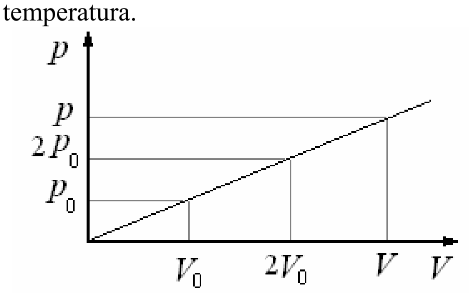


Solución.
a) p = constante

$$W = \int pdV \;\Rightarrow\; W = p_o\int_{V_o}^{2V_o} dV = p_o V\Big|_{V_0}^{2V_0}$$

$$= W = p_0(2V_0 - V_0) = p_0 V_0$$

b) El gráfico muestra la relación lineal de la presión y la temperatura.



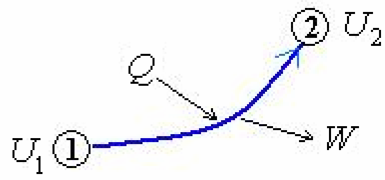
$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = \frac{2p_0 - p_0}{2V_0 - V_0} = \frac{p_0}{V_0} \;\Rightarrow\; p = \frac{p_0}{V_0}V$$

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{p_0}{V_0} VdV$$

$$= \frac{p_0}{V_0}\frac{V^2}{2}\Bigg|_{V_0}^{2V_0} = \frac{p_0}{2V_0}\left(4V_0^2 - V_0^2\right)$$

$$= \frac{3}{2}p_0 V$$

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA.
Como ya hemos dicho la transferencia de calor y la realización de trabajo constituyen dos formas o métodos de transferir, suministrar o quitar, energía a una sustancia, o sea, representa energía en tránsito y son los términos utilizados cuando la energía está en movimiento. Una vez que la transferencia de energía termina se dice que el sistema ha experimentado un cambio de energía interna.
Supongamos un sistema al que se hace pasar del estado de equilibrio 1 al 2, mediante un determinado proceso termodinámico y durante el cual medimos el calor absorbido Q y el trabajo realizado W.



Estas cantidades dependen no solamente de las características de los estados inicial y final, sino también de los estados intermedios del camino en particular seguido en el proceso. Sin embargo, si calculamos la diferencia $Q - W$ para ir del estado de equilibrio y al 2 por diferentes caminos, encontramos siempre el mismo valor.
Por consiguiente la diferencia $Q - W$ representa la variación de energía interna del sistema, si asociamos un número con cada estado de equilibrio de tal modo que sirva como medida de esta cantidad, podemos escribir

$$U_2 - U_1 = Q - W$$

Expresión que constituye el primer principio de la termodinámica.

o $Q = (U_2 - U_1) + W$

Tenga en cuenta que Q y W deben expresarse en las mismas unidades, ya sean de calor o trabajo.
También que Q es positivo cuando el sistema recibe (entra) calor y W es positivo cuando el sistema realiza (sale) trabajo.
Note que la convención de signos que estamos utilizando aquí en este capítulo para el trabajo es opuesta a la utilizada en la Mecánica., donde W es positivo cuando es hecho sobre el sistema. Este cambio obedece a la costumbre o tradición, dado que el. Propósito de las máquinas as hacer trabajo y a este 1o llamamos en la vida diaria trabajo útil o positivo. Por otro lado la convención de signos de: Q es consistente con este hecho, cuando una máquina disipa o pierde calor es indeseable o negativo.
La forma descrita se aplica cuando los valores de la presión, volumen y temperatura correspondientes a los estados 1 y 2 difieren en cantidades finitas. Si los estados 1 y 2 varían infinitesimalmente, el primer principio toma la forma

$$dQ = dU + dW$$

Si el sistema de tal naturaleza que el único trabajo se realiza mediante una expansión o compresión

$$dQ = dU + pdV$$

Dado que: $dW = pdV$

CALOR ESFECÍFICO DEL GAS IDEAL
Antes de ver las principales transformaciones de los gases veamos el calor específico de un gas ideal a volumen constante y a presión constante.

Las capacidades caloríficas mas importantes son las que se determinan cuando los procesos se realizan a volumen constante (C_V) o a presión constante (C_p)

Calor específico a volumen constante.
Sea $(dQ)_V$ una pequeña cantidad de calor que absorbe un gas a volumen constante $(dV = 0)$. Por lo tanto no se realiza trabajo $(dW = 0)$, aplicando el primer principio de la termodinámica, $dQ = dU + dW$, obtenemos:

$$(dQ)_V = dU$$

Como: $C_V = \frac{(dQ)_V}{dT}$

De aquí la capacidad calorífica a volumen constante,

$$C_V = \frac{(dQ)_V}{dT} = \frac{dU}{dT}$$

Para un gas ideal monoatómico:

$U = \frac{3}{2}nRT$, luego,

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}nR$$

Calor específico a presión constante.
De igual modo si $(dQ)_p$ es una pequeña cantidad de calor que absorbe un gas a presión constante, aplicando el primer principio de la termodinámica

$$(dQ)_p = dU + (dW)_p$$

Donde $(dW)_p = pdV \Rightarrow$

$$(dQ)_p = dU + pdV$$

Como $C_p = \frac{(dQ)_p}{dT}$

De esto obtenemos: $C_p = \frac{dU}{dT} + p\frac{dV}{dT}$

y como $C_V = \frac{dU}{dT}$, $C_p = C_V + p\frac{dV}{dT}$

para un gas ideal $pV = nRT$

A presión constante, $dp = 0$, luego

$$pdV = nRdT \Rightarrow p\frac{dV}{dT} = nR$$

Luego, $C_p = C_V + nR$

Para un gas monoatómico:

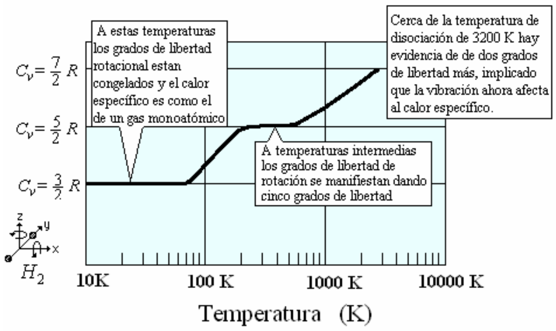
$$C_p = \frac{3}{2}nR + nR = \frac{5}{2}nR$$

También como $C_p = C_V + nR$,

La capacidad calorífica por mol

$$c_p = c_V + R$$

Calor específico del hidrógeno
El comportamiento del calor específico del hidrógeno con el cambio de temperatura es sumamente desconcertante a inicios del siglo XX. En bajas temperaturas que se comporta como un gas monoatómico, pero a temperaturas más altas su calor específico asume un valor similar a otras moléculas diatómicas. Tomó el desarrollo de la teoría cuántica para demostrar que el hidrógeno diatómico, con su pequeña inercia de rotación, requiere una gran cantidad de energía para excitar su primera rotación molecular de estado cuántico. Dado que no puede obtener esa cantidad de energía a bajas temperaturas, actúa como un gas monoatómico



PROCESOS TERMODINÁMICOS.
El estado de un gas cualquiera o una mezcla de gases está determinado por su temperatura, su presión y su volumen. En el caso del gas ideal estas variables se unen por la relación para un mol de gas.

$$pV = RT$$

La especificación del estado de un gas presupone:
a) Equilibrio térmico. La temperatura es uniforme en todo el sistema e igual a la del recipiente;
b) Equilibrio mecánico. La fuerza ejercida por el sistema sobre el recipiente es uniforme en toda su superficie y es contrabalanceada por tuerzas externas;
c) Equilibrio químico. La estructura interna del sistema y su composición química no varían de un punto a otro.
Un estado que satisfaga estas condiciones se denomina estado de equilibrio termodinámico y sus variables satisfacen la ecuación anterior. Si queremos usar la ecuación de estado durante una transformación, es necesario que el sistema no se aleje mucho de las condiciones de equilibrio; esto se consigue procurando que la transformación se realice en una sucesión de estados de equilibrio poco diferentes entre sí; este proceso se llama cuasi estático; durante la transformación, el sistema está en todos los instantes en una proximidad infinita al estado de equilibrio. Esto se consigue, en general, haciendo los cambios en forma suficientemente lenta para que el sistema entre en equilibrio después de cada modificación (en rigor, una transformación exigiría un tiempo infinito para su realización).

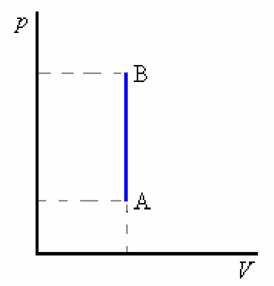
La energía interna U del sistema depende únicamente del estado del sistema, en un gas ideal depende solamente de su temperatura. Mientras que la transferencia de calor o el trabajo mecánico dependen del tipo de transformación o camino seguido para ir del estado inicial al final.

Isocórico o a volumen constante

No hay variación de volumen del gas, luego

$W = 0$, $Q = nc_V\left(T_B - T_A\right)$

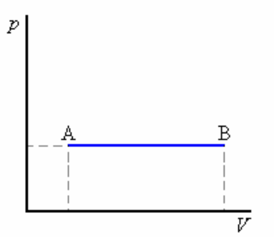
Donde c_V es el calor específico a volumen constante



Isobárico o a presión constante

$W = p\left(V_B - V_A\right)$, $Q = nc_p\left(T_B - T_A\right)$

Donde c_p es el calor específico a presión constante



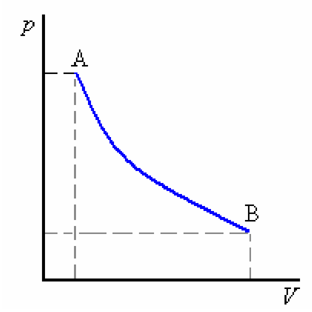
Isotérmico o a temperatura constante

$pV = nRT$

La curva $p = \dfrac{\text{constante}}{V}$, representa la transformación en un diagrama $p - V$ es una hipérbola cuyas asíntotas son los ejes coordenados

$$W = \int_{V_A}^{V_B} pdV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$\Delta U = 0$, $Q = W$



Ejemplo 80. Expansión libre de un gas.
Un recipiente de paredes rígidas y completamente aisladas está dividido en dos por medio de una pared. Una parte contiene gas y la otra está evacuada. Si la pared que los separa se rompe súbitamente, mostrar que la energía interna final y la inicial son iguales.

Solución.

Según el primer principio de la termodinámica:

$Q = \left(U_2 - U_1\right) + W$

Como el sistema está aislado Q es cero, o sea

$\left(U_2 - U_1\right) + W = 0$

el trabajo W realizado sobre el sistema también es cero. Note que el gas inicialmente tenía un volumen V y una presión p y finalmente un volumen V y una presión $p/2$.

Luego:

$\left(U_2 - U_1\right) = 0 \Rightarrow U_2 = U_1$

Ejemplo 81. Una cámara al vacío hecha de materiales aislantes se conecta a través de una válvula a la atmósfera, donde la presión es p_0. Se abre la válvula y el aire fluye a la cámara hasta que la presión es p_0. Probar que $u_f = u_0 + p_o V_0$, donde u_0 y V_0 es la energía interna molar y volumen molar de temperatura y presión de la atmósfera.

u_f es la energía interna molar del aire en la cámara.

Solución.

Inicialmente la cámara tenía un volumen cero de aire, al final se encuentra llena de aire y el trabajo por mol realizado sobre el sistema sería $- p_o V_0$.

Como está aislado no ha habido pérdida ni ganancia de calor.

Aplicando el primer principio de la termodinámica:

$Q = \left(U_2 - U_1\right) + W$

Obtenemos por mol

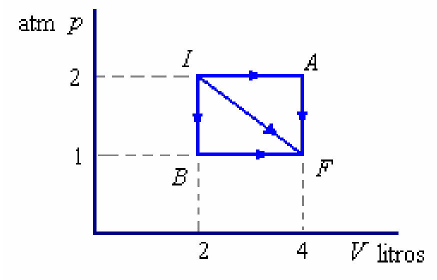
$0 = \left(u_f - u_0\right) - p_o V_0$

Finalmente:

$u_f = u_0 + p_o V_0$

Ejemplo 82. Un gas se expande desde I a F por tres posibles trayectorias como se indica en la figura.

Calcule el trabajo realizado por el gas a lo largo de las trayectorias *IAF*, *IF* y *IBF*.



Solución.

a) $W_{IAF} = \int_i^f pdV$ = 2 x (4 - 2)

= 4 litro atm = 4 x 101,33 J = 405,32 J

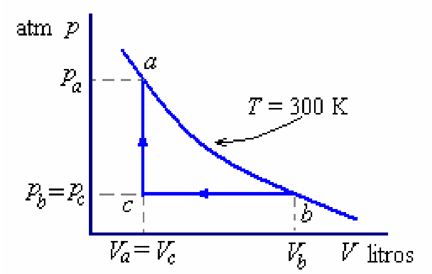
b) $W_{IF} = \int_i^f pdV = 2\times 1 + \frac{1}{2}(1\times 2)$

= 3 litro atm = 3 x 101,33 J = 304 J

c) $W_{IBF} = \int_i^f pdV = 2\times 1$

= 2 litro atm = 2 x 101,33 J = 202,7 J

Ejemplo 83. Una muestra de un gas ideal de 1 mol se lleva a través de un proceso termodinámico cíclico, como se muestra en la figura. El ciclo consta de tres partes, una expansión isotérmica (*a* - *b*), una compresión isobárica (*b* - *c*) y un aumento de la presión a volumen constante (*c* -*d*). Si T = 300 K, p_a = 5 atm, $p_b = p_c$ = 1 atm, determine el trabajo realizado por el gas durante el ciclo.



Solución.

$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca}$

Para una expansión isotérmica *ab*

$$W_{ab} = \int_a^b pdV = \int_a^b nRT\frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_a}{V_b}$$

$$= nRT\ln\frac{p_a}{p_b}$$

Para la compresión isobárica bc

$W_{bc} = p_b(V_c - V_a)$

Para la compresión isocórica *ca* no hay trabajo.

$W_{ca} = 0$

De tal manera:

$$W = nRT\ln\frac{p_a}{p_b} + p_c(V_c - V_a)$$

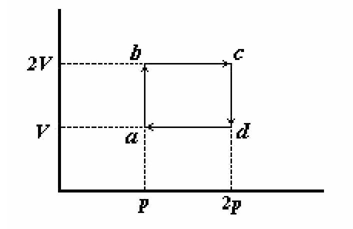
$$= nRT\ln\frac{p_a}{p_b} + p_b\left(\frac{nRT}{p_a} - \frac{nRT}{p_b}\right)$$

$$= nRT\left[\ln\frac{p_a}{p_b} + \left(\frac{p_b}{p_a} - 1\right)\right]$$

$$= RT\left[\ln 5 + \left(\frac{1}{5} - 1\right)\right]$$

= 19,9 l atm = 2017,5 J

Ejemplo 84. La figura muestra un ciclo donde *a* es el estado inicial del sistema.
Las energías internas de los estados son: U_a = 10 J, U_b = 35 J, U_d = 39 J.
En el proceso $b \to c$, el trabajo realizado por el gas es + 91 J.



Encontrar:
a) El calor añadido al sistema durante el proceso $b \to c$.
b) El calor removido en el proceso $d \to a$.

Solución.

Usando la ley del gas ideal $\frac{pV}{T} = \text{constante}$, podemos encontrar una relación entre las temperaturas en *a, b, c* y *d*.
Si $T_a = T$, $T_b = 2T$, $T_c = 4T$ y $T_d = 2T$

a) $Q_{bc} = C_p(T_c - T_b)$

$= C_p(4T - 2T) = 2C_pT$

Por la segunda ley de la termodinámica:

$U_c - U_b = Q_{bc} - W_{bc} \Rightarrow$

$U_c - 35 = Q_{bc} - 91$

Por otra parte en el proceso $a \to b$:

$U_b - U_a = Q_{ab} - W_{ab}$

$\Rightarrow 35 - 10 = Q_{ab} - 0$

y $Q_{ab} = 25$ J y también

$Q_{ab} = C_V(T_b - T_a) = C_V(2T - T) = C_VT$

luego $C_VT = 25$ J

En el proceso $c \to d$:

$U_d - U_c = Q_{cd} - W_{cd} \Rightarrow 39 - U_c = Q_{cd} - 0$

Como

$Q_{cd} = C_V(T_d - T_c) \Rightarrow$

$Q_{cd} = C_V(2T - 4T) = -2C_VT$

y $Q_{cd} = -2\times 25 = -50$ J

con lo que encontramos

$$U_c = 39 - Q_{cd} = 39 + 50 = 89 \text{ J}$$

Finalmente:

$$Q_{bc} = U_c - 35 + 91 = 89 - 35 + 91 = 145 \text{ J}$$

$$Q_{bc} = 145 \text{ J}$$

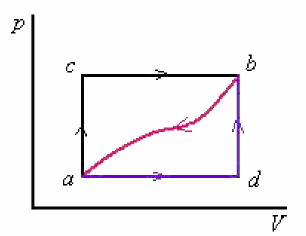
b) $Q_{da} = U_a - U_d + W_{da}$

$$Q_{da} = C_p(T_a - T_d) = C_p(T - 2T) = -C_p T$$

Como $Q_{bc} = 145J = 2C_p T$

Luego $Q_{da} = -C_p T = -\dfrac{145}{2} = -72{,}5 \text{ J}$

Ejemplo 85. En la figura se muestran diversas trayectorias entre los estados de equilibrio *a*, *b*, *c* y *d*, en un diagrama *p*-*V*.



a) Cuando el sistema pasa de1 estado *a* al *b* a lo largo de la trayectoria *a*, *c*, *b* recibe 20000 calorías y realiza 7500 cal de trabajo. Calcular el cambio de energía interna $(U_b - U_a)$.
b) ¿Cuánto calor recibe el sistema a lo largo de la trayectoria *adb*, si el trabajo realizado es 2500 cal?
c) Cuando el sistema vuelve de b hacia a, a lo largo de la trayectoria curva *ba*, el trabajo realizado es 5000 cal. ¿Cuánto calor absorbe o libera el sistema?
d) Si $U_a = 0$ y U_d = 10000 cal., hállese el calor absorbido en los procesos *ad* y *db*.

Solución.

a) Por la trayectoria *acb*, se tiene:
Q = 20000 cal.
W = 7500 cal.
Luego,

$$U_b - U_a = Q - W \Rightarrow$$

$U_b - U_a$ = 20000 – 7500 = 12500 cal.

b) Por la trayectoria *adb*, W = 2500 cal.

$$Q = (U_b - U_a) + W$$

Q = 12500 + 2500
Q_{adb} = 15000 cal. (absorbido)

c) Para la trayectoria *ba*,
W = + 5000 cal.
Luego,

$$Q = (U_a - U_b) + W$$

Q = - 12500 + 5000
Q_{ba} = - 7,500 cal. (libera)

d) Si $U_a = 0$ y U_d = 10,000 cal,
$U_d - U_a$ = 10000 cal. Además, observe que al ir por la trayectoria *adb* solo se hace trabajo en *ad* y no en *db*, o sea, se tiene que:

$W_{ad} = W_{adb}$ = 2500 cal.

Luego

$$Q_{ad} = (U_d - U_a) + W_{ad}$$

Q_{ad} = 10000 + 2500 = 12500 cal. (absorbido)

Como encontramos que

Q_{adb} = 15000 y $Q_{adb} = Q_{ad} + Q_{db}$

Obtenemos

Q_{db} = 15000 – 12500 = 2500 cal. (Absorbido)

Esta última cantidad también podría encontrarse teniendo en cuenta que:

$$W_{db} = 0$$

Y como en (a) hemos determinado que

$U_b - U_a$ = 12,500 cal.

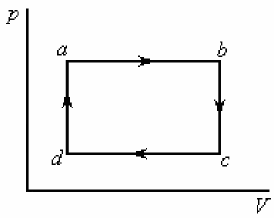
Si $U_a = 0$, se tiene que U_b = 12500, luego

$U_b - U_d$ = 12500 – 10000 = 2500 cal.

Finalmente

$Q_{db} = (U_b - U_d) + W_{db}$ = 2500 cal.

Ejemplo 86. Un mol de un gas ideal se encuentra en un estado inicial p = 2 atm y V = 10 litros indicado por el punto *a* en el diagrama *pV* de la figura. El gas se expande a presión constante hasta el punto *b*, cuyo volumen es 30 litros y luego se enfría a volumen constante hasta que su presión es de 1 atm en el punto *c*.
Entonces se comprime a presión constante hasta alcanza su volumen original en el punto *d* y finalmente se calienta a volumen constante hasta que vuelve a su estado original.
a) Determinar la temperatura de cada estado *a*, *b*, *c* y *d*.
b) Determinar el calor añadido a lo largo de cada una de las etapas del ciclo.
c) Calcular el trabajo realizado a lo largo de cada trayectoria.
d) Determinar la energía de cada estado *a*, *b*, *c* y *d*.
e) ¿Cuál es el trabajo neto realizado por el gas en el ciclo completo?



Solución.

a) Por la ley del gas ideal: $pV = nRT \Rightarrow$

$$T = \frac{pV}{nR}$$

$n = 1$, $R = 0{,}0821 \dfrac{\text{litro.atm}}{\text{mol.K}}$

En a $\begin{cases} p_a = 2\,\text{atm} \\ V_a = 10\,\text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{2 \times 10}{0{,}0821}$ = 243,6 K

En b $\begin{cases} p_b = 2\,\text{atm} \\ V_b = 30\,\text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{2 \times 30}{0{,}0821}$ = 730,8 K

En c $\begin{cases} p_c = 1\,\text{atm} \\ V_c = 30\,\text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{1 \times 30}{0{,}0821}$ = 365,4 K

En d $\begin{cases} p_d = 1\,\text{atm} \\ V_d = 10\,\text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{1 \times 10}{0{,}0821}$ = 121,8 K

b)

De $a \to b$ (presión constante)

El calor suministrado es $Q = C_p \Delta T$

Siendo gas ideal (gas monoatómico)

$$C_p = \frac{5}{2} nR$$

Como $n = 1$, y $R = 2 \dfrac{\text{cal}}{\text{mol K}} \Rightarrow C_p = 5 \dfrac{\text{cal}}{\text{K}}$

ΔT = 730,8 – 243,6 = 487,2 K

$Q = (5)(487{,}2)$ = 2436 calorías

De $b \to c$ (volumen constante)

El calor suministrado es $Q = C_V \Delta T$

Siendo gas ideal (gas monoatómico)

$$C_p = \frac{3}{2} nR$$

Como $n = 1$, y $R = 2 \dfrac{\text{cal}}{\text{mol K}}$

$$\Rightarrow C_p = 3 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

ΔT = 365,4 – 730,8 = -365,4 K

$Q = (3)(-365{,}4)$ = -1096,2 calorías

De $c \to d$ (presión constante)

El calor suministrado es $Q = C_p \Delta T$

ΔT = 121,8 – 365,4 = - 243,6 K

$Q = (5)(-243{,}6)$ = -1218 calorías

De $d \to a$ (volumen constante)

El calor suministrado es $Q = C_V \Delta T$

ΔT = 243,6 – 121,8 = 121,8 K

$Q = (3)(121{,}8)$ = 365,4 calorías

c)

De $a \to b$ (presión constante)

El trabajo es $W = p(V_b - V_a)$

$W = 2(30 - 10)$ = 40 litro atm

Como 1 litro-atm = 101,3 J = 24,2 cal:

W = 4052 J = 968 calorías (trabajo del sistema)

De $b \to c$ (volumen constante)

El trabajo es $W = 0$, (no hay trabajo).

De $c \to d$ (presión constante)

El trabajo es $W = p(V_d - V_c)$

$W = 1(10 - 30)$ = - 20 litro atm

W = - 2026 J = - 484 calorías (trabajo sobre el sistema)

De $d \to a$ (volumen constante)

El trabajo es $W = 0$, (no hay trabajo).

d) Como

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

$$= \frac{3}{2} (1\text{mol}) \left(2 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \right) T$$

$$= 3T$$

$U_a = 3T_a = 3(243{,}6K)$ = 730,8 cal

$U_b = 3T_b = 3(730{,}8K)$ = 2192,4 K

$U_c = 3T_c = 3(365{,}4K)$ = 1096,2 K

$U_d = 3T_d = 3(121{,}8K)$ = 365,4 K

e) Trabajo neto = $W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$

= 4052 + 0 – 2026 + 0 = 2026 J

= 487 cal

Calor absorbido = $Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{cd} + Q_{da}$

= 2436 – 1096,2 – 1218 +365,4

= 487 cal

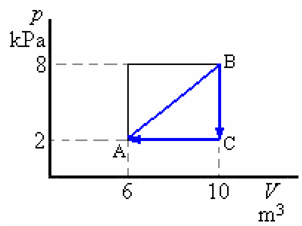
Trabajo neto = calor absorbido

= Calor que entra – calor que sale.

Ejemplo 87. Considere el proceso cíclico descrito en la figura. Si Q es negativo para el proceso BC y ΔU es negativo para el proceso CA:

a) determine los signos de Q asociados a cada proceso.

b) determine los signos de W asociados a cada proceso.



Solución.

a) Q_{AB} = positivo

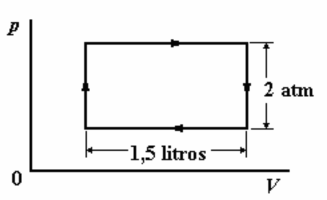
Q_{BC} = negativo (Dato)

$(U_C - U_B) = Q_{BC} - W_{BC} = Q_{CA}$ = negativo

$(U_A - U_B) = Q_{CA} - W_{CA} \Rightarrow = Q_{CA} = (U_A - U_C) + W_{CA}$ = (-) + (-) = negativo

b) W_{AB} = positivo
W_{BC} = 0 (A volumen constante)
W_{CA} = 2 (6-10) = -8 = negativo

Ejemplo 88. Un cilindro contiene un gas ideal a una presión de 2 atmósferas, el volumen es de 5 1itros a una temperatura del gas de 250 K. El gas se calienta a volumen constante hasta una presión de 4 atmósferas, y luego a presión constante hasta una temperatura de 650 K. Calcular el calor total recibido durante estos procesos. Para el gas el c_v es 21,0 J /mol K
Luego el gas entonces es enfriado a vo1umen constante hasta su presión original y después a presión constante se lleva el gas hasta su volumen original.
a) Encuentre la salida de calor total durante estos procesos y
b) el trabajo total hecho por el gas en el proceso cíclico del conjunto.
Solución.

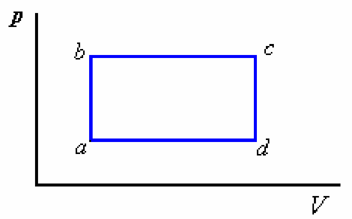


La ecuación del gas ideal permite el cálculo del número de los moles originalmente presentes.

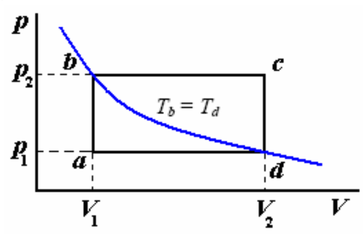
$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{2\text{atm} \times 5\text{litro}}{0{,}0821\,\text{litro atm/mol.K}}$$
= 0,487 mol

También $C_p = C_V + nR$, la capacidad calorífica por mol $c_p = c_v + R$.
a) $c_p = c_v + R$ = (21,0+ 8,317)J/mol K
= 29,317 J/mol K
En el primer cambio p/T es constante y luego, como p se duplica, T se duplica también a 500 K.
La entrada de calor por lo tanto es:
$Q_1 = nc_v(T_2 - T_1)$
= 0,487 mol x 21,0 J/ mol K x (500 – 250)K
= 2558 J.
En el Segundo cambio V/T es constante y, como T *se* incrementa en la razón 650/500, entonces V se hace 6,5 1itros. La entrada de calor por lo tanto es:
$Q_2 = nc_p(T_3 - T_2)$
= 0,487 mol x 29,317 J/mol K x(650 – 500)K
= 2143 J.
La entrada de calor total durante estos dos procesos es $Q = Q_1 + Q_2$ = 4701 J.
Durante el primer proceso de enfriamiento p se hace la mitad, y T también se hace la mitad 325 K. La salida de calor es
$Q'_1 = nc_v (T_3 - T_4)$
= 0,487 mol x 21,0 J /mol K x (650- 325)K
= 3325 J.
En el Segundo proceso de enfriamiento V se reduce en la razón de 5/6,5, y T se hace 250K, la temperatura original, como se esperaba. La salida de calor es por lo tanto:
$Q'_2 = nc_p(T_4 - T_1)$
= 0,487 mol x 29,317 J/ mol K (325 – 250)K
= 1072 J.
La salida de calor total durante el proceso de enfriamiento es.
$Q' = H'_1 + H'_2$= 4397 J.
La diferencia entre el calor de entrada y el de salida es 304 J. Esto debe aparecer como trabajo hecho por el gas, puesto que la energía interna del gas debe ser igual al principio y en el final de un proceso de cíc1ico.
b) La cantidad 304 J debería estar de acuerdo con el valor del área dentro de la curva del ciclo, que representa el trabajo hecho por el gas. Es un rectángulo de alto 2 atm y largo1,5 litros. El área bajo ésta curva es:
W = 2 x1,013 x 10^6dinas/cm x 1,5 x 10^3 cm^3
= 3,04 x 109 ergios = 304 J,
Lo que esta de acuerdo con el ingreso.

Ejemplo 89. Sobre un mol de gas se realiza un ciclo cerrado que consta de dos isócoras y dos isóbaras. Las temperaturas en los puntos a y c son T_a y T_c. Determínese el trabajo que efectúa el gas durante dicho ciclo, si se sabe que los puntos b y d yacen en una isoterma



Solución.



$$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$$
$$W_{ab} = 0,\ W_{bc} = p_2(V_2 - V_1),\ W_{cd} = 0,$$
$$W_{da} = -p_1(V_2 - V_1),$$
$$W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$$
$$W = p_2V_2 - p_2V_1 - p_1V_2 + p_1V_1$$
Por la de los gases ideales $p_2V_2 = RT_c$.
$$p_2V_1 = RT_b,\ p_1V_2 = RT_d,\ p_1V_1 = RT_a$$
$$W = R(T_c - T_b - T_d + T_a)$$
Como $T_b = T_d$
$$W = R(T_c + T_a - 2T_b)$$
De las relaciones

$$\frac{p_1}{T_a}=\frac{p_2}{T_b} \rightarrow \frac{p_1}{p_2}=\frac{T_a}{T_b} \text{ y}$$

$$\frac{p_1}{T_d}=\frac{p_2}{T_c} \rightarrow \frac{p_1}{p_2}=\frac{T_d}{T_c}$$

$$\frac{T_a}{T_b}=\frac{T_d}{T_c} \rightarrow T_aT_c=T_bT_d$$

Con $T_b = T_d \Rightarrow T_aT_c = T_b^2$

Finalmente $\sqrt{T_aT_c}=T_b$

Con lo que obtenemos

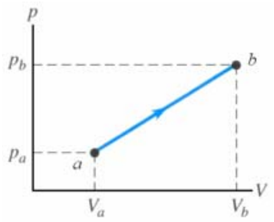
$$W = R\left(T_c + T_a - 2\sqrt{T_aT_c}\right)$$

$$= R\left(\sqrt{T_c}-\sqrt{T_a}\right)^2$$

Ejemplo 90. Una cantidad de aire se lleva del estado a al b siguiendo una trayectoria recta en una gráfica pV.

a) En este proceso ¿la temperatura del gas: aumenta, disminuye o no cambia? Explique.

b) Si $V = 0{,}0700$ m^3, $V_b = 0{,}1100$ m^3, $p_a = 1{,}00 \times 10^5$ Pa y $p_b = 1{,}40 \times 10^5$ Pa, ¿cuánto trabajo efectúa el gas en este proceso. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal.



Solución.

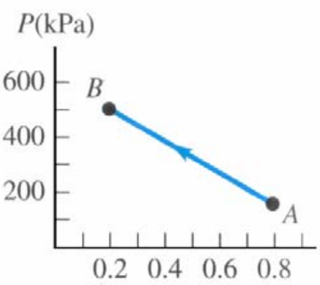
a) El producto pV se incrementa, y aun para un gas no ideal, esto indica un incremento de temperatura.

b) El trabajo es el área encerrada bajo la línea que representa el proceso y las verticales en V_a y V_b. El área del trapezoide es:

$$\frac{1}{2}(p_b + p_a)(V_b - V_a)$$

$$= \frac{1}{2}(2{,}40\times10^5)(0{,}0400) = 400 \text{ J}$$

Ejemplo 91. Cuatro moles de O_2 se llevan de A a B con el proceso que muestra en una gráfica pV de la figura. Suponga que el tiene comportamiento ideal. Calcule el flujo de calor Q durante este proceso. ¿Entra calor en el gas o sale de él?



Solución.

El trabajo es el área bajo la trayectoria de A a B en el gráfico pV. El volumen disminuye, tal que $W <$ 0.

$$W = -\tfrac{1}{2}(500\times10^3 + 150\times10^3)(0{,}60)$$

$= -1{,}95 \times 10^5$ J

$$\Delta U = nC_V\,\Delta T$$

Con $T_1 = \dfrac{p_1V_1}{nR}, T_2 = \dfrac{P_2V_2}{nR}$

$$\Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{nR}$$

$$\Delta U = \left(\frac{C_V}{R}\right)(p_2V_2 - p_1V_1)$$

$$\Delta U = \left(\frac{20{,}85}{8{,}315}\right)\left[\left(5\times10^5\right)(0{,}20) - \left(1{,}5\times10^5\right)(0{,}80)\right]$$

$= -5{,}015 \times 10^4$ J

Luego $\Delta U = Q - W$

$\Rightarrow Q = \Delta U + W = -0{,}5015 \times 10^5 - 1{,}95 \times 10^5$

$= -2{,}45 \times 10^5$

Q es negativo, el calor fluye fuera del gas.

Ejemplo 92. Sea 20,9 J el calor añadido a determinado gas ideal. Como resultado, su volumen cambia de 63,0 a 113 cm^3 mientras que la presión permanece constante a 1,00 atm.

a) ¿En cuánto cambió la energía interna del gas?

b) Si la cantidad de gas presente es de $2{,}00 \times 10^{-3}$ mol, halle la capacidad calorífica molar a presión constante.

c) Halle la capacidad calorífica molar a volumen constante.

Solución.

a) $\Delta U = Q - W$

$Q = 20{,}9$ J,

$$W = p(V_2 - V_1) \Rightarrow$$

$$W = 1{,}013\times10^5 \frac{N}{m^2}(113-63)\times10^{-6}m^3$$

$W = 5{,}06$ J

b) $Q = nC_p(T_2 - T_1)$

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{nR} = \frac{1{,}013\times10^5\times63\times10^{-6}}{2{,}00\times10^{-3}\times8{,}31} = 384 \text{ K}$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1{,}013\times10^5 \times 113\times10^{-6}}{2{,}00\times10^{-3}\times 8{,}31} = 689\ \text{K}$$

$$20{,}9 = 2{,}00\times10^{-3} C_p (689 - 384)$$

$$C_p = \frac{20{,}9\times10^3}{2\times305} = 34{,}3\frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

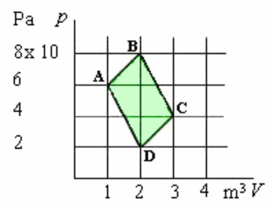
$$C_p = \frac{20.9\times10^3}{2\times305} = 34{,}3\frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

c)

$$C_V = C_p - R \Rightarrow$$

$$C_V = 34{,}3 - 8{,}31 = 26\frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

Ejemplo 93. Una mol de un gas ideal monoatómico es llevado cuasiestáticamente desde el estado A recorriendo el ciclo ABCDA, tal como se muestra en la figura.
Hallar:
a) La temperatura en A
b) El trabajo total.



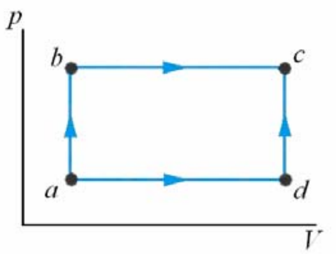
Solución.

a) $pV = n\,RT$, y $T = \dfrac{pV}{nR}$, en el punto A:

$$T_A = \frac{6\times10^3\times1}{1\times8{,}31} = 722\ \text{K}$$

b) Trabajo total = Area ABCDA
= (3,5 + 3 – 2 – 1,5)2 = 6,0 kJ

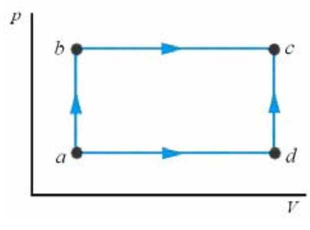
Ejemplo 94. Un sistema termodinámico se lleva del estado *a* al estado *c* de la figura siguiendo la trayectoria *abc* o bien la trayectoria *adc*. Por la trayectoria *abc*, el trabajo *W* efectuado por el sistema es de 450 J. Por la trayectoria *adc*, *W* es de 120 J. Las energías internas de los cuatro estados mostrados en la figura son: U_a = 150 J, U_b = 240 J, U_c = 680 J y U_d = 330 J. Calcule el flujo de calor *Q* para cada uno de los cuatro procesos: *ab*, *bc*, *ad* y *dc*. En cada proceso, ¿el sistema absorbe o desprende calor?



Solución.

Para cada proceso, $Q = \Delta U + W$. No se realiza trabajo en los procesos *ab* y *dc*, también $W_{bc} = W_{abc}$ y $W_{ad} = W_{adc}$.
El calor para cada proceso es,
para *ab* $Q_{ab} = 90\ \text{J}$,
para *bc* $Q_{bc} = 440\ \text{J} + 450\ \text{J} = 890\ \text{J}$,
para *ad* $Q_{ad} = 180\ \text{J} + 120\ \text{J} = 300\ \text{J}$,
para *dc* $Q_{dc} = 350\ \text{J}$, el calor es absorbido en cada proceso. Las flechas representadas en los procesos indican la dirección del incremento de la temperatura (incrementando *U*).

Ejemplo 95. La figura muestra cuatro estados de un sistema termodinámico: *a, b, c* y *d*. El volumen del sistema es V_a tanto en el estado *a* como en el *b*, y es V_c tanto en el estado *c* como en el *d*. La presión del sistema es p_a tanto en el estado *a* como en el *d*, y es p_c tanto en el estado *b* como en el *c*. Las energías internas de los cuatro estados son: U_a, U_b, U_c y U_d. Para cada uno de los procesos: *ab*, *bc*, *ad* y *dc*, calcule:
a) el trabajo efectuado por el sistema;
b) el flujo de calor al sistema durante el proceso;
c) El sistema se puede llevar del estado al c siguiendo la trayectoria *abc* o bien la *adc*. Calcule el flujo neto de calor al sistema y el trabajo neto efectuado por el sistema en cada trayectoria. ¿Por cuál trayectoria es mayor el flujo neto de calor? ¿Por cuál es mayor el trabajo neto?
d) Un amigo le dice que las cantidades de flujo de calor deben ser iguales para la trayectoria *abc* y la trayectoria *adc*, porque el estado inicial (a) y el final (c) del sistema son los mismos por ambas trayectorias. ¿Cómo respondería a esta afirmación?



Solución.

Vamos a usar las ecuaciones, $W = p(V_2 - V_1)$ y $\Delta U = Q - W$.

a) El trabajo hecho por el sistema durante el proceso:
A lo largo de *ab* o *cd*, *W* = 0. A lo largo de *bc*, $W_{bc} = p_c(V_c - V_a)$ A lo largo de *ad*, $W_{ad} = p_a(V_c - V_a)$.

b) El calor que ingresa al sistema durante el proceso:
$Q = \Delta U + W$.
$\Delta U_{ab} = U_b - U_a$, tal que,
$Q_{ab} = U_b - U_a + 0$.

$\Delta U_{bc} = U_c - U_b$, tal que

$Q_{bc} = (U_c - U_b) + p_c(V_c - V_a)$.

$\Delta U_{ad} = U_d - U_a$, tal que

$Q_{ad} = (U_d - U_a) + p_a(V_c - V_a)$.

$\Delta U_{dc} = U_c - U_d$, tal que

$Q_{dc} = (U_c - U_d) + 0$.

c) Del estado *a* al estado *c* a lo largo de la trayectoria *abc*.

$$W_{abc} = p_c(V_c - V_a). Q_{abc}$$
$$= U_b - U_a + (U_c - U_b) + p_c(V_c - V_a)$$
$$= (U_c - U_a) + p_c(V_c - V_a)$$

Del estado *a* al estado *c* a lo largo de la trayectoria *adc*.

$$W_{adc} = p_a(V_c - V_a).$$
$$Q_{adc} = (U_c - U_a) + p_a(V_c - V_a)$$

Asumiendo $p_c > p_a, Q_{abc} > Q_{adc}$ y $W_{abc} > W_{adc}$.

d) Para entender esta diferencia, comenzar por la relación $Q = W + \Delta U$. El cambio de la energía Interna ΔU es independiente de la trayectoria de tal manera que es igual para la trayectoria *abc* y para la trayectoria *adc*. El trabajo hecho por el sistema es el área bajo los caminos en el diagrama *pV*- no es igual para las dos trayectorias. De hecho, es más grande para la trayectoria *abc*. Puesto que ΔU es igual y *W* es diferente, *Q* debe ser diferente para las dos trayectorias. El flujo del calor *Q* es dependiente de la trayectoria.

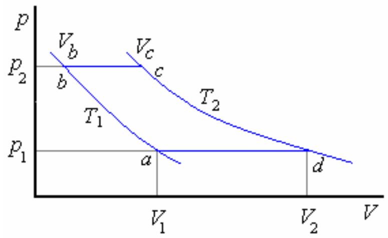
Ejemplo 96. Un motor térmico funciona con un gas ideal que se somete a un ciclo termodinámico que consta de dos etapas isotérmicas y dos etapas isobáricas de presiones p_1 y p_2 ($p_2 > p_1$) . Si las dos isotermas cortan la isobárica de presión p_1 en los volúmenes V_1 y V_2 ($V_2 > V_1$)

a) Grafique el proceso en los ejes *pV* .

b) Determine el trabajo neto realizado en función de p_1 ,p_2 ,V_1 Y V_2

Solución.

a)



b) $W_{ab} = nRT_1 \ln\frac{V_b}{V_1} = p_1V_1 \ln\frac{V_b}{V_1}$

$$W_{bc} = p_2(V_c - V_b) = p_1(V_2 - V_1)$$

$$W_{cd} = nRT_2 \ln\frac{V_2}{V_c} = p_1V_2 \ln\frac{V_2}{V_c}$$

$$W_{da} = p_1(V_1 - V_2)$$

$$W_{neto} = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$$

W_{bc} se anula con W_{cd}

$$W_{neto} = p_1V_1 \ln\frac{V_b}{V_1} + p_1V_2 \ln\frac{V_2}{V_c}$$

$$p_1V_1 = p_2V_b \Rightarrow V_b = \frac{p_1V_1}{p_2},\ p_1V_2 = p_2V_c$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{p_1V_2}{p_2}$$

Reemplazando los valores de V_b y V_c respectivamente:

$$W_{neto} = p_1V_1 \ln\frac{p_1V_1/p_2}{V_1} + p_1V_2 \ln\frac{V_2}{p_1V_2/p_2}$$

$$W_{neto} = p_1V_1 \ln\frac{p_1}{p_2} + p_1V_2 \ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$= -p_1V_1 \ln\frac{p_2}{p_1} + p_1V_2 \ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$= p_1(V_2 - V_1)\ln\frac{p_2}{p_1}$$

PROCESO ADIABATICO:

Es un proceso termodinámico importante en el cual al cambiar, el sistema de estado de equilibrio no intercambia calor con el ambiente, $Q = 0$. En este caso, de acuerdo al primer principio, se tiene:

$U_2 - U_1 = -W$.

Es importante hacer notar que este trabajo, denominado TRABAJO ADIABATICO (W_{ad}), hecho para cambiar el sistema desde un estado inicial a un final, depende solo de los estados de equilibrio dados. Conociendo W_{ad} se puede determinar la trayectoria. Cuando se realiza un trabajo que no es adiabático, entre los dos estados dados, la cantidad en exceso o defecto comparado con el trabajo adiabático es calor y es lo que realmente lo define como otra forma de trabajo.

Ecuación del proceso adiabático

Cuando un gas ideal va en un proceso adiabático, la presión volumen y temperatura cambian de forma tal que es descrito solamente por una relación entre *p* y *V*, *T* y *V*, o *p* y *T* , en función de las capacidades caloríficas. Esta relación puede calcularse aplicando el primer principio de la termodinámica y utilizando la ecuación del gas ideal.

Según el primer principio tenemos:

$$dQ = dU + dW = dU + pdV$$

Como $dU = C_V dT$ (aunque este resultado se obtuvo considerando un proceso a volumen constante, relación solamente las variables *U* y *T* y por lo tanto, es válido independientemente del proceso considerado), luego podemos escribir:

$$dQ = C_V dT + pdV$$

Como $dQ = 0$ en un proceso adiabático, se tiene:

$$C_V dT + pdV = 0$$

$$dT = -\frac{pdV}{C_V} \qquad (1)$$

De la ecuación del gas ideal

$$pV = nRT$$

$$pdV + Vdp = nRdT \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2); para eliminar dT :

$$pdV + Vdp = -nR\frac{p}{C_V}dV$$

$$pC_V dV + VC_V dp = -nRpdV$$

$$(C_V + nR)pdV + C_V Vdp = 0$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{C_p}{C_V}\frac{dV}{V}$$

Llamando a la relación $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$. Para gas ideal:

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1{,}67$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma\frac{dV}{V}$$

Integrando

$$\ln p = -\gamma \ln V + \ln \text{const.}$$

$$pV^{\gamma} = \text{constante}$$

Utilizando la ecuación de los gases ideales $pV = nRT$ se pueden encontrar las siguientes relaciones:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}, \quad \frac{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = \text{constante}$$

La curva de un proceso adiabático, en un diagrama *pV* cae más rápidamente con el aumento de *V* que la curva de un proceso isotérmico.

Ejemplo 97. Demostrar que el trabajo realizado por un gas ideal, con capacidades caloríficas constantes, durante una expansión adiabática es igual a:

a) $W = C_V(T_1 - T_2)$

b) $W = \dfrac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$

c) $W = \dfrac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$

Solución.

a) Por el principio de la termodinámica

$$dQ = dU + dW$$

Como el proceso es adiabático $dQ = 0$

Luego $dW = -dU$

Pero $\dfrac{dU}{dT} = C_V \Rightarrow dU = C_V dT$

Y $dW = -C_V dT$

Integrando de 1 a 2:

$$W_{1\to2} = -C_V\int_{T_1}^{T_2} dT = -C_V(T_2 - T_1)$$

$$W = C_V(T_1 - T_2)$$

b) Tenemos que $dW = pdV$

Por ser proceso adiabático $pV^{\gamma} = C$

$$\Rightarrow p = \frac{C}{V^{\gamma}}$$

Luego $dW = C\dfrac{dV}{V^{\gamma}}$

Integrando: $W = C\displaystyle\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^{\gamma}} = C\left.\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_1}^{V_2} =$

$$\frac{CV_1^{-\gamma+1} - CV_2^{-\gamma+1}}{\gamma - 1}$$

Como $p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} = C$

Reemplazando *C* en la expresión de *W* en las formas arriba puestas, obtenemos finalmente:

$$W = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$$

c) De la expresión anterior

$$W = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{p_2V_2}{p_1V_1}\right]$$

pero $V_1 = \left(\dfrac{C}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ y $V_2 = \left(\dfrac{C}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

de allí

$$W = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{p_2\left(\dfrac{C}{p_2}\right)^{1/\gamma}}{p_1\left(\dfrac{C}{p_1}\right)^{1/\gamma}}\right]$$

$$= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

Ejemplo 98. Encontrar el módulo de compresibilidad elástica en un proceso adiabático ($B_{adiabático}$).
Se conoce la relación de capacidades caloríficas $\left(\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}\right)$.

Solución.
Tenemos:

$$B = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}} \Rightarrow dp = -B\frac{dV}{V} \qquad (1)$$

También, en un proceso adiabático:

$$pV^\gamma = \text{constante}$$

derivando

$$dpV^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1}dV = 0$$

de aquí

$$dp = -\gamma p\frac{dV}{V} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$-B\frac{dV}{V} = -\gamma p\frac{dV}{V}$$

de aquí obtenemos:

$$B_{adiabático} = \gamma p$$

El sonido en el aire se propaga en un proceso adiabático
La velocidad de un gas está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Para el aire:

$$B_{adiabático} = \gamma p = 1,4\left(1,013\times 10^5\right)$$

$$\rho_{aire} = 1,28 \text{ kg/m}^3$$

$$v = \sqrt{\frac{1,4(1,013\times 15)}{1,28}} = 333 \text{ m/s}$$

Ejemplo 99 . Dos moles de un gas ideal se expanden cuasiestática y adiabáticamente desde una presión de 5 atm y un volumen de 12 litros a un volumen final de 30 litros. (γ= 1,40)
(a) ¿Cuál es la presión final del gas?
(b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final?

Solución.
n = 2 mol, $\gamma = 1,4$, $p_i = 5\text{ atm}$, $V_i = 12\text{ litros}$,
$V_f = 30\text{ litros}$

a) Para una expansión adiabática

$$pV^\gamma = cte$$

Entonces: $p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma$

$$\Rightarrow 5(12)^{1,4} = p_f(30)^{1,4}$$

De donde

$$p_f = 1,39\text{ atm}$$

b) $T_i = \dfrac{p_i V_i}{nR} = \dfrac{5\times 12}{2\times 0,082} = 365,9$ K

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{1,39\times 30}{2\times 0,082} = 254,3 \text{ K}$$

Ejemplo 100. Un mol de un gas ideal monoatómico inicialmente a 300 K y a 1 atm se comprime cuasiestática y adiabáticamente a un cuarto de su volumen inicial. Encuentre la presión y temperatura final. (γ= 1,67)

Solución.
n = 1mol
γ = 1,67
T_i = 300 K
p_i = 1 atm

$$V_f = \frac{1}{4}V_i$$

$$pV^\gamma = \text{ cte},\ pV = nRT$$

Bien

$$\left.\begin{array}{l} p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma \\ \dfrac{p_i V_i}{T_i} = \dfrac{p_f V_f}{T_f} \end{array}\right\} \Rightarrow V_i^{\gamma-1}T_i = V_f^{\gamma-1}T_f$$

De la última

$$T_f = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} T_i = (4)^{0,67}300$$

$$= 459,15 \text{ K}$$

También

$$p_f = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} p_i = (4)^{1,67}\times 1 = 10,1 \text{ atm}$$

Ejemplo 101. Durante el tiempo de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1 a 20 atm. Suponiendo que el proceso es adiabático y el gas es ideal con γ = 1,40.
a) ¿en qué factor cambia el volumen? y
b) ¿en qué factor cambia la temperatura?

Solución.
γ = 1,40, p_i = 1 atm, p_f = 20 atm

a) $p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma \Rightarrow$

$$\frac{V_f}{V_i} = \left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 0,12$$

b) $\dfrac{T_f}{T_i} = \left(\dfrac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} = \left(\dfrac{1}{0{,}12}\right)^{0,4} = 2{,}33$

CICLOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES

Supongamos que ocurre un proceso en que el sistema va de un estado inicial (*i*) a otro final (*f*) en el que se realiza un trabajo *W* y se produce una transferencia de calor *Q* a una serie de reservorios de calor. Si al final de este proceso, el sistema puede ser restaurado a su estado inicial se dice que es REVERSIBLE. Un proceso que no llena este requisito se dice que es IRREVERSIBLE.

Las condiciones para un proceso reversible son:

1) No debe existir trabajo realizado por fricción, fuerzas debidas a la viscosidad u otros efectos disipativos.

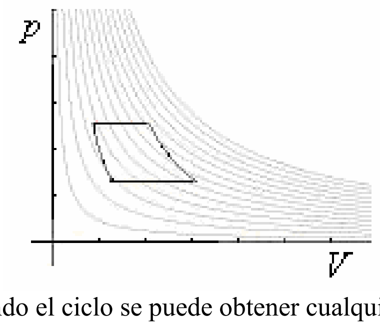
2) El proceso debe ser tal que el sistema se encuentre siempre en estado de equilibrio o infinitamente próximo a él (cuasiestático - por ejemplo, si el pistón de un cilindro se mueve lentamente dando tiempo para que el sistema pueda interactuar con el ambiente y alcanzar un estado de equilibrio en todo instante).

Cualquier proceso que viole una de estas condiciones es irreversible. La mayoría de los procesos en la naturaleza son irreversibles. Si queremos conseguir un proceso reversible debemos eliminar las fuerzas disipativas y el proceso sea cuasiestático, en la práctica esto es imposible. Sin embargo nos podemos aproximar mucho a un proceso reversible.

CICLOS TERMODINÁMICOS. MÁQUINAS TERMODINÁMICAS.

Una máquina que realiza esta conversión, lo hace mediante "PROCESOS" que llevan a la sustancia de trabajo nuevamente a su estado original, al conjunto de estos procesos se conoce como "CICLO" una vez completado el ciclo, los procesos se vuelven a repetir.

Una máquina térmica se puede representar en forma idealizada como se muestra en la siguiente figura.



Repitiendo el ciclo se puede obtener cualquier cantidad de trabajo.

Damos la siguiente notación, refiriéndonos a un ciclo completo.

Q_1 = calor absorbido por el sistema del reservorio a θ_1.

Q_2 = calor liberado por el sistema al reservorio a θ_2 Donde $\theta_1 > \theta_2$.

$W = Q_1 - Q_2$ trabajo neto hecho por el sistema.

Eficiencia térmica.

Observe que el enunciado que hemos dado del segundo principio de la termodinámica establece que la máquina térmica perfecta en la que todo calor suministrado se convierte en trabajo sin perder calor, **no existe**. Nos gustaría tenerla, pues no viola la primera ley, pero no se ha obtenido.

Dado que el trabajo neto en el ciclo es lo que obtenemos, y el calor absorbido por la sustancia de trabajo es lo que ponemos. Luego la eficiencia térmica de la máquina está definida por:

Eficiencia térmica = $\dfrac{\text{Trabajo obtenido}}{\text{calor puesto}}$

$$e = \frac{W}{Q_1}$$

Aplicando la primera ley a un ciclo completo. Como los estados inicial y final son los mismos la energía interna final debe ser igual a la inicial, obteniéndose

$$Q_1 - Q_2 = W$$

de aquí

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Tenga en cuenta que en esta expresión Q_1 y Q_2 deben ser tomados en valor absoluto, como positivos, dado que al haber aplicado la primera ley $(W = Q_1 - Q_2)$ ya se ha considerado su propio signo.

Observe que la eficiencia sería 100% (e = 1) si $Q_2 = 0$ es decir sin ceder nada de calor, esto es completamente imposible en la práctica y lo establece el segundo principio que veremos más adelante (e < 1). En cambio, si $Q_2 = Q_1$ se tendrá e = 0 y $W = Q_1 - Q_2 = 0$.

Ejemplo 102. Cierta máquina tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, encuentre:

a) el calor absorbido en cada ciclo y

b) el tiempo para cada ciclo.

Solución.

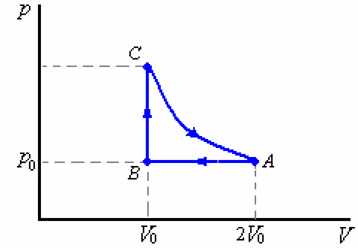
a) $e = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow 0,25 = 1 - \frac{8000}{Q_1} \Rightarrow$

$Q_1 = 10666,67 J$

b) $W = eQ_1 = 2666,67 J$

$P = \frac{W}{t} \Rightarrow t = \frac{W}{P} = \frac{2666,67}{5000} = 0,53$ s

Ejemplo 103. En cierto proceso industrial se somete un gas al siguiente ciclo termodinámico:
1-compresión isobárica hasta la mitad de su volumen inicial,
2-calentamiento isocórico,
3-expansión isotérmica hasta la presión y el volumen inicial.
El control de calidad requiere que la eficiencia del proceso sea mayor al 11%. Determine la eficiencia del ciclo para un gas monoatómico y para un gas diatómico, y en cada caso indique si aprueba o no el control de calidad.
Solución.



1-compresión isobárica hasta la mitad de su volumen inicial,

$$Q_{AB} = C_p(T_B - T_A) = -\frac{C_p}{nR} p_0 V_0$$

2-calentamiento isocórico,

$$Q_{BC} = C_V(T_C - T_B) = C_V(T_A - T_B)$$

Por la ly del gas ideal:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{2p_0 V_0}{nR}$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{p_0 V_0}{nR}$$

Luego

$$Q_{BC} = \frac{C_V}{nR} p_0 V_0$$

3-expansión isotérmica hasta la presión y el volumen iniciales.

$$Q_{CA} = W_{CA} = nRT_A \ln\frac{2V_0}{V_0}, \text{ como}$$

$$T_A = \frac{2p_0 V_0}{nR} \Rightarrow Q_{CA} = 2p_0 V_0 \ln 2$$

De aquí deducimos que:

$$Q_1 = 2p_0 V_0 \ln 2 + \frac{C_V}{nR} p_0 V_0 \text{ y } Q_2 = C_p \frac{p_0 V_0}{nR}$$

La eficiencia del ciclo es:

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_p \frac{p_0 V_0}{nR}}{2p_0 V_0 \ln 2 + \frac{C_V}{nR} p_0 V_0}$$

$$= 1 - \frac{\frac{C_p}{nR}}{2\ln 2 + \frac{C_V}{nR}}$$

Si es gas monoatómico

$$C_V = \frac{3}{2} nR \text{ y } C_p = \frac{5}{2} nR$$

$$e = 1 - \frac{\frac{5}{2}}{2\ln 2 + \frac{3}{2}} = 0,1338 = 13,38\%$$

Si es gas diatómico

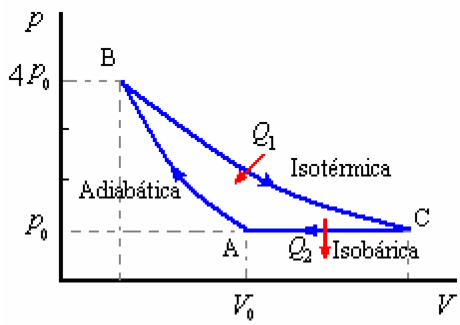
$$C_V = \frac{5}{2} nR \text{ y } C_p = \frac{7}{2} nR$$

$$e = 1 - \frac{\frac{7}{2}}{2\ln 2 + \frac{5}{2}} = 0,09939 = 9,94\%$$

Se aprueba el control de calidad para gas monoatómico.

Ejemplo 104.
Un gas ideal monoatómico se somete a un ciclo termodinámico que consta de 3 procesos:
A $\rightarrow$ B Compresión adiabática desde (V_0, p_0) hasta cuadriplicar la presión.
B $\rightarrow$ C Expansión isotérmica hasta la presión inicial.
C $\rightarrow$ A Compresión isobárica hasta el volumen inicial.
a) Presente un gráfico p versus V para el ciclo.
b) Determine las variables termodinámicas p, y, T para cada estado A, B, C.
c) Calcule la eficiencia del ciclo.
Solución:

a)



b)

Estado A: $p_A = p_0$, $T_A = \dfrac{p_A V_A}{nR} = \dfrac{p_0 V_0}{nR}$

Estado B: $p_B = 4p_0$,

$$T_B = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_A = (4)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{p_0 V_0}{nR} = 4^{2/5} \frac{p_0 V_0}{nR}$$

Estado C: $p_C = p_0$, $T_C = T_B = 4^{2/5} \dfrac{p_0 V_0}{nR}$

c)

Calor en A $\rightarrow$ B: $Q_{AB} = 0$

Calor en B $\rightarrow$ C: $Q_{BC} = nRT_B \ln \dfrac{V_C}{V_B}$

Calculo de V_B: $p_B V_B^\gamma = p_A V_A^\gamma \Rightarrow$

$$V_B = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_A = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{5}} V_0$$

Cálculo de V_C: $\dfrac{V_C}{T_C} = \dfrac{V_A}{T_A} \Rightarrow$

$$V_C = \left(\frac{T_C}{T_A}\right) V_A = 4^{2/5} V_0$$

Luego

$$Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{4^{2/5} V_0}{(1/4)^{3/5} V_0} =$$

$$nR\left(4^{2/5}\frac{p_0 V_0}{nR}\right)\ln\left(4^{2/5} \times 4^{3/5}\right) = 2{,}41 p_0 V_0$$

Calor en C $\rightarrow$ A:

$$Q_{CA} = C_p (T_A - T_C) = \frac{5}{2} nR\left(\frac{p_A V_A}{nR} - \frac{p_C V_C}{nR}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(p_0 V_0 - 4^{2/5} p_0 V_0\right) = -1{,}85 p_0 V_0$$

La eficiencia es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \; Q_1 = 2{,}41 p_0 V_0 \text{ y } Q_2 = 1{,}85 p_0 V_0$$

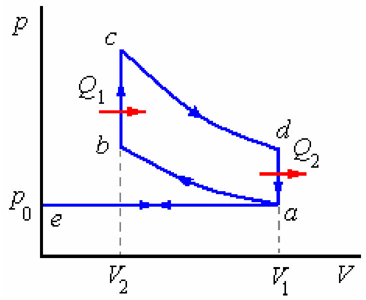
Luego:

$$e = 1 - \frac{1{,}85 p_0 V_0}{2{,}41 p_0 V_0} = 1 - 0{,}7676 = 0{,}2324$$

$$e = 23{,}23\%$$

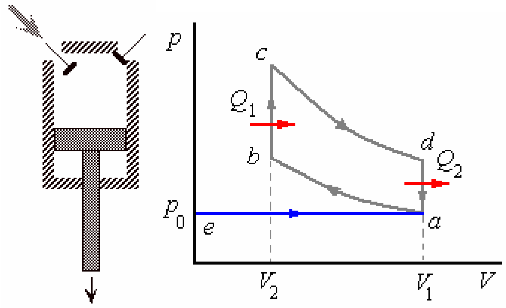
CICLO DE OTTO.

El funcionamiento de un motor a gasolina puede idealizarse considerando que la sustancia de trabajo es aire, el cual se comporta como un gas ideal y que no hay fricción. En base a esto el ciclo de Otto está compuesto por seis procesos simples mostrado en el diagrama *p*-*V* de la figura.



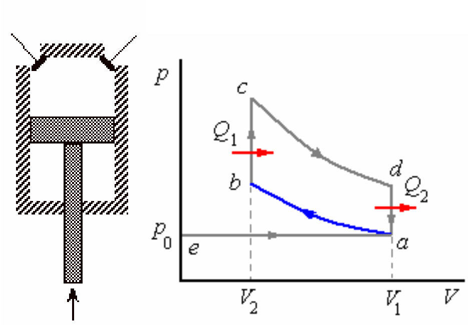
$e \rightarrow a$ Entrada isobárica (presión constante), el volumen varía de cero a V_1, a1 igual que el número de moles de cero a n, de acuerdo a la ecuación

$$p_0 V = nRT_a$$

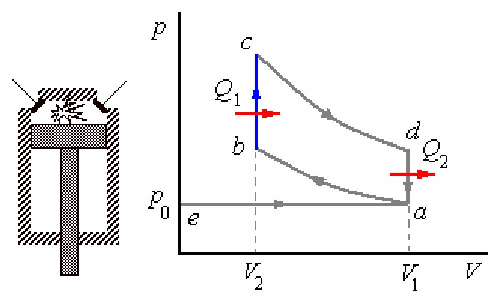


$a \rightarrow b$ Compresión adiabática, de acuerdo a la ecuación

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}$$

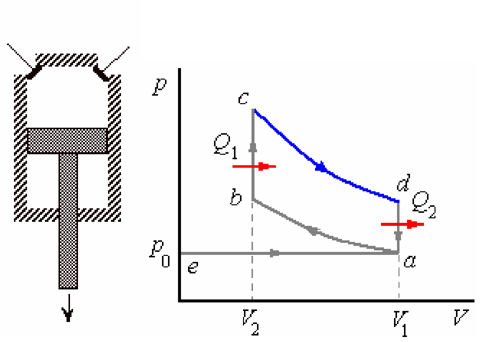


$b \rightarrow c$ Compresión isocórica (volumen constante) la temperatura cambia de T_b a T_c. Este proceso es aproximado a la explosión en el motor de gasolina.

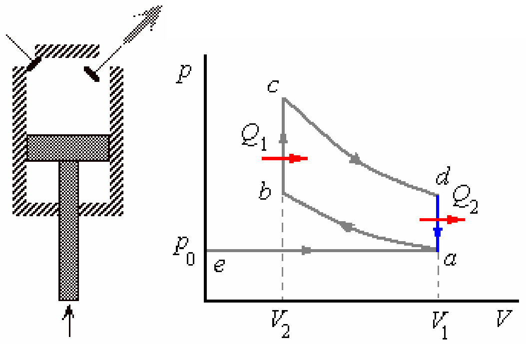


$c \rightarrow d$ Descompresión adiabática de acuerdo a la ecuación.

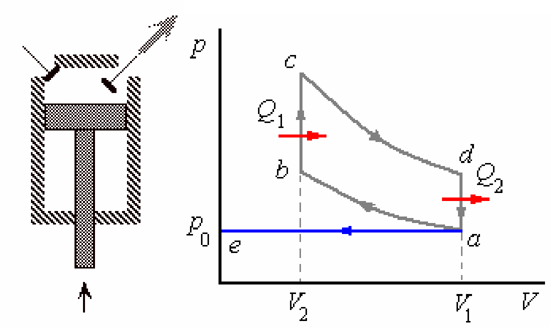
$$T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}$$



$d \rightarrow a$ Descompresión a volumen constante, la temperatura cambia de T_d a T_a. Este proceso es aproximado a la apertura de la válvula en el motor a gasolina.



$a \rightarrow e$ Proceso isobárico a presión atmosférica, el volumen varía de V_1 a cero, a temperatura constante.



$$Q_1 = \int_{T_b}^{T_c} C_V dT = C_V (T_c - T_b)$$

El calor liberado Q_2, a volumen constante

$$Q_2 = \int_{T_d}^{T_a} C_V dT = -C_V (T_d - T_a)$$

La eficiencia es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)}$$

De los procesos adiabáticos tenemos

$T_d V_1^{\gamma-1} = T_c V_2^{\gamma-1}$ y $T_a V_1^{\gamma-1} = T_b V_2^{\gamma-1}$

restando

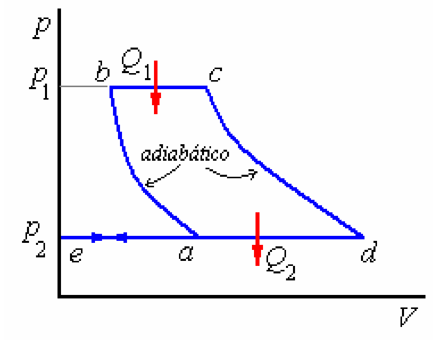
$$(T_d - T_a) V_1^{\gamma-1} = (T_c - T_b) V_2^{\gamma-1}$$

o $$\frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

finalmente

$$e = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

Ejemplo 105. La figura representa un diagrama *p-V* del ciclo Joule de gas ideal, C_p es constante. ¿Cuál es su eficiencia térmica?



Solución.
En este ciclo, el ingreso de calor se produce en el proceso adiabático $b \rightarrow c$ y la salida de calor en el proceso isobárico $d \rightarrow a$.

Luego $Q_1 = \int_{T_b}^{T_c} C_p dT = C_p (T_c - T_b)$ y

$$Q_2 = \int_{T_d}^{T_a} C_p dT = C_p (T_a - T_d)$$

Luego la eficiencia

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)}$$

Por la trayectoria adiabática $a \rightarrow b$:

$$\frac{p_2^{\gamma-1/\gamma}}{T_a} = \frac{p_1^{\gamma-1/\gamma}}{T_b}$$

ó $T_b p_2^{\gamma-1/\gamma} = T_a p_1^{\gamma-1/\gamma}$ (1)

Por la trayectoria adiabática $c \rightarrow d$:

$$\frac{p_2^{\gamma-1/\gamma}}{T_d} = \frac{p_1^{\gamma-1/\gamma}}{T_c}$$

ó $T_c p_2^{\gamma-1/\gamma} = T_d p_1^{\gamma-1/\gamma}$ (2)

Restando (1) de (2):

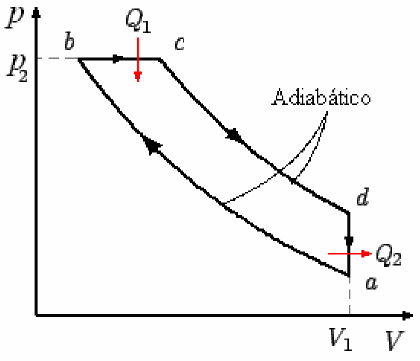
$$(T_c - T_b) p_2^{\gamma-1/\gamma} = (T_d - T_a) p_1^{\gamma-1/\gamma}$$

De aquí: $\frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

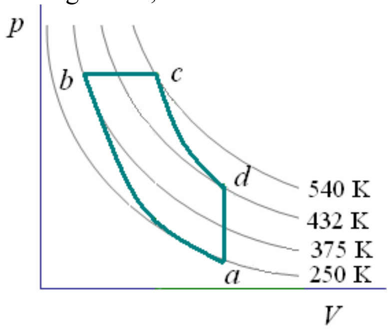
Finalmente: $e = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

CICLO DIESEL

Este ciclo también se inicia con una compresión adiabática, ocurre la explosión manteniéndose constante la presión, aunque no es necesario introducir una chispa, ya que la combustión se produce de manera espontánea. Nuevamente la etapa de trabajo se corresponde con una expansión adiabática y finalmente se realiza un enfriamiento isócoro del fluido en el motor.



Ejemplo 106. Un motor diesel opera en el ciclo reversible *abcda*, con 9,0 moles de un gas ideal. Los procesos *ab* y *cd* son adiabáticos. Las temperaturas de los puntos *a*, *b*, *c* y *d* del ciclo son 250 K, 375 K, 540 K, 432 K, respectivamente. La constante adiabática del gas es 1,50.



a) Calcule el calor absorbido durante la expansión isobárica.
b) Calcule el calor rechazado en el proceso de isocórico.
c) Calcule el cambio de energía interna del gas, en la compresión adiabática.
d) Calcule el trabajo realizado por el motor, en la expansión adiabática.
e) Calcule la eficiencia térmica del motor, en porcentaje.
Solución.
a) Cálculo previo de las capacidades caloríficas

$$C_p = C_V + nR \quad \gamma = 1 + \frac{nR}{C_V}$$

$$1{,}5 = 1 + \frac{9{,}0(8{,}31)}{C_V} \quad C_V = \frac{74{,}79}{0{,}5} = 149{,}58 \text{ J/K}$$

$$C_p = 149{,}58 + 74{,}79 = 224{,}37 \text{ J/K}$$

$$C_p = 149{,}58 + 74{,}79 = 224{,}37 \text{ J/K}$$

El calor absorbido (Q_1) durante la expansión isobárica

$$Q_1 = C_p(T_c - T_b) = 224{,}37(540 - 373)$$
$$= 37469{,}79 \text{ J} = 37 \text{ kJ}$$

b) El calor rechazado (Q_2) en el proceso de isocórico

$$Q_2 = C_V(T_d - T_c) = 149{,}58(250 - 432) =$$
$$27223{,}56 \text{ J} = 27 \text{ kJ}$$

c) El cambio de energía interna del gas, en la compresión adiabática

$$\Delta U = U_b - U_a = C_V(T_b - T_a)$$
$$= 149{,}58(375 - 250)$$
$$= 18697{,}5 \text{ J} = 19 \text{ kJ}$$

d) El trabajo realizado por el motor, en la expansión adiabática es igual al negativo del cambio de energía interna en el proceso.

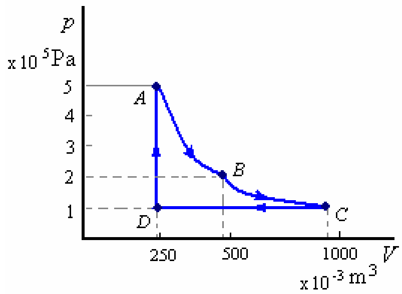
$$W = -\Delta U = U_d - U_c = C_V(T_d - T_c)$$
$$= 149{,}58(432 - 540)$$
$$= -16154{,}64 \text{ J} = -16 \text{ kJ}$$

e) La eficiencia térmica del motor.

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$
$$= 1 - \frac{27223{,}56}{37469{,}79} = 1 - 0{,}73 = 0{,}27$$

La eficiencia es el 27 por ciento.

Ejemplo 107. 10 moles de un gas diatómico (C_v = $5R/2$) se encuentran inicialmente a una presión de p_A = 5 x10^5 Pa y ocupando un volumen de V_A = 249 10^{-3} m^3. Se expande adiabáticamente (proceso *AB*) hasta ocupar un volumen V_B = 479 x10^{-3} m^3. A continuación el gas experimenta una transformación isoterma (proceso *BC*) hasta una presión p_C = 1 x10^5 Pa. Posteriormente se comprime isobáricamente (proceso *CD*) hasta un volumen V_D = V_A = 249 10^{-3} m^3. Por último, experimenta una transformación a volumen constante (proceso *DA*) que le devuelve al estado inicial.
a) Representar gráficamente este ciclo en un diagrama *p-V*.
b) Calcular el valor de las variables termodinámicas desconocidas en los vértices *A*, *B*, *C* y *D*.
c) Hallar el calor, el trabajo, la variación de energía interna, en Joules, de forma directa y/o empleando el Primer Principio, en cada etapa del ciclo.
d) Calcular el rendimiento.
R= 0,082 atm litro/mol K = 8,314 J/mol K ;
1 cal = 4,186 J; 1atm = 1,013 10^5 Pa
Solución.
a) Representar gráficamente este ciclo en un diagrama *p-V*.



b) Calcular el valor de las variables termodinámicas desconocidas en los vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

$C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$,

$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1{,}4$

Vértice A $p_A V_A = nRT_A \Rightarrow$

$T_A = 1447{,}5$ K

$A \rightarrow B$ $p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma \Rightarrow$

$p_B = 2\times 10^5$ Pa

Vértice B $p_B V_B = nRT_B \Rightarrow$

$T_B = 1152{,}7$ K

$B \rightarrow C$ $p_B V_B = p_C V_C \Rightarrow$

$\begin{cases} V_C = 958{,}3\times 10^{-3} \\ T_C = 1152{,}7 \text{ K} \end{cases}$

Vértice D $p_D V_D = nRT_D \Rightarrow$

$T_D = 299{,}5$ K

c) Hallar el calor, el trabajo, la variación de energía interna, en Joules, de forma directa y/o empleando el Primer Principio, en cada etapa del ciclo.

Proceso $A \rightarrow B$ (adiabático)

$Q = 0$

$\Delta U = nC_V(T_B - T_A) =$

$10\left(\frac{5}{2}8{,}314\right)(1152{,}7 - 1447{,}5)$ = 71166,7 J

$W = \int_{V_A}^{V_B} pdV$ = cte$\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V^\gamma}$

$= \frac{(p_A V_A - p_B V_B)}{\gamma - 1}$

$= \frac{(5\times 10^5 \times 249\times 10^{-3} - 2\times 10^5 \times 479\times 10^{-3})}{1{,}4-1}$

= 71750 J

Comprobación, $\Delta U \approx Q - W$

Proceso $B \rightarrow C$ (Isotérmico)

$\Delta = 0$ (no hay cambio de temperatura)

$W = \int_{V_B}^{V_C} pdV = nRT\int_{V_B}^{V_C}\frac{dV}{V}$

$= nRT\ln\frac{V_C}{V_B} = nR(1152{,}7)\ln\frac{958\times 10^{-3}}{479\times 10^{-3}}$

= 66458,1 J

$Q = W$ = 66458,1 J

Proceso $C \rightarrow D$ (Isobárico)

$\Delta U = nC_V(T_D - T_C)$

$= 10\left(\frac{5}{2}8{,}314\right)(299{,}5 - 1132{,}7)$

= - 177337,6 J

$Q = nC_p(T_D - T_C)$

$= 10\left(\frac{7}{2}8{,}314\right)(299{,}5 - 1132{,}7)$

= - 248272,7 J

$W = p(V_D - V_C)$

$= 10^5(249\times 10^{-3} - 958\times 10^{-3})$

= - 70930 J

Comprobación, $\Delta U \approx Q - W$

Proceso $D \rightarrow A$ (Isocórico)

$W = 0$ no hay cambio de volumen

$Q = nC_V(T_A - T_D)$

$= 10\left(\frac{5}{2}8{,}314\right)(1447{,}5 - 299{,}5)$

= 249004,3 J

$\Delta U = Q$ = 249004,3 J

En el ciclo completo

$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ W = 67278{,}1 \text{ J} \\ Q_{absorbido} = 315462{,}4 \text{ J } (+) \\ Q_{cedido} = 248272{,}7 \text{ J } (-) \end{cases}$

Podemos ver que $W \approx Q_{abs} + Q_{ced}$

	ΔU (J)	Q (J)	W (J)
$A \rightarrow B$	- 71666,7	0	71750
$B \rightarrow C$	0	66438,1	66458,1
$C \rightarrow D$	- 177337,6	-248272,7	-70930
$D \rightarrow A$	249004,3	249004,3	0
	0		67278,1

d) Calcular el rendimiento.

$e = \frac{W}{Q_{abs}} = 0{,}21 = 21\%$

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA.

La experiencia nos dice que a pesar de que es muy fácil convertir energía mecánica completamente en energía térmica (como en la fricción), hay muchas restricciones para efectuar La transformación inversa. La única forma en que somos capaces de efectuar la transformación continua de energía térmica en energía mecánica es teniendo “reservorios de calor” a dos temperaturas diferentes, e interactuando entre ellas una máquina que transforme una parte del calor que fluye del reservorio caliente al frío en trabajo (máquina térmica) . El segundo principio de la termodinámica: se refiere a este hecho y se establece cualitativamente como sigue:

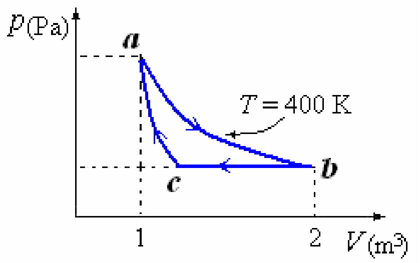
"Es imposible construir una máquina de funcionamiento continuo que produzca trabajo mecánico derivado de la extracción de calor de un reservorio simple, sin dar calor, a un reservorio a temperatura más baja"

En resumen, la segunda ley establece los procesos que sin violar la primera ley no ocurren en la naturaleza. La primera Ley establece simplemente la conservación de energía.

Reservorio de calor. Se define como un cuerpo de masa tal que es capaz de absorber o liberar calor en cantidad ilimitada sin sufrir apreciable cambio de su estado, temperatura u otra variable termodinámica.

Ejemplo 108. Una mol de un gas monoatómico se lleva por un ciclo ***abca*** como se muestra en la figura. El proceso $a \rightarrow b$ es un proceso isotérmico a 400 K y el proceso $c \rightarrow a$ es un proceso adiabático.

a) Hallar la presión, el volumen y la temperatura para los puntos ***a***, ***b*** y ***c***.
b) Hallar el trabajo total en el ciclo.
c) Hallar los calores en cada uno de los procesos (Q_{ab}, Q_{bc} y Q_{ca}).
d) Hallar la eficiencia del ciclo.



Solución.
a) Cálculo de las presiones:

$p_a V_a = p_b V_b = nRT$ = 1 x 8,31 x 400

$p_a = \frac{3324}{1} = 3324 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$,

$p_b = \frac{3324}{2} = 1662 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$,

$p_c = p_a = 1662 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Cálculo de los volúmenes:

$V_a = 1\text{m}^3$, $V_b = 2\text{m}^3$,

Como $p_a V_a^{\gamma} = p_b V_b^{\gamma}$,

con $\gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$3324(1)^{5/3} = 1662(V_c)^{5/3}$

$\therefore V_c = (2)^{3/5} = 1{,}51\text{m}^3$

Cálculo de las temperaturas:

$T_a = T_b$, = 400 K,

Como $p_c V_c = nRT_c \Rightarrow$

$T_c = \frac{p_c V_c}{nR} = \frac{1662 \times 1{,}51}{1 \times 8{,}31}$ = 302 K

	p (N/m²)	*V* (m³)	*T* (K)
a	3324	1	400
b	1662	2	400
c	1662	1,51	302

b)

$W_{ab} = nRT \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$

$= (8{,}31)(400)\ln 2$ = 2304 J

$W_{bc} = p(V_c - V_b)$

$= (1662)(1{,}51 - 2)$ = - 814 J

$W_{ca} = -\Delta U = -nC_V \Delta T$ = - 1222 J

W_{Total} = 268 J

c)

$Q_{ab} = W_{ab}$ = 2304 J

$Q_{bc} = nC_p \Delta T$ = - 2036 J

$Q_{ca} = 0$

e) $e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{2036}{2304} = 0{,}11$

Ejemplo 109. Una maquina tiene una potencia de salida de 2 kW, si su eficiencia es del 40% y cede un calor de 3000 calorías por ciclo.
a) Determine el trabajo realizado por ciclo.
b) El tiempo de duración de cada ciclo.

Solución.
a) Determine el trabajo realizado por ciclo.

$e = 40\%$, Q_2 = 3000 calorías

$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{W}{Q_1}$

$Q_1 = \frac{Q_2}{1-e} = \frac{3000}{0{,}6}$ = 5000 calorías

Y el trabajo es:

$W = Q_1 - Q_2$ = 5000 – 3000 = 2000 calorías.

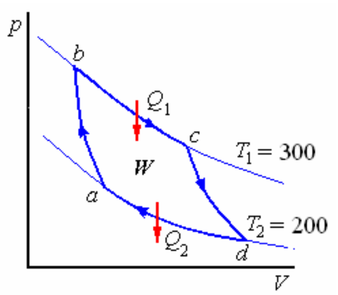
b) 1 cal = 4,186 Joules
Como la potencia es 2000 J/s
2000 J (1 caloría/4,186 J) = 477,78 calorías
El tiempo de duración de cada ciclo es:

$t = \frac{2000}{477{,}78}$ = 4,2 s

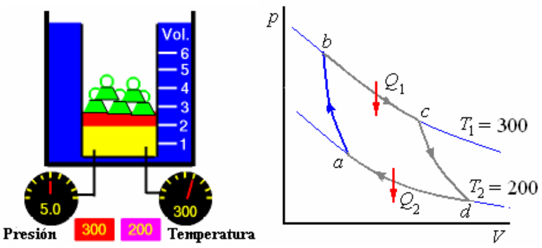
EL CICLO CARNOT

Vamos a estudiar ahora una máquina térmica altamente idealizada conocida como la máquina de Carnot. Nos muestra como es posible obtener trabajo por medio de una sustancia de trabajo que es llevada a través de un proceso cíclico y también nos permitirá establecer la escala absoluta termodinámica de temperatura.

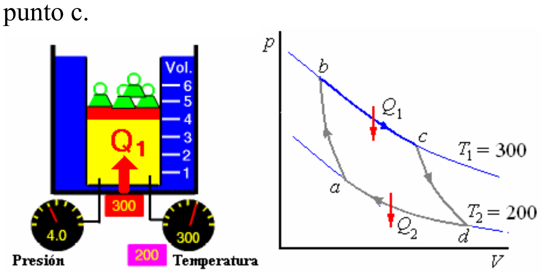
Un ciclo de Carnot es un conjunto de procesos, la sustancia de trabajo se imagina primero en equilibrio térmico con un reservorio frío a la temperatura T_2. Se realiza cuatro procesos, por ejemplo sobre un gas, como se muestra en el diagrama *p-V* de la figura..



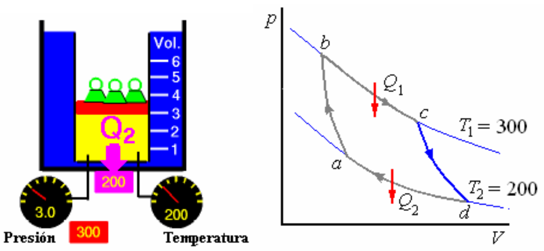
$a \to b$ Compresión adiabática reversible hasta que la temperatura se eleve a T_1.



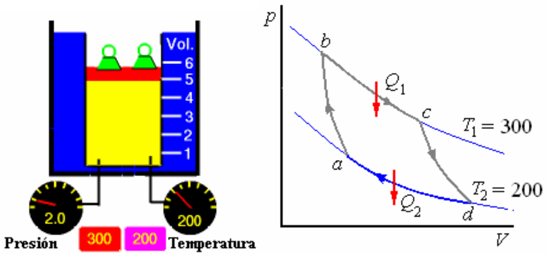
$b \to c$ Expansión isotérmica reversible hasta un punto c.



$c \to d$ Expansión adiabática reversible hasta que la temperatura baje a T_2.



$d \to a$ Compresión isotérmica reversible hasta que se alcanza el estado original.



En este ciclo se tendrá:

$\Delta U = 0$

(Por ser un ciclo en que estado final = estado inicial)

$W = Q_2 - Q_2 = \Delta Q$ (Calor total absorbido por el sistema enunciado)

W = Trabajo neto entregado

Durante la expansión isotérmica $b \to c$ ingresa calor Q_1.

Como la energía interna de un gas ideal depende solo de su temperatura

$$Q_1 = W_1 = \int_{V_b}^{V_c} pdV = RT_1 \int_{V_b}^{V_c} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_c}{V_b}$$

Del mismo modo durante la compresión isotérmica $d \to a$ en que se realiza calor Q_2.

$$Q_2 = W_2 = \int_{V_d}^{Va} pdV = RT_2 \int_{V_d}^{V_a} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \frac{V_a}{V_d}$$

Siendo $V_d > V_a$ $\ln \frac{V_a}{V_d}$ es una cantidad negativa, como debemos de poner como cantidad positiva escribimos $Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_d}{V_a}$

En la expansión adiabática $e \to d$

$$T_1 V_c^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{V_d}{V_c}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (1)$$

En la comprensión adiabática $a \to b$

$$T_2 V_a^{\gamma-1} = T_1 V_b^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (2)$$

de (1) y (2)

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{V_d}{V_c} \Rightarrow \frac{V_d}{V_a} = \frac{V_c}{V_b} \qquad (3)$$

Entonces $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{T_2 \ln \frac{V_d}{V_a}}{T_1 \ln \frac{V_c}{V_b}} = \dfrac{T_2}{T_1}$

La relación entre las temperaturas absolutas de reservorios de calor en los que trabaja la máquina de Carnot tiene la misma relación que los calores rechazado y absorbido.

La eficiencia térmica es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

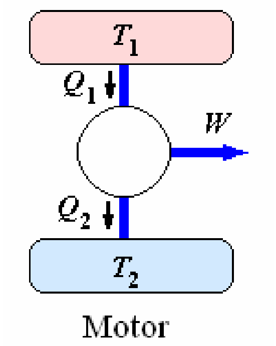
Reemplazando $\frac{Q_2}{Q_1}$ por su valor, obtenemos:

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

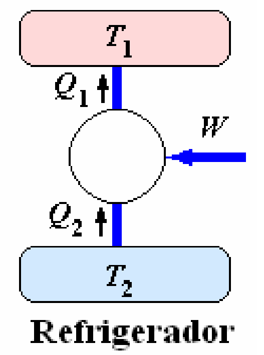
Para que una máquina Carnot tenga una eficiencia de 100 por ciento es claro que e debería ser cero. Como en la práctica no es posible tener $e = 1$, es imposible obtener el cero absoluto de temperatura. Estos resultados que se han obtenido usando un gas ideal como sustancia de trabajo, sin embargo, son independientes de este hecho y en general la eficiencia de una máquina térmica reversible es independiente del material usado como sistema, dependiendo únicamente de las temperaturas de los reservorios.

MOTOR Y REFRIGERADOR

Un motor de Carnot es un dispositivo ideal que describe un ciclo de Carnot. Trabaja entre dos focos, tomando calor Q_1 del foco caliente a la temperatura T_1, produciendo un trabajo W, y cediendo un calor Q_2 al foco frío a la temperatura T_2.
En un motor real, el foco caliente está representado por la caldera de vapor que suministra el calor, el sistema cilindro-émbolo produce el trabajo, y se cede calor al foco frío que es la atmósfera.



La máquina de Carnot también puede funcionar en sentido inverso, denominándose entonces refrigerador o frigorífico. Se extraería calor Q_2 del foco frío aplicando un trabajo W, y cedería Q_1 al foco caliente.
En un refrigerador real, el motor conectado a la red eléctrica produce un trabajo que se emplea en extraer un calor del foco frío (la cavidad del refrigerador) y se cede calor al foco caliente, que es la atmósfera



La segunda Ley establecería que no existe el Refrigerador perfecto. No es posible transportar calor de un cuerpo a otro de más alta temperatura, sin efectuar trabajo sobre el sistema. También, nos gustaría tenerla, puesto viola la primera Ley, pero tampoco se ha obtenido nunca.
Coeficiente de rendimiento de un refrigerador:

$$\eta = \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q_2}{W}$$

Ejemplo 110. La eficiencia de una máquina de Carnot es de 30%. La maquina absorbe 800 J de calor por ciclo de una fuente caliente a 500 K. Determine
a) el calor liberado por ciclo y
b) la temperatura de la fuente fría.
Solución.
$T_2 = 500$ K
$Q_2 = 800$ J
$e = 0{,}3$

a) $e = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

$$0{,}3 = 1 - \frac{Q_2}{800} \Rightarrow Q_2 = 560\ \text{J}$$

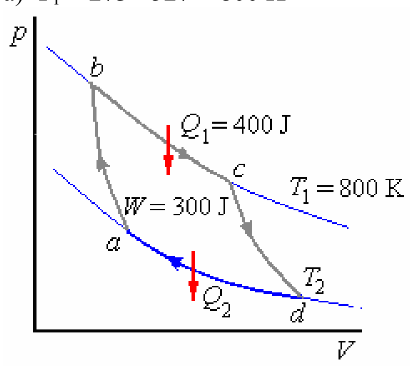
b) $e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$0{,}3 = 1 - \frac{T_2}{500} \Rightarrow T_2 = 350\ \text{K}$$

Ejemplo 111. Una máquina de Carnot opera con 2 moles de un gas ideal. En el proceso cíclico, la temperatura máxima que alcanza el gas es de 527°C y la presión máxima es de 5 atm. En un ciclo, el calor suministrado es de 400 J y el trabajo realizado por dicha máquina es de 300 J.
a) Calcular la temperatura del depósito frío y la eficiencia porcentual.
b) Si empleando únicamente el calor expulsado por la máquina se logra derretir totalmente un bloque de hielo de 10 kg a 0°C, ¿Durante cuántos ciclos debe operar esta máquina?

$c_{fusión\ agua} = 334 \times 10^3\ \text{J/kg}$

c) ¿Cual debería ser la temperatura del depósito caliente sin modificar la del depósito frío para elevar la eficiencia hasta el 80%?
Solución.
a) $T_1 = 273 + 527 = 800$ K



$W = Q_1 - Q_2 \Rightarrow$

$Q_2 = Q_1 - W$ = 400 – 300 = 100 J

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \frac{Q_2}{Q_1} = 800 \frac{100}{400} = 200 \text{ K}$$

T_2 = 200 - 273 = - 73 ºC

La eficiencia es:

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{200}{800} = 0{,}75 = 75\ \%$$

b) Para derretir los 10 kg de hielo se necesitan
10 (334x10^3) = 334x10^4 J

Si en cada ciclo el calor expulsado por la máquina es 100 J

Esta máquina debe operar

$$\frac{334 \times 10^4}{100} = 33400 \text{ ciclos.}$$

c) ¿Cual debería ser la temperatura del depósito caliente sin modificar la del depósito frío para elevar la eficiencia hasta el 80%?

$$e' = 1 - \frac{T_2}{T'_1} \Rightarrow$$

$$T'_1 = \frac{T_2}{1 - e'} = \frac{200}{1 - 0{,}8} = \frac{200}{0{,}2} = 1000 \text{ K}$$

t'_1 = 1000 – 273 = 727 ºC.

Ejemplo 112. Se ha propuesto una planta de potencia que haga uso del gradiente de temperatura en el océano. El sistema se diseñó para operar entre 20 ºC (temperatura de la superficie del agua) y 5 ºC (temperatura del agua a una profundidad de casi 1 km).

a) ¿Cuál es la máxima eficiencia de dicho sistema?

b) Si la potencia de salida de la planta es de 7,5 MW, ¿cuánta energía térmica se absorbe por hora?

c) En vista de los resultados de la parte (a), ¿piensa que se deba tomar en cuenta dicho sistema?

Solución.

t_1 = 5 ºC, T_1 = 278,15K

t_2 = 20 ºC, T_2 = 293,15 K

P = 7,5 MW

a) $e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{278{,}15}{293{,}15} = 0{,}051 = 51\%$

b) $e = \frac{W}{Q_1} = \frac{P}{P_1} \Rightarrow P_1 = \frac{P}{e}$

o sea la potencia absorbida será

$$P_2 = \frac{7{,}5}{0{,}051} = 147 \text{ MW}$$

En una hora

Q_2 = 147 x 3600 x 10^6 J = 5,292 x 10^{11} J

c) Se recomienda que no.

Ejemplo 113. Un aparato de aire acondicionado absorbe calor de su embobinado de enfriamiento a 13 ºC y libera calor al exterior a 30 ºC.

a) ¿Cuál es el máximo rendimiento del aparato?

b) Si el rendimiento real es de la tercera parte del valor máximo y si el aparato remueve 8 x 10^4 J de energía calórica cada segundo, ¿qué potencia debe desarrollar su motor?

Solución.

Q_1 calor transferido a la fuente caliente

Q_2 calor absorbido de la fuente fría

W trabajo gastado por la bomba

$$\eta = \frac{Q_2}{W}$$

a) Si el refrigerador es una máquina de Carnot funcionando a la inversa

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{273{,}15 + 13}{273{,}15 + 30} = 0{,}943922$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{273{,}15 + 30}{273{,}15 + 13} = 1{,}06$$

entonces

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{\frac{Q_1}{Q_2} - 1} = 16{,}7$$

b) Si $\eta_{real} = \frac{16{,}7}{3} = 5{,}56$ y P_1 = 8 x 10^4 J / s,

entonces.

$$\eta_{real} = \frac{Q_2}{W} = \frac{P_2}{P_1 - P_2} \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta_{real}} + P_2$$

$$P_1 = P_2\left(\frac{1}{\eta_{real}} + 1\right) = 8 \times 10^4 \left(\frac{5{,}56 + 1}{5{,}56}\right)$$

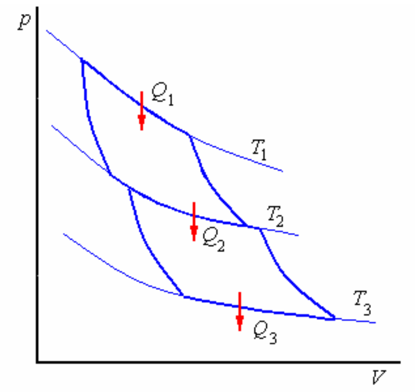
= 8x10^4 (1,18) = 9,44x10^4 W.

Ejemplo 114. Se dan dos máquinas de Carnot acopladas, la máquina A opera entre los reservorios T_1 = 1000 K y T_2 = 800 K y la máquina B entre T_2 = 800 K y T_3 = 400 K. Sabiendo que el reservorio T_1 suministra 1500 Joules de calor al sistema, calcular:

a) La eficiencia de cada máquina y del sistema.

b) El trabajo de cada máquina y el total del sistema.

Solución.



a) $e_A = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{800}{1000}$ = 20 %

$e_B = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \frac{400}{800}$ = 50 %

Eficiencia del sistema

$e_S = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{400}{1000}$ = 60 %

b) Cálculo de W_A

$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$

$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1 = \frac{800}{1000}(1500)$ = 1200 J

Luego $W_A = Q_1 - Q_2$ = 1500 – 1200 = 300 J

Cálculo de W_B

$\frac{Q_3}{Q_2} = \frac{T_3}{T_2} \Rightarrow$

$Q_3 = \frac{T_3}{T_2} Q_2 = \frac{400}{800}(1200)$ = 600 J

Luego $W_B = Q_2 - Q_3$ = 1200 – 600 = 600 J

y el trabajo total del sistema

$W_S = Q_1 - Q_3$ = 1500 – 600 = 900 J

Nota: observe que:

$W_S = W_A + W_B$ y $e_S \neq e_A + e_B$

Ejemplo 115. Una casa cerca de un lago se calefacciona mediante una motor térmico. En invierno, el agua debajo del hielo que cubre el lago se bombea por medio del motor térmico. Se extrae el calor hasta que el agua está en el punto de congelar cuando se expulsa. El aire exterior se utiliza como enfriador. Asuma que temperatura del aire es -15°C y la temperatura del agua del lago es 2°C. Calcule la razón en la cual el agua se debe bombear al motor. La eficiencia del motor es un quinto que el de un motor de Carnot y la casa requiere 10 kilovatios.

Solución.

La eficiencia de un motor Carnot es

[1 - (T_1/T_2)] .

Para éste problema,

$$e = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{1}{5}\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)$$

El calor se toma del agua del lago mientras que se enfría de 2°C a 0°C antes de la eyección. La temperatura media del reservorio caliente es 274 K. Si m es la masa del agua que fluye en el tiempo t, el calor tomado adentro del reservorio caliente por unidad de tiempo es $Q_2/t = (m/t)c$ x 2°C, donde c está la capacidad específica de calor del agua.

El calor que sale al aire como reservorio frío a una temperatura de -15°C = 258 K, por la cantidad infinita de aire disponible se asume que la temperatura permanece constante.

Además, el trabajo realizado (Q_2 - Q_1) es 10 kilovatio = 104 J/ s. Así, de la primera ecuación, tenemos

$$\frac{10^4 \text{ J/s}}{\left(m/t\right)\left(4{,}18\text{J/g}^\circ\text{C}\right)\left(2^\circ C\right)} = \frac{1}{5}\frac{(274-258)\text{K}}{274\text{K}}$$

$$\therefore \quad \frac{m}{t} = \frac{5\times 274\times 10^4}{2\times 4{,}18\times 16}\frac{\text{g}}{\text{s}} = 102{,}4\times 10^3\,\frac{\text{g}}{\text{s}}$$

La razón del flujo de agua necesario es 102,4 litros/s

Ejemplo 116. Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30%. Para cada ciclo de operación,

a) ¿cuánto calor se absorbe?, y

b) ¿cuánto calor se libera?

Solución.

Q_1 calor absorbido de la fuente caliente

Q_2 calor cedido a la fuente fría

W = 200 J

$$e = \frac{W}{Q_1} = 0{,}3$$

entonces

a) $Q_1 = \frac{200}{0.3} = 666{,}7$ J

b) $Q_2 = Q_1 - W = 666{,}7 - 200 = 466{,}7$ J

Ejemplo 117. En un determinado refrigerador las serpentinas de baja temperatura están a -10°C y el gas comprimido en el condensador tiene una temperatura de + 30°C. Considerando que trabaja con el ciclo Carnot. ¿Cuál es su rendimiento teórico?

Solución.

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{\frac{Q_1}{Q_2} - 1} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{303}{263} - 1} = \frac{263}{40} = 6{,}58$$

Ejemplo 118. Una máquina térmica absorbe 360 J de calor y realiza un trabajo de 25 J en cada ciclo. Encuentre:
a) la eficiencia de la máquina y
b) el calor liberado en cada ciclo.
Solución.
Q_1 = 360 J
W = 25 J
a) $e = \frac{W}{Q_1} = \frac{25}{360} = 0{,}069 = 6{,}9\%$
b) $Q_{Liberado} = Q_1 - W = 335$ J

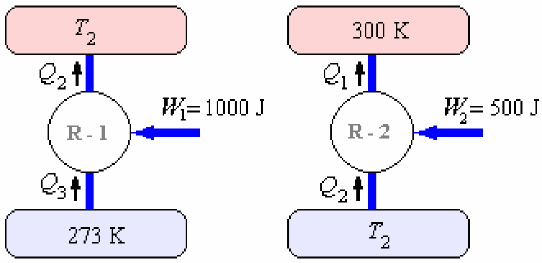
Ejemplo 119. Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30%. Para cada ciclo de operación,
a) ¿cuánto calor se absorbe?, y
b) ¿cuánto calor se libera?
Solución.
Q_1 calor absorbido de la fuente caliente
Q_2 calor cedido a la fuente fría
W = 200 J
$$e = \frac{W}{Q_1} = 0{,}3$$
Entonces
a) $Q_1 = \frac{200}{0{,}3} = 666{,}7$ J

b) $Q_2 = Q_1 - W = 666{,}7 - 200 = 466{,}7$ J

Ejemplo 120. Un refrigerador tiene un coeficiente de operación igual a 5. Sí el refrigerador absorbe 120 J de calor de una fuente fría en cada ciclo, encuentre:
a) el trabajo hecho en cada ciclo y
b) el calor liberado hacia la fuente caliente.
Solución.
$\eta = 5$
Q_1 = 120 J
a) $\eta = \frac{Q_1}{W} = \frac{W + Q_2}{W}$
De donde $5 = \frac{W + 120}{W} \Rightarrow W = 30$ J
b) $Q_2 = W + Q_1 = 30 + 120 = 150$ J

Ejemplo 121. Cierta máquina tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, encuentre:
a) el calor absorbido en cada ciclo y
b) el tiempo para cada ciclo.
Solución.
P = potencia = 5 kW = 5 x 10^3W
e = 25 % = 0,25
Q_1 = 8000 J
Si t es el tiempo de un ciclo
$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{W}{W + Q_1} = \frac{Pt}{Pt + Q_1}$$
o bien
$$0{,}25 = \frac{5\times 10^2 t}{5\times 10^2 t + 8000}$$
De donde se obtiene t = 0,53 s el tiempo para cada ciclo.
El calor absorbido en cada ciclo será
$$Q_1 = 5\times 10^2 t + 8000$$
$$= 5\times 10^2 (0{,}53) + 8000 = 1{,}065 \text{ x } 10^4 \text{ J}$$

Ejemplo 122. El calor absorbido por una máquina es el triple del trabajo que realiza.
a) ¿Cuál es su eficiencia térmica?
b) ¿Qué fracción del calor absorbido se libera a la fuente fría?
Solución.
$Q_1 = 3W$
a) $e = \frac{W}{Q_1} = \frac{1}{3} = 0{,}33 = 33\%$
b) $Q_2 = Q_1 - W = Q_1 - \frac{Q_1}{3} = \frac{2}{3}Q_1$
Fracción del calor absorbido que se libera:
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2}{3} = 0{,}66$$

Ejemplo 123. Dos máquinas frigoríficas de Carnot trabajan en serie la primera extrae calor de una fuente a 0°C y consume 1000 J. La segunda maquina consume 500 J. y entrega calor a una fuente a 27ºC Considere que el calor que la primera cede a una fuente intermedia es íntegramente absorbido por la segunda.
a) ¿Cuál es el calor que la primera maquina extrae?
b) ¿Cuál es la temperatura de la fuente intermedia?
c) ¿Qué calor intercambian las máquinas con la fuente de temperatura intermedia?
Solución.


a) Para el conjunto

$$\eta = -\frac{Q_3}{Q_3 - Q_1} = -\frac{Q_3}{W_1 + W_2} = -\frac{1}{1 - \frac{Q_1}{Q_3}} = -\frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_3}}$$

$$\Rightarrow -\frac{Q_3}{-(1000 + 500)} = -\frac{1}{1 - \frac{300}{273}}$$

$$Q_3 = \frac{1500 \times 273}{27} = 15166{,}7 \text{ J}$$

b) Para R – 1

$$\eta_1 = -\frac{Q_3}{Q_3 - Q_2} = -\frac{Q_3}{W_1} = -\frac{1}{1 - \frac{Q_2}{Q_3}} = -\frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_3}}$$

$$\Rightarrow -\frac{15166{,}7}{-1000} = -\frac{1}{1 - \frac{T_2}{273}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{273} - 1 = 0{,}066 \ \Rightarrow T_2 = 290{,}1 \text{ K}$$

c) Q_3 = 15166,7 J,

$Q_2 = Q_3 - W_1$ = 15166,7 – (-1000) = 16166,7 J

ENTROPIA

Recordemos para el ciclo reversible de Carnot,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{o} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Es posible aproximar cualquier ciclo reversible por una serie de ciclos de Carnot, y éste nos conduce a la conclusión que

$\oint \frac{dQ}{T} = 0$ para un ciclo reversible.

Esto recuerda a las fuerzas conservativas, donde

$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ para una trayectoria cerrada. Que nos llevó a definir la energía potencial *U* donde

$U_B - U_A = \int_A^B \vec{F} . d\vec{s}$. En este caso un estado del sistema fue caracterizado por un valor definido de *U*, la energía potencial. De la misma manera, definimos una nueva variable del estado, la entropía *S*, tal que

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad \text{y} \quad S_{(B)} - S_{(A)} = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

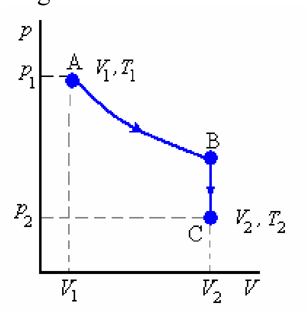
Note que aunque un valor definido de *Q* no caracteriza un estado (es decir, un punto en un diagrama *p V*), cada punto en el diagrama *p V* tiene un valor definido de *S*. Es curioso que aunque el flujo del calor en un sistema depende de la trayectoria seguida entre los dos estados, el cambio en *S* es independiente de la trayectoria. Decimos que *dQ* es un diferencial inexacto, y *dS* es un diferencial exacto.

La ecuación anterior es cierta para un ciclo reversible. Uno puede razonar que $\oint (dQ/T) > 0$ para un ciclo irreversible. Además, es posible ampliar este razonamiento a cualquier proceso que lleve un sistema del estado *A* al estado *B*, con el resultado que. $\Delta S = S_{(B)} - S_{(A)} .= \oint (dQ/T)$.

Para un sistema aislado, esto se convierte $\Delta S = 0$ para un ciclo reversible y $\Delta S > 0$ para un ciclo irreversible.

Esto significa que la entropía de un sistema aislado sigue siendo constante o aumenta. Puesto que los procesos verdaderos son todos irreversibles, esto significa que la entropía del universo aumenta siempre en cada proceso.

Ejemplo 124. Calcular el cambio en la entropía para un gas ideal siguiendo un proceso en el cual lo lleve de p_1, T_1, V_1 a p_2, T_2, V_2 según se muestra en la figura.



Solución.

No importa qué trayectoria siga, el cambio de la entropía será igual puesto que *S* es una función del estado. Para simplificar el cálculo, elegiremos la trayectoria reversible mostrada, primero viajando a lo largo de una trayectoria isotérmica, y luego a lo largo de una trayectoria a volumen constante. A lo largo de la isoterma la temperatura no cambia, por lo tanto no hay cambio en energía interna.

$(U = nC_V T)$

Así *dQ* = *dW* para este proceso, y

$$S_{(B)} - S_{(A)} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dW}{T_1}$$

$pV = nRT$, tal que $S_{(B)} - S_{(A)} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRTdV_1}{VT_1}$

$$S_{(B)} - S_{(A)} = nR \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Para *B* $\rightarrow$ *C*, no se realiza trabajo, luego

$dQ = dU = nC_V dT$:

$$S_{(C)} - S_{(B)} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dQ}{T} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

El cambio total de la entropía es

$\Delta S = S_{(B)} - S_{(A)} + S_{(C)} - S_{(B)}$:

$\Delta S = S(p_2, V_2, T_2) - S(p_1, V_1, T_1)$

$$= nC_V \ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Ejemplo 125. Un kilogramo de agua a temperatura de 280 K se mezcla con 2 kilogramos de agua a 310 K en un recipiente aislado térmicamente. Determine el cambio en la entropía del Universo.
Solución.
Aquí, un proceso de mezclado

$$\Delta S = m_1c_1 \ln\frac{T_f}{T_1} + m_2c_2 \ln\frac{T_f}{T_2}$$

donde (por calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$$

siendo
$m_1 = 1000$ g
$T_1 = 280 + 273,15 = 553,15$K
$m_2 = 2000$ g
$T_2 = 310 + 273,15 = 583,15$K
entonces

$$T_f = \frac{553,15 + 2\times 583,15}{3} = 573,15 \text{ K}$$

y $\Delta S = 1000\ln\frac{573,15}{553,15} + 2000\ln\frac{573,15}{583,15}$

$$= 0,92\frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

Ejemplo 122. Una masa m de líquido a temperatura T_1 se mezcla con una igual cantidad del mismo líquido a temperatura T_2 en un recipiente aislado térmicamente. Demuestre que el cambio de entropía del Universo es $2mc_p \ln\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}$ y pruebe que es necesariamente positivo.
Solución.
El cambio de entropía del Universo será el cambio de entropía de la mezcla, es decir

$$\Delta S = m_1c_1 \ln\frac{T_f}{T_1} + m_2c_2 \ln\frac{T_f}{T_2}$$

donde (calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$$

pero $m_1 = m_2 = m$ y $c_1 = c_2 = c$ por lo cual resulta

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Y

$$\Delta S = mc\ln\frac{T_f^2}{T_1T_2} = 2mc\ln\frac{T_f}{\sqrt{T_1T_2}} =$$

$$2mc\ln\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}$$

Para probar que es positivo, debemos demostrar que en general

$$\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} > 1$$

y esto se deduce de

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 > 0 \Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} > 0 \Rightarrow$$

$$x + y > 2\sqrt{xy}$$

Finalmente: $\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} > 1$

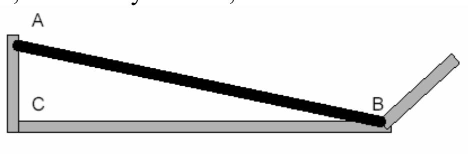
PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un termómetro de gas a volumen constante se calibra en hielo seco (dióxido de carbono en estado sólido, temperatura de -80 ºC) y en alcohol etílico en ebullición (temperatura de 78 ºC).
Los valores de las presiones son 0,9 atm y 1,635 atm, respectivamente.
Determine:
a) El valor del cero absoluto obtenido de la calibración;
b) El valor de la presión en el punto de congelación del agua;
c) El valor de la presión en el punto de ebullición del agua.

2. En un termómetro de resistencia la propiedad usada para medir a temperatura es la resistencia eléctrica de un conductor. Las temperaturas medidas por este termómetro (en Kelvin o en grados Celsius) pueden ser directamente relacionadas con la resistencia R, medida en ohms. Un cierto termómetro de resistencia tiene una resistencia $R = 90,35$ cuando su bulbo se coloca en agua, a temperatura del punto triple (273,16 K). Determine a temperatura indicada por el termómetro cuando su bulbo se coloca en un medio tal que a su resistencia sea igual a:
a) 105, b) 96,28 .

3. Un recipiente de vidrio está lleno hasta el borde de mercurio a la temperatura de 0º y masa 1 kg. El recipiente vacío tiene una masa de 0,1 kg. Calcular la cantidad de mercurio a 100 ºC que puede contener este recipiente. El coeficiente de dilatación cúbica del mercurio es $1,8\times10^{-4}$ ºC^{-1} y el del vidrio 3×10^{-5} ºC^{-1}.
$\rho_{Hg} = 13,6$ g/cm^3 a 0 ºC.
Respuesta. 887 g de Hg.

4. Un vástago de latón AB tiene una longitud de 200,1 mm y ha de encajarse exactamente en el hueco BC, de hierro que tiene la forma del esquema. Al intentarlo queda AB como se indica en la figura, siendo AC = 4 mm. Calcular el descenso de la temperatura para lograr el encaje. Los coeficientes de dilatación del latón y del hierro valen respectivamente,
α = 19,9 x10 ºC^{-1} y α' = 12,1x10^{-6} ºC^{-1}.



Respuesta. 25,6 ºC.

5. Un anillo de latón de varios centímetros de diámetro se calienta hasta la temperatura t_1 = 300 ºC y se encaja ajustadamente sobre un cilindro de acero cuya temperatura es t_2 = 18 ºC. ¿Qué esfuerzo de rotura experimentará el anillo una vez enfriado hasta 18 ºC? El coeficiente de dilatación lineal del latón es α = 1,84x10-5 ºC^{-1} y su módulo de Young Y = 6,47x10^{10} Nm^{-2}. Las dimensiones de la sección del anillo son 2x5 mm.
Respuesta. 3,364 N.

6. Con una regla métrica de latón cuyas dimensiones son exactas a 0 ºC, se ha medido la longitud de una barra de hierro, encontrándose ℓ = 1,4996 m a 38 ºC. Siendo α = 12,1x10^{-6} ºC^{-1} el coeficiente de dilatación lineal del hierro y β= 19,9x10^{-6} ºC^{-1} el del latón, calcular la longitud a 0 ºC de la barra de hierro.
Respuesta. 1,500 m.

7. Si la temperatura del ambiente en que se encuentra un reloj de péndulo que bate segundos se modifica en 20 ºC, ¿qué le pasará al reloj al cabo de 30 días si el coeficiente de dilatación lineal del péndulo es 20x10^{-6} ºC^{-1}?
Respuesta. 8 min. 38 s. se atrasa.

8. Una bola de acero de 6 cm de diámetro tiene 0,010 milímetros más de diámetro que el correspondiente al orificio de una plancha de latón donde se debe alojar cuando tanto la bola como la plancha están a una temperatura de 30 ºC. A qué temperatura, tanto de la bola como de la plancha, podrá pasar la bola por el orificio.
El coeficiente de dilatación lineal del acero vale 12x10^{-6} ºC^{-1} y el del latón 19x10^{-6} ºC^{-1}.
Respuesta. 54 ºC.

9. Una vasija de vidrio está llena justamente con 1 litro de terpentina a 50 ºF. Hallar el volumen de líquido que se derrama si se calienta hasta 86 ºF.
El coeficiente de dilatación lineal del vidrio vale 9x10^{-6} ºC^{-1} y el de dilatación cúbica de la terpentina 97x10^{-5} ºC^{-1}.
Respuesta. 18,86 cm^3.

10. Se ha de introducir un remache de hierro en una placa también de hierro y para conseguir un ajuste lo más perfecto posible se introduce el remache, antes de meterlo en la placa, en aire líquido (-187 ºC). El diámetro del orificio es de 10 mm. ¿Que diámetro tendrá que tener el remache a la temperatura ambiente (20 ºC) para que después de meterlo en aire líquido entre justamente por el orificio de la placa?
Coeficiente de dilatación lineal del hierro:
α = 12x10^{-6} ºC^{-1}.
Respuesta. 10,025 mm.

11. Un recipiente a 0 ºC contiene la tercera parte de su volumen de mercurio.
Se calienta a una cierta temperatura y entonces el mercurio ocupa el 34,37 por 100 del volumen del vaso. ¿Cuál es dicha temperatura?
Coeficiente de dilatación del mercurio
γ= 18x10^{-5} ºC^{-1}.
Coeficiente de dilatación del recipiente
γ' = 25x10^{-6} ºC^{-1}.
Respuesta. 202 ºC.

12. ¿Que fuerzas hay que aplicar a los extremos de una barra de acero, cuya sección transversal tiene el área S = 10 cm^2, para impedir que se dilate cuando se calienta desde t_1= 0 ºC hasta t_2 = 30 ºC?
Respuesta. 68,688 N.

13. De un alambre de 1 mm de radio cuelga una carga. Esta carga hace que el alambre se alargue en la misma magnitud que se alargaría sí se elevara 20 ºC su temperatura.
Hallar la magnitud de la carga.
Respuesta. 148 N.
α = 1,2x10^{-5} ºC^{-1}
Y = 19,6x10^{10} N.m^{-2}

14. Un alambre de hierro se tendió entre dos paredes fijas resistentes, estando la temperatura a 150 ºC ¿A qué temperatura se romperá el alambre al enfriarse? Suponer que la ley de Hooke se cumple hasta el momento en que se produce la rotura.
α = 1,2x10^{-5} C^{-1}
Resistencia a la rotura F/S = 2,94x10^8 N/m^2
Módulo de Young Y = 19,6x10^{10} N/m2
Respuesta. 25 ºC.

15. Unos carriles de acero de 18 m de longitud se colocan un día de invierno en que la temperatura es -6 ºC. ¿Qué espacio ha de dejarse entre ellos para que estén justamente en contacto un día de verano en que la temperatura es 40 ºC. Coeficiente de dilatación del acero α = 12x10^{-6} ºC^{-1}?
Respuesta. 9,936x10^{-6} m.

16. La varilla de un reloj de péndulo sin compensar, que bate segundos a 0 ºC
es de latón. Averiguar cuanto se retrasa el reloj en un día si se introduce en un ambiente a 200 ºC.

Coeficiente de dilatación del latón: $17x10^{-6}$ ºC^{-1}
(Considerar el péndulo como simple).
Respuesta. 7 m. 12 s.

17. Un herrero ha de colocar una llanta circular de hierro de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la temperatura ambiente es de 20 ºC y su coeficiente de dilatación lineal $12,2x10^{-6}$ ºC^{-1}.
Calcular:
a) Temperatura en grados centígrados a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.
b) Expresar esta temperatura en grados Fahrenheit y en grados absolutos.
Respuesta. a) 347 ºC; b) 656,6 ºF, 620 K.

18. Una vasija de cinc (coeficiente de dilatación lineal: $29x10^{-6}$ ºC^{-1}), está llena de mercurio a 100 ºC; teniendo entonces una capacidad de 10 litros. Se enfría hasta 0 ºC. Calcular la masa de mercurio a 0 ºC que hay que añadir para que la vasija quede completamente llena
(Coeficiente de dilatación cúbico del mercurio: $182x10^{-6}$ ºC^{-1}). Densidad del mercurio a 0 ºC 13,6 g/cm^3.
Respuesta. 1,258 g.

19. La pared de concreto de un frigorífico mide 3,0 m de alto, 5,0 m de ancho, y 20 cm de espesor. La temperatura se mantiene en –10º C y la temperatura exterior es 20º C. La pared interior está cubierta por una capa de lana para reducir el flujo de calor a través de la pared por 90 %. Las conductividades térmicas del concreto y de la lana son 0,8 y 0,04 W/m.K, respectivamente.
a) ¿Cuál es la diferencia de temperaturas de la capa de lana?
b) ¿Cuál es el espesor de capa de lana requerido?

20. Dos placas paralelas grandes están separadas por 0,5 m. Un círculo de 1,5 m de radio se delinea sobre la placa de la izquierda. Un segundo círculo, del mismo radio y opuesta a la primera, se delinea sobre la placa de la derecha. La temperatura de la placa de la izquierda es 700 K y la emisividad es 1,00. La temperatura de la placa de la derecha es 600 K y la emisividad es 0,80.
a) ¿El calor neto radiado entre los dos círculos es?
b) La temperatura de la placa izquierda se mantiene en 700 k. La temperatura de la placa derecha se cambia, tal que ahora el flujo de calor neto radiado es cero, en el espacio entre los círculos. ¿Cuál es la temperatura de la placa de la derecha?

21. Una esfera de 0,30 m de radio, tiene una emisividad de 0,48 y su temperatura es de 600 K. La esfera se rodea de una cáscara esférica concéntrica cuya superficie interior tiene un radio de 0,90 m y una emisividad de 1,00. La temperatura de la cáscara es 400 K. ¿El calor neto radiado, incluyendo la dirección, en el espacio entre las esferas y la cáscara es?

22. Un proyectil de plomo choca contra un obstáculo. ¿Cuál es la velocidad en el momento del choque sí su temperatura inicial era de 65 ºC y se funde la tercera parte? Se supone el obstáculo inamovible e inalterable. Calor específico del plomo 0,031 cal/g ºC.
Temperatura de fusión: 327,4 ºC; calor de fusión: 5,74 cal/g.
Respuesta. 289,93 m/s.

23 Se lanza una esfera de plomo cuya temperatura inicial es de 36 ºC, verticalmente y hacia abajo con una velocidad v_0; 100 metros más abajo encuentra un plano absolutamente resistente de conductividad calorífica nula. Calcular el valor de v_0 necesario para que la esfera se funda totalmente en el choque. Calor específico del plomo c = 0,031 cal/g ºC.
Temperatura de fusión del plomo t = 327,4 ºC.
Calor de fusión del plomo = 5,74 cal/g;
1 cal = 4,186 J; g = 9,8 m/s^2.
Respuesta. 348,7 m/s.

24. Una masa de plomo igual a 10 g llega horizontalmente, con una velocidad de 250 m/s sobre una esfera de plomo de 450 g, en la cual se incrusta.
a) Estando, al principio, la esfera de plomo inmovilizada, calcular el calentamiento que resultará del choque.
b) Pudiéndose separar la esfera de plomo de la vertical como un péndulo, se comprueba en una segunda experiencia que se eleva 2 metros después del choque. Calcular el calentamiento resultante. C_{Pb}= 0,03 cal/g.
Respuesta. a) 5,4 ºC; b) 5,2 ºC.

25. En un calorímetro sin pérdidas cuyo equivalente en agua es de 101 g y cuya temperatura inicial es de 20 ºC, se añaden 250 cm^3 de agua a 40 ºC, 100 g de hierro a 98 ºC (calor específico = 0,109 cal/g ºC) y 80 g de hielo fundente. Calcular la temperatura de equilibrio.
Respuesta. 15,1 ºC.

26. Dentro de un calorímetro que contiene 1.000 g de agua a 20 ºC se introducen 500 g de hielo a -16 ºC. El vaso calorimétrico es de cobre y tiene una masa de 278 g.
Calcular la temperatura final del sistema, suponiendo que no haya pérdidas.
Calor específico del hielo: 0,55 cal/g ºC
Calor específico del cobre: 0,093 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 539 cal/g
Respuesta. 0 ºC no se funde todo el hielo; 201 g.

27. En un calorímetro de latón sin pérdidas, de 240 g, que contiene 750 cm^3 de agua a 20,6 ºC se echa

una moneda de oro de 100 g a 98 ºC y la temperatura sube a 21 ºC.
Determinar la cantidad de oro y cobre que integra la moneda. Calor específico del latón: 0,09 cal/g ºC; calor específico del cobre: 0,0922 cal/g ºC; calor específico del oro: 0,031 cal/g ºC.
Respuesta. 85,16 g de oro; 14,84 g de cobre.

28. En un calorímetro de cobre se queman exactamente, 3 g de carbón produciéndose CO_2. La masa del calorímetro es de 1,5 kg y la masa de agua del aparato es 2 kg.
La temperatura inicial de la experiencia fue de 20 ºC y la final de 31 ºC. Hallar el poder calorífico del carbón expresándolo en cal/g. El calor específico del cobre vale 0,093 cal/g ºC.
Respuesta. 7,8x103 cal/gr.

29. En un calorímetro cuyo equivalente en agua es despreciable, hay 1 kg de hielo a -10 ºC. ¿Cuantos gramos de agua a 80 ºC hay que introducir en él para que la temperatura final sea de 10 ºC? Sí en lugar de agua a 80 ºC, se introduce vapor de agua a 100 ºC, ¿Cuántos gramos de éste habría que introducir para que la temperatura final sea de 40 ºC? ¿Que volumen ocupa el vapor de agua introducido, si la presión a que se mide es de 700 mm de mercurio? Peso molecular del agua 18.
Calor específico del hielo (de -20 a 0 ºC): 0,5 cal/g ºC
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g
Respuesta. 1,357 g; 208 g; 384 litros.

30. Mezclamos 1 kg de agua a 95 ºC con un kg de hielo a -5 ºC.
¿Dispondremos de suficiente calor para fundir todo el hielo? Sí es así, ¿a qué temperatura queda la mezcla?
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Respuesta. Se funde todo el hielo, 6,25 ºC.

31. Una bola de plomo (calor específico: 0,03 cal/g ºC) de 100 g está a una temperatura de 20 ºC. Se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 420 m/s
y al regresar al punto de partida choca con un trozo de hielo a 0 ºC. ¿Cuanto hielo se funde?
Se supone que toda la energía del choque se convierte íntegramente en calor.
Respuesta. 27 g.

32. Un vaso cuya capacidad calorífica es despreciable contiene 500 g de agua a temperatura de 80 ºC. ¿Cuantos gramos de hielo a la temperatura de -25 ºC han de dejarse caer dentro del agua para que la temperatura final sea de 50 ºC?
Respuesta. 105 gramos de hielo.

33. Una bola, a una velocidad de 200 m/s, choca contra un obstáculo.
Suponiendo que toda la energía cinética se transforma en calor y que éste calienta tan solo la bola, calcular su elevación de temperatura.
Calor específico del metal 0,1 cal/g ºC.
Respuesta. 47,8 ºC.

34. Un calorímetro de latón de M_1= 125 g contiene un bloque de hielo de M_2 = 250 g todo ello a t_1= -15 ºC.
Calcular la cantidad de vapor de agua a 100 ºC y a la presión normal que es necesario para que todo el sistema llegue a la temperatura de t = 15 ºC.
Calor específico del latón: 0,09 cal/g ºC
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g
Respuesta. 41,54 g.

35. En un recipiente de aluminio de 256 g que contiene 206 g de nieve a -11 ºC se introducen 100 g de vapor de agua a 100 ºC. Calcular la temperatura final de la mezcla.
Calor específico del aluminio: 0,219 cal/g ºC
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 539 cal/g
Respuesta: Solo se condensa parte del vapor y la temperatura final será de 100 ºC. Vapor condensado 82,4 gramos.

36. Una bala de plomo atraviesa una pared de madera. Antes de chocar con la pared la velocidad de la bala era v_0 = 400 m/s y después de atravesarla v = 250 m/s. La temperatura de la bala antes del choque era t_0 = 50 ºC. ¿Qué parte de la bala se fundirá?
Calor de fusión del plomo: 5,74 cal/g
Temperatura de fusión del plomo: 327 ºC
Calor específico del plomo: 0,031 cal/g ºC
Suponer que todo el calor que se desprende lo recibe la bala.
Respuesta. 0,53.

37. En un calorímetro sin pérdidas cuyo equivalente en agua es de 500 g, hay 4,500 g de agua a 50 ºC. Se añaden 2 kg de hielo fundente y se introduce 1 kg de vapor de agua a 100 ºC. El calor de fusión vale 80 cal/g y el de vaporización 540 cal/g. Calcular la temperatura de equilibrio.
Respuesta. 91,25 ºC.

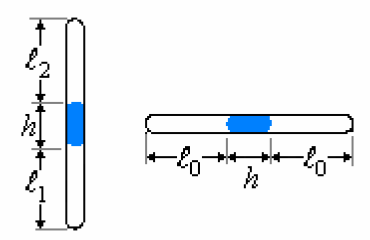
38. Un cubo de hielo de 20 g a 0 ºC se calienta hasta que 15 g se han convertido en agua a 100 ºC y 5 g se han convertido en vapor. ¿Cuanto calor se necesitó para lograr esto?
Respuesta. 6300 cal.

39. En un recipiente se almacenan 2 litros de agua a 20 ºC. Inmersas en el agua se encuentran dos barras: una de latón de 5 cm de largo y 200 g y otra de hierro de idénticas dimensiones y 250 g.
a) Hallar la cantidad de calor necesaria para calentar todo el conjunto (agua y barras) justo hasta que todo el agua se convierta en vapor a 100 ºC (calor

específico del latón y hierro: 0,09 cal/gºC y 0,11 cal/gºC respectivamente).
b) Determinar las longitudes de ambas barras en esas condiciones (coeficiente lineal de dilatación de latón y hierro: $1,9\text{x}10^{-5}$ ºC^{-1} y $1,2\text{x}10^{-5}$ ºC^{-1} respectivamente).
c) ¿Cuál es más denso a 20 ºC, el latón o el acero? ¿Y a 100 ºC?
Respuesta. a) $Q = 5,2\text{x}10^6$ J; b) $L_{latón} = 0,050076$ m, $L_{hierro} = 0,050048$ m.
c) A 20 ºC y 100 ºC es más denso el hierro.

40. En un recipiente se mezclan 4,5 litros de agua a 20 ºC y 500 g de hielo
a 0 ºC. Se introduce en el recipiente una barra de metal, de capacidad calorífica despreciable.
a) ¿Cuál es la temperatura en el equilibrio?
b) El conjunto se calienta en un hornillo que proporciona 5,000 cal/s, ¿cuál es la temperatura a los 100 s? La longitud de la barra a 0 ºC es de 10 cm y su coeficiente de dilatación lineal es de $2\text{x}10^{-5}$ ºC^{-1}.
c) Obtener una expresión de la longitud de la barra en función del tiempo hasta t = 100 s.
Respuesta. a) t = 10 ºC, b) t_{final} = 100 ºC.

41. Un tubo capilar de longitud 50 cm está cerrado en ambos extremos. Contiene aire seco y cada extremo está separado por una columna de mercurio de 10 cm de largo. Con el tubo en posición horizontal, las columnas de aire son de 20 cm de largo, y con el tubo en posición vertical son de 15 cm y 25 cm. ¿Cuál es la presión en el tubo capilar cuando está horizontal?



Solución.
Para el aire del aparte inferior
$p_0V_0 = p_1V_1$ (1)
Para el aire del aparte superior
$p_0V_0 = p_2V_2$ (2)
En el tubo vertical
$p_1 = p_2 + \rho gh$ (3)
$p_1V_1 = p_2V_2$ (4)
De (1) y (2)
$$(p_2 + \rho gh)A15 = p_2A25 \Rightarrow$$
$$3(p_2 + \rho gh) = 5p_2 \Rightarrow$$
$$p_2 = 1,5\rho gh$$
Reemplazando en (2) los valores de p_2
$V_0 = A20$, $V_2 = A25$
$$p_0A20 = 1,5\rho ghA25$$
$$p_0A20 = 1,5\rho ghA25$$
$$p_0 = 1,875\rho gh$$
$$= 1,875(13600)(9,80)(0,10)$$
$$= 24990 \text{ Pa}$$

42. Un tubo cilíndrico de medio metro de longitud se introduce en mercurio hasta su mitad; después se tapa el extremo superior y se retira. Calcular la longitud de mercurio que quedará en el tubo y la presión del aire encerrado sobre él. La presión atmosférica es de 76 cm de mercurio.
Respuesta. 58,45 cm Hg.

43. El peso de un metro cúbico de cierto gas a la temperatura de t = 67 ºC y presión p = 100 mm de mercurio es m = 282,32 g. Calcular la pérdida de peso que experimentaría un cuerpo sumergido en este gas a una cierta presión y temperatura sabiendo que en estas condiciones pierde en el aire 4,839 g.
ρ aire = 1,293 g/litro
Respuesta. 10,001 g.

44. Un depósito contiene 50 kg de oxígeno a la presión p_1= 10 atm y a la temperatura t_1= 27 ºC. Se produce una fuga por donde escapa oxígeno y al cabo de cierto tiempo, localizada y tapada la fuga, la presión y la temperatura del depósito resultan ser p_2= 6 atm y t_2= 20 ºC.
¿Que cantidad de oxígeno ha escapado?
Respuesta. 19,3 kg.

45. Un frasco de 5 litros de volumen se tapa en un recinto cuya presión es de 762 mm de Hg y cuya temperatura es de 27 ºC. Luego se abre en un lugar donde la presión es de 690 mm y la temperatura 9 ºC. ¿Entra o sale aire? Calcular el peso de aire que entra o sale.
Respuesta. 0,1905 salen; 0,2165 g.

46. Calcular en gramos el peso del hidrógeno H_2 contenido en un recipiente de 5 galones que está a la presión de 14 psi y a la temperatura de 86 ºF.
Respuesta: 1,462 g.

47. Un recipiente cuyo volumen es igual a 5 litros, contiene aire a 27 ºC de temperatura y a la presión de 20 atm. ¿Que masa de aire hay que liberar del recipiente, para que la presión de éste caiga a 10 atm?
Respuesta. 59 g.

48. Calcular el trabajo que realiza un gas cuando se calienta isobáricamente desde los 20 ºC hasta 100 ºC, si se encuentra dentro de un recipiente cerrado por medio de un émbolo móvil, cuya sección es igual a 20 cm2 y su peso 5 kgf. Analizar dos casos:
a) cuando el recipiente se encuentra en posición horizontal y
b) cuando el recipiente se encuentra en posición vertical. El volumen inicial del gas es igual a 5 litros, y la presión atmosférica es la normal.
Respuesta. a) 138 J; b) 172 J.

49. Un tubo con su extremo superior cerrado es sumergido completamente en un recipiente que contiene mercurio, después de lo cual, dentro del tubo queda una columna de aire de 10 cm de longitud. ¿A que altura sobre el nivel del mercurio en el recipiente hay que levantar el extremo superior del tubo para que dentro de éste el nivel del mercurio quede igual al nivel del mercurio en el recipiente. La presión atmosférica es la normal. Calcular la masa de aire dentro del tubo, si su sección es igual a 1 cm^2 y la temperatura igual a 27 ºC.
Respuesta. 11,3 cm; 13,3 mg.

50. ¿Que cantidad de calor se desprenderá al comprimir por vía reversible e isoterma 100 litros de un gas ideal a 27 ºC que se encuentran a 71 cm de mercurio de presión, hasta reducir su volumen a la centésima parte?
Respuesta. 10418 cal.

51. Cien litros de oxígeno a 20 ºC y 69 cm de mercurio de presión se calientan
a volumen constante comunicando 2555 calorías. Calcular el incremento de la presión en cm de mercurio.
Respuesta. 31,87 cm Hg.

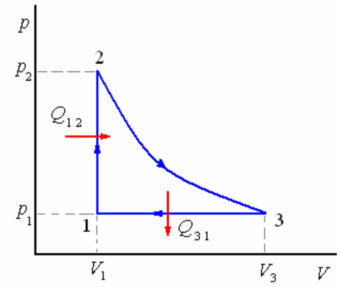
53. Un tanque contiene 2,73 m^3 de aire a una presión de 24,6 kg/cm^2. El aire se enfría hasta ser su presión de 14 kg/cm^2. ¿Cuál será la disminución de su energía interna?
Considérese el aire como gas perfecto biatómico de índice adiabático γ = 1,4.
Respuesta. 1,420x10^6 cal.

53. Cinco moles de un gas perfecto diatómico a 27 ºC se calientan isobáricamente con el calor que se desprende de un mol de otro gas perfecto que se comprime isotérmicamente a 27 ºC hasta triplicar su presión. Calcular la temperatura final del primer gas.
Respuesta. 318,8 K = 45,8 ºC.

54. Se comprime adiabáticamente un mol de cierto gas perfecto (índice adiabático γ = 1,15) que se encuentra a p_1= 1 atm, t_1 = 127 ºC hasta alcanzar una presión p_2.
Después se deja enfriar a volumen constante hasta alcanzar las condiciones p_3 = 10 atm y t_3 = 27 ºC.
Calcular:
a) La presión p_2 en atmósferas.
b) El trabajo en la compresión adiabática.
c) La cantidad de calor en calorías cedidas durante el enfriamiento.
Respuesta. a) 48,7 atm; b) 1,8x10^9 J; b) 4,621 cal.

55. Supóngase que 1 litro de gasolina propulsa un automóvil una distancia de 10 km. La densidad de la gasolina es aproximadamente 0,7 g/cm^3, y su calor de combustión es aproximadamente 4,6 x 10^4 J/g.
a) Si el motor tiene un rendimiento del 25%, ¿qué trabajo total realiza el motor durante los 10 km del recorrido?
b) Si se supone que este trabajo se realiza contra una fuerza resistente constante *F*, hállese la magnitud de *F*.
Respuesta. a) 8,05x10^6 J; b) 0,805 N.

56. En el ciclo que se muestra en la figura, un mol de un gas diatómico ideal (γ = 1,4) se encuentra inicialmente a 1 atm y 0 ºC. El gas se calienta a volumen constante hasta
t_2 = 150 ºC y luego se expande adiabáticamente hasta que su presión vuelve a ser 1 atm.
Luego se comprime a presión constante hasta su estado original. Calcular:
a) La temperatura t_3 después de la expansión adiabática.
b) El calor absorbido o cedido por el sistema durante cada proceso.
c) El rendimiento de este ciclo.
d) El rendimiento de un ciclo de Carnot que operara entre las temperaturas extremas del ciclo.
C_V = 5 cal/molºC; C_p = 7 cal/molºC



Respuesta. a) 373 ºK ; b) -2,93 kJ; c) 6,69 %; d) 35 %

57. Un mol de gas N_2 (C_V= 5/2R; γ = 1,4) se mantiene a la temperatura ambiente (20 ºC) y a una presión de 5 atm. Se deja expandir adiabáticamente hasta que su presión iguala a la ambiente de 1 atm. Entonces se calienta a presión constante hasta que su temperatura es de nuevo de 20 ºC. Durante este calentamiento el gas se expansiona. Una vez que ha alcanzado la temperatura ambiente, se calienta a volumen constante hasta que su presión es de 5 atm. Se comprime entonces a presión constante hasta volver a su estado original.
a) Construir un diagrama *pV* exacto, mostrando cada etapa del ciclo.
b) A partir de este gráfico determinar el trabajo realizado por el gas en todo el ciclo.
c) ¿Cuánto calor fue absorbido o cedido por el gas en el ciclo completo?
R=0,082 litro.atm/mol K = 1,98 cal/mol K
Respuesta. b) -65,1 litro.atm; c) -1.572,5 cal

58. Una máquina de vapor con potencia de 14,7 kW consume durante 1 h de funcionamiento 8,1 kg de carbón, cuyo calor específico de combustión es de 3,3x10^7 J/kg. La temperatura en la caldera es do 200 ºC, en la máquina frigorífica, 58ºC. Hállese el rendimiento real de la máquina y compárese cl resultado con el rendimiento de una máquina térmica ideal.

Respuesta. $e \approx 19{,}8\%$ $e_o = 30\%$

59. Un cuerpo calentado con temperatura inicial T_1 se aprovecha como calentador en una máquina térmica. La capacidad calorífica del cuerpo no depende de la temperatura y es igual a C. Un medio ilimitado, cuya temperatura es constante e igual a T_0, sirve de máquina frigorífica. Hállese el trabajo máximo que puede obtenerse por cuenta del enfriamiento del cuerpo. Realícese el cálculo para 1 kg de agua hirviendo y de hielo que se derrite.

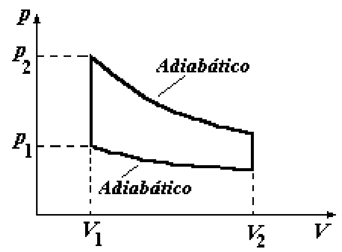
Respuesta.

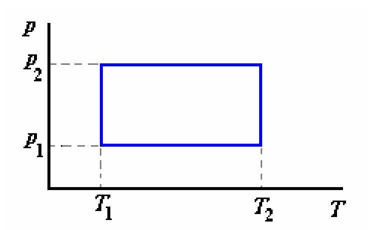
$$W = C\left[T_1 - T_0 - T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right] \approx 62 \text{ J}$$

60. Con ayuda do un hornillo e1éctrico de potencia. de 1 kW en la habitación se mantiene la temperatura de 17°C siendo la temperatura del aire circundante de –23°C. ¿Qué potencia se necesitaría para mantener en la habitación la misma temperatura con ayuda de una bomba térmica ideal?

Respuesta. $P = 138\text{W}$

61. Hállese el rendimiento de los ciclos mostrados en la figura, sí como agente propulsor se toma un gas monoatómico perfecto.





Respuesta.

$$e = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}$$

$$e = \frac{2(T_2 - T_1)\ln\left(p_2/p_1\right)}{5(T_2 - T_1) + 2T_2 \ln\left(p_2/p_1\right)}$$

62. Un motor térmico funciona mediante un ciclo de Carnot reversible entre las temperaturas t_1 = 200 ºC (hogar) y t_2 = 20 ºC (refrigerante). El hogar comunica al sistema 60 kcal por minuto. Calcúlese la potencia del motor en caballos de vapor.

Respuesta. 2,16 C.V.

63. 8,1 kg de carbón de valor calorífico igual a 3,3x10^7 J/kg. La temperatura de la caldera es de 200 ºC y la del condensador de 58 ºC. Hallar el rendimiento real de la máquina e_1y compararlo con el rendimiento e_2 de la máquina térmica ideal que funcione según el ciclo de Carnot entre las mismas temperaturas.

Respuesta. 0,20; 0,30.

64. En una nevera de compresión se trata de fabricar 5 kg de hielo cada hora, partiendo de agua a 0 ºC. El ambiente exterior está a 27 ºC.
Calcular:
a) La eficacia de la nevera.
b) La potencia teórica del motor.
c) La potencia real si el rendimiento de la operación es el 75%.
d) El costo de la energía eléctrica necesaria para fabricar 100 kg de hielo a 5 soles el kW h.

Respuesta. a) 10; b) 46 W; c) 61 w; 4d) 6,10 soles.

65. Una cierta máquina térmica ideal en la que se realiza un ciclo de Carnot reversible en cada segundo, tiene el refrigerante a 27 ºC, una potencia de 4,18 kW y en cada ciclo se toman 3 kcal de la caldera. Calcular la temperatura de ésta, el calor que se cede al refrigerante y el rendimiento.

Respuesta. 2,000 cal; 177 ºC; 1/3.

66. En un ciclo de Carnot reversible, descrito por un mol de un gas perfecto diatómico, la temperatura más elevada es de 500 K y el trabajo en la expansión adiabática 4,157 J. Calcular el rendimiento del ciclo.

Respuesta. 0,4.

67. Un refrigerador está impulsado por un pequeño motor cuya potencia útil es de 150 W. Si suponemos que este refrigerador trabaja como un refrigerador ideal de Carnot, y que las temperaturas caliente y fría de los recipientes térmicos son 20 y -5 ºC, ¿cuanto hielo fabricará este refrigerador en 1 h si en el interior se coloca agua a 10 ºC?

Respuesta. 15,4 kg.

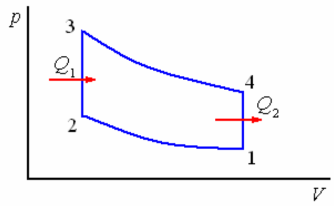
68. Tres kilogramos de agua a 18 ºC, se mezclan con 9 kg a 72 ºC. Una vez establecido el equilibrio, se restituyen las dos cantidades de agua a su estado inicial colocando 3 kg en contacto con una fuente térmica siempre a 18 ºC, y los 9 kg restantes en otra siempre a 72 ºC.
Calcular:
a) El incremento de la entropía del agua como consecuencia del primer proceso y el incremento de entropía del universo.
b) El incremento de entropía del agua producido por todas las operaciones y el del universo.

c) El incremento de entropía del agua debido al segundo proceso y el del universo.
Respuesta. a) 0,0315 kcal/ K que también es la del universo;
b) 0,0653 kcal/ K, la del agua 0;
c) -0,0315 kcal/ K del agua, 0,0338 kcal/ K universo.

69. Un congelador fabrica cubos de hielo a razón de 5 gramos por segundo, comenzando con agua en el punto de congelación. Cede calor a una habitación a 30 ºC. Si el sistema utiliza un frigorífico de Carnot ideal,
a) ¿Qué potencia expresada en watios requiere el motor?;
b) ¿Cuanto calor por unidad de tiempo cede a la habitación?;
c) ¿Cual es la variación de entropía del agua?
Respuesta. a) 184 W; b) 444 cal/s; c) 6,15 J/ K.

70. Un herrero sumerge una herradura de acero caliente con una masa de 2 kg en una cubeta que contiene 20 kg de agua. La herradura al principio está a una temperatura de 600 ºC y el agua está inicialmente a una temperatura de 20 ºC. Suponiendo que no se evapora el agua, encuentre:
a) la temperatura final del agua,
b) el cambio de entropía de la herradura,
c) el cambio de entropía del agua
d) el cambio global en la entropía del agua y la herradura.
e) Después de cierto tiempo, que es bastante comparado con el tiempo que tarda la herradura en enfriarse, la herradura y el agua se enfrían hasta la temperatura de los alrededores: 20 ºC. Durante este proceso, encuentre los cambios en la entropía del agua, la herradura y sus alrededores.
f) Usando los resultados del inciso d y e, encuentre el cambio en la entropía del universo como resultado de toda la consecuencia de eventos.
Calor específico del acero 0,107 cal/g ºC
Respuesta. a) 26,14 ºC; b) –959 J/ K; c) 1,736 J/K; d) 777 J/ K; e) –1,736 J/ K; -18,6 J/ K; f) 1,754 J/ K

71. Una máquina térmica trabaja con un gas perfecto (γ = 1,4) según el ciclo Otto, motores de explosión.
¿Cuánto vale el rendimiento térmico de este ciclo, para un estado inicial de p_1 = 1 atm. T_1 = 20 ºC y un grado de compresión V_2/V_1 = 1/4, si la combustión aporta Q_1 = 20 kcal/ciclo?
¿Cuánto vale el calor evacuado Q_2?
¿Cuánto valdrá la potencia de la máquina si realiza 300 ciclos por minuto?



72. Se dispone de botellas de 1,5 litros de agua a temperatura ambiente (20 ºC);
a) calcular la temperatura final del conjunto si se mezcla una botella con 100 g de hielo a -5 ºC;
b) calcular el calor necesario para evaporar toda el agua de una botella; hallar el tiempo que requiere este proceso si se usa un microondas de 100 W;
c) hallar la eficiencia de una máquina de Carnot que utiliza el vapor a 100 ºC como foco caliente y agua a 20 ºC como foco frío; dibujar un esquema de una máquina de vapor en el que se explique cómo se obtiene el trabajo mecánico.
Respuesta. a) t = 13,6 ºC;
b) 930,000 cal = 3887,400 J, tiempo = 3.887,4 s;
c) Eficiencia = 21 %.