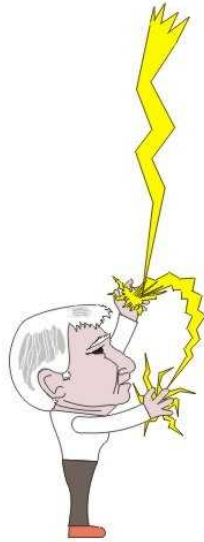


FISICA 3



Autor: Hugo Medina Guzmán
Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú

PRESENTACIÓN

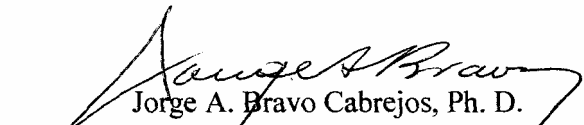
Me agradó saber que Hugo Medina Guzmán estaba por publicar un texto sobre Física. Había dos razones suficientes para este sentimiento. Por un lado, tenía curiosidad de saber lo que podría aportar un texto más de Física sobre los otros ya disponibles. Por otro lado, conozco de la larga carrera de Hugo Medina como cultor de la enseñanza de [a Física, y tenía curiosidad de ver cómo este compromiso como docente y experiencia se manifestarían en su texto. Tuve la suerte de conocer al Ing. José Castro Mendívil en su taller, donde desplegó una destacada labor en el diseño y construcción de equipo de laboratorio para la enseñanza de la Física. Considero que Hugo es un digno discípulo del Ing. Castro Mendívil e igualmente ha dedicado una fracción considerable de su tiempo a la docencia, y al diseño y construcción de equipo de laboratorio para resaltar los conceptos básicos de la Física.

He revisado el contenido de este texto y veo con gran satisfacción que su autor utiliza un enfoque muy acertado. Toma como punto de partida una observación experimental y a partir de allí desarrolla los conceptos físicos que permiten interpretar esta observación utilizando la formulación matemática más sencilla. Todo esto lo hace con el detalle suficiente de manera que el lector pueda seguir el argumento lógico con facilidad. Considero que éste es un gran aporte de este texto. Este enfoque contrasta con textos que enfatizan la formulación matemática y dejan al alumno huérfano de una orientación para aplicarla a una realidad física concreta.

El contenido de temas de la Física General que son desarrollados en este texto se ajusta al programa de estudios de la PUCP. El desarrollo de cada tema incluye ejemplos bien seleccionados que son desarrollados con un detalle muy esmerado. Al final de cada capítulo se incluye un conjunto de preguntas y problemas propuestos; se incluye las respuestas. Algunos problemas plantean configuraciones complejas pero que contienen ciertas propiedades de simetría que permiten su reducción a configuraciones sencillas. Al final del texto encontramos un listado de referencias bibliográficas a un buen número de textos de Física General que han servido de consulta al autor.

En general, considero que este texto constituye una representación gráfica de la obra cotidiana que Hugo ha venido desarrollando durante su carrera docente y, por lo tanto, es un aporte muy valioso para la comunidad académica y público en general.

Lima, julio de 2007



Jorge A. Bravo Cabrejos, Ph. D.
Profesor Principal
Facultad de Ciencias Físicas, U.N.M.S.M.

PRÓLOGO

Los estudiantes a menudo se preguntan por qué llevan un curso de Física. La mejor razón por la que se estudia Física es porque proporciona un método coherente y lógico para comprender el mundo que nos rodea; una persona que comprende lo que sucede a su alrededor, es capaz de convivir en su entorno de manera racional y efectiva. Sin embargo, en ocasiones los estudiantes ignoran el potencial que tiene la Física para explicar el entorno en términos fáciles de entender; Este libro tiene por objeto brindar a los estudiantes de la Física General una ayuda para dominar los principios físicos que son la base de la tecnología moderna. En éste libro se asume que los estudiantes tienen una base de álgebra, geometría, y trigonometría. Es mucho más compacto que los libros de texto tradicionales, proporciona muchos ejemplos trabajados y pide resolver problemas

Este libro será útil también como texto para una persona que repasa o que consolida su conocimiento de la Física.

La discusión y las explicaciones narrativas son suficientemente claras y completas para poder utilizar el libro o como texto, o como suplemento a un texto más amplio.

La forma de aprender la física es trabajar realmente con problemas. Al usar este libro, el estudiante debe ser activo. Debe intentar trabajar cada uno de los problemas y los ejemplos. Debe mirar las soluciones solamente si no logra dar con el camino a su solución.

Los ejemplos en este libro están trabajados exhaustivamente, de modo que puedan servir como modelos para el propio trabajo de los estudiantes. En este sentido se considera que los estudiantes se benefician al observar los cálculos realizados en más de una manera, por lo que se han incluido varios métodos para efectuar los cálculos.

Además, se tuvo especial cuidado en incluir problemas y preguntas que combinan el material del capítulo en cuestión, con material de capítulos anteriores. Tales problemas y preguntas destacan el hecho importante de que diversas áreas de la Física se manifiestan de manera simultánea en el mundo real. Además, este método de temas múltiples proporciona una manera para que los estudiantes repasen lo estudiado y ayuda a mejorar la habilidad para resolver problemas.

El diseño gráfico es de gran importancia, y para mejorar su función se ha intentado enfocar solamente una idea principal en cada figura en lo posible. Por consiguiente, las figuras del libro a menudo se dividen en dos o más partes, para evitar la confusión de mezclar varias ideas en la misma figura.

Los profesores conocen la importancia de los diagramas de cuerpo libre cuando utilizan la segunda ley de movimiento de Newton, y todos los estudiantes aprenden de ellos a medida que estudian Física. Tales diagramas se utilizan en todo el libro, no solamente en los primeros capítulos en los que se presenta y aplica la segunda ley de Newton. Por ejemplo, cuando se analiza la relación en las oscilaciones, también entre la presión y profundidad en un fluido, el análisis se simplifica considerablemente por medio de un diagrama de cuerpo libre. De manera semejante, cuando se deduce la expresión para la rapidez de una onda transversal en una cuerda, un diagrama de cuerpo libre es muy útil.

Cifras significativas. A lo largo de todo el libro se siguen los procedimientos normales para las cifras significativas.

Se espera que el esfuerzo en la elaboración de este libro sea de utilidad tanto para los estudiantes como para los profesores. Toda opinión al respecto será bienvenida.

Hugo Medina Guzmán
Lima Perú

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece primeramente a los estudiantes, quienes han contribuido bastante en la elaboración de este libro a través de su influencia en el establecimiento de las técnicas y principios de enseñanza y a los profesores que con sus sugerencias y revisiones a las separatas de los capítulos hicieron notar puntos que necesitaban una mayor aclaración.

Hugo Medina Guzmán

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. Electrostática

Introducción Carga eléctrica: formas de electrificación, conductores y dieléctricos, Ley de Coulomb. Fuerza eléctrica y Campo eléctrico: principio de superposición en distribución de carga discreta y continua. Flujo de Campo eléctrico y ley de Gauss. Aplicaciones. Potencial eléctrico: potencial de una distribución de cargas discretas y continuas, campo eléctrico y potencial. Energía electrostática. Condensadores: definición y capacidad, condensadores en serie y paralelo, condensadores de placas paralelas con dieléctricos, aplicaciones

CAPÍTULO 2. Corriente continua

Corriente eléctrica, resistencia y ley de Ohm. Fuerza electromotriz. Circuitos de corriente continua: resistencias en serie y paralelo, leyes de Kirchhoff. Circuito RC: carga y descarga.

CAPÍTULO 3. Campo magnético

Campo magnético y fuerza de Lorentz. Fuerza magnética sobre un conductor con corriente. Torque sobre una espira con corriente. Aplicaciones: espectrómetro de masas, y motor eléctrico. La ley de Biot-Savart. Ley de Ampere. Aplicaciones. Flujo de campo magnético. Ley de Gauss en el magnetismo. Corriente de desplazamiento y la ley de Ampere generalizada.

CAPÍTULO 4. Ley de Faraday e inductancia

Ley de inducción de Faraday. Ley de Lenz. Aplicaciones. Autoinductancia. Circuito RL en corriente continua. Energía de una autoinductancia. Densidad de energía magnética. Aplicaciones.

CAPÍTULO 5. Corriente alterna

Generador de corriente alterna. Circuitos de corriente alterna con una resistencia, inductancia y capacitancia. Reactancia. Impedancia. Fasores. Circuito RLC en serie y en paralelo. Resonancia. Valores medios y eficaces. Potencia en corriente alterna. Transformador ideal.

CAPÍTULO 6. Ondas electromagnéticas

.Ondas electromagnéticas planas. Vector de Poynting. Presión de radiación. El espectro electromagnético.

CAPÍTULO 1

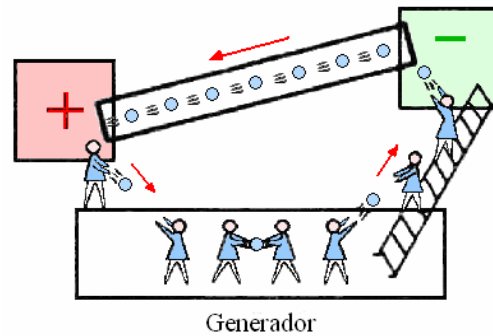
Electrostática



CARGA ELECTRICA - INTRODUCCION.	1
El electroscopio	1
ELECTRIZACION	1
ELECTRICIDAD POSITIVA Y NEGATIVA	2
TEORIA DE LA ELECTRIZACION	3
LA LEY DE COULOMB	4
UNIDADES	4
PRINCIPIO DE SUPERPOSICION - DISTRIBUCION DE CARGAS	7
CARGA DISTRIBUIDA.	9
CAMPO ELECTRICO. INTRODUCCION.	10
DEFINICIÓN DE CAMPO ELÉCTRICO	10
Recta finita.	12
PLANO INFINITO	13
LINEAS DE FUERZA ELECTRICA	15
LA LEY DE GAUSS	17
MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME	25
POTENCIAL ELECTRICO	26
POTENCIAL ELECTRICO PRODUCIDO POR UNA CARGA PUNTUAL.	27
POTENCIAL ELECTRICO PRODUCIDO POR UNA DISTRIBUCION DE CARGA	27
SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES	35
CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DEL POTENCIAL.	37
CAPACIDAD, ENERGÍA ELECTROSTATICA	39
EL CONDENSADOR	40
COMBINACIONES DE CONDENSADORES	41
Condensadores en paralelo	41
Condensadores en serie	41
ENERGIA ELECTROSTATICA DE CARGAS	47
ENERGIA ALMACENADA POR UN CONDENSADOR	48
FUERZAS, TORQUES	49
CAMPO ELECTRICO EN UN DIELECTRICO	49
POLARIZACION.	50
CARGAS DE POLARIZACION.	50
LA LEY DE GAUSS PARA DIELECTRICOS – DESPLAZAMIENTO ELECTRICO	51
LA CONSTANTE DIELECTRICA	52
PREGUNTAS Y PROBLEMAS	54

CAPÍTULO 2

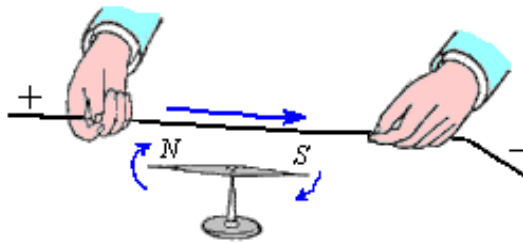
Corriente continua



CORRIENTE ELECTRICA. INTRODUCCION.	1
CORRIENTE. DENSIDAD DE CORRIENTE	1
LA LEY DE OHM, RESISTIVIDAD Y RESISTENCIA	2
RESISTIVIDAD Y COEFICIENTE DE TEMPERATURA	3
FUERZA ELECTROMOTRIZ	4
ENERGIA Y POTENCIA EN LOS CIRCUITOS ELECTRICOS	5
CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA. INTRODUCCION	7
LEYES DE KIRCHHOFF	7
CONEXIONES DE RESISTENCIAS, EN SERIE Y EN PARALELO.	11
CAMBIO DE UN CIRCUITO TRIANGULO A ESTRELLA	16
CIRCUITO RC	17
INSTRUMENTOS Y DISPOSITIVOS DE MEDICION	20
Amperímetros y Voltímetros	20
Galvanómetro	20
MEDICION DE POTENCIAS	22
MEDICION DE RESISTENCIAS	23
Ohmímetro	23
Puente de Wheatstone	23
Potenciómetro	23
PREGUNTAS Y PROBLEMAS	24

CAPÍTULO 3

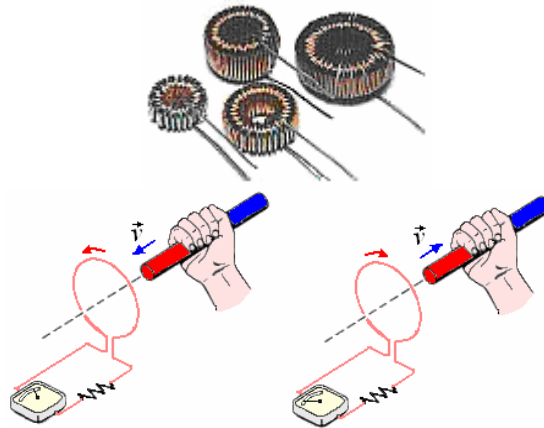
Campo magnético



INTRODUCCION	1
DEFINICION DE CAMPO MAGNETICO	1
Fuerza de Lorentz	2
EL FLUJO MAGNETICO	2
MOVIMIENTO DE UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO MAGNETICO	2
FUERZA SOBRE UN ALAMBRE CON CORRIENTE.	10
FUERZA Y TORQUE SOBRE UNA ESPIRA CON CORRIENTE	13
El Galvanómetro de D'ansorval	15
Motor de corriente Continua.	16
EFECTO HALL	16
LEY DE AMPERE, LEY DE BIOT Y SAVART	18
LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO	18
LEY DE AMPERE.	19
FUERZA ENTRE DOS CONDUCTORES PARALELOS	22
DEFINICIÓN DE LA UNIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA (AMPERE)	25
LEY DE BIOT Y SAVART	25
PREGUNTAS Y PROBLEMAS	34

CAPÍTULO 4

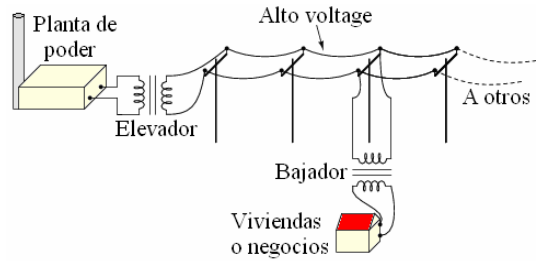
Ley de Faraday e inductancia



INTRODUCCION	1
LEY DE FARADAY	1
LEY DE LENZ	1
FUERZA ELECTROMOTRIZ DEL MOVIMIENTO	3
EL BETATRÓN.	10
CAMPOS ELECTRICOS INDUCIDOS POR CAMPOS MAGNETICOS	11
VARIABLES CON EL TIEMPO.	
CORRIENTES DE FOUCAULT	11
GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA	12
INDUCTANCIA	12
DEFINICION DE INDUCTANCIA	12
Autoinductancia	12
Inductancia mutua	13
Autoinductancia de un toroide.	13
INDUCTANCIAS EN SERIE Y EN PARALELO	16
ENERGÍA ALMACENADA POR UNA INDUCTANCIA	17
MATERIALES MAGNETICOS	19
CIRCUITOS RL, LC y RLC	20
Circuito RL.	20
Circuito LC.	23
Circuito RLC.	24
PREGUNTAS Y PROBLEMAS	25

CAPÍTULO 5

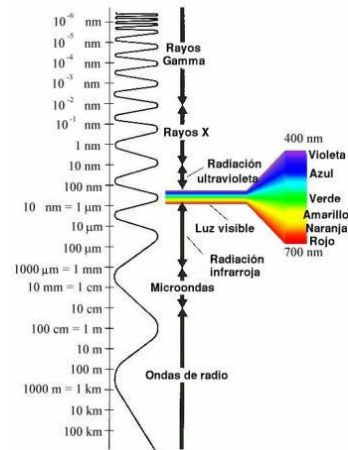
Corriente alterna



GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA	1
Producción de una corriente alterna	1
Cálculo de la fem inducida	2
ANGULO DE FASE. FASORES	3
CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA CON UNA RESISTENCIA, INDUCTANCIA Y CAPACITANCIA.	3
Un condensador conectado a un generador de corriente alterna	3
Una resistencia conectada a un generador de corriente alterna	4
Una inductancia conectada a un generador de corriente alterna	4
REACTANCIA	4
La reactancia inductiva	4
La reactancia capacitiva	4
CIRCUITO RLC EN SERIE	5
IMPEDANCIA EN SERIE	6
RESONANCIA EN SERIE	8
CIRCUITO RLC EN PARALELO	10
RESONANCIA EN UN CIRCUITO RLC EN PARALELO	10
POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA	12
Valores medios y eficaces	13
Valor cuadrático medio	13
Potencia media	13
Factor de potencia	14
Potencia en un circuito paralelo	14
TRANSFORMADOR IDEAL	21
PREGUNTAS Y PROBLEMAS	23

Capítulo 6

Las Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas



INTRODUCCIÓN	1
CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO DE MAXWELL	1
LAS ECUACIONES DE MAXWELL	2
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	3
¿Qué es una onda electromagnética?	3
Vector poynting	5
Intensidad de la onda.	5
Potencia instantánea	6
Energía electromagnética	6
Presión de radiación	6
EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO	9
CARACTERÍSTICAS DE LAS DISTINTAS REGIONES DEL ESPECTO	9
Las microondas	9
La radiación infrarroja	9
La luz visible	9
Radiación ultravioleta	10
Rayos X	10
Rayos gamma	10
PREGUNTAS Y PROBLEMAS	14

BIBLIOGRAFÍA

- THEORETICAL PHYSICS, Mechanics of particles, rigid and elastic bodies, fluids and heat flow.** F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)
- THEORETICAL PHYSICS, Thermodynamics, electromagnetism, waves, and particles.** F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)
- The Feynman LECTURES ON PHYSICS.** Volumen I, II y III. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton. California Institute of Technology, Matthew Sands, Stanford University. Addison – Wesley Publishing Company (1964)
- CORRIENTES, CAMPOS Y PARTÍCULAS.** Francis Bitter. Massachusetts Institute of Technology. Editorial Reverté S. A. (1964).
- INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA MECÁNICA, MATERIA Y ONDAS.** Uno Ingard, William L. Kraushaar. Editorial Reverté. (1966).
- FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO.** Arthur F. Kip. University of California. Mc Graw – Hill Book Company (1967)
- CIENCIA FÍSICA Orígenes y principios** Robert T. Langeman, Universidad Vanderbilt. UTEHA, (1968)
- PROBLEMS IN ELEMENTARY PHYSICS.** B. Bukhotsev, V: Krivchenkov, G. Myakishev, V. Shalnov. Mir Publishers. Moscow (1971)
- PROBLEMES DE PHYSIQUE COMMENTES.** Tomos I y II Hubert Lumbroso. Mason et Cie, París. (1971)
- ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA.** Luís L. Cantú. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Editorial Limusa México (1973)
- FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y LA SALUD.** Simon G. G. MacDonald / Desmond M. Burns University of Dundee. Fondo educativo interamericano. (1975)
- MECÁNICA NEWTONIANA, MIT Physics course.** A. P. French. Editorial Reverté. (1974).
- FÍSICA I y II.** Solomon Gartenhaus. Purdue University. INTERAMERICANA. (1977)
- TEACHING TIPS. A guidebook for the beginning College Teacher.** Wilbert J. McKeachie (University of Michigan). Seventh edition D. C. Heath and Company (1978)
- FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA.** Alan H. Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (1978)
- GENERAL PHYSICS WITH BIOSCIENCE ESSAYS.** Jerry B. Marion. University of Maryland. John Wiley & Sons Inc. (1979)
- Física general II: Teoría** Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. QC 21 M19 (Biblioteca PUCP) (1979)
- Física general II: Problemas resueltos** Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 111 M364 (Biblioteca PUCP) (1979)
- Física general I: problemas resueltos** Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 104 M364 (Biblioteca PUCP) (1981)
- FÍSICA PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. 1 y 2.** John P. McKelvey, Clemson University – Howard Grotch, Pennsylvania State University. HARLA. Mexico. (1981)
- Física 3: electricidad y magnetismo para estudiantes de ciencias e ingeniería** Hugo Medina Guzmán, FIS 141 M36 (Biblioteca PUCP) (1982)
- EXPLORING PHYSICS Concepts and applications.** Roger W. Redding North Texas State University, Stuart Kenter, Wadsworth Publishing Company (1984)
- PROBLEMAS DE FÍSICA.** J. Aguilar Peris, Universidad Complutense de Madrid - J. Casanova Colas, Facultad de Ciencias de Valladolid. Alambra (1985)
- PROBLEMAS DE FÍSICA.** Dirigido por S. Kósel. Editorial Mir Moscú. (1986)
- PROBLEMAS DE FÍSICA Y COMO RESOLVERLOS.** Clarence E. Benett Maine University. CECSA (1986)
- PHYSICS for Engineering and Science.** Michael E. Browne, Ph. D. (professor of Physics University of Idaho. Schaum's outline series McGraw-Hill (1988)
- FÍSICA: VOLUMEN 1. Mecánica, ondas y termodinámica.** Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).
- FÍSICA: VOLUMEN 2. Electricidad, magnetismo y óptica.** Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).
- PROBLEMAS DE FÍSICA.** Dirigido por O. Ya. Sávchenko. Editorial Mir Moscú. (1989)

MECÁNICA. Berkeley physics course – volumen 1. Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman. Editorial Reverté SA. (1992).

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Berkeley physics course – volumen 2. Edward M. Purcell. Editorial Reverté SA. (1992).

FÍSICA. Tomos I y II Tercera edición revisada (Segunda edición en español), Raymond S: Serway, James Madison University, Mcgraw-Hill, (1993)

PROBLEMAS DE FÍSICA Santiago Burbano de Ercilla, Enrique Burbano de Ercilla, Carlos Gracia Muñoz, XXVI edición, Zaragoza, MIRA editores (1994)

ONDAS. Berkeley physics course – volumen 3. Frank S. Crawford, Jr. Editorial Reverté SA. (1994).

FÍSICA Para las ciencias de la vida, David Jou Mirabent Universidad autónoma de Barcelona, Joseph Enric Llebot Rabagliati, Universidad de Girona, Carlos Pérez garcía, Universidad de Navarra. Mcgraw-Hill, (1994)

Física uno Hugo Medina Guzmán, FIS 104 M365 (Biblioteca PUCP) (1995)

APPLIED PHYSICS. Arthur Beiser, Ph. D. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1995)

TEACHING INTRODUCTORY PHYSICS A Sourcebook. Clifford E: Swartz (State University of New York, Stony Brook) and Thomas Miner (Associate Editor The Physics Teacher 1972 – 1988). ATP Press – Springer. (1996)

TEACHING INTRODUCTORY PHYSICS Arnold Arons University of Washington JOHN WILEY & SONS, INC. (1997)

FÍSICA John Cutnell / Kenneth W. Johnson. Southern Illinois University. LIMUSA (1998)

FÍSICA EN LA CIENCIA Y EN LA INDUSTRIA. A. Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (2000)

FÍSICA CONTEMPORANEA Edwin Jones.– Richard Childers, University of South Carolina. Mcgraw-Hill, (2001)

PROBLEMAS Y CUESTIONES DE FÍSICA. Atanasio Lleó, Begoña Betete, Javier Galeano, Lourdes Lleó, Ildelfonso Ruiz – Tapiador. Universidad Politécnica de Madrid. Ediciones Mundi – prensa (2002)

The PHYSICS of every day phenomena. A conceptual introduction to Physics. W. Thomas Griffith, Pacific University. Mcgraw-Hill, (2004)

FÍSICA UNIVERSITARIA. Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young (Carnegie Mellon University) y Roger A. Freedman (University of California. Santa Barbara) Volumen 1, Volumen 2. Undecima edición. Pearson - Addison Wesley (2004)

FIVE EASY LESSONS Strategies for successful Physics teaching. Randall D. Knight California Polytechnic State University, San Luis Obispo. Addison Wesley (2004)

FUNDAMENTALS OF PHYSICS. David Halliday (Univ. of Pittsburgh), Robert Resnick (Rensselaer Polytechnic Institute), Jearl Walker (Cleveland State Univ.). 7th Edition (2005)

CAPÍTULO 1. Electrostática

INTRODUCCION.

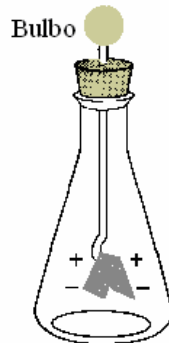
La primera observación de la electrización se remonta a la época de la Grecia antigua. A Tales de Mileto se le atribuye haber observado la atracción que el ámbar previamente frotado, ejerce sobre pequeños pedazos de fibra y paja.

A pesar de que la electrización del ámbar por fricción fue transmitida de un escrito a otro, nada nuevo se descubrió hasta principios del siglo XVII en que Sir William Gilbert anunció el descubrimiento de que muchas sustancias podían ser electrizadas por frotamiento y que el ámbar es uno de los muchos materiales que manifiestan el efecto.

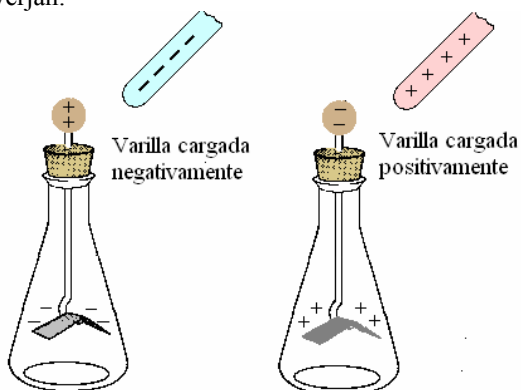
EL ELECTROSCOPIO.

Dispositivo que sirve para detectar y medir la carga eléctrica de un objeto. Los electroscopios han caído en desuso debido al desarrollo de instrumentos electrónicos mucho más precisos, pero todavía se utilizan para hacer demostraciones. El electroscopio más sencillo está compuesto por dos conductores ligeros suspendidos en un contenedor de vidrio u otro material aislante.

Se puede utilizar un electroscopio para determinar si un objeto está cargado eléctricamente. Cuando un objeto cargado se acerca al bulbo, las hojas divergen. a) El electroscopio neutro tiene las cargas distribuidas uniformemente, las hojas están juntas.



(b) Las fuerzas electrostáticas causan que las hojas diverjan.



ELECTRIZACION



Si frotamos una barra de plástico con una piel de gato, o si frotamos una barra de vidrio con seda. Las barras adquieren la propiedad de atraer cuerpos ligeros como pedacitos de papel a una pequeña bola hecha de material ligero como corcho o médula de saúco (*Sambucus peruviana*) suspendida por hilos de seda. Se dice que estos cuerpos están electrizados.

Si frotamos una barra de cobre sostenida por la mano, no habrá acción sobre los cuerpos ligeros, pero si frotamos la misma barra de cobre pero esta vez sostenida por un mango de vidrio, se electriza y ejercerá acción sobre los cuerpos ligeros.

O sea que tenemos cuerpos de dos categorías, los primeros como al vidrio, plexiglás, ebonita, resina que se electrizan agarrándolos con la mano y otros cuerpos que necesitan un mango de un material de la primera categoría para poder ser electrizados.

La experiencia demuestra que en los cuerpos de la primera categoría la electricidad permanece localizada en los puntos frotados, no se propaga, estos cuerpos son malos conductores de la electricidad se conocen como **aislantes o dieléctricos**.

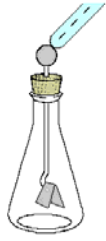
Para los cuerpos de segunda categoría, las propiedades de la atracción sobre cuerpos ligeros no solo se manifiestan en los puntos frotados, sino en todos los puntos, a sea la electrización producida se transmite a todos los puntos del cuerpo, estos cuerpos son conocidos como **conductores**.

El cuerpo humano y la tierra son conductores.

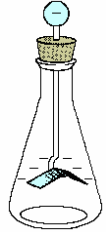
Además de la electrización por frotamiento descrita, hay otras formas de electrización que indicamos a continuación.

1° Electrización por contacto La carga es transferida al electroscopio cuando la varilla cargada toca el bulbo. Entonces, cuando una varilla con carga opuesta se acerca al bulbo, las hojas se colapsan y se juntan.

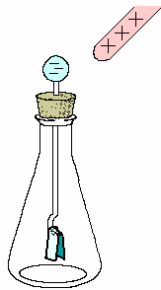
El electroscopio neutro se toca con una varilla cargada negativamente; las cargas son transferidas al bulbo.



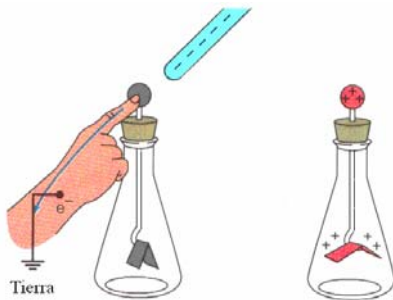
El electroscopio tiene una carga negativa neta.



La varilla cargada positivamente atrae los electrones; las hojas se colapsan.



2º Electrización por inducción Al tocar el bulbo se proporciona una trayectoria para la transferencia de carga, los electrones son transferidos a la tierra. Cuando el dedo se retira, el electroscopio tiene una carga neta, el electroscopio queda cargado positivamente.



Tierra eléctrica se refiere a la tierra (o sea al “suelo”) o a algún otro objeto que pueda recibir o suministrar electrones sin cambiar significativamente su propia condición eléctrica.

Como esto se debe a electrones que han sido transferidos, usted puede preguntarse cómo se puede cargar positivamente un electroscopio. Esto se hace cargando por inducción. Al tocarse el bulbo con un dedo, el electroscopio hace tierra, es decir, se da una trayectoria para que los electrones puedan escapar del bulbo. Entonces, cuando se acerca al bulbo una varilla cargada negativamente los electrones son repelidos del bulbo. Al retirar los dedos se deja al electroscopio una carga positiva neta.

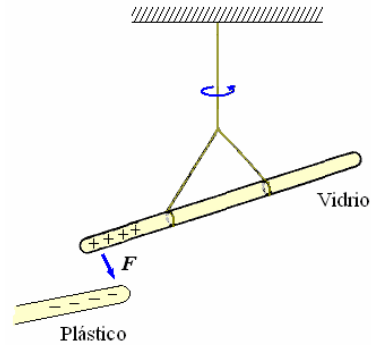
3º Piezoelectricidad. Una lámina de cuarzo convenientemente tallada, se electriza por compresión o por tracción, el fenómeno es reversible. Estos cuerpos son conocidos como piezoeléctricos.

4º Electrización por las fuentes de electricidad. Si ponemos una pila o un acumulador, uno de sus polos se conecta a tierra y el otro a un conductor aislado, éste se electriza. Con una sola pila la electrización es débil, pero si se dispone de muchos elementos se obtiene electrización fácil de poner en evidencia.

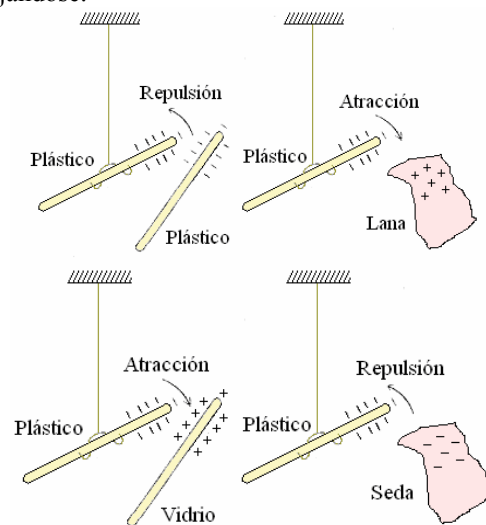
ELECTRICIDAD POSITIVA Y NEGATIVA

Cuando frotamos entre sí dos sustancias diferentes y luego las separamos, nos encontramos con dos tipos de electricidad. Para ver mejor esto realicemos la siguiente experiencia.

Dispongamos de dos barras de plástico y dos barras de vidrio. Se carga por frotamiento con una piel una de las barras de plástico y se la suspende mediante un gancho y un hilo de nylon como se muestra en la figura siguiente, pudiendo girar libremente.



Si acercamos a esta barra de plástico la otra frotada similarmente, observamos que gira alejándose, si acercamos la piel a la barra de plástico suspendida observamos que ésta gira acercándose. De igual modo si acercamos la barra de vidrio electrizada por frotación con seda observamos que el plástico gira acercándose y si acercamos la seda el plástico gira alejándose.



Puesto que la piel al igual que el vidrio, atraen al plástico electrizado, ambos tienen la misma clase de electrización. Se dice que estén cargados

positivamente. De modo similar el plástico y la seda estarán carga dos **negativamente.**

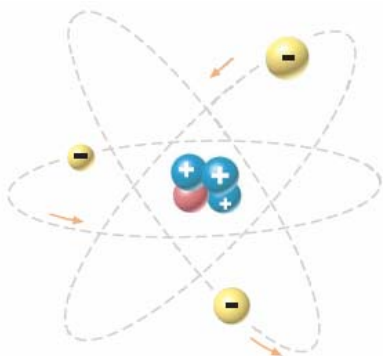
Las Cargas positivas las designamos por el signo (+) y las Cargas negativas por el signo (-).

De esta experiencia también podemos describir que “Las Cargas iguales se repelen y las Cargas contrarias se atraen”.

También es una observación experimental que la carga no puede ser creada ni destruida, la carga total de un sistema no puede ser cambiada. Del punto de vista macroscópico las cargas pueden reagruparse y cambiarse de diferentes maneras o sea que “La carga neta se conserva en un sistema cerrado”.

TEORIA DE LA ELECTRIZACION

La Carga es una propiedad característica y fundamental de las partículas elementales que forman luego materias. Las sustancias estén formadas por moléculas y estas por átomos. Cada átomo contiene un núcleo que tiene una cantidad conocida de carga positiva. Esta Carga positiva se debe a la presencia de un cierto número de **protones**. Todos los protones son semejantes y tienen la misma masa y la misma carga positiva. Alrededor de cada núcleo atómico hay un número de partículas cargadas negativamente, llamadas **electrones**.



Normalmente cada átomo de una sustancia es eléctricamente neutro, o sea que tiene cantidades iguales de carga positiva y negativa, la carga de un electrón es igual pero opuesta a la carga de un protón. En cada núcleo hay tantos protones como electrones hay rodeándolo.

Los átomos aislados o los grupos grandes de átomos y moléculas tienen una afinidad para adquirir electrones adicionales sobre el número exacto que neutralizan las cargas positivas del núcleo. Esta afinidad de los átomos para tener más electrones que el número suficiente de ellos, varía considerablemente de una sustancia a otra. Por lo tanto, cuando dos sustancias diferentes se ponen en contacto, la que tiene mayor afinidad toma los electrones próximos de la otra y adquiere una carga negativa, mientras que la otra queda cargada positivamente, tal es el caso del Caucho cuando se frota con una piel.

LA LEY DE COULOMB

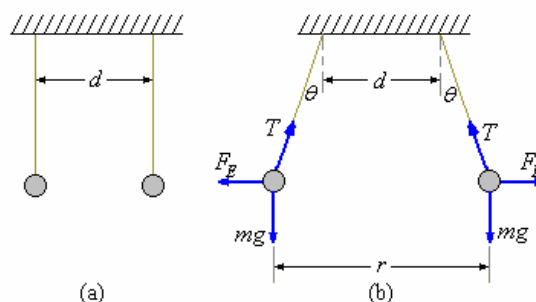
Esta ley de la fuerza entre los cuerpos cargados puede enunciarse como sigue:

“Cuerpos con cargas similares se repelen y con cargas diferentes se repelen; para cargas puntuales (llamando puntual cuando sus dimensiones espaciales son muy pequeñas comparadas con cualquier longitud del problema en cuestión) la fuerza de interacción es proporcional al producto de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa”.



La ley fue establecida en 1784 por Coulomb por medios experimentales utilizando una balanza de torsión.

Podemos nosotros reproducir este experimento en una forma sencilla, para esto dispongamos de dos esferas pequeñas de médula de saúco (se puede usar esferas de tecknopor) suspendidas de hilo de nylon, como se muestra en la figura (a) donde la distancia puede variarse a voluntad. Al ponérsele carga a las esferas estas toman la posición mostrada en la figura (b).



Donde θ es el ángulo de deflexión, mg los pesos, F_E la fuerza electrostática y T la tensión en las cuerdas. De las leyes de la mecánica encontramos la relación entre F_E y θ .

$$F_E = mg \tan \theta$$

Variando la separación d entre los soportes podemos observar diferentes deflexiones.

De las medidas de F_E en función de la separación de equilibrio r de las cargas encontramos que

$$F_E \propto \frac{1}{r^2}$$

esta evidencia experimental se presenta a continuación en forma de ecuación

$$F_E = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

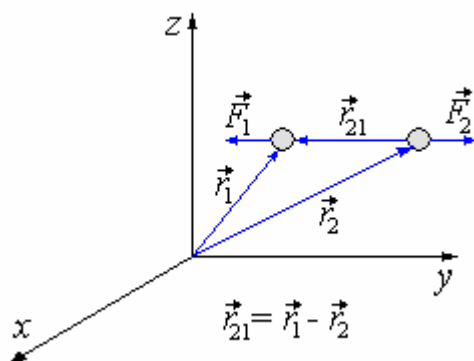
Donde q_1 y q_2 representan las magnitudes de las cargas. La dependencia de la carga no fue establecida por Coulomb, puesto que no tenía medios independientes para juzgar la magnitud de la carga, r es la distancia entre los centros de las cargas. Como la fuerza es un vector la ley de Coulomb la podemos escribir de la siguiente forma, fuerza sobre la carga

$$\vec{F}_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \quad \text{O} \quad \vec{F}_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

Donde $\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$, vector unitario a lo largo de r_{21}

Fuerza sobre la carga q

$$\vec{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} = -\vec{F}_1$$



UNIDADES

Como la carga eléctrica es un concepto nuevo, no conocido en la mecánica es necesario introducir una nueva unidad fundamental.

Sistema CGS. En este sistema hacemos $k = 1$ y la unidad de carga se llama el statcoulombio.

Sistema M.KS. En esta sistema la unidad de carga se define a partir de la corriente eléctrica, concepto que veremos más adelante en detalle, la unidad fundamental es el amperio y la carga está definida por amperio - segundo, y a esto se le llama Coulombio (C). Como F_E está en Newton, q_1 y q_2 en Coulombios y r en metros, la constante k se fija por estas elecciones y toma el valor

$$k = 8,9874 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

El cual puede aproximarse a 9×10^9 en la mayoría de los cálculos numéricos.

Es útil expresar el valor de k en la forma

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Donde ϵ_0 es una constante que se conoce como la **permitividad** del espacio libre y su valor es

$$\epsilon_0 = 8,85415 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

Ejemplo 1. Se tienen dos cargas puntuales.

$$q_1 = 2 \times 10^{-9} \text{ C}, \quad \vec{r}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k} \text{ en metros y}$$

$$q_2 = 3 \times 10^{-9} \text{ C}, \quad \vec{r}_2 = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} \text{ en metros.}$$

¿Cuál es el esfuerzo sobre cada una de ellas?

Solución.

$$\text{Fuerza sobre } q_1: \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$$

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) - (\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \\ = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$r_{21} = [1^2 + (-2)^2 + 2^2]^{1/2} = \sqrt{9} = 3$$

Luego

$$\vec{F}_1 = 9 \times 10^9 \frac{(2 \times 10^{-9})(3 \times 10^{-9})}{3^2} (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\vec{F}_1 = 2 \times 10^{-9} (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ N}$$

Fuerza sobre q_2

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = -2 \times 10^{-9} (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ N}$$

El modulo es

$$F_1 = F_2 = 2 \times 10^{-9} [1^2 + (-2)^2 + 2^2]^{1/2} = 6 \times 10^{-9} \text{ N}$$

Ejemplo 2. ¿Cuál de las dos situaciones siguientes daría como resultado una mayor fuerza?

- La fuerza de repulsión que ejerce una carga de 100 C sobre una de 1 C.
- La fuerza de repulsión que ejerce una carga de 1 C sobre una de 100 C.

Solución. Las dos opciones nos conducen a la misma situación, ya que tienen la misma distancia. Y el producto de la carga es la misma

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}$$

Lo único que cambia es la dirección de la fuerza.

Ejemplo 3. ¿Si deseo trasladar una carga de 1C del origen a el punto (100,100, 100) y luego del punto al origen, en cual de los dos la fuerza de atracción debe ser mayor?

Solución. Al igual que en el problema anterior, la misma fuerza, en magnitud, que se requiere para trasladar la carga del origen al punto y del punto al origen es la misma. Por lo tanto la misma fuerza que se requiere para trasladar la carga del origen al punto es la misma que la que se requiere para trasladar la carga del punto al origen. Analicemos la siguiente relación.

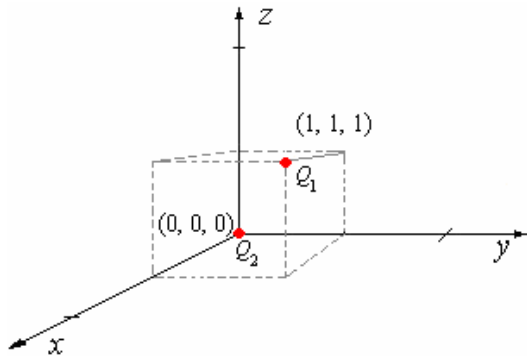
$$\vec{F} = k \frac{q_p Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$$

Donde q_p es una carga llamada carga de prueba, que podemos utilizar para medir la fuerza necesaria del para trasladar la carga del origen al punto P. Analicemos ahora la fuerza para trasladar la carga del punto P al origen

$$\vec{F} = k \frac{q_p Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$$

Observemos que ambas relaciones son las mismas.

Ejemplo 4. Determine la fuerza eléctrica, de atracción, ejercida por una carga $Q_1 = 2,0\mu\text{C}$ que se encuentra en la posición (1, 1,1) sobre la carga $Q_2 = -2,0\mu\text{C}$ en el origen.



Solución. La fuerza, mediante la ley de Coulomb queda determinada por:

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Determinemos para ello el vector que existe entre las

$$\begin{aligned} \vec{r}_{12} &= (0-1)\hat{i} + (0-1)\hat{j} + (0-1)\hat{k} \\ &= -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} \end{aligned}$$

La magnitud del vector \vec{r}_{12} es:

$$r = |\vec{r}_{12}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

Por lo tanto el vector unitario

$$\text{es: } \hat{r} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \\ &= \frac{(2 \times 10^{-6})(-2 \times 10^{-6})}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{3})^2} \left(\frac{-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{36 \times 10^{-3}}{\sqrt{3}} (-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) \end{aligned}$$

La magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{36 \times 10^{-3}}{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 36 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Es decir, el término:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ya que la magnitud del vector

unitario es 1

Ejemplo 5. Encuentra la fuerza de repulsión que existe entre dos cargas de 2 C cada una. Una de las cargas esta en el origen y la coordenada de la otra carga en (0, 0,0)

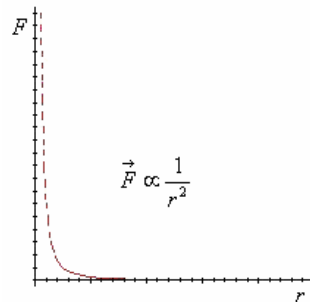
Solución. Primeramente sabemos que las dos cargas no pueden estar en el mismo punto. Para estar en el mismo punto tendríamos $r = 0$, que en la ecuación de la ley de Coulomb nos conduciría a una indeterminación debido a la división entre cero.

$$F = k \frac{q_p Q}{4\pi\epsilon_0 (0)}$$

Sabemos del hecho que la fuerza eléctrica entre dos cargas es una ley

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

La fuerza crece muy rápidamente a medida que r es pequeña, como se puede observar en su gráfico

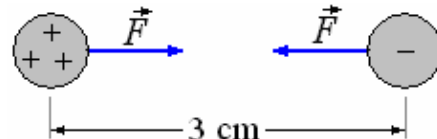


Ejemplo 6. Dos esferas idénticas pequeñas y conductoras tienen cargas de $3 \times 10^{-9} \text{ C}$ y $-1 \times 10^{-9} \text{ C}$, respectivamente. Cuando se colocan separadas 3 cm.

- ¿Cuál es la fuerza entre ellas?
- Si se ponen en contacto y luego se separan 3 cm,
- ¿cuál es la fuerza entre ellas?

Solución.

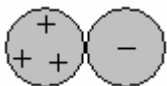
a) La fuerza entre las dos esferas cuando están separadas 3 cm. es:



$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3 \times 10^{-9}) \times (-1 \times 10^{-9})}{(3 \times 10^{-2})^2} \\ &= -3 \times 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

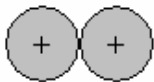
La fuerza es de atracción e igual a $3 \times 10^{-5} \text{ N}$.

b) Cuando se ponen en contacto se produce equilibrio de las cargas diferentes o sea

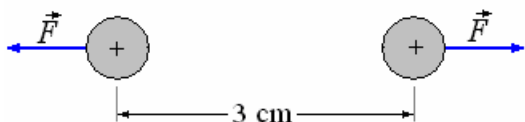


$3 \times 10^{-9} - 1 \times 10^{-9} = 2 \times 10^{-9} \Rightarrow$ Sería la carga total, la que se distribuye por igual en cada una de las esferas, por ser idénticas.

$$q_1 = q_2 = \frac{2 \times 10^{-9}}{2} = 1 \times 10^{-9} \text{ C}$$



c) La fuerza entre las dos esferas cuando se colocan a 3 cm es:



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 \times 10^{-9}) \times (1 \times 10^{-9})}{(3 \times 10^{-2})^2} = 1 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Ejemplo 7. Dos esferas conductoras iguales de tamaño insignificante se cargan con $16,0 \times 10^{-14} \text{ C}$ y $-6,4 \times 10^{-14} \text{ C}$, respectivamente, y se colocan separadas 20 centímetros. Luego se mueven a una distancia de 50 centímetros separación.

- Compare las fuerzas entre ellas en las dos posiciones.
- Las esferas se conectan por medio de un alambre fino. ¿Qué fuerza ejerce la una sobre la otra?

Solución. La ecuación que da la fuerza entre las esferas, que se pueden considerar como cargas puntuales, es

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Luego

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(0,2)^2} \text{ y } F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(0,5)^2}$$

$$\therefore \frac{F_1}{F_2} = \frac{(0,5)^2}{(0,2)^2} = 6,25$$

b) Si las esferas se unen por un alambre, las cargas, que se atraen a una otra, pueden fluir por el alambre bajo influencia de las fuerzas que actúan en ellas. Las cargas neutralizarán lo más lejos posible y $(16,0 \times 10^{-14} - 6,4 \times 10^{-14}) = 9,6 \times 10^{-14} \text{ C}$ se distribuirán sobre el sistema. No tomar en cuenta el efecto del alambre, por simetría $4,8 \times 10^{-14} \text{ C}$ quedará en cada esfera. La fuerza entre las dos esferas ahora es:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \\ &= (9,9 \times 10^9) \frac{(4,8 \times 10^{-14} \text{ C})^2}{(0,5)^2} \\ &= 8,29 \times 10^{-17} \text{ N} \end{aligned}$$

Ejemplo 8. Un electrón tiene una masa de $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ y una carga eléctrica de $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Suponga que dos electrones están colocados cerca de uno de otro. Compare las fuerzas gravitacionales y eléctricas entre ellas.

Solución. La fuerza de atracción gravitacional entre los electrones es:

$$\begin{aligned} F_G &= G \frac{m^2}{r^2} = (6,6 \times 10^{11}) \frac{(9,1 \times 10^{-31})^2}{r^2} \\ &= \frac{54,6 \times 10^{-72}}{r^2} \text{ N m}^2 \end{aligned}$$

La fuerza de repulsión entre los electrones es:

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = (9,9 \times 10^9) \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{r^2} \\ &= \frac{23,04 \times 10^{-29}}{r^2} \text{ N m}^2 \end{aligned}$$

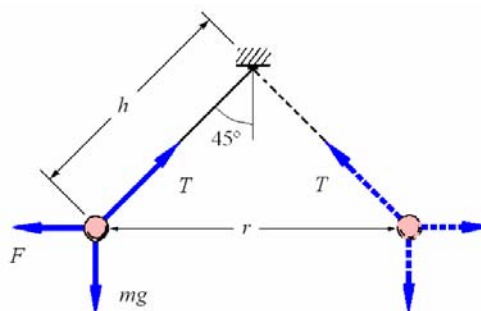
Luego

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{23,04 \times 10^{-29}}{54,6 \times 10^{-72}} = 4,2 \times 10^{42}$$

La fuerza gravitacional entre los electrones es despreciable en comparación con la fuerza eléctrica.

Ejemplo 9. Dos esferas conductoras pequeñas, cada uno de la masa 0,25 g, están colgando por medio de hilos aisladores de longitud 50 centímetros de modo que apenas se tocan. Se da una carga, que comparten igualmente, y a cada una toma una posición tal que el hilo por el cual cuelga forma un ángulo de 45° con la vertical. ¿Cuál es la carga en cada una?

Solución.



Hay tres fuerzas que actúan en cada esfera, el peso mg que actúa hacia abajo, la fuerza repulsiva de Coulomb F que actúa horizontalmente, y la tensión T en el hilo de soporte. Puesto que la esfera está en equilibrio, las componentes horizontales y verticales deben equilibrarse por separado. Así $mg = T \cos 45^\circ$ y $F = T \sin 45^\circ$ o $F = mg \tan 45^\circ$ Pero

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2h \sin 45^\circ)^2}$$

Donde q es la carga sobre cada esfera.

$$\therefore q^2 = 4\pi\epsilon_0 (2h \sin 45^\circ) mg$$

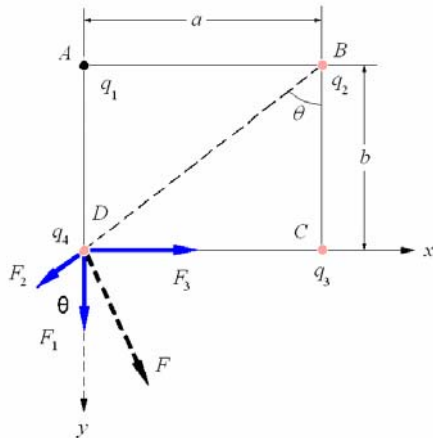
$$= \left(\frac{1}{9 \times 10^9} \right) \left[2 \times 0,5 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 (2,5 \times 9,8)$$

$$= 13,6 \times 10^{-14} \text{ C}^2.$$

y $q = 3,7 \times 10^{-7} \text{ C}.$

Ejemplo 10. Las cargas puntuales de magnitudes $2,5 \times 10^{-14} \text{ C}$, $1,0 \times 10^{-14} \text{ C}$, $-3,5 \times 10^{-14} \text{ C}$, y $2,0 \times 10^{-14} \text{ C}$ se ponen en las esquinas A, B, C, y D de un rectángulo respectivamente en el cual el AB tiene una longitud 8 cm y BC tiene una longitud de 6 cm. ¿Qué fuerza actúa sobre la carga en D debido a las otras tres?

Solución.



Las cargas en A, B, C, y D son $q_1, q_2, -q_3,$ y $q_4,$ respectivamente. Las fuerzas ejercidas sobre $q_4,$ por las otras tres se muestran en el diagrama como los vectores $F_1, F_2,$ y $F_3,$ respectivamente. Los ejes x e y se han seleccionado en las direcciones mostradas.

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_4}{b^2}, \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_4}{(a^2 + b^2)},$$

$$F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_4}{a^2}$$

Las tres fuerzas que actúan sobre q_4 se combinan en una sola fuerza F con componentes (F_x, F_y) a lo largo de los ejes elegidos. F_2 se descompone a lo largo de los ejes x e $y,$ y observamos que:

$$BD = \sqrt{(8\text{cm})^2 + (6\text{cm})^2} = 10 \text{ cm}$$

Obtenemos

$$F_x = F_3 - F_2 \sin \theta, \quad F_y = F_1 - F_2 \cos \theta$$

De estas ecuaciones, se obtiene

$$F_x = \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_3}{a^2} - \frac{q_2}{(a^2 + b^2)} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

$$= \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_3}{a^2} - \frac{q_2 a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right]$$

$$= (9 \times 10^9) (2,0 \times 10^{-14}) \left[\frac{3,5 \times 10^{-14}}{(8 \times 10^{-2})^2} - \frac{(1,0 \times 10^{-14})(8 \times 10^{-2})}{(10 \times 10^{-2})^{3/2}} \right]$$

$$= 8,40 \times 10^{-16} \text{ N}.$$

Del mismo modo

$$F_y = \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{a^2} + \frac{q_2 a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right]$$

$$= 13,58 \times 10^{-16} \text{ N}.$$

El vector F tiene componentes:

$(8,40 \times 10^{-16} \text{ N}$ y $13,58 \times 10^{-16} \text{ N}),$

Cuya magnitud es:

$$\sqrt{8,40^2 + 13,58^2} = 15,97 \times 10^{-16} \text{ N}, \text{ a un ángulo de } \tan^{-1}(13,58/8,40) = 58^\circ 16' \text{ con el eje } x.$$

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION - DISTRIBUCION DE CARGAS

Si más de dos cargas puntuales están presentes, las fuerzas mutuas se determinan por la aplicación repetida de la ley de Coulomb, esto viene a ser la ley de adición o principio de superposición y se demuestra experimentalmente.

Si son n las cargas esto es $q_1, q_2, q_3.$

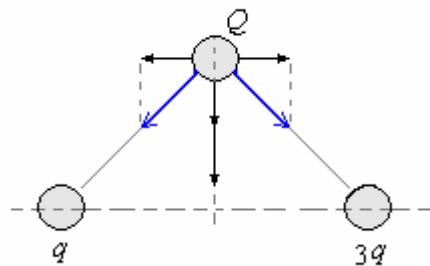
La fuerza sobre la carga es

$$\vec{F}_1 = q_1 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{i1}}{r_{i1}^3}$$

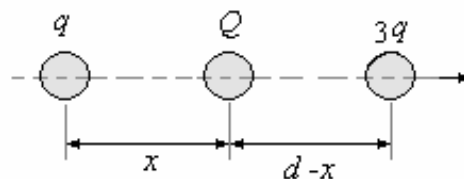
Donde la sumatoria se extiende sobre todas las cargas con excepción de la Carga $q_1.$

Ejemplo 11. Dos cargas puntuales se encuentran separadas una distancia $d.$ ¿Dónde y qué carga se debe colocar para que el sistema quede en equilibrio?

Solución. La posición de la tercera carga Q debe estar en la recta formada por la línea que une las dos cargas, de no ser así no habría equilibrio como muestra la figura la componente vertical no tiene anulación posible.



Para determinar la posición de la carga Q llamaremos x a esta posición.



Como Q está en equilibrio

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qQ}{(d-x)^2}$$

$$\Rightarrow (d - x)^2 = 3x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + dx - \frac{d^2}{2} = 0$$

Resolviendo: $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

hay dos posiciones posibles

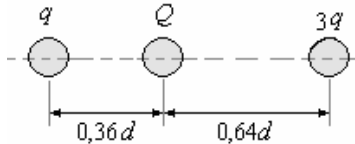
$$x_1 = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}d = 0,36d \text{ y}$$

$$x_2 = -\frac{(\sqrt{3} + 1)}{2}d = -1,36d,$$

x_1 está entre ellas a la derecha de q .

x_2 está fuera a la izquierda de q .

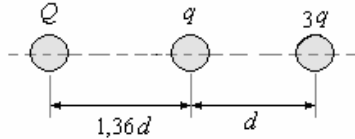
Ahora encontramos el valor Q para x_1 , para que haya equilibrio es necesario que las fuerzas sobre q se anulen.



$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qq}{(d)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(0,36d)^2} = 0$$

$$\Rightarrow Q = -1,71q$$

Similarmente para x_2



$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(d)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qq}{(1,36d)^2} = 0$$

$$\Rightarrow Q = -5,55q$$

Ejemplo 12. Las cargas se colocan en el eje x como sigue: $q_1 = +2 \mu\text{C}$ en $x = 0$, $q_2 = -3 \mu\text{C}$ en $x = 2$ m, $q_3 = -4 \mu\text{C}$ en $x = 3$ m, y $q_4 = + \mu\text{C}$ en $x = 3,5$ m. ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza en q_3 ?

Solución.

$$F = kq_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}^2} + \frac{q_2}{r_{23}^2} + \frac{q_4}{r_{43}^2} \right)$$

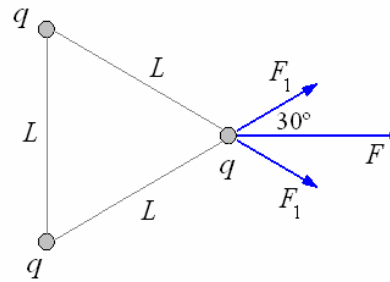
$$= (9 \times 10^9)(4\mu\text{C}) \left[-\frac{2\mu\text{C}}{(3)^2} + \frac{3\mu\text{C}}{(1)^2} + \frac{1\mu\text{C}}{(0,5)^2} \right]$$

$$= 2,44 \times 10^{-10} \text{N/C}$$

Ejemplo 13. Tres cargas positivas idénticas q se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero de lado L . ¿Qué fuerza experimenta una de las cargas?

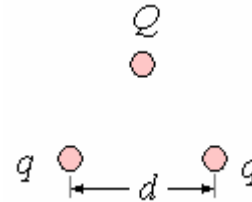
Solución.

$$F = 2F_1 \cos 30^\circ = 2k \frac{q^2}{L^2} \cos 30^\circ = \sqrt{3}k \frac{q^2}{L^2}$$



Ejemplo 14. Tres cargas puntuales, que inicialmente están infinitamente lejos unas de otras, se colocan en los vértices de un triángulo equilátero de lados d . Dos de las cargas puntuales son idénticas y su carga es q . Si el trabajo neto que se requiere para colocar las tres cargas en el triángulo es cero, ¿cuál es el valor de la tercera carga?

Solución.



Trabajo para colocar la primera carga:

$$W_1 = 0$$

Trabajo para colocar la segunda carga:

$$W_2 = q\Delta V_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Trabajo para colocar la tercera carga:

$$W_3 = Q\Delta V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d} + \frac{q}{d} \right) = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 d}$$

Trabajo neto para colocar las tres cargas:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0$$

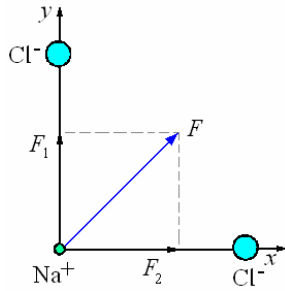
$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0 d} = 0 \Rightarrow Q = -\frac{q}{2}$$

Ejemplo 15. La sal de mesa (cloruro de sodio) es un cristal con una estructura cúbica simple con iones de Na^+ y de Cl^- que se alternan en sitios adyacentes del enrejado.

La distancia entre iones es $2,82 \times 10^{-10} \text{m} = 0,282 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$).

- ¿Qué fuerza experimenta un ión del Na^+ debido a uno de sus vecinos Cl^- más cercano?
- ¿Qué fuerza experimenta un ión de Cl^- debido a un ión de Na^+ vecino?
- ¿En qué fuerza experimenta un ión de Na^+ en el origen debido a los iones de Cl^- en $(a, 0, 0)$ y $(0, a, 0)$?
- ¿Cuál es el peso de un ión del Na^+ de masa $3,82 \times 10^{-26} \text{ kg}$?

Solución.



$$a) F_1 = k \frac{e^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{(0,282 \times 10^{-9})^2} = 2,90 \times 10^{-9} \text{ N}$$

b) Por la tercera ley de Newton:
La fuerza sobre el Cl⁻ debido al Na⁺ es igual que la fuerza en el Na⁺ debido al Cl⁻.

$$c) \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2,90 \times 10^{-9} (\hat{i} + \hat{j}) \text{ N}$$

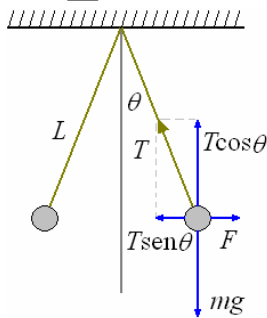
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 4,10 \times 10^{-9} \text{ N}$$

d) $W = mg = (3,82 \times 10^{-26})(9,8) = 3,7 \times 10^{-5} \text{ N}$
Como las fuerzas eléctricas que actúan en objetos cargados pequeños son mucho más grandes que sus pesos, a menudo no se toman en cuenta.

Ejemplo 16. Dos esferas idénticas de tecnopor, cada una de 0,030 kg, cada esfera atada a un hilo de 30 cm de largo y suspendidas de un punto. A cada esfera se le da una carga q (frotándola con un paño), las dos esferas se repelen formando un ángulo de 7° con la vertical. ¿Cuál es la carga en cada esfera?

Solución. Dibuje el diagrama de fuerzas para una de las esferas. La esfera está en equilibrio, tal

$$\text{que: } \sum F_H = 0 \text{ y } \sum F_V = 0$$



$$T \cos \theta - mg = 0 \Rightarrow T \cos \theta = mg$$

$$T \sin \theta - F = 0 \Rightarrow T \sin \theta = F$$

Dividiendo: $\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \tan \theta = \frac{F}{mg}$, donde

$$F = k \frac{q^2}{(2L \sin \theta)^2}$$

Resolviendo:

$$q^2 = \frac{(mg \tan \theta)(2L \sin \theta)^2}{k}$$

$$= \frac{(0,03)(9,8)(\tan 7^\circ)(2)(0,3)(\sin 7^\circ)}{9 \times 10^9}$$

$$\Rightarrow q = 0,146 \times 10^{-6} \text{ C} = 0,146 \mu\text{C}$$

CARGA DISTRIBUIDA. En el caso ya no de cargas puntuales sino de una distribución continua, a pesar que la carga eléctrica se encuentre en múltiplos de una carga básica que es el electrón ($e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$), la cual es extremadamente pequeña. Esto significa que la carga macroscópica está compuesta de un número muy grande de electrones. Así podemos describir una distribución de carga en términos de una densidad de carga.

Densidad de carga volumétrica definida por

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

Densidad de carga superficial definida por

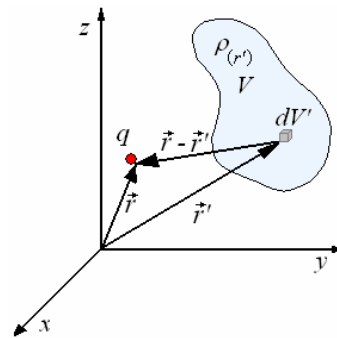
$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

Densidad de carga lineal definida por

$$\lambda = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell}$$

Ejemplo 17. ¿Cuál sería la fuerza sobre una carga q , debido a cargas distribuidas por volumen?

Solución.



Sea al volumen V con densidad de Carga $\rho_{(r')}$. La fuerza sobre la Carga q es:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho_{(r')} dV'$$

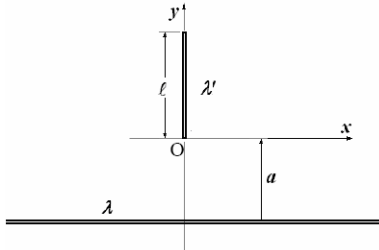
Del mismo para una distribución superficial, con densidad de Carga $\sigma_{(r')}$

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma_{(r')} dS'$$

y para una distribución lineal, con densidad de Carga $\lambda_{(r')}$

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \lambda(r') dl'$$

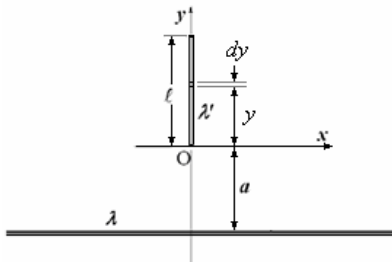
Ejemplo 18. La figura muestra un alambre infinito horizontal con densidad lineal de carga λ , y un alambre finito de largo ℓ y densidad lineal de carga $\lambda' = \lambda_0(y+a)$, donde λ_0 es una constante de unidad C/m².



- a) ¿Cuál es la fuerza que el alambre infinito ejerce sobre el alambre de largo ℓ ?
- b) ¿Cuál es la fuerza que el alambre de largo ℓ ejerce sobre el alambre infinito?

Solución.

- a) La fuerza que el alambre infinito ejerce sobre el alambre de largo ℓ :



$$d\vec{F} = dq \vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(a+y)} \hat{j},$$

$$dq = \lambda' dy = \sigma_0(a+y)dy$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } d\vec{F} &= \sigma_0(a+y)dy \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(a+y)} \hat{j} \\ &= \frac{\lambda\sigma_0 dy}{2\pi\epsilon_0} \hat{j} \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{\lambda\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \hat{j} \int_0^\ell dy = \frac{\lambda\sigma_0 \ell}{2\pi\epsilon_0} \hat{j}$$

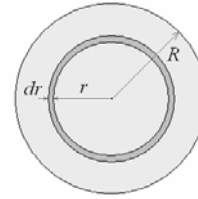
- b) La fuerza que el alambre de largo ℓ ejerce sobre el alambre infinito por la tercera ley de Newton es:

$$-\vec{F} = -\frac{\lambda\sigma_0 \ell}{2\pi\epsilon_0} \hat{j}$$

Ejemplo 19. Una esfera maciza, no conductora de radio R , tiene una densidad de carga volumétrica

$\rho = A/r$, donde A es constante. Calcular la carga de la esfera.

Solución.



$$\text{Si } \rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV$$

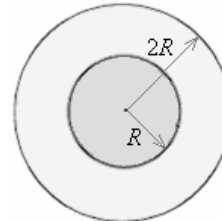
$$\text{y } q = \int_{r=0}^{r=R} \rho dV, \text{ con } \rho = \frac{A}{r} \text{ y } dV = 4\pi r^2 dr :$$

$$q = \int_0^R \frac{A}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_0^R r dr = 2\pi A R^2$$

Ejemplo 20. Se tiene una esfera aisladora con densidad de carga variable de la forma

$$\rho = (\rho_0/r^2) e^{-r} \text{ y radio } R \text{ limitada exteriormente}$$

por una esfera conductora de radio interior R y exterior $2R$. En la esfera conductora hay una carga neta tal que el potencial exterior ($r > 2R$) es constante. Determine la carga total en la esfera aisladora.



Solución. La carga total en una región del espacio donde hay una densidad de carga ρ está dada por la integral:

$$q = \int_V \rho dV$$

En este caso, donde la simetría es esférica, la expresión toma la forma:

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho_0 \frac{e^{-r}}{r^2} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= 4\pi\rho_0 \int_0^R e^{-r} dr = 4\pi\rho_0(1 - e^{-R}) \end{aligned}$$

CAMPO ELECTRICO - INTRODUCCION.

Nosotros conocemos la existencia del campo gravitacional porque al dejar en un punto del espacio (cerca de la tierra) una masa m esta sufre la acción de

la fuerza gravitacional \vec{F} , habiendo en ese punto

una intensidad de campo gravitacional \vec{g} , donde

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Este valor en el punto no cambie con el tiempo, depende de la masa de la tierra y de la distancia

$$\vec{F} = G \frac{mM_T}{r^2} \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{g} = \frac{GM_T}{r^2} \hat{r}$$

La Ley de Coulomb establece la fuerza de interacción entre dos cargas, pero cuando quitamos una de las cargas ¿qué hay en ese espacio? Similarmente al **campo gravitacional** podemos decir que el espacio que rodea a la carga está afectado por lo que llamamos **campo eléctrico**.

DEFINICIÓN DE CAMPO ELÉCTRICO

Sea una carga q_1 fija en el espacio, la acción sobre la carga q_2 es

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}$$

Si variamos la posición de q_2 la fuerza en cada punto dependerá de las coordenadas de su posición. Para eliminar la dependencia de la fuerza a q_2 , se especifica esta como carga unitaria y positiva. Así el campo fuerza se define como la fuerza por unidad de carga positiva en todos los puntos alrededor de q_1 , un resultado equivalente se obtiene dividiendo la fuerza en cada punto por el valor de q_2 , esto es

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \hat{r}$$

Para el caso del Campo debido a cargas distribuidas.
- Cargas puntuales. Campo producido por las n cargas puntuales ($q_1, q_2, q_3, q_2, \dots, q_2$) en un punto

determinado por \vec{r} .

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\left(\begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} - \vec{r}_i \end{matrix} \right)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|^3}$$

- Distribución volumétrica

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(r') \frac{\left(\begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} - \vec{r}_i \end{matrix} \right)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|^3} dV'$$

- Distribución superficial

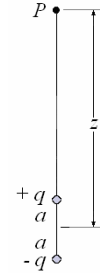
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(r') \frac{\left(\begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} - \vec{r}_i \end{matrix} \right)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|^3} dS'$$

- Distribución lineal

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\ell \lambda(r') \frac{\left(\begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} - \vec{r}_i \end{matrix} \right)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|^3} d\ell'$$

Ejemplo 21. Un **dipolo eléctrico** consiste en las cargas $+q$ y $-q$ separadas por una distancia $2a$. Si las cargas se colocan en $(0, 0, a)$ y $(0, 0, -a)$ en el eje de z (el eje del dipolo), determine el campo eléctrico del dipolo en un punto a una distancia z del origen en el eje de z , donde $z \gg 2a$. Expresar el resultado en los términos del momento dipolo eléctrico, definido como $p = 2aq$.

Solución.



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z-a)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{(z+a)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{z^2 - 2az + a^2} - \frac{1}{z^2 + 2az + a^2} \right)$$

Como $a^2 \ll 2az \ll z^2$, podemos eliminar a^2

$$\frac{1}{z^2 - 2az} = \frac{1}{z^2 \left(1 - \frac{2a}{z} \right)}$$

Usando $\frac{1}{1-\delta} \approx 1 + \delta$, si $\delta \ll 1$:

$$\frac{1}{z^2 \left(1 - \frac{2a}{z} \right)} = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{2a}{z} \right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \left[1 + \frac{2a}{z} - \left(1 - \frac{2a}{z} \right) \right]$$

$$= \frac{aq}{\pi\epsilon_0 z^2}$$

$$\circ E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 z^2}$$

La materia en la naturaleza es por general eléctricamente neutra, no se encuentra tan a menudo situaciones donde las fuerzas se deben a la carga neta en un objeto. Sin embargo, todo puede adquirir un momento dipolar cuando está colocado en un campo eléctrico porque las cargas negativas en los átomos son jaladas en una forma tirada y las cargas positivas en el núcleo son jaladas en la dirección opuesta. Así los dipolos eléctricos desempeñan un papel muy importante en nuestra comprensión de la materia. Cuando un dipolo eléctrico se coloca en un campo eléctrico, tiende a alinearse con su eje paralelo al campo. Si no es paralelo al campo, experimenta un

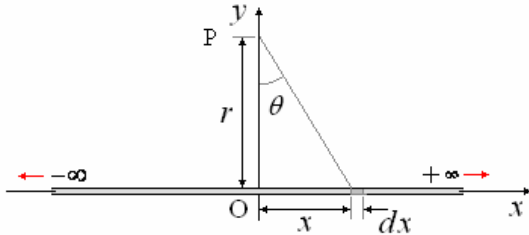
torque $\vec{\tau}$. Asociado a este torque hay una energía potencial U , donde

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \text{ y } U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$$

Aquí θ es el ángulo entre el campo eléctrico y el eje del dipolo y el $p = 2aq$ es el momento del dipolo.

Ejemplo 22. Campo eléctrico de una línea recta infinita con carga λ Coulombios/metro.

Solución. Consideremos la línea como se muestra en la figura el punto P situado a una distancia r de la recta,



La carga del elemento dx es $dq = \lambda dx$

El campo eléctrico en P producido por este elemento es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

Donde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ con

$$\vec{r}_1 = x\hat{i} \text{ y } \vec{r}_2 = r\hat{j}$$

$$\vec{r}_{12} = r\hat{j} - x\hat{i} \Rightarrow r_{12} = (r^2 + x^2)^{1/2}$$

$$\text{Luego: } d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} (r\hat{j} - x\hat{i})$$

$$\text{o } d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{j} - \frac{x dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} \right]$$

El campo eléctrico total lo encontraremos integrando desde $x = -\infty$ hasta $x = \infty$.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{j} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} \right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [I_1 - I_2]$$

Integrando I_1 :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Cambiando variable: $x = r \tan \theta$

$$\Rightarrow dx = r \sec^2 \theta d\theta$$

Los límites $x = -\infty \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{y } x = \infty \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

De aquí

$$I_1 = \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{\text{sen } \theta}{r} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{r}$$

Integrando I_2 :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(r^2 + x^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Valor que esperábamos para I_2 ya que al haber simetría los componentes horizontales se anulan entre sí.

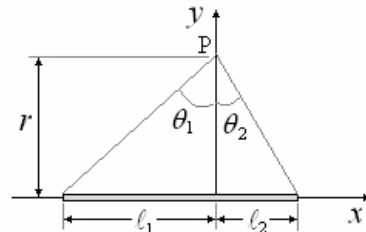
Finalmente, reemplazando los valores de I_1 e I_2 .

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{i}$$

Como el campo sale radialmente, el resultado puede escribirse.

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

Recta finita. Para el caso de una recta finita la variación son los límites, veamos por ejemplo, encontrar el campo eléctrico en el punto P de la figura



aquí x varía de $x = -l_1$ a $x = l_2$

la integración

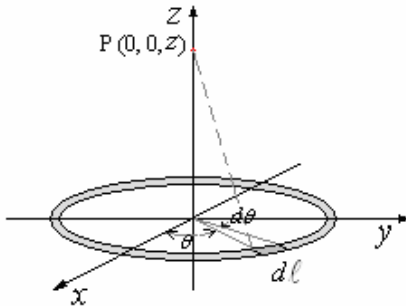
$$I_1 = \frac{1}{r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\text{sen } \theta}{r} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{r} (\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1) = \frac{1}{r} \left[\frac{l_2}{(r^2 + l_2^2)^{1/2}} + \frac{l_1}{(r^2 + l_1^2)^{1/2}} \right]$$

$$I_2 = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{x dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(r^2 + x^2)^{1/2}} \Big|_{-l_1}^{l_2} = -\left[\frac{l_2}{(r^2 + l_2^2)^{1/2}} - \frac{l_1}{(r^2 + l_1^2)^{1/2}} \right]$$

El campo eléctrico es $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [I_1 - I_2]$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\ell_2}{(r^2 + \ell_2^2)^{1/2}} + \frac{\ell_1}{(r^2 + \ell_1^2)^{1/2}} \right] \hat{j} + \left[\frac{\ell_2}{(r^2 + \ell_2^2)^{1/2}} - \frac{\ell_1}{(r^2 + \ell_1^2)^{1/2}} \right] \hat{i} \right\}$$

Ejemplo 23. Campo eléctrico en el eje de un anillo de radio R y carga λ Coulombios/metro



Solución. Consideremos un elemento de anillo $d\ell$, determinado por el ángulo θ y barrido por $d\theta$ de tal manera que $d\ell = R d\theta$.

La carga del elemento $d\ell$ es $dq = \lambda d\ell = \lambda R d\theta$

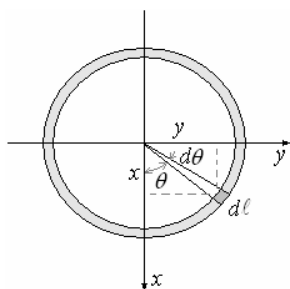
El campo eléctrico producido por este elemento en P es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

Donde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y $r_{12} = \left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|$

con $\vec{r}_1 = x\hat{i} + y\hat{j} = R \cos\theta \hat{i} + R \sin\theta \hat{j}$

y $\vec{r}_2 = z\hat{k}$



$$\vec{r}_{12} = z\hat{k} - R \cos\theta \hat{i} - R \sin\theta \hat{j},$$

$$r_{12} = (z^2 + R^2)^{1/2}$$

Luego

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}} (z\hat{k} - R \cos\theta \hat{i} - R \sin\theta \hat{j})$$

O

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} (z d\theta \hat{k} - R \cos\theta d\theta \hat{i} - R \sin\theta d\theta \hat{j})$$

El campo eléctrico total lo encontramos integrando desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$.

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} d\vec{E} =$$

$$\frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \left(z \int_0^{2\pi} d\theta \hat{k} - R \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \hat{i} - R \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \hat{j} \right)$$

La primera integral es 2π , las dos últimas son 0, como era de esperar ya que sobre el eje la resultante del campo eléctrico por simetría debe ser vertical.

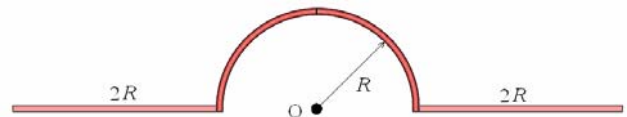
Finalmente el Campo es

$$\vec{E} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Si el anillo tiene una carga total Q :

$$Q = 2\pi R \lambda \text{ y } \vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Ejemplo 24. Un segmento de línea de carga positiva, tiene una densidad lineal de carga uniforme λ . Este se dobla en la forma indicada en la figura.



Halle:

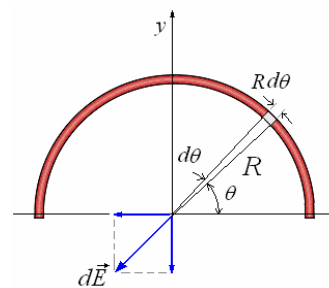
a) el campo eléctrico generado por la semicircunferencia en el punto O.

b) el campo eléctrico generado por cada porción recta en el punto O.

c) la fuerza eléctrica que ejercerá una carga puntual positiva q ubicada en el punto O sobre la línea de carga completa.

Solución.

a)



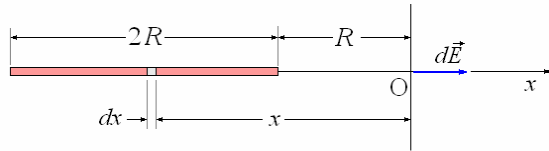
$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} (-\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j})$$

$$= \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} (-\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j})$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi (-\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j}) d\theta$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{j}$$

b) Campo debido al lado izquierdo:



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} \hat{i} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} \hat{i}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{izquierda} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{i} \int_{-3R}^{-R} \frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{i} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-3R}^{-R} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{i} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R} \right] = \frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0 R} \hat{i} \end{aligned}$$

Similarmente encontramos el campo debido al lado derecho:

$$\vec{E}_{derecha} = -\frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0 R} \hat{i}$$

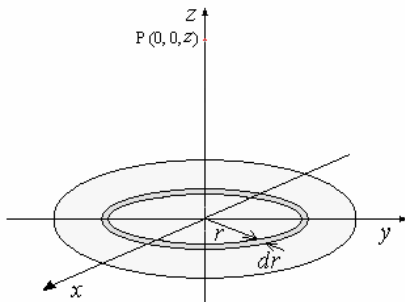
c) Si colocamos una carga q en el punto O,

$$\vec{F} = q\vec{E}_{total} = -\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{j}$$

Aplicando la tercera ley de Newton, la línea será empujada por una fuerza igual a:

$$\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{j}$$

Ejemplo 25. Campo eléctrico en el eje de un disco de radio R y carga σ C/m².



Solución. Consideremos un elemento anular de radio r y espesor dr cuya superficie es $dA = 2\pi r dr$, con carga $dq = \sigma dA = 2\pi \sigma r dr$.

El Campo eléctrico producido por este elemento en P es:

(utilizando el resultado obtenido para un anillo).

$$d\vec{E} = \frac{zdq}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{z\sigma r dr}{2\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k}$$

El Campo eléctrico total lo encontramos integrando desde $r = 0$ hasta $r = R$.

$$\vec{E} = \int_0^R d\vec{E} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R \hat{k} \\ \vec{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{k} \end{aligned}$$

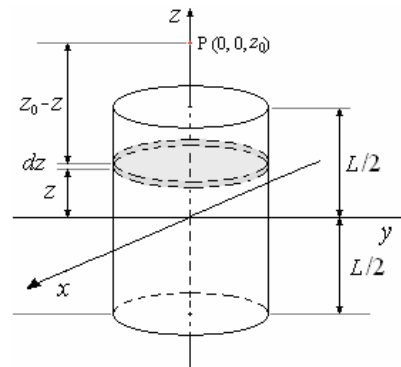
Si la carga total del disco es Q : $Q = \sigma \pi R^2$

$$\text{y } \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{k}$$

Para el caso de un **PLANO INFINITO** la integración se realiza desde $r = 0$ hasta $r = \infty$ y el campo eléctrico es

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

Ejemplo 26. Ahora veamos el Campo eléctrico en el eje producido por un cilindro de radio R , largo L y carga ρ C/m³.



Solución. Para evaluar el Campo eléctrico en el punto P, tomemos un elemento diferencial con forma de disco de radio R y espesor dz cuyo volumen es $dV = \pi R^2 dz$ y su carga $dq = \rho dV = \rho \pi R^2 dz$.

El Campo eléctrico producido por este elemento en el punto P es: (utilizando el resultado del disco)

$$d\vec{E} = \frac{\rho \pi R^2 dz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \frac{(z_0 - z)}{[(z_0 - z)^2 + R^2]^{1/2}} \right\} \hat{k}$$

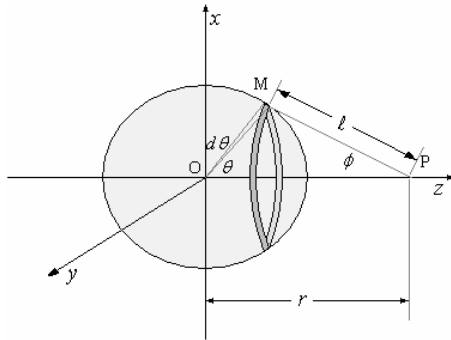
El Campo eléctrico total lo encontramos integrando desde $z = -L/2$ hasta $z = L/2$.

$$\vec{E} = \int_{-L/2}^{L/2} d\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} dz - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{(z_0 - z) dz}{[(z_0 - z)^2 + R^2]^{1/2}} \right\} \hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ z + \left[(z_0 - z)^2 + R^2 \right]^{1/2} \right\}_{-L/2}^{L/2} \hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ L + \left[\left(z_0 - \frac{L}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{1/2} - \left[\left(z_0 + \frac{L}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{1/2} \right\} \hat{k}$$

Ejemplo 27. Campo eléctrico producido por una carga σ C/m² distribuida sobre una superficie esférica de radio R .



Solución. Tomemos un anillo diferencial determinado por el ángulo θ y barrido por $d\theta$, su área es: $dS = (2\pi R \text{sen}\theta)Rd\theta$, donde $R =$ radio de la esfera
 $2\pi R \text{sen}\theta =$ circunferencia del anillo
 $Rd\theta$ ancho del anillo
 su carga es $dq = \sigma dS = \sigma(2\pi R \text{sen}\theta)Rd\theta$
 El Campo producido por este elemento en el punto P es (utilizando la expresión del Campo eléctrico obtenido para un anillo)

$$d\vec{E} = \frac{[\sigma(2\pi R \text{sen}\theta)Rd\theta](\ell \cos\phi) \hat{k}}{4\pi\epsilon_0 \ell^3}$$

$$d\vec{E} = \frac{\sigma R^2 \text{sen}\theta \cos\phi}{4\pi\epsilon_0 \ell^2} d\theta \hat{k} \quad (1)$$

Aplicando la ley de los cosenos al triángulo OPM

$$R^2 = \ell^2 + r^2 - 2\ell r \cos\phi \text{ y}$$

$$\ell^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta$$

De la primera obtenemos: $\cos\phi = \frac{\ell^2 + r^2 - R^2}{2\ell r}$

Derivando la segunda: $2\ell d\ell = 2Rr \text{sen}\theta d\theta$

$$\Rightarrow \text{sen}\theta d\theta = \frac{\ell d\ell}{Rr}$$

Sustituyendo $\cos\phi$ y $\text{sen}\theta d\theta$ en la ecuación (1)

$$d\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{\ell^2}\right) d\ell \hat{k}$$

Para obtener el campo eléctrico total integramos entre $\ell = r - R$ y $\ell = r + R$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_{r-R}^{r+R} d\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{\ell^2}\right) d\ell \hat{k} \\ &= \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2} \left[\ell - \frac{(r^2 - R^2)}{\ell} \right]_{r-R}^{r+R} \hat{k} = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2} (4R) \hat{k} \\ &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{k} \end{aligned}$$

Siendo la carga total $Q = \sigma 4\pi R^2$

Tenemos para $r > R$: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{k}$

En el caso de entrar el punto P dentro de la esfera o sea $r < R$, los límites son:

$$\ell = R - r \text{ y } \ell = R + r$$

$$\begin{aligned} \text{De aquí: } \vec{E} &= \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2} \left[\ell - \frac{(r^2 - R^2)}{\ell} \right]_{R-r}^{R+r} \hat{k} \\ &= \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2} (0) \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

En resumen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } r > R \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{k} \\ \text{Para } r = R \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{k} \\ \text{Para } r < R \Rightarrow \vec{E} = 0 \end{array} \right.$

LÍNEAS DE FUERZA ELECTRICAS

Para una mejor visualización del campo eléctrico \vec{E} Faraday ideó un modelo de campo eléctrico formado por líneas de fuerza. La relación entre las líneas de fuerza y el vector campo eléctrico son:

a) La tangente a una línea de fuerza en un punto

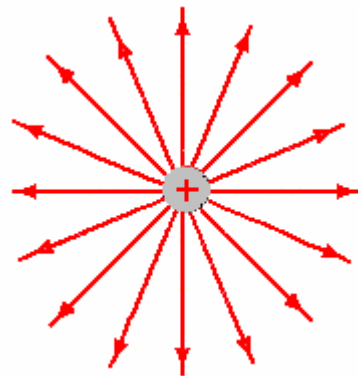
cualquiera de la dirección de \vec{E} en ese punto.

b) Las líneas de fuerza se dibujan de tal manera que el número de ellas por unidad de área que atraviesan

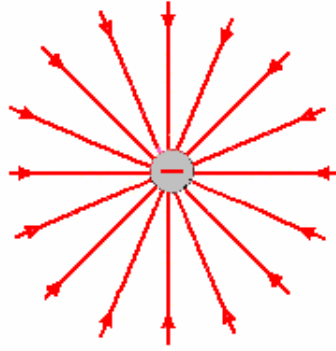
sea proporcional a la magnitud de \vec{E} , es decir donde

las líneas están cercanas, \vec{E} es grande y donde están separadas, \vec{E} es pequeño.

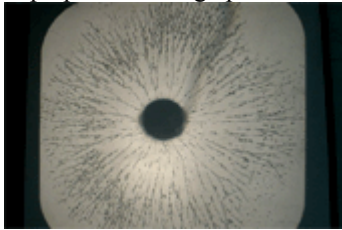
Si tenemos una carga puntual positiva las líneas de fuerza salen de ella. En los puntos cercanos las líneas están más juntas que en los alejados lo que nos muestra que el campo eléctrico es más intenso cerca y se va disipando a medida que el punto se aleja de la carga.



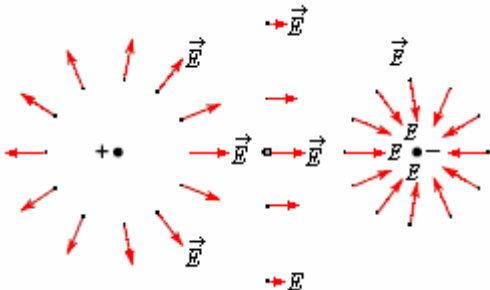
Las líneas de fuerza de una carga negativa se representan como líneas que van hacia la carga.



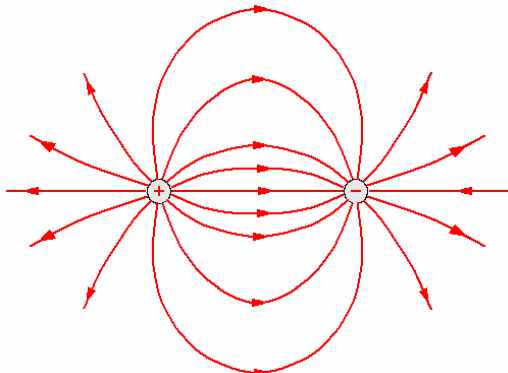
Por medio del uso de aceite, semillas de grama y empleando un pequeño electrodo cilíndrico que se carga con el generador de Wimshurt, se obtienen las líneas de campo para una carga puntual



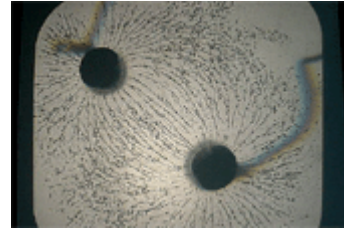
Si dibujamos los vectores del campo eléctrico \vec{E} en los varios puntos alrededor de nuestra distribución de carga, una figura del campo eléctrico comienza a emerger.



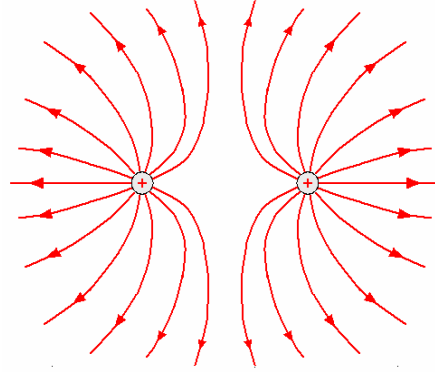
En el caso de dos cargas diferentes la figura a continuación nos muestra las líneas de fuerza



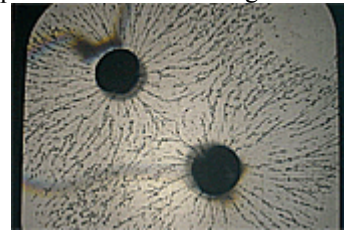
Por medio del uso de aceite, semillas de grama y empleando dos electrodos cilíndricos que se cargan de distinto signo con el generador de Wimshurt, se obtienen las líneas de campo de dos cargas eléctricas puntuales de distinto signo.



En el caso de dos Cargas positivas iguales la figura siguiente nos muestra las líneas de fuerza.



Por medio del uso de aceite, semillas de grama y empleando dos electrodos cilíndricos que se cargan de igual signo con el generador de Wimshurt, se obtienen las líneas de campo para dos cargas eléctricas puntuales del mismo signo.

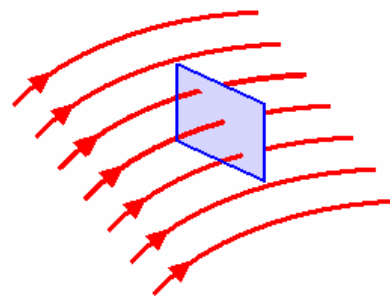


FLUJO DEL CAMPO ELÉCTRICO.

Vemos que las líneas salen o entran hacia la carga en forma de un flujo de Campo eléctrico.

Para poder encontrar una relación cuantitativa entre las líneas de fuerza y la intensidad del campo eléctrico definimos que el número de líneas $\Delta\Phi$ que ocupa un elemento de superficie ΔS , perpendicular a ésta, como el promedio de la intensidad de campo (E_n) en ΔS , es decir:

$$\Delta\Phi = E_n \Delta S$$



Para poder relacionar el número de líneas con el campo eléctrico en cualquier punto, hacemos que $\Delta S \rightarrow 0$ y $d\Phi = E_n dS$.

Para quitar la restricción de perpendicularidad de la superficie a las líneas de fuerza (es decir el campo eléctrico) podemos escribir vectorialmente

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

El número de líneas a través de una superficie S será

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

A esto se llama propiamente **FLUJO ELECTRICO**.

Ejemplo 28. Encuentre el flujo total debido a una carga puntual q .

Solución. A una distancia r de la carga el campo

eléctrico es: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$, ese campo

atraviesa una superficie $d\vec{S} = \hat{r}dS$.

El flujo eléctrico a través de $d\vec{S}$ es

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r}dS$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \int_S dS$$

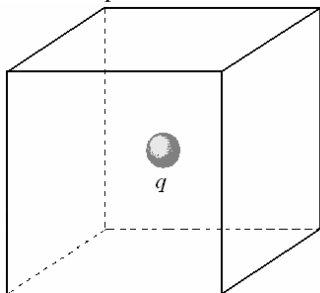
El valor de $\int_S d\vec{S}$, siendo el lugar geométrico de un punto a una distancia r de la carga puntual es el área

de una esfera de radio r : $\int_S d\vec{S} = 4\pi r^2$

Luego: $\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \int_S dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2$

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ejemplo 29. En el centro geométrico de un cubo de 2 m de arista tenemos una carga de $50 \mu C$. Calcular el flujo eléctrico que atravesará a cada una de las caras del cubo. (El medio que se considera es el vacío).



Solución. El flujo total debido a la carga es

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

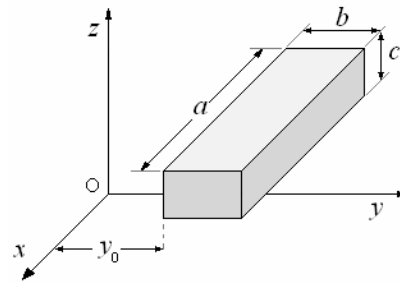
Como el cubo tiene seis caras y la carga está en el centro geométrico de éste, el flujo que atraviesa una de ellas será:

$$\begin{aligned} \Phi_c &= \frac{\Phi}{6} = \frac{q}{6\epsilon_0} = \frac{50 \times 10^{-6}}{6(8,85415 \times 10^{-12})} \\ &= 0,94 \times 10^6 \frac{Nm^2}{C} \end{aligned}$$

Ejemplo 30. En la superficie cerrada de la figura $a = 0,5$ m, $b = 0,4$ m, $c = 0,3$ m e $y_0 = 0,2$ m. El campo electrostático en que está sumergida no es homogéneo y viene dado en el SI por

$$\vec{E} = (4 + 3y^2)\hat{j}$$

Determinar la carga neta encerrada en la superficie.



Solución. Aplicando la definición de flujo a cada una de las áreas que forman el paralelepípedo las únicas en que éste no es cero son las paralelas al plano xz (en las demás es nulo puesto que el vector campo electrostático y los vectores área son perpendiculares); llamando A_1 la que dista y_0 del plano xz y A_2 la que dista $y_0 + b$, y teniendo en cuenta

que \vec{E} y sus vectores área son paralelos:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2$$

$$\vec{E}_1 = (4 + 3y_0^2)\hat{j}, \quad d\vec{S}_1 = -dS_1\hat{j} \quad y$$

$$\vec{E}_2 = [4 + 3(y_0 + b)^2]\hat{j}, \quad d\vec{S}_2 = dS_2\hat{j}$$

Con esto:

$$\Phi = -(4 + 3y_0^2) \int_{S_1} dS_1 + [4 + 3(y_0 + b)^2] \int_{S_2} dS_2$$

$$= -(4 + 3y_0^2)ac + [4 + 3(y_0 + b)^2]ac$$

$$= 3abc(b + 2y_0)$$

Como este flujo es debido a la carga encerrada en la

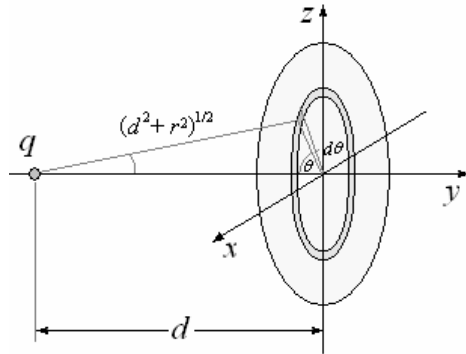
superficie tenemos: $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$

Igualando: $3abc(b + 2y_0) = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow Q = 3abc(b + 2y_0)\epsilon_0$$

Ejemplo 31. Una carga puntual q se encuentra a una distancia d en el eje de un disco de radio R . ¿Cuál es el flujo a través de este disco?

Solución.



La figura muestra una sección dS perteneciente al disco de radio R .

El flujo a través de dS es: $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Donde:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + d^2)} (\text{sen}\beta \cos\theta \hat{i} + \cos\beta \hat{j} + \text{sen}\beta \text{sen}\theta \hat{k})$$

$$, d\vec{S} = r dr d\theta \hat{j} :$$

de aquí $d\Phi = \frac{q \cos\beta r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0(r^2 + d^2)}$, como

$$\cos\beta = \frac{d}{(r^2 + d^2)^{1/2}} :$$

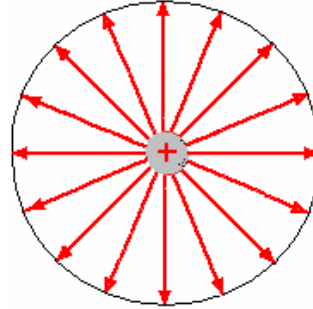
$$d\Phi = \frac{qd r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

E]. flujo a través del disco es:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{qd r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0(r^2 + d^2)^{3/2}} \\ &= \int_0^R \frac{qd r dr}{4\pi\epsilon_0(r^2 + d^2)^{3/2}} \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \int_0^R \frac{qd r dr}{2\epsilon_0(r^2 + d^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{qd}{2\epsilon_0(r^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_0^R \\ &= \frac{qd}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{(r^2 + d^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{d}{(r^2 + d^2)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

LA LEY DE GAUSS

Consideremos una carga puntual q y encontremos el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de radio r concéntrica con la carga.



El Campo eléctrico de la esfera es producido por la carga en cada punto

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

El flujo a través de la esfera es $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

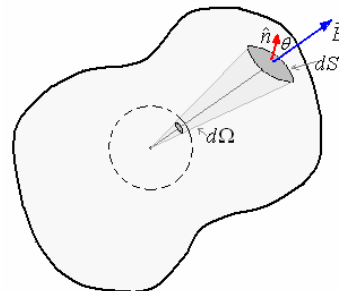
donde $d\vec{S} = \hat{r} dS$

$$\begin{aligned} \text{y } \Phi &= \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

En resumen:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

El flujo a través de la esfera es proporcional a la carga es independiente del radio de la superficie. Consideremos ahora el caso de una carga q encerrada por una superficie arbitraria S como se muestra en la figura siguiente.



El flujo a través de la superficie S es $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Como $d\vec{S} = \hat{n} dS$

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oint_S E \cos\theta dS \\ &= \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\cos\theta dS}{r^2} \end{aligned}$$

Pero

$$dS \cos \theta = r^2 d\Omega \Rightarrow \frac{\cos \theta dS}{r^2} = d\Omega, \text{ el ángulo}$$

sólido subtendido por el elemento de superficie dS ,

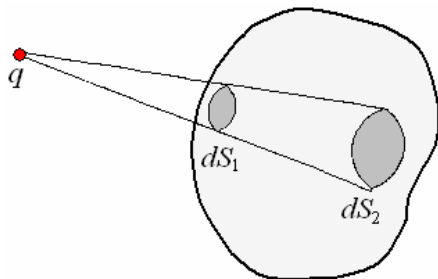
$$\text{luego. } \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega$$

como el ángulo sólido total es 4π :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (4\pi) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

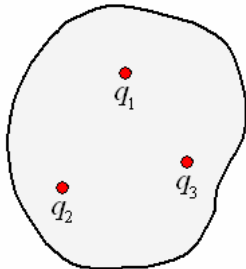
Este resultado es el mismo que en el caso de una superficie esférica, por lo tanto válido para cualquier superficie.

Si la carga está fuera de la superficie cerrada, el flujo a través de dS_1 es igual pero opuesto al flujo a través de dS_2



de aquí que el flujo neto es igual a cero.

Si hay varias cargas dentro de la superficie arbitraria, el flujo total es igual a la suma de los flujos producidos por cada carga.



Con todo esto podemos establecer **la ley de Gauss**.

El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que encierra varias cargas es:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Esta ecuación derivada para cargas puntuales puede aplicarse para cualquier configuración, notando que la integral en caso que no exista simetría geométrica se complica en su solución.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_Q \frac{dq}{\epsilon_0}$$

Ejemplo 32. Deducir la ley de Coulomb para dos cargas puntuales q_1 y q_2 partiendo de la ley de Gauss.

Solución. Aplicando la ley de Gauss y el concepto de flujo a una superficie esférica en cuyo centro se encuentra la carga eléctrica q_1 , deducimos:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2}$$

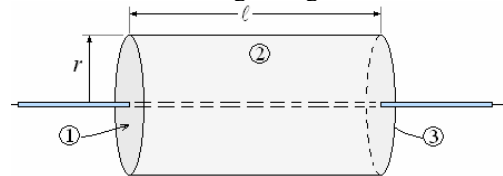
Si colocamos la carga q_2 en un punto en que el campo sea E , la fuerza electrostática sobre esta carga será:

$$F = q_2 E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Obsérvese que este ejemplo es lógicamente recíproco; sin embargo, demuestra la equivalencia entre las leyes de Gauss y de Coulomb.

Ejemplo 33. Se tiene una línea infinita con una carga de densidad lineal uniforme λ C/m. ¿Cuál es el campo eléctrico a una distancia r de la línea?

Solución. En este caso la superficie gaussiana conveniente es un cilindro de radio r y longitud ℓ como se muestra en la figura siguiente.



Aplicando la ley de Gauss.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

La superficie la podemos suponer en 3 partes: (1) y (3) las tapas y (2) el cilindro propiamente dicho. La carga encerrada por la superficie es $q = \lambda \ell$

$$\epsilon_0 \left(\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = \lambda \ell$$

Como E es perpendicular a la línea.

$$\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ y } \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

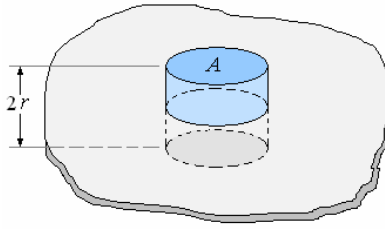
$$\text{Luego } \epsilon_0 \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \lambda \ell \Rightarrow \epsilon_0 E (2\pi r \ell) = \lambda \ell$$

$$\text{y } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{Vectorialmente } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

Ejemplo 34. Se tiene un plano infinito con una densidad de carga superficial. σ ¿Cuál es el Campo eléctrico a una distancia r del plano?

Solución. Aquí conviene como superficie gaussiana un cilindro de sección A y longitud $2r$, como se muestra en la figura siguiente.



Aplicando la ley de Gauss

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

Aquí nuevamente tenemos las tapas y el cilindro propiamente dicho, como el campo eléctrico es perpendicular al plano la integral en la superficie lateral es igual a cero, quedando solo la parte de las tapas, la carga encerrada es igual a $q = \sigma A$.

$$\epsilon_0 (EA + EA) = \sigma A \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

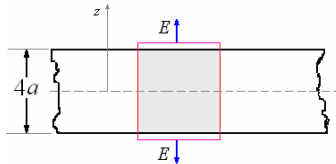
Vectorialmente $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r}$

El Campo es independiente de r .

Ejemplo 35. Una carga se distribuye con densidad uniforme ρ a través del volumen de una gran placa aisladora fina de espesor $4a$. Calcule el campo en todo el espacio, suponga que la placa es paralela al plano xy y que el origen esta en el centro de la placa. Sugerencia, use la simetría del problema y evalúe para toda altura z .

Solución.

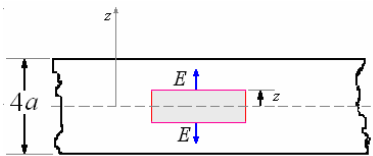
a) Para $-2a \leq z \leq 2a$



$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow EA + EA = \frac{\rho 4aA}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = 2 \frac{\rho}{\epsilon_0} a$$

Para $-2a < z < 2a$

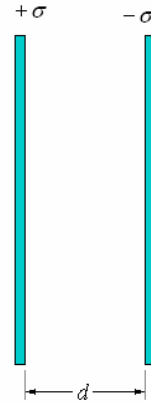


$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow EA + EA = \frac{\rho 2zA}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{\epsilon_0} z$$

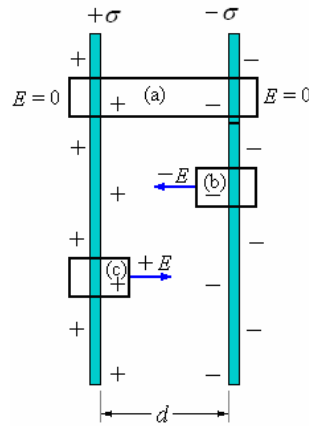
Ejemplo 36. Se tiene dos planos conductores infinitos paralelos separados una distancia d , uno con densidad de carga $+\sigma$ y el otro con densidad de

carga $-\sigma$. ¿Cuál será el valor del Campo eléctrico entre ellos y fuera de ellos?



Solución.

Cálculo por la ley de Gauss directamente.



El campo fuera de las placas:

Con la superficie gaussiana (a).

$$\epsilon_0 \left(\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = \sigma A - \sigma A$$

$$\epsilon_0 (EA + 0 + EA) = 0 \Rightarrow E = 0$$

El campo eléctrico fuera de las superficies es cero.

El campo entre las placas:

Primera manera: Usando la superficie gaussiana (b).

$$\epsilon_0 \left(\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = -\sigma A$$

En la superficie que mira hacia afuera

$$E = 0: \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

En la cara lateral E es perpendicular a la

superficie $\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

En la superficie que mira hacia

adentro: $\int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} = -EA$

Luego: $-\epsilon_0 EA = -\sigma A$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Segunda manera: Usando la superficie gaussiana (c).

$$\epsilon_0 \left(\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = \sigma A$$

En la superficie que mira hacia afuera

$$E = 0: \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

En la cara lateral E es perpendicular a

$$\text{la superficie } \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

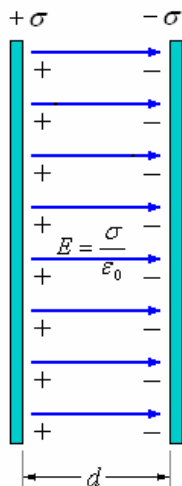
En la superficie que mira hacia

$$\text{adentro: } \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} = EA$$

Luego: $\epsilon_0 EA = \sigma A$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

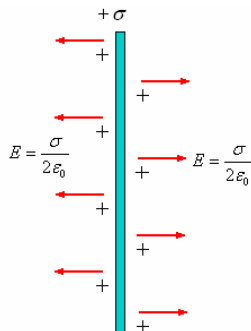
Las cargas se colocan en las superficies interiores de los planos, frente a frente como se muestra en la figura a continuación.



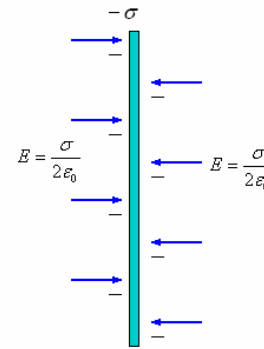
Cálculo por superposición.

Este problema se puede resolver por el método de la superposición.

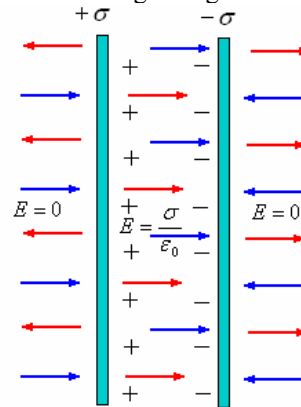
El campo debido al plano con carga positiva se indica en la figura siguiente.



El campo debido al plano con carga negativa se indica en la figura siguiente.



Cuando los planos están uno frente al otro, los campos se superponen y obtenemos los campos tal como se muestra en la figura siguiente.



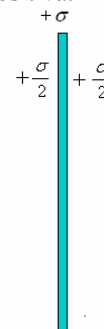
Fuera de los planos: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0$

Entre los planos $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

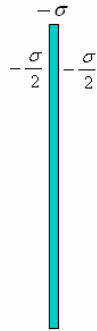
Cálculo por distribución de las cargas.

Originariamente las cargas están distribuidas como se muestra en las figuras siguientes:

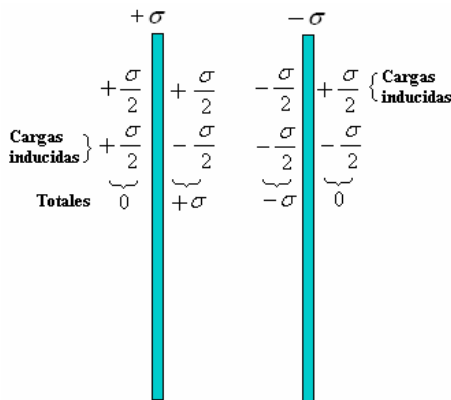
El plano con carga positiva.



El plano con carga negativa.



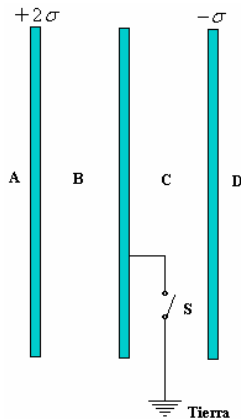
Cuando los planos están cercanos, El plano con carga positiva influye sobre el otro y recíprocamente, como se muestra en la figura



Aquí aplicamos la ley de Gauss a cualquiera de los planos y obtenemos los resultados anteriores.

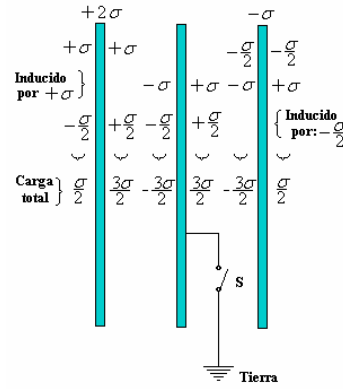
Ejemplo 37. Encontrar la distribución de cargas y el campo eléctrico en los espacios A, B, C y D en el dispositivo de la figura para:

- a) la llave S abierta.
- b) Después de cerrar la llave S.

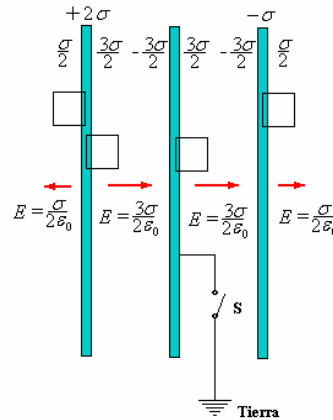


Solución.

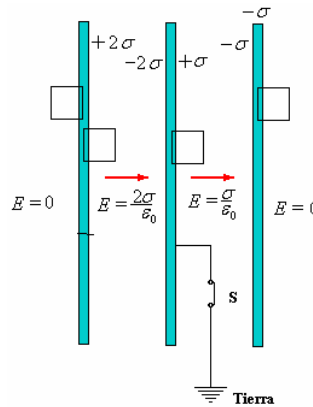
- a) La carga $+2\sigma$ se distribuye $+\sigma$ en cada cara y la carga $-\sigma$ se distribuye $-\sigma/2$ en cada cara e inducen las cargas tal como se muestra en la figura siguiente.



Los campos eléctricos se pueden hallar haciendo superficies gaussianas tal como se muestran en la figura siguiente.

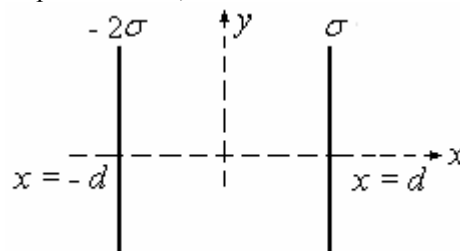


- b) Cuando se conecta a tierra tenemos una fuente inagotable y receptor de carga negativa y las cargas se acomodan tal como se muestra en la figura siguiente.

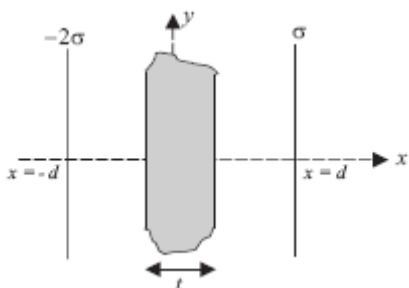


Los campos eléctricos se pueden hallar haciendo superficies gaussianas como las mostradas.

Ejemplo 38. Se tiene dos hojas infinitas ubicadas en $x = d$ y $x = -d$ con cargas σ y -2σ respectivamente, tal como se muestra en la figura.



- a) Determine el campo eléctrico en todo el espacio.
- b) Si entre las placas colocamos una placa infinita conductora descargada de espesor t . ¿Cuales son las densidades de carga superficial inducidas sobre la placa?



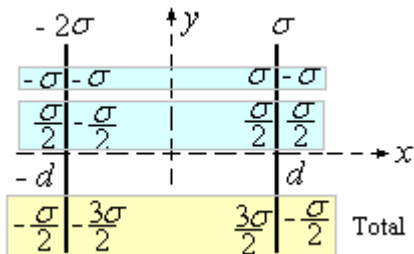
- c) Si con un alambre conductor muy delgado conectamos a la placa conductora con la hoja que está ubicada en $x = d$, ¿cuál es la densidad de carga superficial de esta hoja?

Solución.

Nota: la solución es considerando como si la carga se distribuyera uniformemente en los planos infinitos, lo que no es así, ya que están frente a un borde, motivo es porque la carga debe estar concentrada en una línea e ir haciéndose mas tenue hasta cero en el infinito.

Las densidades de carga en los bordes también tienen ese problema, aun más considerando que son de espesor muy pequeño (el que debería de ser conocido)

- a) Distribución de las cargas.

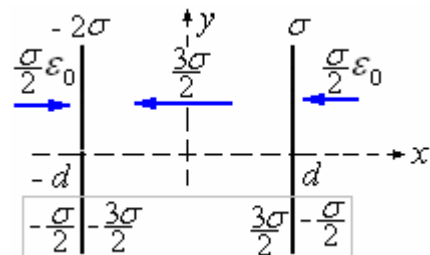


El campo eléctrico:

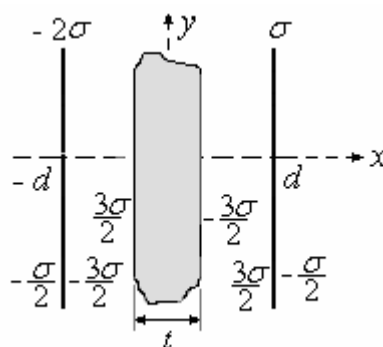
Para $x < -d$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$

Para $x > d$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$

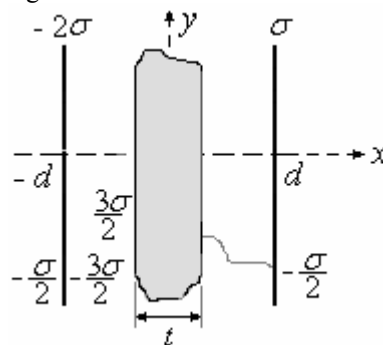
Para $-d < x < d$: $\vec{E} = -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$



- b) Las cargas se acumulan en los bordes tal como se muestra en la figura



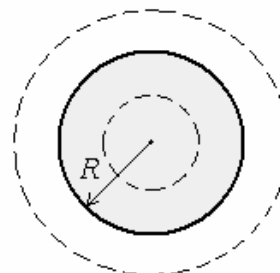
- c) Si se conecta con un alambre conductor muy delgado a la placa conductora con la hoja que está ubicada en $x = d$, la densidad de carga superficial de esta hoja queda tal como se indica en la figura siguiente.



Ejemplo 39. Se tiene una esfera no conductora de radio R con densidad de Carga por volumen ρ .

¿Cuál es el valor del campo eléctrico para todo punto?

Solución.



Para $r < R$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \epsilon_0 E (4\pi r^2) = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Vectorialmente $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$

Para $r = R$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \epsilon_0 E (4\pi R^2) = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R$$

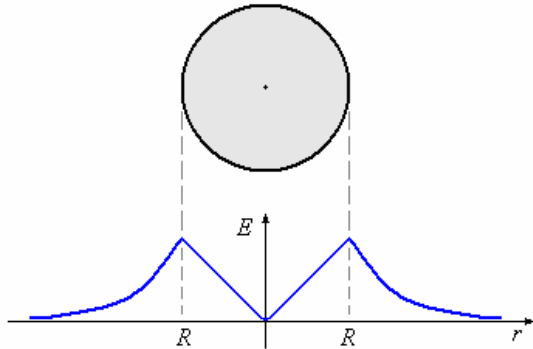
Vectorialmente $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R\hat{r}$

Para $r > R$

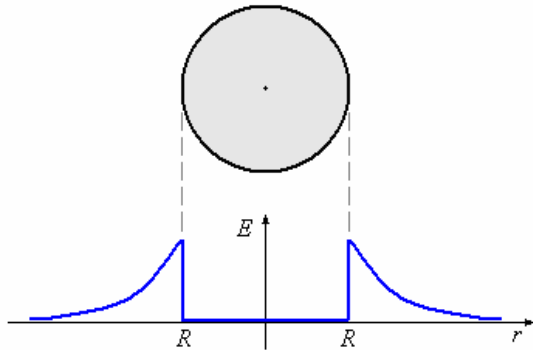
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = Q \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Vectorialmente $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

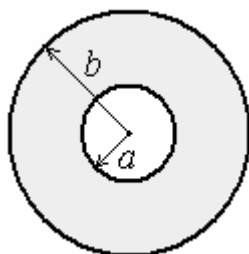


Si la esfera fuera conductora toda la carga estaría concentrada en la superficie y el Campo eléctrico en el interior o sea para $r < R$ sería nulo.



Ejemplo 40. Como una variante veamos el caso de una esfera no conductora con una cavidad concéntrica.

Solución.



Sean los radios de la esfera a y b .

Para $r < a$

Como no hay carga encerrada por la superficie gaussiana

$$E = 0$$

Para $a < r < b$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 - a^3)}{r^2}$$

Vectorialmente $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 - a^3)}{r^2} \hat{r}$

Para $r > b$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

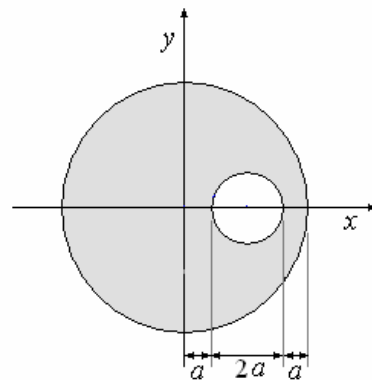
$$\Rightarrow \epsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho \left(\frac{4}{3} \pi b^3 - \frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(b^3 - a^3)}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

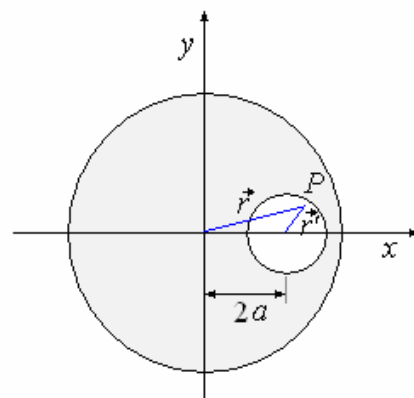
Vectorialmente $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

En el ejemplo siguiente presentamos un caso de asimetría geométrica que es posible resolver con la ley de Gauss.

Ejemplo 41. Se tiene una esfera conductora con una cavidad esférica en su interior como se muestra en la figura, y densidad de carga ρ . ¿Cuál es el campo eléctrico en la cavidad?

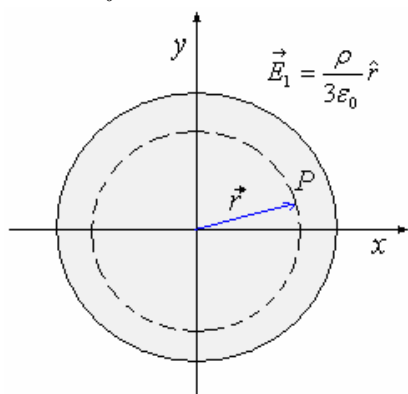


Solución. Vamos a determinar el campo eléctrico en el punto P de la figura siguiente.

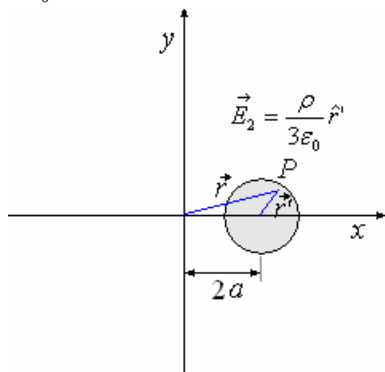


El Campo E en P es igual a: $\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$

Donde $\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \hat{r}$



y $\vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \hat{r}'$



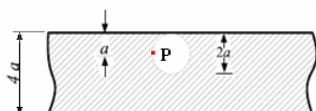
De allí que $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \hat{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \hat{r}' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\hat{r} - \hat{r}')$

Pero $\hat{r} - \hat{r}' = 2a\hat{i}$

Finalmente $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} 2a\hat{i}$

Ejemplo 42. Una carga se distribuye con densidad uniforme ρ a través del volumen de una gran placa aisladora fina de espesor $4a$.

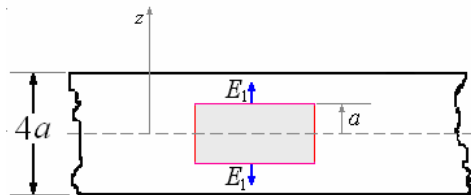
Suponiendo que se quita algo de material, dejando una cavidad esférica de radio a colocada como se muestra en la figura, evalúe el vector de campo eléctrico en el punto P .



Solución.

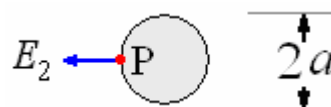
$\vec{E} = E_1\hat{k} - E_2\hat{j}$

Cálculo de $E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} a$



Cálculo de $E_2 \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow E_2 4\pi a^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi a^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a$



$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$
 $= \sqrt{\left(\frac{\rho}{\epsilon_0} a\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3\epsilon_0} a\right)^2} = 1,05 \frac{\rho}{\epsilon_0} a$

Ejemplo 43. Sea una esfera sólida aislante de radio a con una densidad volumétrica de carga igual a $\rho = \rho_0 \frac{r}{a}$, donde ρ_0 es una constante de unidad

C/m^3 . La esfera aislante está dentro de una esfera conductora hueca concéntrica de radio interior b y radio exterior c . La carga neta de la esfera hueca conductora es igual a cero.

- Halle la carga total Q en la esfera aislante.
- ¿Cuál es la densidad superficial de carga en cada superficie de la esfera conductora?
- A partir de la ley de Gauss, deduzca las expresiones de la magnitud del vector campo eléctrico en términos de la distancia radial r , para las regiones: $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ y $r > c$.
- (1 punto) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de r desde $r = 0$ hasta $r = 2c$.

Solución.

a) La carga total Q en la esfera aislante es:

$Q = \int_V \rho dV$, $\rho = \rho_0 \frac{r}{a}$ y $dV = 4\pi r^2 dr$

$Q = \int_0^a \rho_0 \frac{r}{a} 4\pi r^2 dr = \int_0^a \frac{\rho_0}{a} 4\pi r^3 dr$
 $= \frac{\rho_0}{a} \pi r^4 \Big|_0^a = \pi \rho_0 a^3$

b) La densidad superficial de carga en la superficie interior de la esfera conductora ($r = b$).

$\sigma_b = -\frac{\pi \rho_0 a^3}{4\pi b^2} = -\frac{\rho_0 a^3}{4b^2}$

La densidad superficial de carga en la superficie exterior de la esfera conductora ($r = c$).

$$\sigma_c = \frac{\pi \rho_0 a^3}{4\pi c^2} = \frac{\rho_0 a^3}{4c^2}$$

c) El campo eléctrico:

$r < a$,

Para $r < a$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \int_0^r \frac{\rho_0}{a} 4\pi r^3 dr = \frac{\rho_0}{a} \pi r^4 \Rightarrow$$

$$E = \frac{\rho_0}{4a\epsilon_0} r^2$$

Para $a < r < b$,

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \epsilon_0 E(4\pi r^2) = Q \Rightarrow$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = E = \frac{\pi\rho_0 a^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r^2}$$

Para $b < r < c$

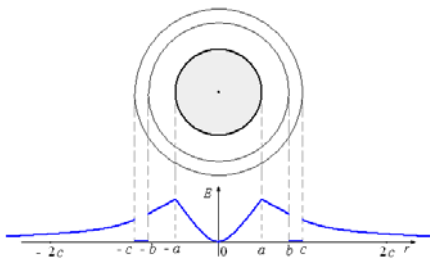
$E = 0$

Para $r > c$.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \epsilon_0 E(4\pi r^2) = Q \Rightarrow$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = E = \frac{\pi\rho_0 a^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r^2}$$

d) Gráfico del campo eléctrico en función de r desde $r = 0$ hasta $r = 2c$



Ejemplo 44. Cargas por inducción en cáscaras esferas conductoras concéntricas. Si una carga $+q$ se encuentra en el centro de una cáscara esférica de metal. Encontrar el campo eléctrico fuera de la esfera.

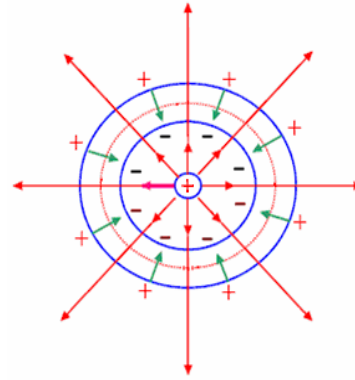
a) Cuando la cáscara está libre.

b) Cuando la cáscara se conecta a tierra.

Solución.

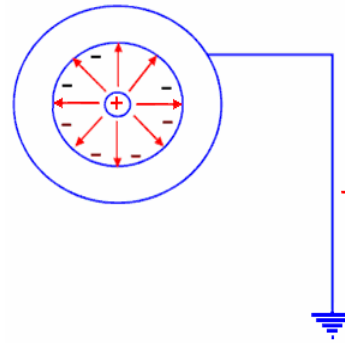
a) Se observan los campos eléctricos inducidos por q y los inducidos en las superficies de la cáscara. En el centro de la cáscara el campo es cero, pues ambos campos se anulan. El campo fuera de la cáscara no es cero.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

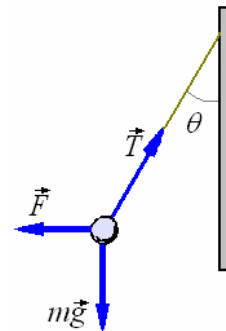


b) Al conectarlo a tierra en la superficie exterior desaparece la carga. El campo exterior es cero.

$$\vec{E} = 0$$



Ejemplo 45. Una bola que conductora pequeña de la masa 10^{-3} g suspendida de un hilo por medio de aislador a una placa conductora grande en posición vertical. Cuando la placa lleva una carga eléctrica de densidad superficial 5×10^{-8} C.m⁻², la bola es rechazada de la superficie y el hilo queda formando un ángulo de 30° con la vertical. ¿Cuál es la carga que ha pasado a la bola?



Solución. Hay tres fuerzas que actúan sobre la bola, el peso mg que actúa hacia abajo, la fuerza F ejercida por la placa que actúa horizontalmente, y la tensión T en el hilo. Puesto que la bola está en equilibrio, las componentes horizontales y verticales de las fuerzas deben balancearse por separado. Así:

$$mg = T \cos \theta \text{ y } F = T \sin \theta$$

Dividiendo: $F = mg \tan \theta$

Pero $F = Eq$, donde E es el campo eléctrico debido a la placa y q es la carga en la bola. ¿Además,

$F = mg \tan \theta = Eq = \sigma q / \epsilon_0$, donde σ es la densidad de la carga en la placa. Así

$$q = \frac{\varepsilon_0 mg \tan \theta}{\sigma}$$

$$= \frac{(8,85 \times 10^{-12})(1 \times 10^{-6})(9,8)(1/\sqrt{3})}{5 \times 10^{-8}}$$

$$= 1,00 \times 10^{-9} \text{ C.}$$

Ejemplo 46. Una gota de aceite cargada de masa $2,5 \times 10^{-4}$ g está en el espacio entre dos placas, cada una de área 175 cm^2 . Cuando la placa superior tiene una carga de $4,5 \times 10^{-7}$ C y la placa más baja una carga negativa igual, la gota sigue estando inmóvil. ¿Qué carga lleva?

Solución. El campo eléctrico entre placas paralelas con cargas iguales y opuestas está dado por la

$$\text{ecuación } E = \sigma/\varepsilon_0 = \frac{Q}{A\varepsilon_0},$$

donde Q y A son la carga y el área de la placa positiva.

La fuerza sobre la gota del aceite es

$$F = qE = \frac{qQ}{A\varepsilon_0},$$

y como esto balancea el peso de la gota,

$$mg = \frac{qQ}{A\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$q = \frac{mgA\varepsilon_0}{Q}$$

$$= \frac{(2,5 \times 10^{-7})(9,8)(175 \times 10^{-4})(8,85 \times 10^{-12})}{4,5 \times 10^{-7}}$$

$$= 8,43 \times 10^{-13} \text{ C}$$

MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Considere una carga q conforme a un campo eléctrico uniforme en la dirección z . No considere la fuerza de la gravedad puesto que normalmente es mucho más pequeña que la fuerza eléctrica. La fuerza qE da lugar a la aceleración $a_z = F/m = qE/m$ y

$a_x = 0$. Podemos determinar el movimiento usando las ecuaciones de la cinemática.

Ejemplo 47. Dos placas paralelas muy grandes de metal separaron por una distancia pequeña d tienen cargas opuestas uniformes, creando en el espacio entre ellas un campo eléctrico E uniforme. Un electrón de carga $-e$ se lanza con velocidad inicial v_0 a través de un agujero pequeño en la placa positiva. Viaja hasta medio camino en el espacio entre las placas antes de detenerse y tomar dirección contraria. ¿Cuál es el valor de E en términos de la velocidad inicial v_0 ?

Solución.

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{-eE}{m} \text{ y } v^2 = v_0^2 + 2ax = 0 \text{ en}$$

$$z = \frac{d}{2}$$

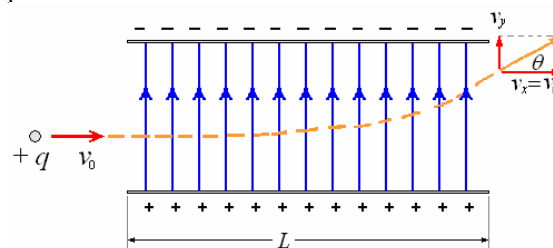
$$\text{Luego } 0 = v_0^2 - 2\left(\frac{eE}{m}\right)\left(\frac{d}{2}\right) \Rightarrow E = \frac{mv_0^2}{ed}$$

Se puede también solucionar esto usando los principios de la energía. Así:

Pérdida en $K =$ trabajo hecho contra el campo eléctrico E :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = (eE)\left(\frac{d}{2}\right) \Rightarrow E = \frac{mv_0^2}{ed}$$

Ejemplo 48. Dos placas paralelas cargadas grandes se utilizan a menudo para crear un campo eléctrico uniforme E . Una partícula cargada disparada entre las placas será desviada por el campo eléctrico. Esta técnica se utiliza para desviar electrones en un tubo catódico (como en un osciloscopio) o para desviar gotitas de tinta en una impresora de inyección de tinta. ¿Suponga una partícula de masa m , carga q , y velocidad inicial v_0 , lanzada paralela a las dos placas donde el campo eléctrico es E . La longitud de las placas es L . ¿A través de qué ángulo se desviará la partícula?



Solución.

No hay aceleración en la dirección x , tal que $L = v_0 t$ donde $t =$ tiempo entre las placas.

$v_x = v_0 =$ constante:

$$\text{y } v_y = v_{0y} + at = 0 + \left(\frac{qE}{m}\right)\left(\frac{L}{v_0}\right)$$

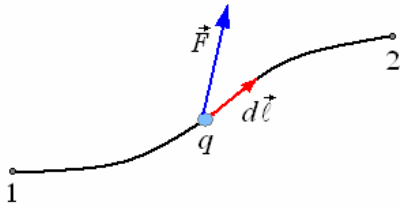
$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{v_0} \left(\frac{qEL}{mv_0}\right) = \frac{qEL}{mv_0^2}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{qEL}{mv_0^2}$$

POTENCIAL ELECTRICO INTRODUCCION

¿Cuál es el trabajo que se realiza para llevar una carga pequeña de un lugar a otro?

El trabajo contra la fuerza eléctrica para transportar una carga a lo largo de una trayectoria con velocidad constante es igual al negativo de la componente de la fuerza eléctrica en la dirección del movimiento,



Integrando en la trayectoria

$$W_{12} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

\vec{F} es la fuerza eléctrica sobre la carga en cada punto.

$d\vec{\ell}$ es el vector desplazamiento diferencial a lo largo de la trayectoria.

Como la definición de la energía potencial se hace en términos de la diferencia de energía potencial, podemos escribir:

$$U_2 - U_1 = W_{12} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Es conveniente para nuestros propósitos considerar el trabajo por unidad de carga y en éste caso la energía potencial se denomina simplemente **potencial eléctrico**.

Nuevamente aquí la definición la hacemos en términos de la diferencia de potencial eléctrico $V_2 - V_1$.

$$V_2 - V_1 = \frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{\ell}$$

donde q es la carga positiva usada para evaluar el trabajo

Como $\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}$, podemos escribir

$$V_2 - V_1 = V_{12} = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

La unidad de potencial eléctrico es igual a la unidad de trabajo por unidad de carga, en el sistema internacional es Joule/Coulombio (J/C), a la que se le ha dado el nombre de Voltio (V).

A partir de potencial eléctrico, podemos definir una nueva unidad de energía

$$W_{12} = qV_{12}$$

Si un electrón se mueve a través de una diferencia de potencial de un voltio, gana o pierde un electrón-voltio (eV) de energía.

La conversión a las unidades SI la hacemos de la siguiente manera:

$$V_{12} = 1 \text{ V y } q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ VC} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

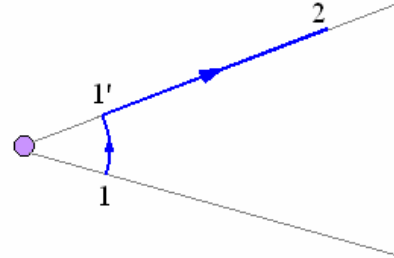
En estudios que implican partículas atómicas tales como electrones y protones, el electronvoltio es una unidad conveniente y muy comúnmente usada. Si el electronvoltio es demasiado pequeño, podemos medir la energía de la partícula en MeV (millones de electrón voltios) o GeV (mil millones de electrón voltios) o **Gigavoltios**.

$$1 \text{ M eV} \equiv 10^6 \text{ eV}$$

$$1 \text{ GeV} \equiv 10^9 \text{ eV}$$

POTENCIAL ELECTRICO PRODUCIDO POR UNA CARGA PUNTUAL.

Consideremos el campo debido a una carga q . Tenemos que encontrar la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 determinados por r_1 y r_2 respectivamente.



La trayectoria más fácil está mostrada en la figura, no

hay trabajo de 1 a 1' ya que \vec{E} y $d\vec{\ell}$ tienen direcciones perpendiculares en cada punto, luego queda solo la trayectoria de 1' a 2.

$$V_2 - V_1 = V_{12} = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

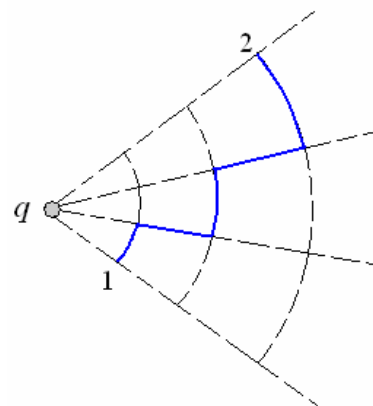
$$\text{Donde: } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad d\vec{\ell} = \hat{r} dr$$

$$\text{Reemplazando } V_2 - V_1 = -\int_1^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr$$

$$V_2 - V_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_1^2$$

$$V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Así como tomamos la trayectoria 1, 1', 2 podríamos haber tomado cualquier trayectoria de 1 a 2 a la que se divide fácilmente en tramos de trayectoria circular y radial como se muestra en la figura siguiente.



$$\text{De la ecuación } V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \text{ que nos da la diferencia de}$$

potencial entre 1 y 2, es conveniente identificar arbitrariamente los términos como

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \text{ y } V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1}.$$

Escribiéndose el caso general de la manera siguiente.

$$V_{(r)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Cantidad que algunas veces se le denomina **potencial absoluto**. Como resultado de esta elección el potencial en el infinito es igual a cero.

POTENCIAL ELECTRICO PRODUCIDO POR UNA DISTRIBUCION DE CARGA

Para calcular el potencial de n cargas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ situadas en $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. El potencial eléctrico en el punto situado en r es igual a la suma de los potenciales producidos por cada una de las cargas.

$$V_{(r)} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|}$$

Cuando la distribución de carga es continua tendremos:

- Distribución volumétrica

$$V_{(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} dV'$$

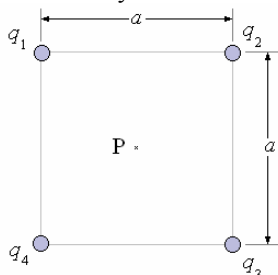
- Distribución superficial

$$V_{(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} dS'$$

- Distribución lineal

$$V_{(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(r')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} dl'$$

Ejemplo 49. En la figura siguiente calcular el potencial eléctrico en el punto P producido por las cargas. Donde: $q_1 = 1 \times 10^{-9} \text{ C}$, $q_2 = 3 \times 10^{-9} \text{ C}$, $q_3 = -2 \times 10^{-9} \text{ C}$, $q_4 = 2 \times 10^{-9} \text{ C}$ y $a = 1 \text{ m}$.



Solución.

El potencial en el punto P es

$$V_{(r)} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|}$$

En este caso es conveniente tomar como origen el punto P de tal manera que $\vec{r} = 0$ y $\left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|$

para los cuatro casos es $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ o sea $\frac{\sqrt{2}}{2}$ metros.

$$\text{Luego } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)}{\sqrt{2}/2}$$

Reemplazando valores

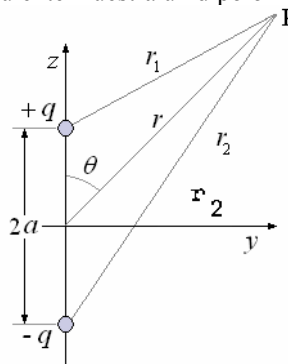
$$V = 9 \times 10^9 \frac{(1 \times 10^{-9} + 3 \times 10^{-9} - 2 \times 10^{-9} + 2 \times 10^{-9})}{\sqrt{2}/2}$$

$$V = 32\sqrt{2} = 45,12 \text{ voltios.}$$

Ejemplo 50. Dipolo eléctrico. El dipolo eléctrico consiste en dos cargas iguales y opuestas q y $-q$ separadas una distancia pequeña $2a$. Queremos encontrar el potencial eléctrico para puntos situados a una distancia r , para el caso de $r \gg a$.

Solución.

La figura siguiente muestra un dipolo



El potencial en el punto P es

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

De la figura vemos

$$r_1 = (r^2 - 2ar \cos \theta + a^2)^{1/2}$$

$$r_2 = r \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$\text{y } \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

Usando la expresión binomial para $n = -1/2$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

$$\text{En nuestro caso } x = -\frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}$$

de allí

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(-\frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 + \dots \right]$$

Expandiendo términos y manteniendo sólo los términos con r^2 y menores en el denominador

ya que $r \gg a$.

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} + \frac{2a \cos \theta}{r^2}$$

Procediendo de igual manera para r_2

$$r_2 = (r^2 + 2ar \cos \theta + a^2)^{1/2}$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} - \frac{2a \cos \theta}{r^2}$$

Sustituyendo $\frac{1}{r_1}$ y $\frac{1}{r_2}$ en V tenemos:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{2a \cos \theta}{r^2} \right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{2a \cos \theta}{r^2} \right) \right]$$

$$= \frac{2aq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

En esta expresión al producto $2aq$ lo llamaremos momento dipolo p .

Luego

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

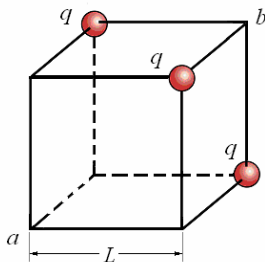
donde la orientación de p es de $-q$ a q para considerarlo vectorialmente, con esto el potencial eléctrico puede expresarse como producto escalar.

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Ejemplo 51. Sean tres cargas puntuales de magnitud q ubicadas en vértices de un cubo de lado L , tal como lo muestra la figura.

Determine:

- El potencial eléctrico en el vértice a producido por las 3 cargas.
- El trabajo externo necesario para desplazar una carga Q del vértice a al vértice b .
- La fuerza eléctrica que ejercen las cargas q sobre la carga Q ubicada en el punto b .
- Estando la carga Q en el vértice b se la deja libre. Las tres cargas q permanecen fijas en los vértices del cubo durante el desplazamiento de Q . ¿Cuál es la energía cinética máxima que adquirirá Q por acción de las tres cargas q ?



Solución.

a)

$$V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(L\sqrt{2})} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(L\sqrt{2})} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(L\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 L}$$

$$b) W = QV_{a \rightarrow b} = Q(V - V_b)$$

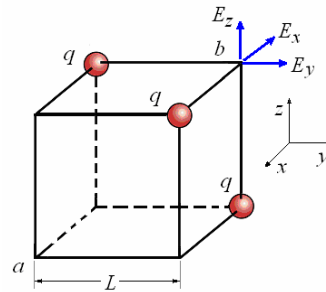
$$V_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 L}$$

Luego:

$$W = Q(V_b - V_a)$$

$$= \frac{3Qq}{4\pi\epsilon_0 L} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3Qq(2 - \sqrt{2})}{8\pi\epsilon_0 L}$$

c)



$$\vec{E}_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\hat{i}}{L^2} + \frac{\hat{j}}{L^2} + \frac{\hat{k}}{L^2} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2} (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

La fuerza sobre la carga Q en el punto b :

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 L^2} (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}), F = \frac{\sqrt{3}Qq}{4\pi\epsilon_0 L^2}$$

d) El potencial del punto con respecto al infinito es:

$$V_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 L}$$

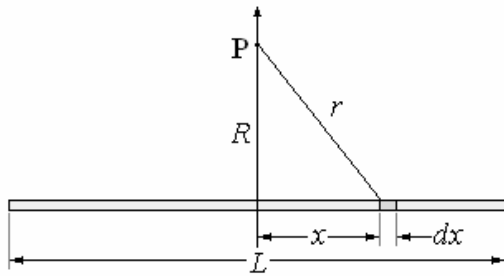
La diferencia de potencial entre el punto b y el infinito es:

$$\Delta V = V_b - V_\infty = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 L}$$

Luego:

$$K_{m\acute{a}x} = Q\Delta V = Q \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 L}$$

Ejemplo 52. Se tiene una línea de longitud L y con densidad de carga lineal λ . Calcular el Potencial eléctrico a una distancia R sobre la línea perpendicular bisectriz.



Solución.

Considerar el elemento dx , el Potencial que produce este elemento en el punto P es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

El potencial de toda la línea es

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$V = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L/2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

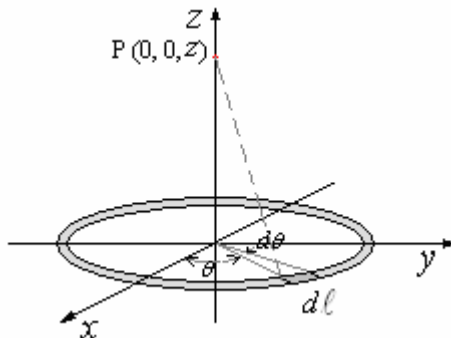
$$V = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log\left(x + \sqrt{R^2 + x^2}\right) \Big|_0^{L/2}$$

$$V = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{\frac{L}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}}{R}\right)$$

Podemos notar en este resultado que para el caso de una línea infinita, es decir para $L = \infty$ el potencial es infinito, esto es porque nosotros para el potencial del elemento diferencial estamos considerando como referencia el infinito con potencial cero y esta línea cargada va hasta el infinito. Luego para una línea infinita tenemos que tomar otro punto como referencia.

Ejemplo 53. Potencial eléctrico en el eje de un anillo de radio R y Carga λ C/m.

Solución.



Consideremos el elemento de anillo $d\ell$ determinado por el ángulo θ y barrido por $d\theta$ de tal manera que $d\ell = R d\theta$.

El potencial eléctrico debido a esta carga en el punto P es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

El potencial debido a todo el anillo es

$$V = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

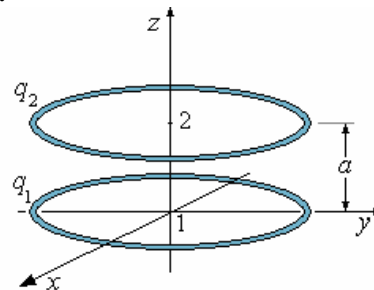
En términos de la Carga total $Q = 2\pi R\lambda$.

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Ejemplo 54. Dos anillos coaxiales uniformemente cargados de radios iguales R está en planos paralelos separados una distancia a , el trabajo que se realiza para traer una carga q del infinito al centro de cada uno de los anillos es respectivamente A_1 y A_2 .

Encontrar las Cargas q_1 y q_2 que tienen los anillos.

Solución.



El potencial en 1:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left[q_1 + \frac{q_2}{(1 + a^2 / R^2)^{3/2}} \right]$$

El potencial en 2:

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left[q_2 + \frac{q_1}{(1 + a^2 / R^2)^{3/2}} \right]$$

El potencial en el infinito $V_\infty = 0$

Trabajo para traer una carga q desde el infinito a 1:

$$A_1 = q(V_1 - V_\infty)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[q_1 + \frac{q_2}{(1 + a^2 / R^2)^{3/2}} \right] \quad (1)$$

Trabajo para traer una carga q desde el infinito a 2:

$$A_2 = q(V_2 - V_\infty)$$

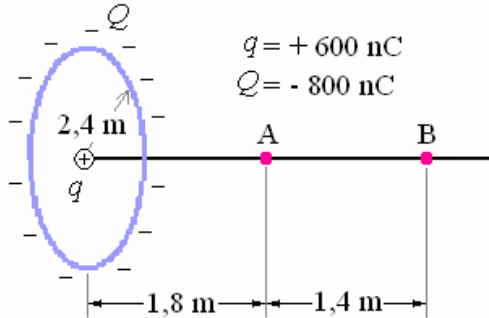
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[q_2 + \frac{q_1}{(1 + a^2/R^2)^{1/2}} \right] \quad (2)$$

(1) y (2) son dos ecuaciones con incógnitas q_1 y q_2 . Resolviendo (1) y (2) obtenemos:

$$q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R A_2}{q} \left[\frac{1}{(1 + a^2/R^2)^{1/2}} - \frac{A_1}{A_2} \right]$$

$$q_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 R A_1}{q} \left[\frac{1}{(1 + a^2/R^2)^{1/2}} - \frac{A_2}{A_1} \right]$$

Ejemplo 55. Una carga $Q = -800$ nC se distribuye uniformemente en un anillo de radio de 2,4 m. Una carga $q = +600$ nC se pone en el centro del anillo. Los puntos A y B están situados en el eje del anillo.



- ¿Cuál es el trabajo hecho por una fuerza externa que transporta un electrón de B a A?
- si el potencial eléctrico es igual a cero en un punto en el eje del anillo. ¿Cuál es la distancia de este punto del centro del anillo?
- Si se un electrón se lanza a lo largo del eje del anillo desde el infinito. El electrón llega y se detiene momentáneamente en un punto en el eje que está a 5,0 m del centro del anillo. ¿Cuál es la velocidad inicial del electrón en el infinito?
- Si una fuerza externa retira la carga q del centro del anillo y la transporta al infinito. ¿Cuál es el trabajo realizado por esta fuerza externa?

Solución.

$$a) W_{B \rightarrow A} = e(V_A - V_B)$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{q}{(1,8)} - \frac{Q}{(1,8^2 + 2,4^2)^{1/2}} \right) - \left(\frac{q}{(3,2)} - \frac{Q}{(3,2^2 + 2,4^2)^{1/2}} \right) \right]$$

$$= -700 \text{ eV}$$

$$b) \frac{q}{x} - \frac{Q}{(x^2 + 2,4^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow x = 2,7 \text{ m}$$

$$c) \frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\left(\frac{q}{(5,0)} - \frac{Q}{(5,0^2 + 2,4^2)^{1/2}} \right) \right)$$

$$\Rightarrow v_0 = 9 \times 10^6 \text{ m/s}$$

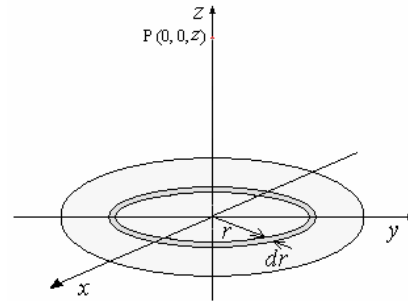
$$d) W_{O \rightarrow \infty} = q(V_\infty - V_O)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{Q}{(2,4)} \right) - \left(-\frac{Q}{(\infty^2 + 2,4^2)^{1/2}} \right) \right]$$

$$= +1,8 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Ejemplo 56. Potencial eléctrico en el eje de un disco de radio R y carga σ C/m².

Solución.



Consideremos el anillo diferencial de radio r y superficie $dS = 2\pi r dr$.

El potencial debido a este anillo en el punto P es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

El potencial debido a todo el disco es

$$V = \frac{\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z^2 + r^2)^{1/2} \Big|_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(z^2 + R^2)^{1/2} - z \right]$$

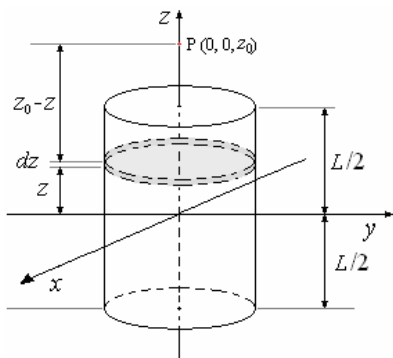
En términos de la Carga total $Q = \pi R^2 \sigma$

$$V = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[(z^2 + R^2)^{1/2} - z \right]$$

En este caso al igual que para la línea infinita, para el plano infinito hay que tomar otro punto de referencia diferente al ∞ .

Ejemplo 57. ¿Cuál es el potencial en el eje producido por un cilindro de radio R , largo L y carga ρ C/m³.

Solución.



Para evaluar el potencial eléctrico en el punto P, tomaremos un disco de ancho diferencial dz , cuyo volumen es $dV = \pi R^2 dz$.

El potencial debido al disco en el punto P es

$$dV = \frac{\rho \pi R^2 dz}{2\pi \epsilon_0 R^2} \left\{ \left[(z_0 - z)^2 + R^2 \right]^{1/2} - (z_0 - z) \right\}$$

El potencial debido al cilindro es

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \left[(z_0 - z)^2 + R^2 \right]^{1/2} - (z_0 - z) \right\} dz$$

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ -\frac{1}{2} (z_0 - z) \left[(z_0 - z)^2 + R^2 \right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. R^2 \log \left[(z_0 - z) + \sqrt{(z_0 - z)^2 + R^2} \right] - z_0 z + \frac{z^2}{2} \right\}_{-L/2}^{L/2}$$

$$V = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \left\{ \left(z_0 + \frac{L}{2} \right) \left[\left(z_0 + \frac{L}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{1/2} - z_0 L - \left(z_0 - \frac{L}{2} \right) \left[\left(z_0 - \frac{L}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{1/2} + R^2 \log \left[\frac{z_0 + \frac{L}{2} + \sqrt{\left(z_0 + \frac{L}{2} \right)^2 + R^2}}{z_0 - \frac{L}{2} + \sqrt{\left(z_0 - \frac{L}{2} \right)^2 + R^2}} \right] \right\}$$

Ejemplo 58. Se tiene una esfera de radio R con carga uniforme de densidad ρ C/m³. Encontrar el potencial para todo punto. Considerar el potencial en el infinito igual a cero.

Solución.

Para $r > R$

Por la ley de Gauss

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

El potencial es

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C_1 = -\int \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} + C_1$$

$$V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C_1$$

Para $r = \infty \Rightarrow V = 0$

de aquí

$$\text{y } V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Para $r = R$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Para $r < R$

Por la ley de Gauss $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$

El potencial es

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C_2$$

$$= -\int \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr + C_2 = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C_2$$

Como para $r = R$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

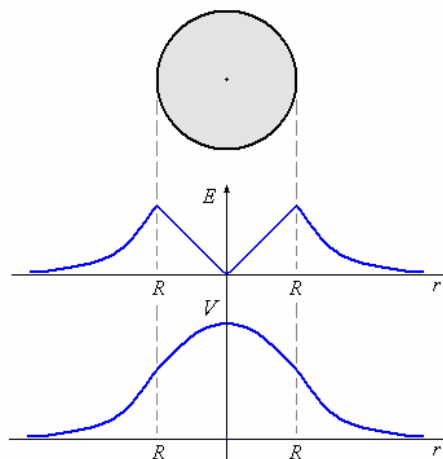
$$\frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

$$\text{y } V = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

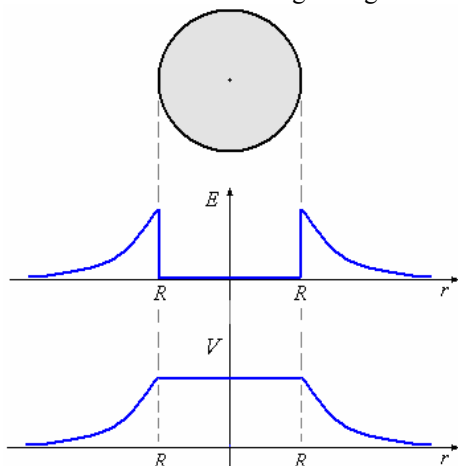
$$\Rightarrow V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

La figura siguiente muestra la distribución de campo eléctrico y potencial eléctrico en el caso visto.



Ejemplo 59. Como una variante veamos el caso de una esfera conductora.

La carga se encuentra en la superficie y el campo eléctrico en el interior es cero y por lo tanto el potencial es constante, igual al de la superficie. Lo mismo sucede cuando la esfera es hueca estos dos últimos casos se muestra en la figura siguiente



Ejemplo 60. Las superficies interior ($r = a$) y exterior ($r = b$) de un cascarón esférico no conductor tienen la misma densidad de carga σ . La densidad de carga en el resto del espacio es nula.

- Encuentre el campo eléctrico en las zonas $r < a$, $a < r < b$, y $r > b$.
- Calcule el potencial electrostático en cada una de las regiones mencionadas.

Solución.

a) Para $r < a$ $\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$, donde $E(r) = 0$,

$$\text{Para } a < r < b \quad E(r) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2};$$

$$\text{Para } r > b \quad E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 r^2} (a^2 + b^2),$$

$$\text{b) Para } r > b \quad V(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 r} (a^2 + b^2);$$

$$\text{Para } a < r < b \quad V(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 r} (a^2 + br) \text{ y}$$

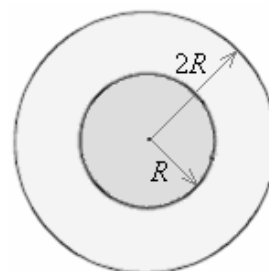
$$\text{Para } r < a \quad V(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (a + b).$$

Ejemplo 61. Se tiene una esfera aisladora con densidad de carga variable de la forma

$\rho = (\rho_0/r^2)e^{-r}$ y radio R limitada exteriormente por una esfera conductora de radio interior R y exterior $2R$. En la esfera conductora hay una carga neta tal que el potencial exterior ($r > 2R$) es constante. Determine:

- La carga total en la esfera aisladora.
- el campo eléctrico en el exterior ($r > 2R$).
- a diferencia de potencial entre $r = 3R/2$ (esfera conductora) y el centro de la esfera aisladora (considere $V = 0$ en $r = \infty$).

d) la densidad de carga en la superficie exterior de la esfera conductora.



Solución.

a) La carga total en una región del espacio donde hay una densidad de carga ρ está dada por la integral:

$$q = \int_V \rho dV$$

En este caso, donde la simetría es esférica, la expresión toma la forma:

$$q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho_0 \frac{e^{-r}}{r^2} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi =$$

$$4\pi\rho_0 \int_0^R e^{-r} dr = 4\pi\rho_0 (1 - e^{-R})$$

b) Dado que el potencial en esa región es constante y

que $\vec{E} = -\nabla V$, entonces $\vec{E}_{ext} = 0$.

c) Obsérvese que las condiciones del problema dicen que para $r > 2R$, $V = \text{Cte}$. Igual cosa ocurre en el conductor, donde el campo eléctrico es nulo. Si consideramos que $\phi = 0$ en el infinito, entonces, en el resto del espacio, incluido el conductor, $V = 0$, de este modo, la diferencia de potencial entre $r = 3R/2$ y el centro de la esfera estará dado por:

$$V = V_{r=0} - V_{r=3R/2} = V_{r=0} - V_{r=R} = V_{r=0}$$

$$\text{es decir, } V = -\int_\infty^0 E(r) dr = -\int_R^0 E(r) dr$$

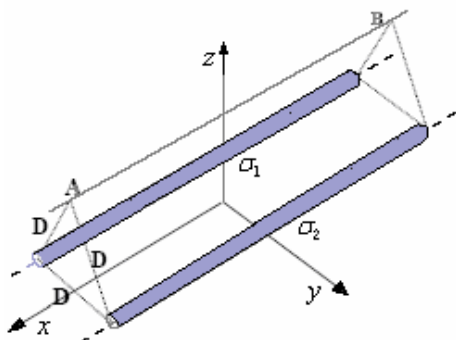
Para evaluar esta integral es necesario determinar $E(r)$ en la esfera aisladora, lo que se realiza utilizando la Ley de Gauss. Dado que $E(r)$ es radial, podemos escribir directamente:

$$E = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ donde } q(r) = 4\pi\rho_0 (1 - e^{-r}). \text{ Así}$$

$$V = -\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_R^0 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-r}}{r^2} \right) dr = \infty$$

d) Dado que el campo eléctrico exterior a la esfera conductora es nulo, la carga total, comprendiendo la esfera interior y la conductora debe ser nula. Además, para que el campo eléctrico en el conductor también sea nulo, la carga encerrada por cualquier superficie gaussiana en su interior debe ser nula, es decir, en la superficie interior del conductor debe haber una carga de igual magnitud a la de la esfera aisladora, con distinto signo, las que sumadas se anulan. En consecuencia, en la superficie exterior del conductor no hay carga, es decir, $\sigma = 0$.

Ejemplo 62. En la figura se ha representado parte de 2 cilindros muy largos, cada uno de radio r_0 , que tienen en su superficie densidades de carga constantes $\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_2 = -\sigma$ respectivamente. (No hay carga en el interior de los cilindros).



- a) Encuentre el campo eléctrico sobre la línea AB, que equidista de los cilindros en una distancia igual a la separación entre ellos (D).
- b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los centros de los cilindros?
- c) Calcule el potencial en un punto sobre la línea AB.

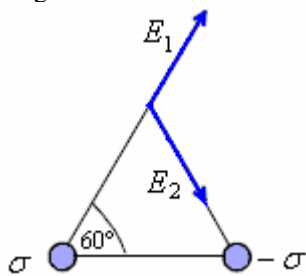
Solución.

a) Utilizando una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y largo L concéntrica con un cilindro cargado, de similares características que los propuestos en este problema, por la ley de gauss, se obtiene la expresión:

$$E 2\pi r L = \frac{2\pi r_0 L \sigma}{\epsilon_0} \text{ de donde } E = \frac{\sigma r_0}{\epsilon_0}, \text{ forma}$$

general para el campo eléctrico para tales distribuciones de carga.

Si los cilindros se observan en corte y se dibujan allí los campos eléctricos generados por cada cilindro se observaría lo siguiente:



donde $|E_1| = |E_2| = \frac{\sigma r_0}{\epsilon_0 D}$, con lo cual, la suma

resulta ser un vector en la dirección horizontal cuyo valor es la superposición de las proyecciones de E_1 y E_2 : en esa dirección

$$\vec{E} = 2 \frac{\sigma r_0}{\epsilon_0 D} \cos 60^\circ$$

- b) Para contestar esta pregunta es necesario considerar que el campo eléctrico en el interior de los cilindros es nulo, como se deduce directamente con la ley de Gauss. Ello nos dice que allí V es constante. De este modo, la diferencia de potencial entre los centros de los cilindros corresponde la diferencia de potencial entre sus mantos.

Eligiendo como trayectoria de integración una recta paralela al eje y , que pasa por los centros de los cilindros, se tiene:

$$V = \int_{y_1}^{y_2} E dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sigma r_0}{\epsilon_0 \left(y + \frac{D}{2}\right)} dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sigma r_0}{\epsilon_0 \left(\frac{D}{2} - y\right)} dy \text{ con}$$

$$y_2 = \frac{D}{2} - r_0 \text{ e } y_1 = -\left(\frac{D}{2} - r_0\right)$$

Donde $\frac{\sigma r_0}{\epsilon_0 \left(y + \frac{D}{2}\right)}$ y $\frac{\sigma r_0}{\epsilon_0 \left(\frac{D}{2} - y\right)}$ son las

magnitudes de los campos generados por los cilindros con centros en $y = -D/2$ e $y = +D/2$ respectivamente. Resolviendo estas integrales se llega a

$$V = \frac{2\sigma r_0}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{D - r_0}{r_0}\right)$$

- c) El potencial eléctrico en general se puede calcular sumando los potenciales originados desde diversas fuentes. Utilizando esta idea, para responder a esta pregunta, basta con calcular el potencial de una de las distribuciones de carga, ya que la otra es similar, salvo el signo. (Además deben compatibilizarse los orígenes del potencial).

Considerando un cilindro con densidad de carga σ , el campo eléctrico es $\vec{E} = \frac{\sigma r_0}{\epsilon_0} \hat{r}$, siendo r la distancia

entre el centro de la distribución (cilindro) y el punto en que calculamos el potencial.

Al calcular la integral de línea, eligiendo como trayectoria de integración una recta radial y una curva sobre el manto, como esta última no contribuye al

potencial, se tiene: $V^+ = \frac{\sigma r_0}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{D}{r_0}\right)$ y, para la

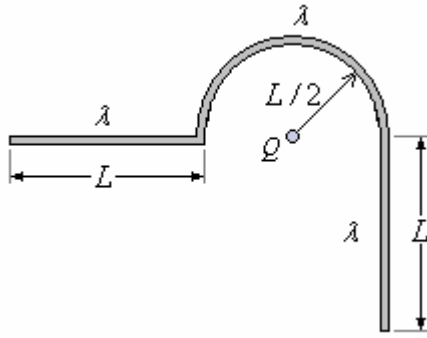
otra distribución, $V^- = -\frac{\sigma r_0}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{D}{r_0}\right)$, con lo cual

$V_{AB} = 0$. En este caso se ha elegido el origen de $V_{(r_0)}$ en un punto equidistante de los cilindros (es arbitrario). Obsérvese que este resultado depende obviamente del origen de los potenciales y por lo tanto, su respuesta puede ser otra

Ejemplo 63. Tres trozos de hilo cargado con densidad de carga λ se disponen como se indica en la figura.

- a) Determine el campo eléctrico total sobre la carga Q .
- b) Calcule la fuerza que ejerce Q sobre cada uno de los trozos de hilo.

c) Determine la energía potencial de la carga Q (origen en ∞).



Solución.

a) Para resolver este problema es conveniente dividirlo en tres, uno para cada distribución. Calculamos primero el campo eléctrico de la distribución lineal de la izquierda: Si ponemos un eje x conteniendo a este trozo, con el origen en Q se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_{x1} \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-3L/2}^{-L/2} \frac{\lambda dx'}{(x')^2} \hat{i} \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x'} \Big|_{-3L/2}^{-L/2} \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{L} - \frac{2}{3L} \right) \hat{i} \\ &= \frac{\lambda}{3\pi\epsilon_0 L} \hat{i}\end{aligned}$$

Si llamamos E_2 al campo generado por la semicircunferencia, por simetría, éste debe apuntar hacia abajo (eje $-y$), luego, la única componente que, luego de integrar es diferente de cero, está dada por

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{|r-r'|^{3/2}} (y-y')$$

en nuestro caso $|r-r'| = L/2$, $y=0$,

$y' = (L/2)\sin\theta$ con θ medido desde el eje x . A su vez $dl = (L/2)d\theta$. Reemplazando estos valores en la integral se tiene.

$$\begin{aligned}dE_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \left(\frac{L}{2}\right) d\theta}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} \left(-\frac{L}{2} \sin\theta\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{\left(\frac{L}{2}\right)} \sin\theta d\theta\end{aligned}$$

Integrando entre 0 y π se tiene

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\lambda}{L} \hat{j}$$

Para el tercer segmento operamos en forma similar. En este caso

$$\vec{r} = 0, \vec{r}' = \left(\frac{L}{2}\right) \hat{i} + y' \hat{j}, dq = \lambda dy', x' = \frac{L}{2}$$

con lo que

$$\begin{aligned}dE_{\delta,x} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(L/2)dy'}{\left[\left(L/2\right)^2 + y'^2\right]^{3/2}} \\ dE_{\delta,y} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y' dy'}{\left[\left(L/2\right)^2 + y'^2\right]^{3/2}}\end{aligned}$$

Integrando en y' ambas expresiones entre 0 y $-L$ encontramos:

$$E_{3x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda(\sqrt{5}-5)}{5L} \quad \text{y} \quad E_{3y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\sqrt{5}\lambda}{5L}$$

$$\text{De donde } \vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2\lambda(\sqrt{5}-5)}{5L} \hat{i} + \frac{4\sqrt{5}\lambda}{5L} \hat{j} \right]$$

Obviamente $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

b) Para responder a esta pregunta, basta con calcular la fuerza que realiza cada una de los trozos de hilo sobre Q , así, la fuerza que ejerce Q sobre el hilo estará determinada por el principio de acción y reacción, es decir, las respuestas a la pregunta son: Caso 1 $F_1 = -E_1 Q$; Caso 2 $F_2 = -E_2 Q$; Caso 3 $F_3 = E_3 Q$

c) Como son distribuciones finitas, podemos utilizar la expresión deducida para ese fin a partir del potencial de una carga puntual respecto de infinito

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|r-r'|}$$

En el primer caso tendremos

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-3L/2}^{-L/2} \frac{\lambda dx'}{|x'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-3L/2}^{-L/2} \frac{\lambda dx'}{x'}$$

cambio de signo es debido a que el dominio de integración.

Comprende sólo valores de $x < 0$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Del mismo modo,

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\lambda \left(\frac{L}{2}\right) d\theta}{\frac{L}{2}} = \frac{\lambda}{4\epsilon_0}$$

y finalmente

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{-L} \frac{\lambda dy'}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (y')^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(-2 + \sqrt{5})$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \pi + \ln(-2 + \sqrt{5}) \right]$$

Ejemplo 64. Dos cáscaras cilíndricas conductoras largas son coaxiales y tienen radios de 20 mm y de 80 mm. El potencial eléctrico del conductor interno, con respecto al conductor externo, es + 600 V.

a) (1 punto) Se lanza un electrón desde el reposo en la superficie del conductor externo. Encuentre la velocidad del electrón cuando alcanza al conductor interno.

b) (1 punto) ¿Cuál es a magnitud máxima del campo eléctrico entre los cilindros?

c) (1 punto) Si un electrón está en movimiento circular alrededor del cilindro interno en una órbita de radio 30 mm. ¿Cuál es a velocidad del electrón?

d) (1 punto) Se lanza un electrón radialmente hacia afuera de un punto entre las cáscaras en las cuales el potencial eléctrico es + 350 V con respecto al conductor externo. La energía cinética inicial del electrón es 150 eV. ¿Cuál es a energía cinética del electrón, cuando alcanza cualquiera de las cáscaras?

Solución.

a) $q_e \Delta V = \frac{1}{2} m_e v_f^2 \Rightarrow$

$$v_f = \sqrt{\frac{2q_e \Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(1,6 \times 10^{-19})(600)}{9,1 \times 10^{-31}}}$$

$$= 1,45 \times 10^7 \text{ m/s}$$

b) Si consideramos que el conductor externo tiene $V_{R_2} = 0$ y el conductor interno $V_{R_1} = 600\text{V}$ El potencial entre los conductores es

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} + C = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

Cuando $r = R_2$, $V_{R_2} = 0$ y

$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R_1 + C \Rightarrow C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R_1$$

Cuando $r = R_1$, $V_{R_1} = 600\text{V}$ y

$$\Rightarrow 600 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln R_1 - \ln R_2)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 4 = \frac{1,39\lambda}{2\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = \frac{600}{1,39} = 432,8$$

El campo entre los conductores es

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{432,8}{r}$$

El campo máximo se obtiene con el menor r .

$$E_{\text{máx}} = \frac{432,8}{20 \times 10^{-3}} = 21640 \text{ V/m}$$

c) $q_e E = m_e \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{q_e E r}{m_e}}$

$$q_e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}, m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg},$$

$$r = 30\text{mm}, E = \frac{432,8}{r} = \frac{432,8}{0,03} = 14426,7 \text{ V/m}$$

$$v = \sqrt{\frac{(1,6 \times 10^{-19}) \left(\frac{432,8}{0,03} \right) (0,03)}{9,1 \times 10^{-31}}}$$

$$= 8,72 \times 10^6 \text{ m/s}$$

d) Se lanza un electrón radialmente hacia fuera desde el punto 1 al punto 2

El punto 1 esta a + 350 V, el punto 2 en la cáscara exterior a 0 V.

$$W_{1 \rightarrow 2} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow -e(0 - 350\text{V}) = K_2 - 150\text{eV}$$

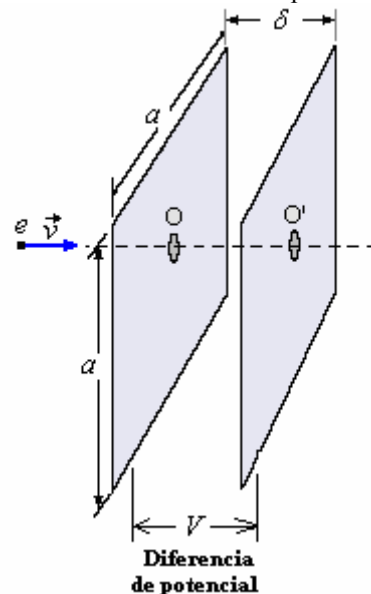
$$\Rightarrow K_2 = 350\text{eV} + 150\text{eV} = 500\text{eV}$$

Ejemplo 65. Un electrón e (carga $-e$) incide con velocidad v a un pequeño agujero practicado en el centro de dos placas cuadradas planas de lado a . (En sus cálculos utilice la aproximación de placas infinitas).

a) Encuentre la expresión que da cuenta de la densidad de carga en las placas cuando entre ellas hay una diferencia de potencial V (inicialmente las placas están descargadas).

b) ¿Cuál debe ser la diferencia de potencial V para que el electrón llegue con velocidad $v/2$ al agujero O' ?

c) En las condiciones dadas en b). ¿Qué fuerza ejerce el electrón contra la placa positiva cuando ha recorrido una distancia $\delta/2$ entre las placas?



Solución.

a) Si inicialmente las placas tienen carga nula, al conectarlas a la diferencia de potencial V , cada una de ellas adquiere cargas de igual magnitud y distinto signo. Dichas cargas deben ser tales que generen un

campo eléctrico tal que $V = \int_{Placa1}^{Placa2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ integral que, al ser $E = cte$, vale $V = E\delta$. Por otro lado, cada placa produce un campo $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, (Gauss) y, por lo

tanto, el campo total entre las placas resulta ser

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \text{ con lo cual } \sigma = \frac{\epsilon_0}{\delta} V.$$

b) La energía total del electrón antes de ingresar a O es $\frac{1}{2}m_0v^2$ y si llega a O' con $v_{O'} = \frac{v}{2}$, usando el teorema de conservación de la energía podemos

$$\text{escribir en O', } eV + \frac{1}{2}m_0\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_0v^2. \text{ A}$$

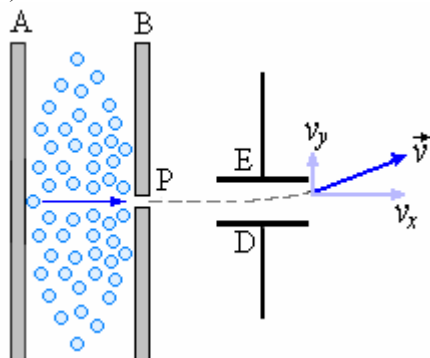
$$\text{partir de esta expresión, } V = \frac{3}{8e}mv^2.$$

c) La fuerza que ejercen las placas sobre el electrón en cualquier punto interior a las placas es $\vec{F} = e\vec{E}$

cuya magnitud es $F = \frac{e\sigma}{\epsilon_0}$ dirigida hacia la placa

positiva. Por el principio de acción y reacción, la fuerza que ejerce el electrón sobre las placas es igual, pero con sentido contrario a la anterior.

Ejemplo 66. Sea un gas de átomos neutros entre dos placas a $\Delta V_1 = V_A - V_B$, la separación es tal que el campo eléctrico entre ellas es uniforme. Cuando un átomo de masa m choca con A queda inicialmente en reposo y pierde una carga $-e$ (la carga de un electrón).



a) Determine ΔV_1 cuando el átomo que chocó con A pasa con una velocidad en P igual a v_0 (suponga que el agujero en P es pequeño y no afecta la forma del campo)

b) ¿Cual placa, A ó B, estaría a mayor potencial? ,
¿Cuál placa cargada negativamente?

c) Luego el átomo pasa por condensador C_0 de placas paralelas con cargas iguales pero de signo opuesto entre E y D. Determine el valor las cargas en E y D cuando $\Delta V_2 = V_E - V_D$ es responsable de la desviación mostrada.

d) ¿Es posible que el átomo no sufra desviación alguna entre E y D? ¿Una desviación en sentido opuesto?

Solución.

$$\text{a) } e\Delta V_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2e\Delta V_1}{m}}$$

b) Como el átomo tiene carga positiva la placa A es positiva y la placa B es negativa, por lo tanto A está a mayor potencial que B.

$$\text{c) } Q = C_0\Delta V_2$$

d) Si es posible que el átomo no sufra desviación alguna entre E y D

$$mg = eE$$

También es posible, invirtiendo las cargas de las placas.

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

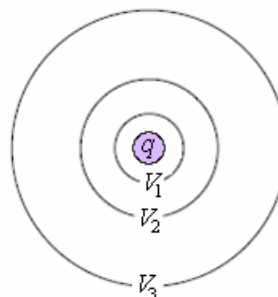
Como hemos podido observar, el potencial es solamente función de las coordenadas de posición, de tal manera que un potencial constante define una superficie equipotencial. En esta superficie no se realiza trabajo al mover una carga de prueba sobre ella, el campo eléctrico es perpendicular a estas superficies.

Los equipotenciales son perpendiculares a las líneas de fuerza, un campo eléctrico puede representarse también por medio de las equipotenciales.

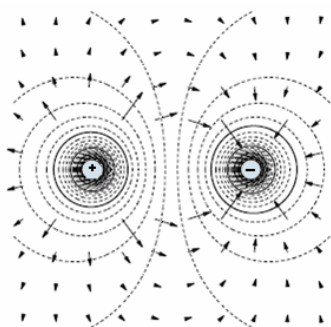
Las equipotenciales de una carga puntual están dadas

$$\text{por } r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 V}, \text{ las que se muestran en la figura}$$

siguiente.

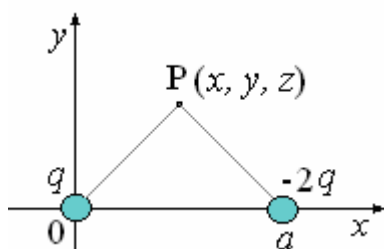


A continuación se muestra las líneas equipotenciales producidas por dos cargas iguales y opuestas.



Ejemplo 61. Se tiene dos cargas puntuales q y $-2q$ situadas en los puntos $(0,0,0)$ y $(a,0,0)$, respectivamente, encontrar la superficie equipotencial.

Solución.



El potencial en el punto $P(x, y, z)$ es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}$$

Cuando $V = 0$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

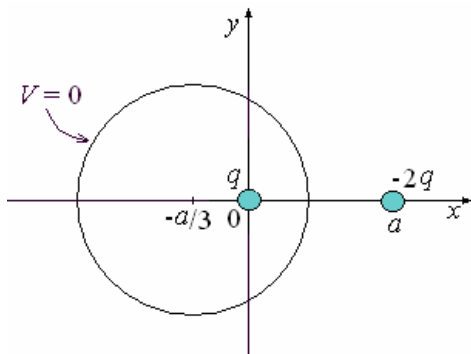
$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x^2 + \frac{2}{3}ax + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{3}$$

Sumando a ambos miembros $a^2/9$:

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{9}a^2$$

Ecuación de la superficie equipotencial que corresponde a una esfera con centro en $-a/3, 0$ y radio $R = 2a/3$, la figura siguiente muestra la superficie equipotencial $V = 0$.



CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DEL POTENCIAL.

Como las fuerzas están dadas por el campo eléctrico \vec{E} , ésta puede obtenerse inversamente a partir del potencial V . Consideremos dos puntos orientados con el eje x uno en x y el otro en $x + \Delta x$, la diferencia de potencial entre estos dos puntos es ΔV .

$$\Delta V = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

Por definición, escribimos en función de la derivada parcial

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x$$

(Derivada parcial: Es la derivada de una función de dos o más variables con respecto a una de ellas, considerando en el desarrollo a las demás como constantes).

Simultáneamente en la misma trayectoria

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E_x \Delta x$$

Fácilmente podemos deducir que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Similarmente, podemos hacer a lo largo de los ejes y e z .

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \text{ y } E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

El Campo resultante es la suma vectorial de sus componentes:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) \end{aligned}$$

$$\text{o } \vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) V$$

En notación abreviada

$$\vec{E} = -\nabla V$$

donde el operador ∇ llamado nábla es

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Ejemplo 67. Responda los casos siguientes justificando cada respuesta.

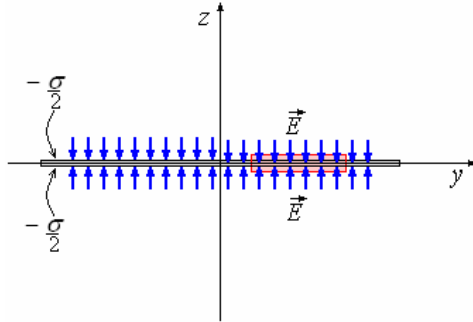
- Un plano cargado con densidad de carga $-\sigma$ se coloca en el plano xy ($z = 0$). Halle el campo eléctrico en todo el espacio por medio de la ley de Gauss.
- Usando el principio de superposición y el resultado en a), halle el campo eléctrico en todo el espacio cuando añadimos un segundo plano infinito con densidad de carga $+2\sigma$ paralelo, en $z = 2$.
- Usando la definición, evalúe la diferencia de potencial $V(x_1) - V(x_2)$ entre $x_1 = -3$ y $x_2 = 1, 5$.

d) Se coloca un tercer plano infinito descargado en $z = 3$ y se une al plano en $z = 0$ con un alambre conductor muy delgado, puede suponer que lo hace atravesando el plano $z = 2$ por un agujero muy pequeño, de manera de no afecta la geometría del sistema.

Calcule la diferencia de potencial pedida en c).

Solución.

a)



Sea la superficie gaussiana de área A

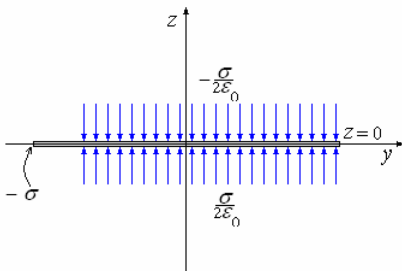
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 2EA = \frac{-\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

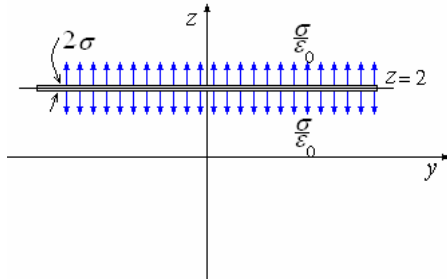
Para $z > 0$ $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$

Para $z < 0$ $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$

b) El campo producido por el plano en $z = 0$:



El campo producido por el plano en $z = 2$:



Para $z > 2$:

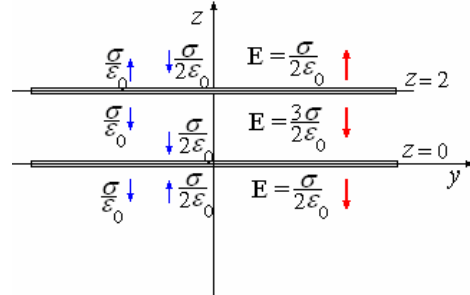
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

Para $0 < z < 2$:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} = -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

Para $z < 0$:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$



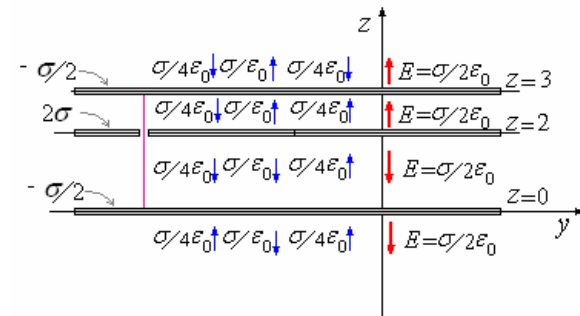
c) La diferencia de potencial $V(x_1) - V(x_2)$ entre $x_1 = -3$ y $x_2 = 1, 5$.

$$\begin{aligned} \Delta V_1 = V_{(-3)} - V_{(0)} &= \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \right) \cdot [0 - (-3\hat{k})] \\ &= -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2 = V_{(0)} - V_{(1,5)} &= \left(-\frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \right) \cdot [1,5\hat{k} - 0] \\ &= -\frac{4,5\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{4,5\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{7,5\sigma}{2\epsilon_0}$$

d) Con el tercer plano infinito descargado en $z = 3$, el campo eléctrico queda distribuido como se muestra a continuación.



La diferencia de potencial $V(x_1) - V(x_2)$ entre $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$.

Tomando en cuenta la nueva disposición:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 = V_{(-3)} - V_{(0)} &= \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \right) \cdot [0 - (-3\hat{k})] \\ &= -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\Delta V_2 = V_{(0)} - V_{(1,5)} = \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} \right) \cdot [1,5\hat{k} - 0]$$

$$= -\frac{1,5\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{1,5\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{3\sigma}{\epsilon_0}$$

Ejemplo 68. Encontrar el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico a partir del potencial.

Solución.

El potencial del dipolo es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

El Campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Para este caso es conveniente trabajar con coordenadas esféricas,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

y

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

En esta ecuación el último término vale cero ya que no existe variación de potencial respecto a ϕ , entonces:

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$$

Ejemplo 69. Encontrar el campo eléctrico en el eje de un anillo de radio R y con carga Q , a partir del potencial.

Solución.

$$\text{Para el anillo } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{1/2}}$$

El Campo eléctrico es $\vec{E} = -\nabla V$

$$E_x = 0, E_y = 0 \text{ y}$$

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\text{Finalmente: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Ejemplo 70. Encontrar el Campo eléctrico en el eje de un disco de radio R y con carga Q a partir del potencial.

Solución.

Para el disco

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[(z^2 + R^2)^{1/2} - 1 \right]$$

El Campo eléctrico es $\vec{E} = -\nabla V$

$$E_x = 0, E_y = 0$$

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[(z^2 + R^2)^{1/2} - 1 \right]$$

$$= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\frac{1}{2} (z^2 + R^2)^{-1/2} 2z - 1 \right]$$

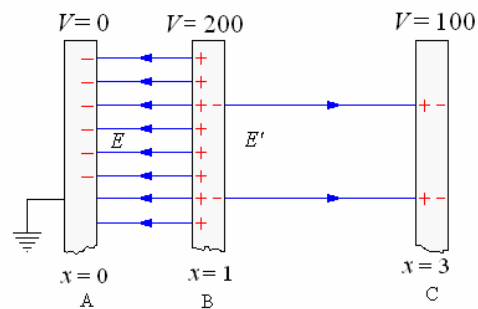
$$= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

$$\text{y } \vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{k}$$

Ejemplo 71. Perpendicular al eje x hay tres placas delgadas de metal, A en $x = 0$, B en $x = 1$ m, y C en $x = 3$ m. A se mantiene conectado a tierra, B tiene un potencial de 200 voltios, y C tiene un potencial de 100 voltios.

a) Encuentre el campo eléctrico entre A y B y entre B y C.

b) Encuentre la densidad de la carga en cada placa.



Solución.

a) Los campos se asumen uniformes.

A la izquierda (entre A y B).

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{200}{1} = -200 \text{ V/m.}$$

A la derecha (entre B y C).

$$E' = -\frac{(-100)}{2} = +50 \text{ V/m}$$

b) Teniendo en cuenta que $\sigma = \epsilon_0 E_n$, vemos que

$$\sigma_A = -200 \epsilon_0 \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_C = -50 \epsilon_0 \text{ C/m}^2$$

La placa B tiene una densidad de carga de $+200 \epsilon_0 \text{ C/m}^2$ a su izquierda y de $- 50 \epsilon_0 \text{ C/m}^2$ a su derecha, o una densidad de carga neta $\sigma_B = + 150 \epsilon_0 \text{ C/m}^2$.

CAPACIDAD - ENERGÍA ELECTROSTÁTICA INTRODUCCIÓN. -

De lo visto anteriormente el potencial (tomado relativo a un potencial cero en el infinito) de un cuerpo conductor con carga Q es proporcional al valor de dicha Carga Q . O la carga total Q en el conductor aislado es directamente proporcional al potencial del conductor, es decir

$$Q = CV$$

Donde C es una constante que depende de la forma del cuerpo, mas no de Q o V .

Esta constante C es una característica de un cuerpo al lado y se la denomina **Capacidad**.

$$C = \frac{Q}{V}$$

En el sistema internacional su unidad es el coulombio/voltio, al que se le denomina **faradio**, cuya abreviatura es F , en la práctica la capacidad de un faradio es muy grande, por eso se usan los submúltiplos

microfaradio $(\mu F) = 10^{-6} F$

picofaradio $(pF) = 10^{-12} F$

A manera de ejemplo calculamos la capacidad de una esfera conductora aislada de radio R . El potencial de

un conductor esférico con carga Q es $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$

y su capacidad $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$

EL CONDENSADOR

Los sistemas que se encuentran en la práctica no están referidos al infinito, consisten en dos conductores con cargas iguales y de signo opuesto, esto se consigue llevando la carga de un conductor al otro de tal manera que si este tiene una carga Q el primero habrá quedado con Carga $-Q$. A este sistema se le conoce como **condensador**.

La relación que existe entre la carga Q y la diferencia de potencial $\Delta V = V_1 - V_2$, es

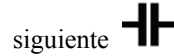
$Q = C\Delta V$, donde a capacidad C depende solamente de la geometría del Condensador.

Para calcular la capacidad C de un condensador es recomendable seguirlos siguientes pasos:

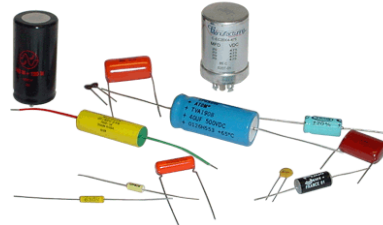
- a) Dados los dos conductores situar una carga $+ Q$ en uno de ellos y una carga $- Q$ en el otro.
- b) Determinar el campo eléctrico entre los conductores.
- c) Determinar la diferencia de potencial entre los conductores

d) Finalmente, $C = \frac{Q}{V}$

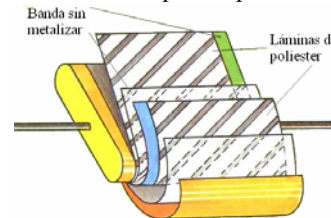
Los condensadores se representan por medio de dos líneas paralelas iguales, como se ilustra n la figura



siguiente. La figura a continuación muestra diferentes condensadores comerciales.



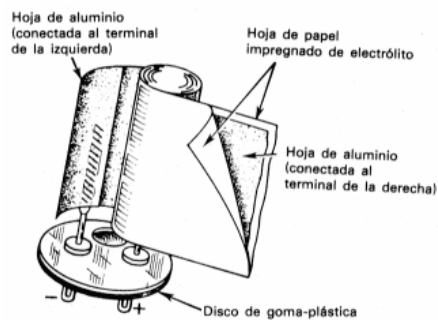
La figura siguiente muestra como esta formado un condensador moderno de placas paralelas



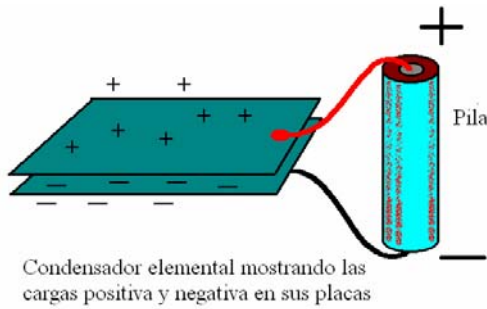
El condensador electrolítico.



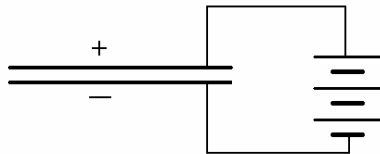
Esquema de condensador electrolítico.



Como se carga un condensador



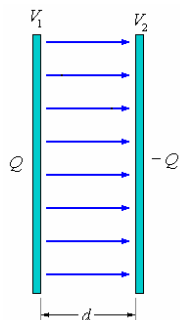
Condensador elemental mostrando las cargas positiva y negativa en sus placas
Representación esquemática del circuito anterior.



Representación esquemática de un condensador y batería

Ejemplo 72. El condensador de placas paralelas. Este Condensador consiste en dos placas paralelas de área A y separadas una distancia d (d es muy pequeña comparada con A).

Solución.



Ponemos la Carga Q y $-Q$ como se muestra en la figura.
El campo eléctrico que se forma entre las placas es:
 $E = \sigma/\epsilon_0$, siendo $\sigma = Q/A$, tenemos:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Como $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

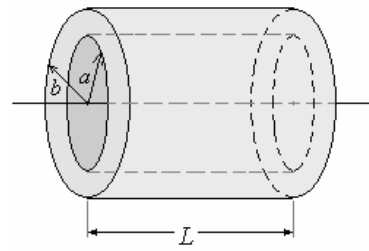
La diferencia de potencial entre las placas es:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 E dx = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d$$

Finalmente la capacidad, es

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Ejemplo 73. El condensador cilíndrico. Este Condensador cilíndrico en dos conductores cilíndricos concéntricos de radios a y b con longitud L , siendo esta longitud mucho mayor a fin de poder despreciar las irregularidades de los extremos.



Solución.

Pongamos cargas Q y $-Q$ a los cascarones de radios a y b respectivamente.
Aplicando la ley de Gauss encontrar que el Campo eléctrico entre ellos es

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \text{ donde } \lambda = \frac{Q}{L}$$

De aquí $E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}$

Como $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

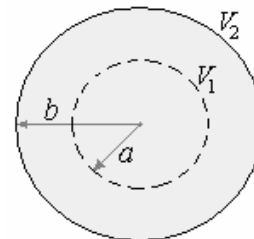
$$V_1 - V_2 = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$$

Finalmente la capacidad es

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$$

Ejemplo 74. El condensador esférico. Este Condensador consiste en dos cáscaras esféricas conductoras y aisladas con radios a y b .

Solución.



Pongamos cargas Q y $-Q$ a los cascarones esféricos de radios a y b respectivamente.
Aplicando la ley de Gauss encontramos el campo eléctrico entre ellos

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Como $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

La diferencia de potencial entre los cascarones es

$$V_1 - V_2 = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(b-a)}{ab}$$

Finalmente la capacidad es

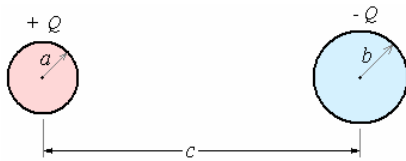
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}$$

Cuando $b \rightarrow \infty$, la capacidad tiende a

$C = 4\pi\epsilon_0 a$, que es la capacidad del conductor esférico aislado.

Ejemplo 75. Encontrar la capacidad entre dos esferas conductoras de radios a y b separadas una distancia c , siendo c mucho mayor que a y b .

Solución.



Pongamos cargas Q y $-Q$ a las esferas de radios a y b respectivamente.

El potencial V_1 sobre la esfera de radio a es el potencial debido a su carga Q mas el potencial debido a la carga $-Q$, tomada como puntual ya que $c \gg b$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{(-Q)}{4\pi\epsilon_0 c}$$

De1 mismo modo el potencial V_2 sobre la esfera de radio b

$$V_2 = \frac{(-Q)}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c}$$

La diferencia de potencial entre las esferas es

$$V_1 - V_2 = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 c} \right) - \left(\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \right)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c} \right)$$

La capacidad del sistema es:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c} \right)}$$

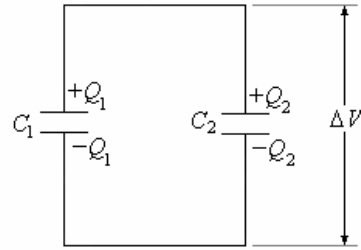
COMBINACIONES DE CONDENSADORES

Generalmente los condensadores se encuentran combinados en los circuitos eléctricos.

Los condensadores pueden combinarse de dos formas en paralelo o en serie.

A continuación encontraremos la capacidad equivalente de diferentes combinaciones.

CONDENSADORES EN PARALELO. La figura siguiente muestra una combinación en paralelo de los condensadores de capacidades C_1 y C_2



En este caso la diferencia de potencial es igual a ΔV para los dos condensadores.

El Condensador C_1 almacena una carga Q_1

$$Q_1 = C_1 \Delta V$$

El Condensador C_2 almacena una carga Q_2

$$Q_2 = C_2 \Delta V$$

La carga total almacenada es

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = (C_1 + C_2) \Delta V$$

Como le Capacidad es $\frac{Q}{\Delta V}$

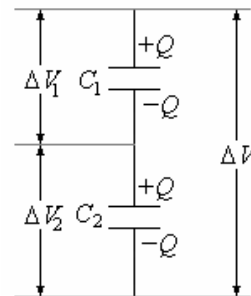
La capacidad equivalente es

$$C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

Si fueran n condensadores en paralelo la capacidad equivalente sería

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

CONDENSADORES EN SERIE. La figura siguiente muestra una combinación en serie de los condensadores de capacidades C_1 y C_2 .



La diferencia de potencial entre los extremos es ΔV , de tal manera que la diferencia de potencial en el condensador C_1 es ΔV_1 y la diferencia de potencial en el Condensador C_2 es ΔV_2 y $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$.

Si los dos Condensadores se conectan y luego se cargan, por la conservación de carga se requiere que cada condensador tome la misma carga Q , de tal manera que

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}, \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2} \text{ y } \Delta V = \frac{Q}{C}$$

$$\text{Luego } \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

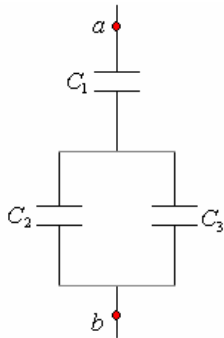
Simplificando Q : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Finalmente $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Si fueran n condensadores en serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Ejemplo 76. En la figura siguiente encontrar la capacidad equivalente entre a y b . Donde $C_1 = 2 \mu F$, $C_2 = 1 \mu F$ y $C_3 = 3 \mu F$.

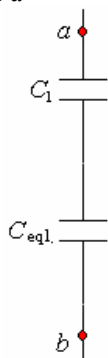


Solución.

Primero tenemos que encontrar el equivalente de los condensadores C_2 y C_3

$$C_{eq1} = C_2 + C_3 = 1 \mu F + 3 \mu F = 4 \mu F$$

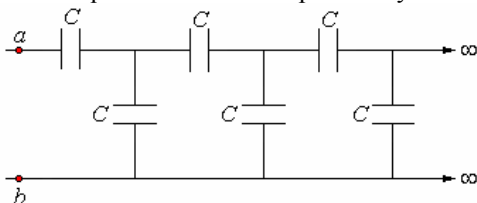
El Sistema se reduce a



C_1 y C_{eq1} . Están en serie, el equivalente es

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_{eq1}}{C_1 + C_{eq1}} = \frac{2 \times 4}{2 + 4} = \frac{4}{3} \mu F$$

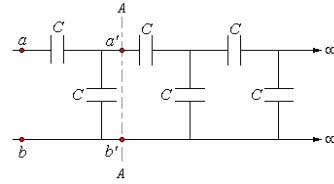
Ejemplo 77. Se tiene el sistema de Condensadores mostrado en figura, todos los condensadores tienen capacidad C y se extiende al infinito. ¿Cuál es la capacidad equivalente entre los puntos a y b ?



Solución.

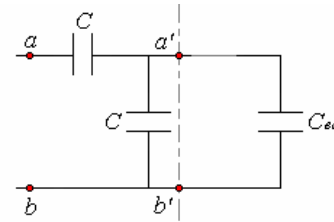
Sea la capacidad C_{eq} entre los puntos a y b .

Hagamos un corte en el circuito como se muestra en la figura siguiente.

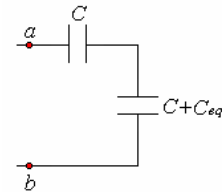


Observamos que el circuito partiendo del corte AA' a la derecha es igual al original luego la capacidad equivalente entre a' y b' es C_{eq} también.

De esta manera el circuito podemos dibujarlo como se muestra a continuación.



Este circuito es equivalente al mostrado al inicio. Luego



$$\text{Finalmente: } C_{eq} = \frac{(C + C_{eq})C}{(C + C_{eq}) + C} = \frac{C^2 + C_{eq}C}{2C + C_{eq}}$$

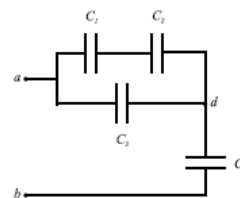
De donde resulta la ecuación

$$C_{eq}^2 + CC_{eq} - C^2 = 0$$

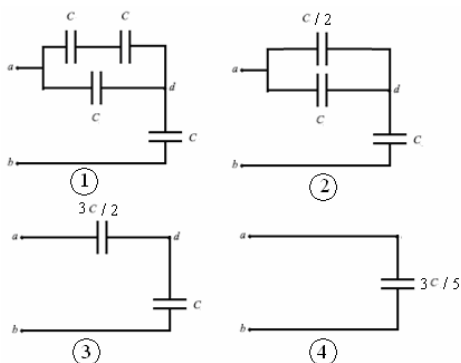
Tomando la solución positiva

$$C_{eq} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} C$$

Ejemplo 78. En el circuito mostrado, cada condensador tiene un valor de $4 \mu F$. Si $V_a - V_b = 12$ voltios, hallar la carga de cada condensador y además $V_a - V_d$.



Solución.



En la figura (4)

$$Q_4 = \frac{3C}{5}V = \frac{3}{5}(4 \times 10^{-6})(12) = 28.8 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Esta misma carga es para los dos condensadores de la figura (3), por estar en serie.

En la figura (2)

$$\frac{Q_3}{C} = \frac{Q'_3}{C/2} \Rightarrow Q'_3 = 2Q_3, \text{ además}$$

$$Q'_3 + Q_3 = Q_4 = 7.2 \times 10^{-6}$$

$$\text{Luego } Q_3 = 2.4 \times 10^{-6} \text{ y } Q'_3 = 4.8 \times 10^{-6}$$

En la figura (1)

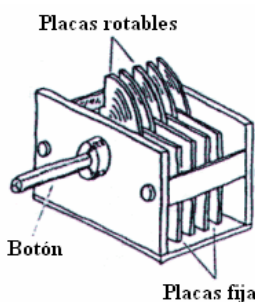
$$Q_1 = Q_2 = Q'_3 = 4.8 \times 10^{-6}$$

En resumen $Q_1 = Q_2 = 4.8 \times 10^{-6} \text{ C}$, $Q_3 = 2.4 \times 10^{-6} \text{ C}$,

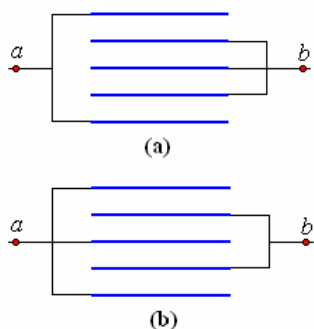
$$Q_4 = 7.2 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$V_a - V_d = \frac{Q_3}{C} = \frac{2.4 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-6}} = 0.6 \text{ V}$$

Ejemplo 79. Un condensador de radio consiste de cinco placas igualmente espaciadas cada una de área A y separadas una distancia d .

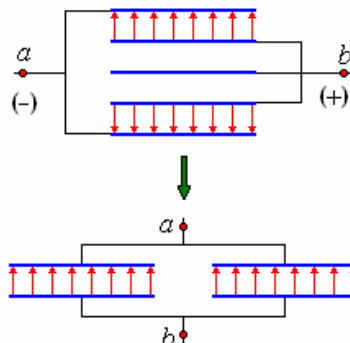


Calcular la capacidad cuando las placas se conectan en las formas mostradas en las figuras (a) y (b).



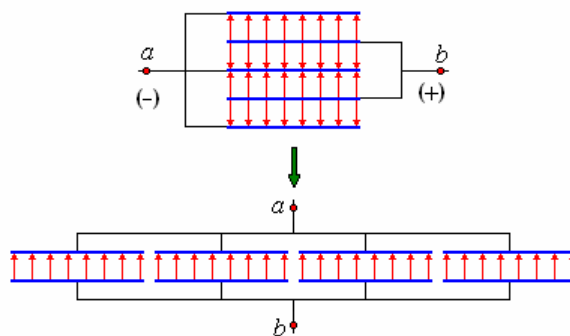
Solución.

El caso (a): Como la placa media y las dos adyacentes están unidas al mismo potencial, de tal manera que no hay campo entre ellas, y las placas extremas están al mismo potencial, de tal manera que el sistema consiste de dos condensadores en paralelo.



La Capacidad es: $C_{eq} = 2C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}$

El caso (b): La figura a continuación muestra como se forman los campos y es equivalente a cuatro condensadores en paralelo.



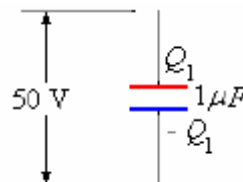
La Capacidad es: $C_{eq} = 4C = \frac{4\epsilon_0 A}{d}$

Ejemplo 80. Dos Condensadores de Capacidades $1 \mu F$ y $2 \mu F$, cargados cada uno a 50 voltios se conectan en las dos formas posibles. ¿Cuales son la carga y diferencia de potencial de cada condensador en cada caso?

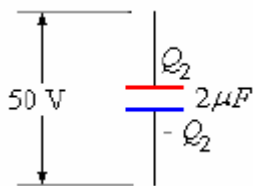
Solución.

La Carga que toman los condensadores a 50 voltios, es

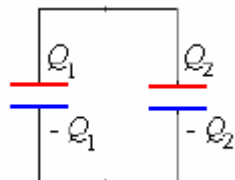
$$Q_1 = C_1 V = 1 \times 10^{-4} \times 50 = 0.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$



$$Q_2 = C_2 V = 2 \times 10^{-4} \times 50 = 1.0 \times 10^{-6} \text{ C}$$

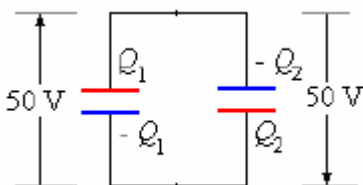


Primera posibilidad:
Conectar positivo con positivo y negativo con negativo

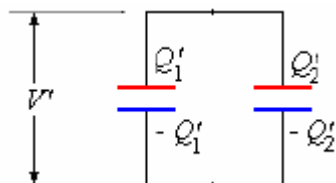


Esta conexión nos da que la carga en cada condensador sigue siendo la misma
 $Q_1 = 0,5 \times 10^{-6} \text{ C}$ y $Q_2 = 1,0 \times 10^{-6} \text{ C}$
 La diferencia de potencial sigue siendo 50 voltios.

Segunda posibilidad:
Conectar positivo con negativo y negativo con positivo.



En este caso la carga se redistribuirá



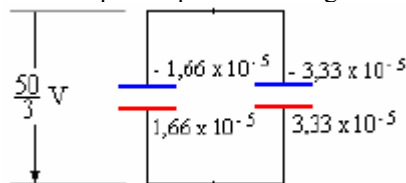
De tal manera que
 $Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + (-Q_2) = Q_1 - Q_2$
 $Q'_1 + Q'_2 = 0,5 \times 10^{-6} - 1,0 \times 10^{-6} = -0,5 \times 10^{-6}$
 Pero $Q'_1 = C_1 V'$ y $Q'_2 = C_2 V'$
 De aquí $C_1 V' + C_2 V' = -0,5 \times 10^{-6}$
 $V' = -\frac{0,5 \times 10^{-6}}{C_1 + C_2} = -\frac{0,5 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-6}}$
 $V' = -\frac{50}{3} \text{ V}$

El valor negativo significa que el potencial es más negativo en la parte superior que la parte inferior.
 Luego

$$Q'_1 = 1 \times 10^{-6} \left(-\frac{50}{3} \right) = -1,66 \times 10^{-5} \text{ C}$$

$$Q'_2 = 2 \times 10^{-6} \left(-\frac{50}{3} \right) = -3,33 \times 10^{-5} \text{ C}$$

Finalmente el esquema queda como sigue



Ejemplo 81. Dos esferas aisladas conductoras, cada una con radio 3 cm, están muy separadas conectadas por un alambre (no considerar la capacidad del alambre). Las esferas están cargadas a un potencial de 100 Voltios. Una cáscara esférica de radio 4 cm dividida en dos hemisferios se coloca concéntricamente alrededor de una de las esferas conectándola a tierra, formando un condensador esférico; el alambre que une a las esferas pasa a través de un pequeño agujero en las cáscaras.

Solución.



En la posición antes: La capacidad de cada una de las esferas es $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1$, y la carga en cada esfera es $Q = C_1 V_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_1$

En la posición después: La capacidad de la esfera simple sigue siendo $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1$ y su carga es $Q'_2 = C_1 V_2 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_2$. La capacidad de las esferas concéntricas es $C_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ y su carga es

$$Q''_2 = C_2 (V_2 - V_{Tierra})$$

$$= 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_2$$



Como la carga del sistema se conserva:
 Carga antes = carga después.

$$2Q_1 = Q'_1 + Q''_2$$

$$24\pi\epsilon_0 V_1 R_1 = 4\pi\epsilon_0 V_2 R_2 + 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_2$$

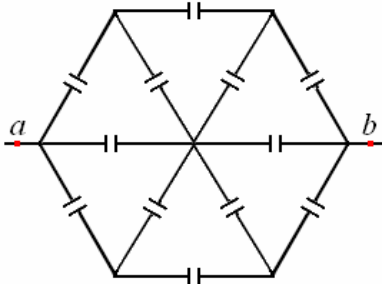
$$\text{De aquí: } V_2 = \frac{2}{\left(1 + \frac{R_2}{R_2 - R_1}\right)} V_1$$

Como $V_1 = 100 \text{ V}$, $R_1 = 3 \text{ cm}$ y $R_2 = 4 \text{ cm}$, reemplazando obtenemos:

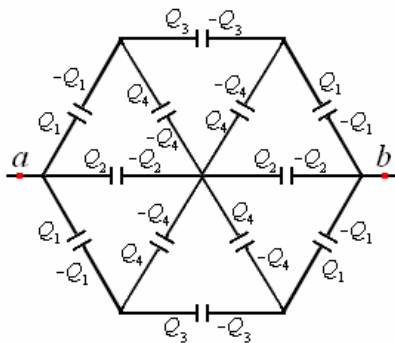
$$V_2 = \frac{2}{\left(1 + \frac{4}{4-1}\right)} 100 = 40 \text{ V}$$

El potencial final de los dos conductores es 40 voltios.

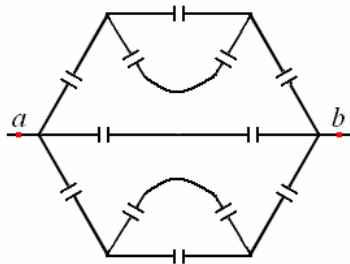
Ejemplo 82. Encontrar la capacidad equivalente entre los puntos a y b , todos los condensadores tienen capacidad C .



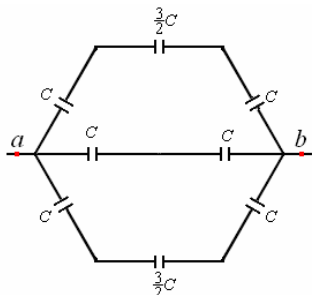
Solución. Este caso al parecer muy complicado se simplifica debido a su simetría. El reparto de Cargas al ponerlo a una diferencia de potencial sería como se muestra a continuación:



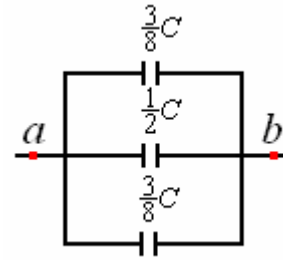
Claramente se ve que este circuito es igual al que se muestra en la figura a continuación:



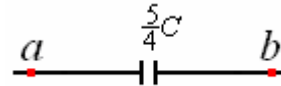
Y esto nos lleva a:



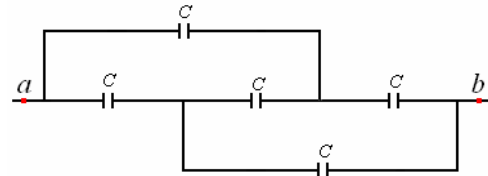
Continuando la simplificación



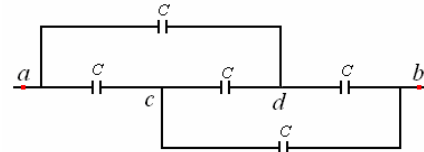
y por último



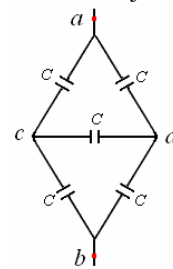
Ejemplo 83. Encontrar la capacidad equivalente entre los puntos a y b , todos los condensadores tienen capacidad C .



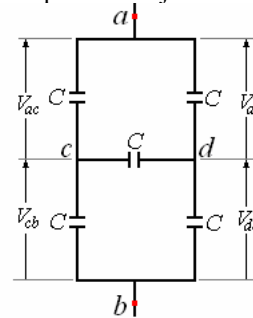
Solución. A este circuito aparentemente complejo, porque no está ni en serie ni en paralelo podemos hacerle algunas transformaciones sin cambiarlo.



Entre a y c hay un solo condensador
 Entre a y d hay un solo condensador
 Entre c y d hay un solo condensador
 Entre d y b hay un solo condensador
 Entre c y b hay un solo condensador
 Esto nos permite hacer el dibujo equivalente siguiente



El que también se puede dibujar como

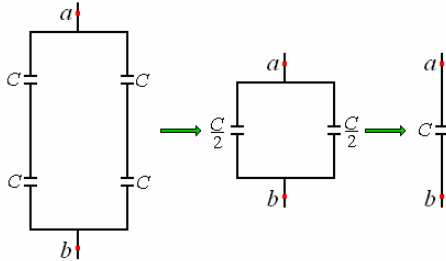


Podríamos resolverlo en forma similar al hexágono anterior, pero lo vamos a hacer en forma diferente.

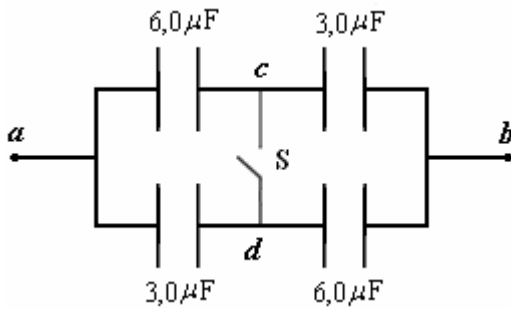
Se puede ver: $V_{ab} = V_{ad}$ y $V_{cb} = V_{db}$

Con lo que podemos concluir:

$V_c = V_d$, esto hace que el condensador entre c y d no se cargue y es como si no existiera, con lo que el circuito queda reducido, a condensadores en paralelo el que podemos ir simplificando hasta encontrar el condensador equivalente.



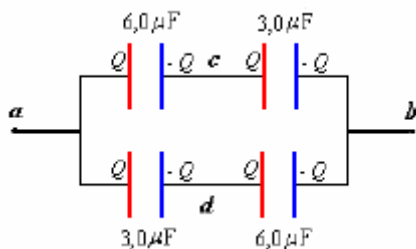
Ejemplo 84. Sean cuatro condensadores conectados como se indica en la figura anexa. Con el interruptor S abierto, se aplica una diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab} = 9$ V.



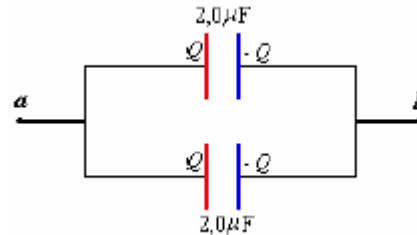
- Calcule el valor de la carga de cada condensador.
- ¿Cuál es la diferencia de potencial $V_{cd} = V_c - V_d$? ¿Qué punto está a mayor potencial?
- Se encierra el interruptor S, sin desconectar la diferencia de potencial V_{ab} . ¿Cuál es el valor de la carga de cada condensador?
- ¿Cuál es el cambio de energía $\Delta U = U_i - U_f$ al cerrar el interruptor S? comente el signo de su resultado. Sugerencia use el concepto de condensador equivalente para obtener el valor ΔU .

Solución.

a) El dispositivo se carga de la manera indicada en la figura siguiente.



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{6,0} + \frac{1}{3,0} = \frac{1}{2,0} \Rightarrow C_{eq} = 2,0 \mu F$$



De aquí $Q = 2,0 \times 10^{-6} (9) = 18,0 \mu C$
Que es la carga que corresponde a cada condensador.

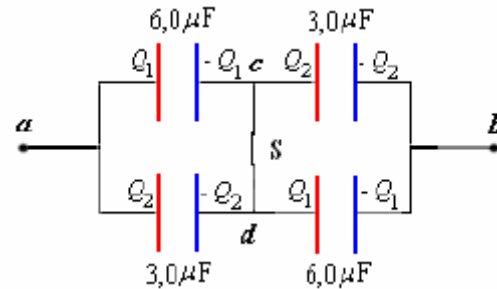
$$b) V_{cb} = \frac{Q}{3,0 \times 10^{-6}} = \frac{18 \times 10^6}{3,0 \times 10^{-6}} = 6 \text{ V}$$

$$V_{db} = \frac{Q}{6,0 \times 10^{-6}} = \frac{18 \times 10^6}{6,0 \times 10^{-6}} = 3 \text{ V}$$

$$V_{cd} = V_c - V_d = V_{cb} - V_{db} = 6 - 3 = 3 \text{ V}$$

El punto a está a mayor potencial.

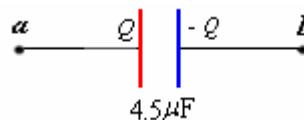
c) La distribución de las cargas es como se indica a continuación



Esto se reduce a



Y finalmente



De lo que obtenemos:

$$Q = 4,5 \times 10^{-6} (9) = 40,5 \times 10^{-6} \text{ C} = Q_1 + Q_2$$

Como $V_{ac} = V_{ad}$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{6 \times 10^{-6}} = \frac{Q_2}{3 \times 10^{-6}} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = 2$$

De estas dos últimas relaciones:

$$Q_1 = 27 \times 10^{-6} \text{ C}, Q_2 = 13,5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$d) U_i = \frac{1}{2} C_{eq(i)} V_{ab}^2 = \frac{1}{2} (4 \times 10^{-6}) (9)^2 = 1,62 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$U_f = \frac{1}{2} C_{eq(f)} V_{ab}^2 = \frac{1}{2} (4,5 \times 10^{-6}) (9)^2 = 1,82 \times 10^{-4} \text{ J}$$

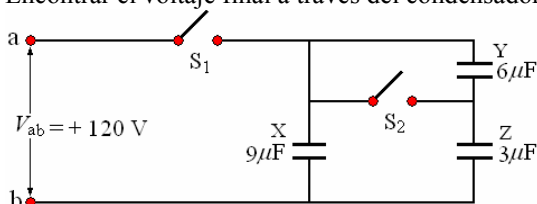
$$\Delta U = U_i - U_f = 1,62 \times 10^{-4} - 1,82 \times 10^{-4}$$

$$= -0,20 \times 10^{-4} \text{ J}$$

El signo es negativo porque se ha realizado trabajo sobre el sistema porque aumento su capacidad y había que aumentar la carga.

Ejemplo 85. El circuito mostrado inicialmente con los condensadores descargados X, Y, y Z, y los interruptores abiertos, S₁ y S₂. Una diferencia potencial $V_{ab} = +120 \text{ V}$ se aplica entre los puntos a y b. después de que el circuito esté montado, se cierra el interruptor S₁, pero el interruptor S₂ se mantiene abierto. Encontrar

- La energía almacenada en el condensador X
- La carga del condensador Y.
- El voltaje a través del condensador Z.
- Si el interruptor S₁ se abre, y se cierra S₂. Encontrar el voltaje final a través del condensador X,



Solución.

$$a) U_X = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (9 \times 10^{-6}) (120)^2 = 0,065 \text{ J}$$

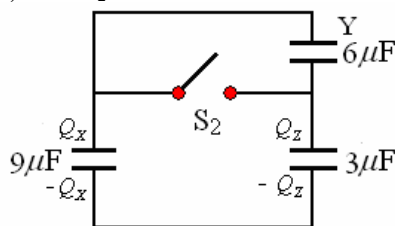
$$b) \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_Y} + \frac{1}{C_Z} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$C_{eq} = 2 \mu\text{F}$$

$$Q_Y = Q = C_{eq} V_{ab} = (2 \times 10^{-6}) (120) = 240 \text{ mC}$$

$$c) V_Z = \frac{Q}{C_Z} = \frac{0,240}{3 \times 10^{-6}} = 80 \text{ V}$$

d) Con S₂ abierto.



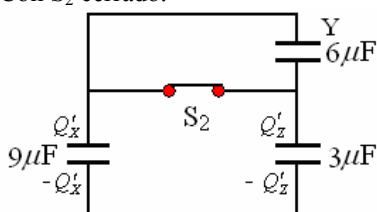
La carga del condensador X es:

$$Q_X = C_X V = (9 \times 10^{-6}) (120) = 1080 \times 10^{-6} \text{ C}$$

La carga del condensador Z es:

$$Q_Z = Q_Y = 240 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Con S₂ cerrado.



$$Q_X + Q_Z = Q'_X + Q'_Z = 1320 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$\text{Como } \frac{Q'_X}{Q'_Z} = \frac{C_X}{C_Z} = \frac{9 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-6}} = 3$$

$$Q'_X = \frac{3}{4} (1320 \times 10^{-6}) = 990 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$\text{Luego } V'_X = \frac{Q'_X}{C_X} = \frac{990 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-6}} = 110 \text{ V.}$$

ENERGIA ELECTROSTATICA DE CARGAS

Para colocar una carga q_1 en el espacio no se realiza trabajo pero si queremos colocar otra carga q_2 tenemos que realizar un trabajo, porque tenemos que traer la carga q_2 del infinito donde el potencial es cero hasta el punto situado a r_{12} de q_1 donde el potencial debido a esta última es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

El trabajo realizado es

$$W = q_2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

este trabajo realizado queda como energía en el sistema

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Ahora si tenemos tres cargas presentes la energía en el sistema es

$$W = U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Este resultado es independiente del radio en que se lleva las cargas a sus posiciones finales.

En el caso de ser n cargas la energía electrostática total es la suma de las energías de todos los pares posibles.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{\text{todos} \\ \text{los} \\ \text{pares}}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

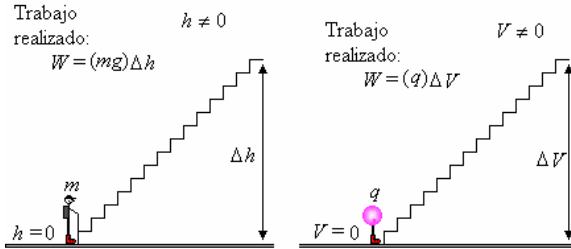
Cuando queremos cargar un cuerpo con densidad de carga ρ , consideramos que ya se ha juntado una cantidad de carga q , el trabajo para traer una carga dq del infinito es la energía diferencial que se almacena.

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dq}{r}$$

Siendo $dq = \rho dV$ y dV un elemento diferencial del volumen del cuerpo.

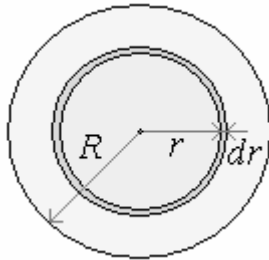
Nota: El concepto de “voltio” “potencial” en electricidad es similar al concepto de “altura” en gravedad y al concepto de “temperatura” en termodinámica. En todos estos casos, se define un nivel de referencia de el cual se mide voltio/altura/temperatura.

- El cero para el voltaje se considera el voltaje de la tierra del planeta, llamado en la ingeniería eléctrica “tierra”.
- El cero para la gravedad se considera ser el nivel del suelo (en el caso de la tierra).
- El cero para la temperatura se considera ser el Kelvin cero supuesto.
-



Ejemplo 86. Encontrar la energía almacenada al cargar una esfera de radio R con carga uniformemente distribuida de densidad volumétrica ρ .

Solución. Supongamos que ya hemos cargado una esfera de radio r , y queremos ponerle un diferencial de carga en el volumen inmediato de espesor dr , como se muestra en la figura.



La Carga q almacenada ya, es

$$q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

La Carga dq que vamos a traer del infinito es

$$dq = 4\pi r^2 \rho dr$$

El trabajo en traer la carga dq es

$$dU = \frac{q dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{4\pi \rho^2 r^4 dr}{3\pi\epsilon_0}$$

El trabajo para la carga toda la esfera se halla integrando r desde 0 hasta R .

$$U = \int_0^R dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{q dq}{r} = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr$$

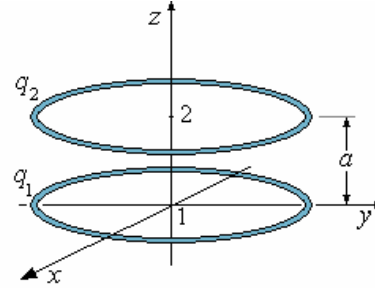
$$U = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

Como $Q = \frac{4\pi R^3}{3} \rho \Rightarrow U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$

Ejemplo 87. Dos anillos coaxiales uniformemente cargados de radios iguales R está en planos paralelos separados una distancia a , el trabajo que se realiza para traer una carga q del infinito al centro de cada

uno de los anillos es respectivamente A_1 y A_2 . Encontrar las Cargas q_1 y q_2 que tienen los anillos.

Solución.



El potencial en 1:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left[q_1 + \frac{q_2}{(1 + a^2 / R^2)^{1/2}} \right]$$

El potencial en 2:

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left[q_2 + \frac{q_1}{(1 + a^2 / R^2)^{1/2}} \right]$$

El potencial en el infinito:

$$V_\infty = 0$$

Trabajo para traer una carga q desde el infinito a 1:

$$A_1 = q(V_1 - V_\infty)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[q_1 + \frac{q_2}{(1 + a^2 / R^2)^{1/2}} \right] \quad (1)$$

Trabajo para traer una carga q desde el infinito a 2:

$$A_2 = q(V_2 - V_\infty)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[q_2 + \frac{q_1}{(1 + a^2 / R^2)^{1/2}} \right] \quad (2)$$

(1) y (2) son dos ecuaciones con incógnitas q_1 y q_2 .

Resolviendo (1) y (2) obtenemos:

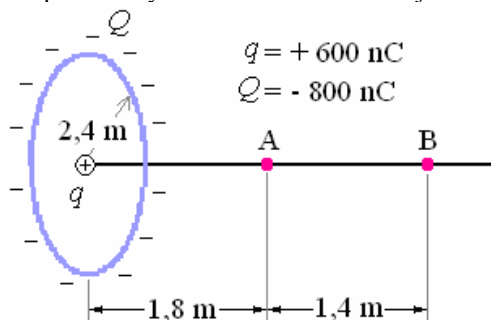
$$q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R A_2}{q} \left[\frac{1}{(1 + a^2 / R^2)^{1/2}} - \frac{A_1}{A_2} \right]$$

$$\left[\frac{1}{(1 + a^2 / R^2)^{1/2}} - 1 \right]$$

$$q_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 R A_1}{q} \left[\frac{1}{(1 + a^2 / R^2)^{1/2}} - \frac{A_2}{A_1} \right]$$

$$\left[\frac{1}{(1 + a^2 / R^2)^{1/2}} - 1 \right]$$

Ejemplo 88. Una carga $Q = -800 \text{ nC}$ se distribuye uniformemente en un anillo de radio de $2,4 \text{ m}$. Una carga $q = +600 \text{ nC}$ se pone en el centro del anillo. Los puntos A y B están situados en el eje del anillo.



- ¿Cuál es el trabajo hecho por una fuerza externa que transporta un electrón de B a A?
- si el potencial eléctrico es igual a cero en un punto en el eje del anillo. ¿Cuál es la distancia de este punto del centro del anillo?
- Si se un electrón se lanza a lo largo del eje del anillo desde el infinito. El electrón llega y se detiene momentáneamente en un punto en el eje que está a $5,0 \text{ m}$ del centro del anillo. ¿Cuál es la velocidad inicial del electrón en el infinito?
- Si una fuerza externa retira la carga q del centro del anillo y la transporta al infinito. ¿Cuál es el trabajo realizado por esta fuerza externa?

Solución.

$$a) W_{B \rightarrow A} = e(V_A - V_B)$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{q}{(1,8)} - \frac{Q}{(1,8^2 + 2,4^2)^{1/2}} \right) - \left(\frac{q}{(3,2)} - \frac{Q}{(3,2^2 + 2,4^2)^{1/2}} \right) \right]$$

$$W_{B \rightarrow A} = -700 \text{ eV}$$

$$b) \frac{q}{x} - \frac{Q}{(x^2 + 2,4^2)^{1/2}} = 0$$

$$\Rightarrow x = 2,7 \text{ m}$$

$$c) \frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(5,0)} - \frac{Q}{(5,0^2 + 2,4^2)^{1/2}} \right]$$

$$\Rightarrow v_0 = 9 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$d) W_{O \rightarrow \infty} = q(V_\infty - V_O)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{Q}{(2,4)} \right) - \left(-\frac{Q}{(\infty^2 + 2,4^2)^{1/2}} \right) \right]$$

$$= +1,8 \times 10^{-3} \text{ J}$$

ENERGÍA ALMACENADA POR UN CONDENSADOR

La energía que se almacena en el condensador es igual a la energía requerida para cargarlo. Ahora encontraremos esa energía.

Consideremos que se ha tomado una carga q de una de las placas de un condensador de capacidad C

colocado sobre la otra, la diferencia de potencial entre ellas es

$$V = \frac{q}{C}$$

Para transferir en este instante una carga dq de una placa a la otra. El trabajo requerido para transferir esta carga es

$$dW = dU = Vdq$$

Poniendo V en función de q

$$dW = \frac{q}{C} dq$$

Para obtener el trabajo total integramos desde $q = 0$ hasta la carga total $q = Q_0$.

$$U = \frac{1}{C} \int_0^{Q_0} q dq = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

$$\text{Como } Q_0 = CV_0 \Rightarrow U = \frac{1}{2} CV_0^2$$

Esta expresión es general para todo tipo de condensador, ya que la geometría del condensador no interviene en el razonamiento.

Densidad de energía del campo eléctrico. Es razonable considerar que esta energía se almacena en el campo eléctrico y por lo tanto es conveniente definir el concepto de densidad de energía del campo eléctrico, para esto consideremos un condensador de placas paralelas, despreciando las irregularidades de

$$\text{los extremos tenemos } C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\text{Y } Q_0 = CV_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} V_0 = \epsilon_0 A \left(\frac{V_0}{d} \right)$$

$$Q_0 = \epsilon_0 A E_0$$

La densidad de energía es

$$\mu_E = \frac{U}{\text{Volumen}}$$

el volumen es: Ad

$$\mu_E = \frac{\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}}{\text{Volumen}} = \frac{\frac{1}{2} (\epsilon_0 A E_0)^2}{2 (\epsilon_0 A / d) Ad}$$

$$\mu_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

Aunque para esta demostración particularizamos para el caso de placas paralelas, esta ecuación es aplicable para cualquier caso.

Ejemplo 89. Se tiene un condensador esférico con radio interior a y radio exterior b , cuando la diferencia de potencial entre las cáscaras esféricas es V_0 , calcular la energía electrostática almacenada.

Solución.

La capacidad de este condensador es

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

La energía almacenada es

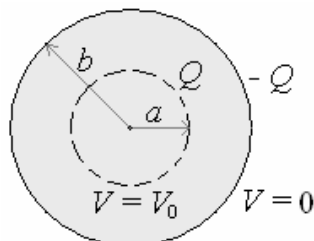
$$U = \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)} V_0^2 =$$

$$2\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)} V_0^2$$

Otra forma de cálculo es mediante la densidad de energía.

$$\mu_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Por la ley de Gauss evaluamos E



El Campo eléctrico entre las cáscaras es

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Donde $Q = CV_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)} V_0$

Luego: $E = \frac{ab}{(b-a)} \frac{V_0}{r^2}$

-reemplazando el valor de E en $\mu_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

$$\mu_E = \frac{\epsilon_0 a^2 b^2}{2(b-a)^2} \frac{V_0^2}{r^4}$$

Para obtener la energía total

$$\mu_E = \frac{dU}{dV},$$

Con $dV = 4\pi r^2 dr$ y $dU = \mu_E dV$

$$U = \int dU = \int \mu_E dV = \int_a^b \frac{\epsilon_0 a^2 b^2}{2(b-a)^2} \frac{V_0^2}{r^2} dr =$$

$$\frac{2\pi\epsilon_0 a^2 b^2 V_0^2}{(b-a)^2} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 a^2 b^2 V_0^2}{(b-a)^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Finalmente: $U = 2\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)} V_0^2$

Resultado igual al evaluado directamente, lo cual prueba la aseveración que hicimos sobre la generalidad de la expresión de la densidad de energía.

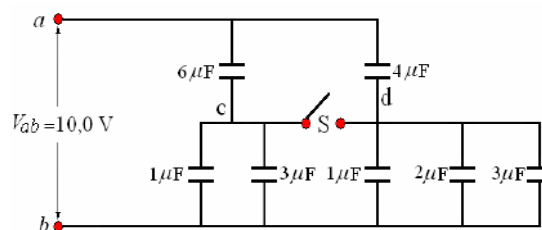
Ejemplo 90. La red de condensadores mostrados está montada con los condensadores inicialmente descargados. Una diferencia de potencial $V_{ab} = 10,0$ V

se aplica a través de la red. El interruptor S en la red se mantiene abierto. Calcule:

- a) la capacidad equivalente de la red.
- b) la diferencia de potencial $V_c - V_d$.
- c) la carga y voltaje en el condensador de $2,0 \mu\text{F}$.

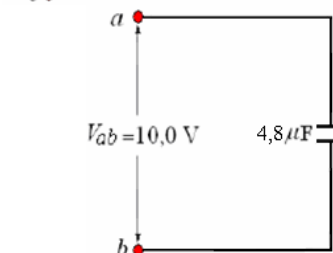
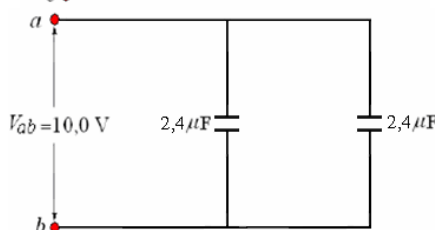
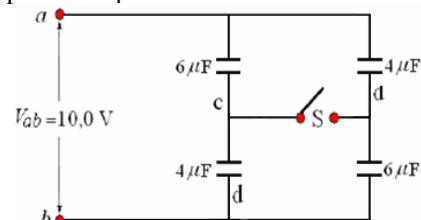
Se cierra el interruptor S manteniendo la diferencia de potencial V_{ab} en $10,0$ V.

- d) la carga y voltaje en el condensador de $2,0 \mu\text{F}$.
- e) el cambio de energía electrostática $\Delta U = U_f - U_i$, antes y después de cerrar el interruptor S. Comente su resultado.



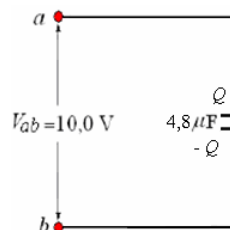
Solución.

- a) la capacidad equivalente de la red.

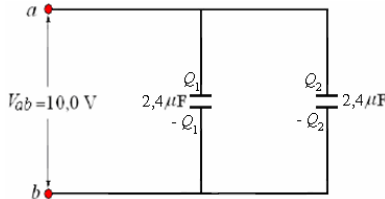


- b) la diferencia de potencial $V_c - V_d$.

$$V_{bc} = \frac{Q_1}{4 \times 10^{-6}}, \quad V_{bd} = \frac{Q_2}{6 \times 10^{-6}}$$



$$Q = (4,8 \times 10^{-6})(10,0) = 48 \times 10^{-6} \text{ C.}$$



$$Q_1 = Q_2 = Q/2 = 24 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$\text{Luego: } V_{bc} = \frac{24 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-6}} = 6 \text{ V,}$$

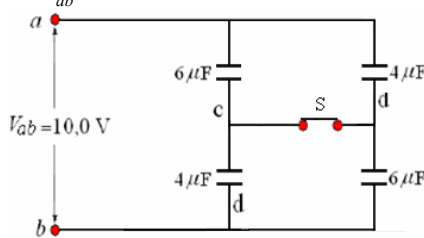
$$V_{bd} = \frac{24 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-6}} = 4 \text{ V.}$$

$$V_c - V_d = V_{bc} - V_{bd} = 6 - 4 = 2 \text{ V.}$$

c) la carga y voltaje en el condensador de $2,0 \mu\text{F}$.

$$V_{bd} = 4 \text{ V, } Q_{2\mu\text{F}} = (2 \times 10^{-6})(4) = 8 \times 10^{-6} \text{ C.}$$

Se cierra el interruptor S manteniendo la diferencia de potencial V_{ab} en $10,0 \text{ V}$.



d) la carga y voltaje en el condensador de $2,0 \mu\text{F}$.

Como las capacidades equivalentes de la parte superior y la inferior son iguales a $10 \mu\text{F}$, las diferencias de potencial de la parte superior y la parte inferior son iguales a $10/2 = 5 \text{ V}$.

$$\text{Luego } Q'_{2\mu\text{F}} = (2 \times 10^{-6})(5) = 10 \times 10^{-6} \text{ C.}$$

e) el cambio de energía electrostática $\Delta U = U_f - U_i$ antes y después de cerrar el interruptor S. Comente su resultado

Antes de cerrar

$$U_i = \frac{1}{2} C_{eq\ i} V^2 = \frac{1}{2} (4,8 \times 10^{-6}) (10^2) = 2,4 \times 10^{-4} \text{ J.}$$

J.

Después de cerrar

$$U_f = \frac{1}{2} C_{eq\ f} V^2 = \frac{1}{2} (5 \times 10^{-6}) (10^2) = 2,5 \times 10^{-4} \text{ J.}$$

J.

$$\Delta U = 2,5 \times 10^{-4} - 2,4 \times 10^{-4} = 0,1 \times 10^{-4} \text{ J} = 10 \times 10^{-6} \text{ J.}$$

La capacidad equivalente en la nueva configuración es mayor que en la original, siendo la diferencia de potencial igual, la energía almacenada en la nueva configuración es mayor.

FUERZAS, TORQUES

Ahora mostraremos como la fuerza sobre uno de los objetos en un sistema cargado puede calcularse a partir de la energía electrostática.

Consideremos un sistema formado por dos placas, si permitimos el movimiento Δx de una de ellas. El trabajo mecánico realizado por una fuerza exterior F para mover las placas es:

$$\Delta W = F \Delta x$$

Siendo F la fuerza entre las placas, este trabajo debe ser igual al cambio de energía electrostática en el condensador.

Si el objeto en mención es obligado a un movimiento de rotación debido a un torque τ y a un desplazamiento es $\Delta \theta$, el trabajo realizado es

$$\Delta W = \tau \Delta \theta$$

Ejemplo 91. ¿Cuál es la fuerza entre las placas de un condensador de placas paralelas, al separarlas una distancia dx en, el condensador tiene una área A , separación entre placas d y Carga Q ?

Solución.

El trabajo es

$$\Delta W = F \Delta x$$

que es igual al cambio de la energía electrostática

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

el cambio es (por derivación con respecto a C)

$$\Delta U = \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C} \right).$$

$$\text{con } \Delta \left(\frac{1}{C} \right) = \Delta \left(\frac{1}{\epsilon_0 A / d} \right) = \Delta \left(\frac{d}{\epsilon_0 A} \right)$$

Como ϵ_0 y A son constantes, el único variable es d y

$$\Delta d = \Delta x.$$

$$\text{Luego tenemos: } \Delta \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{\Delta x}{\epsilon_0 A}$$

$$\text{Y } \Delta U = \frac{Q^2 \Delta x}{2 \epsilon_0 A}$$

Siendo $\Delta U = \Delta W = F \Delta x$, podemos escribir:

$$F \Delta x = \frac{Q^2 \Delta x}{2 \epsilon_0 A} \Rightarrow F = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 A}$$

$$\text{Reacomodando: } F = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$\text{Como } \sigma = \frac{Q}{A} \text{ y } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$\text{Finalmente: } F = \frac{1}{2} QE$$

Este resultado que es diferente en el factor $\frac{1}{2}$ al que esperábamos por intuición se debe que el campo E no es el campo en las cargas, ya que la carga en la superficie tiene un espesor muy delgado y el campo va desde 0 en el interior hasta E en el espacio entre las placas, es decir la distribución superficial de

cargas tiene un espesor. El campo que actúa sobre las Cargas es el promedio $E/2$, esto explica el factor $1/2$.

CAMPO ELECTRICO EN UN DIELECTRICO

Dieléctrico es un material no conductor como por ejemplo el vidrio, el papel, el plástico. Faraday experimentando con condensadores aplicó la misma diferencia de potencial a dos condensadores de placas paralelas iguales, pero uno de ellos con un material dieléctrico entre las placas y observó que el condensador con dieléctrico almacena mayor carga. La capacidad de un condensador de placas paralelas es

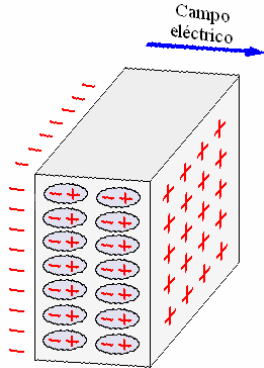
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

y la carga con respecto a la diferencia de potencial es: $Q = CV$

Con un material dieléctrico la carga es mayor, o sea, aumenta la capacidad.

Manteniendo la carga constante, al poner el dieléctrico, siendo las características de la capacidad las dimensiones, la diferencia de potencial disminuirá.

Como $V = Ed$, el Campo eléctrico entre las placas disminuye, esto se explica porque las cargas del dieléctrico en presencia del campo eléctrico se orientan como se muestra en la figura siguiente, a este efecto decimos que el dieléctrico está polarizado.

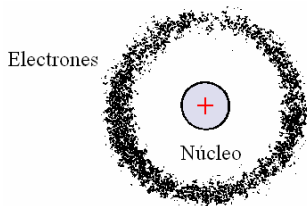


El dieléctrico polarizado a pesar de ser eléctricamente neutro en promedio produce un Campo eléctrico tanto exterior como interiormente, como resultado de esto aparece un campo eléctrico opuesto al original, disminuyéndolo.

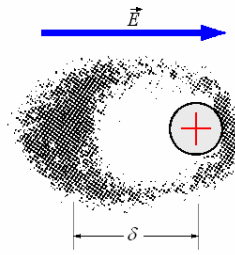
POLARIZACION.

CARGAS DE POLARIZACION.

La figura a continuación nos muestra un átomo en un dieléctrico en ausencia de campo eléctrico, la carga positiva en el centro y la carga negativa distribuida uniformemente.



Pero en presencia de un campo eléctrico se produce una distorsión como se muestra en la figura siguiente.



El átomo se polariza, y esta configuración equivale en primera aproximación a un dipolo eléctrico.. Es razonable considerar que si el campo no es demasiado grande al momento sobre el dipolo será proporcional a la intensidad de este campo.

Si consideramos que \vec{p} sea el momento dipolar de cada átomo y que tenemos N átomos por unidad de volumen, el momento dipolar por unidad de volumen será $N \vec{p}$, al que llamaremos Vector polarización

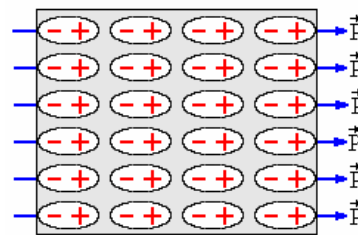
$$\vec{P} = N \vec{p}$$

\vec{P} = momento dipolar por unidad de volumen, que tiene el mismo valor en todos los puntos del dieléctrico.

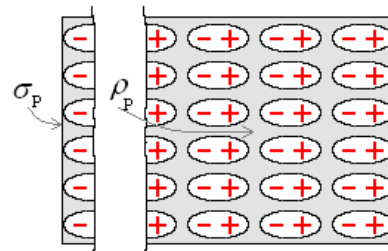
Como $\vec{p} = q \vec{\delta}$, siendo δ el desplazamiento promedio de las cargas positivas y negativas en el sentido de \vec{p} , podemos escribir

$$\vec{P} = Nq \vec{\delta}$$

Consideremos un cuerpo tetraedral polarizado, tal como se muestra en la figura siguiente



En la superficie aparecen sólo cargas negativas. Sea A la superficie total del tetraedro y el volumen inmediato es $A \delta$ (recordar que δ es la longitud del dipolo).



El momento dipolo de este volumen es $(S\delta)\vec{P}$, esto lo podemos escribir como $SP\vec{\delta}$. Si es la carga q la que debe desplazarse una distancia δ de $-q$ para producir el momento dipolo tenemos $SP\vec{\delta} = q\vec{\delta}$, de donde obtenemos: $q = SP$.

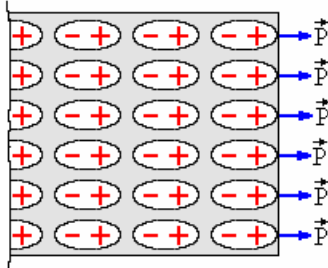
$$Y \frac{q}{S} = \sigma_p = P$$

Llamando a $\frac{q}{S} = \sigma_p$ densidad de carga superficial debido a la polarización.

En general $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$, donde \hat{n} es la dirección normal a la superficie y q la carga total en la superficie.

$$q = \int_A \sigma_p dS = \int_A \vec{P} \cdot \hat{n} dS$$

Ahora observamos lo que sucede en el interior del volumen, le figure muestra el volumen inmediato interior a la superficie.



Por el principio de conservación de la carga, la carga dejada en este volumen V debe ser igual a $-q$,

$$\text{Donde } -q = \int_V \rho_p dV$$

Siendo ρ_p la densidad de carga por volumen debido a la polarización.

Para evaluar ρ_p en función de \vec{P}

$$-q = -\int_A \vec{P} \cdot \hat{n} dS = \int_V \rho_p dV$$

Usando el teorema de la divergencia convertimos la integral de superficie en integral de volumen.

$$-\int_A \vec{P} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{P} dV$$

Donde $\nabla \cdot \vec{P}$ es la divergencia de \vec{P} , el operador

∇ opera vectorialmente sobre \vec{P} .

Luego

$$\int_V \rho_p dV = \int_V \nabla \cdot \vec{P} dV$$

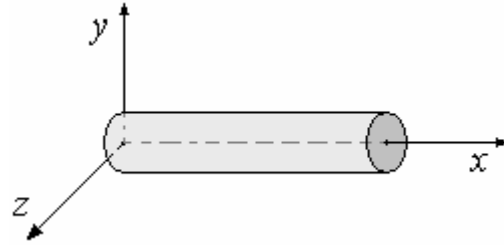
De este último obtenemos finalmente

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Ejemplo 92. Una varilla delgada dieléctrica de sección transversal A se extiende a lo largo del eje x desde $x = 0$ a $x = L$ la polarización es longitudinal y

está dada por $\vec{P} = (ax^2 + b)\hat{i}$. Encontrar la densidad de Carga de polarización y mostrar explícitamente que la carga total es cero.

Solución.



Primero encontremos la densidad superficial

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Para la cara en $x = 0$, $\hat{n} = -\hat{i}$ y $\vec{P} = b\hat{i}$:

$$\sigma_{p(x=0)} = b\hat{i} \cdot (-\hat{i}) = -b$$

Para la cara en $x = L$, $\hat{n} = \hat{i}$ y $\vec{P} = (aL^2 + b)\hat{i}$:

$$\sigma_{p(x=L)} = (aL^2 + b)\hat{i} \cdot \hat{i} = aL^2 + b$$

Para la superficie cilíndrica lateral, como $\hat{n} \perp \vec{P}$

$$\sigma_{p_S} = 0$$

La densidad volumétrica

$$\begin{aligned} \rho_p &= \nabla \cdot \vec{P} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (ax^2 + b)\hat{i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (ax^2 + b) = 2ax \end{aligned}$$

La Carga total es:

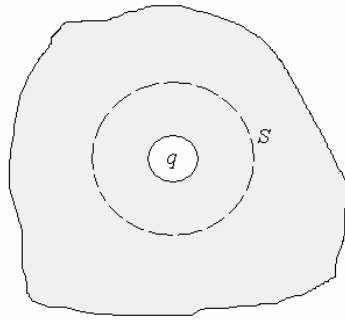
$$\begin{aligned} Q_T &= \sigma_{p(x=0)}A + \sigma_{p(x=L)}A + \int_V \rho_p dV \\ &= -bA + (aL^2 + b)A + \int_0^L 2ax(A dx) \end{aligned}$$

$$Q_T = -bA + aL^2 A + bA + aAL^2 = 0$$

Valor que esperábamos encontrar.

LA LEY DE GAUSS PARA DIELECTRICOS - DESPLAZAMIENTO ELECTRICO

Supongamos una región en que tenemos una carga q en un medio dieléctrico, este medio se polariza y aparecen cargas por polarización, aplicando la ley de Gauss.



$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} (q + Q_p)$$

Donde Q_p es la carga de polarización.

$$Q_p = -\int_V \rho_p dV = -\int_V \nabla \cdot \vec{P} dV$$

Convirtiendo la integral de volumen a integral de superficie por el teorema de la divergencia.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{P} dV = \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} dS$$

Obtenemos: $Q_p = \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} dS$

De aquí:

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q + \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} dS \right)$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = q + \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} dS$$

$$Y \epsilon_0 \int_S \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) \cdot \hat{n} dS = q$$

Definamos el Campo vectorial **Desplazamiento eléctrico** $\left(\vec{D} \right)$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Y tenemos la ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q$$

LA CONSTANTE DIELECTRICA

Vimos que la polarización del medio ocurre como una respuesta al campo eléctrico en el medio, para el

caso en que \vec{P} desaparece cuando se quita \vec{E} y para materiales isotrópicos en los cuales se orienta según

\vec{E} , \vec{P} es proporcional a \vec{E} , para Campos no muy intensos

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$

donde χ es llamada **Susceptibilidad eléctrica**,

como $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \vec{E} = (\epsilon_0 + \chi) \vec{E}$$

Llamando a $(\epsilon_0 + \chi) = \epsilon$, **Permitividad** del

material obtenemos una relación entre \vec{D} y \vec{E} .

El comportamiento de un material queda completamente especificado ya sea por la permitividad ϵ o por la susceptibilidad χ . Sin

embargo es más conveniente trabajar con una cantidad sin dimensiones, **La constante dieléctrica** K .

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Para el vacío $K = 1$

CONSTANTE DIELECTRICA DE ALGUNOS MATERIALES	
MATERIAL	K
Vidrio	5 - 10
Mica	6,0
Nylon	3,5
Madera	2,5 - 3,0
Caucho	2 - 3,5
Agua destilada (20 °C)	60
Aire (1 atm)	1,00059

Ejemplo 93. Cuál es la capacidad de un condensador de placas paralelas de área A y separación d , cuando se le introduce un dieléctrico de constante K que llena completamente el espacio entre placas.

Solución.

El Campo eléctrico entre las placas es:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Donde $\sigma = \frac{Q}{A}$ y $\epsilon = K\epsilon_0$

$$\therefore E = \frac{Q}{K\epsilon_0 A}$$

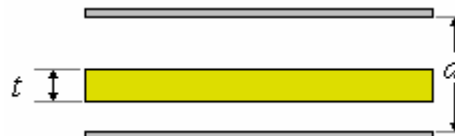
La diferencia de potencial entre las placas

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{K\epsilon_0 A} d$$

La Capacidad es $C = \frac{Q}{V} = K \frac{\epsilon_0 A}{d}$

La capacidad del condensador, con dieléctrico es K veces a la capacidad sin dieléctrico.

Si al dieléctrico cubriera parte del espesor del espacio que separa a las placas, digamos un espesor t , como se muestra en la figura.



En este caso tenemos el campo eléctrico en parte vacío y en parte con dieléctrico.

En el vacío:

$$E_{\text{vacío}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

En el dieléctrico:

$$E_{\text{dieléctrico}} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{K\epsilon A}$$

La diferencia de potencial entre las placas

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_{\text{vac}}(d-t) + E_{\text{dieléct}}t$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0 A} \left[(d-t) + \frac{t}{K} \right]$$

y la Capacidad

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{(d-t) + \frac{t}{K}}$$

Ejemplo 94. Evaluar el Campo eléctrico debido a una Carga puntual q dentro del dieléctrico de constante K .

Solución.

Aplicamos la ley de Gauss para una superficie esférica de radio r , Colocando a la carga q en el origen.

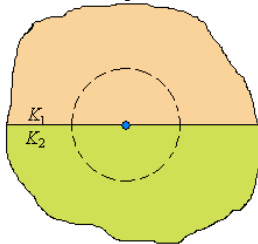
$$\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q$$

$$D4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \text{ y } \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

El Campo eléctrico es

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{K\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi K\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

En el caso en que la carga q esté entre dos medios distintos de constantes K_1 y K_2



Aplicamos la ley de Gauss para una superficie esférica de radio y .

$$\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q \Rightarrow D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = q$$

Pero $D_1 = \epsilon_1 E = K_1 \epsilon_0 E$ y

$$D_2 = \epsilon_2 E = K_2 \epsilon_0 E$$

Luego: $K_1 \epsilon_0 E 2\pi r^2 + K_2 \epsilon_0 E 2\pi r^2 = q$

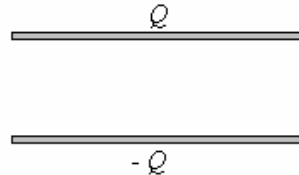
$$E 2\pi \epsilon_0 r^2 (K_1 + K_2) = q$$

y $E = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 (K_1 + K_2) r^2}$

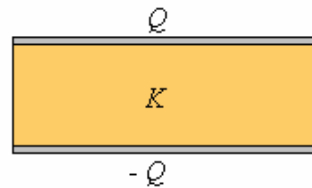
Vectorialmente: $\vec{E} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 (K_1 + K_2) r^2} \hat{r}$

Ejemplo 95. Se tiene un condensador de placas paralelas cargado con carga Q y aislado de manera que la carga en las placas se conserva. Calcular la energía en el condensador antes y después de insertar un dieléctrico, llenando todo el espacio entre las placas. En base a lo calculado, ¿se realizó algún trabajo para insertar el dieléctrico? ¿Quién lo realizó?

Solución.



$$U_i = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$



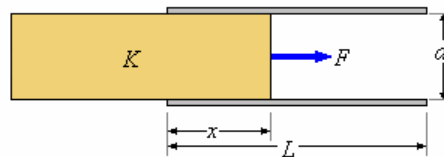
$$U_f = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{KC}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \left(\frac{1}{K} - 1 \right)$$

Si se realiza un trabajo, ese trabajo lo realiza el ente que ejerce la fuerza para introducir el dieléctrico.

Ejemplo 96. Cuál es la fuerza F necesaria para introducir un dieléctrico de constante k entre las placas de un condensador de placas paralelas, las placas se mantienen a una diferencia de potencial constante V . Siendo las dimensiones del condensador, área La , separación d .

Solución.



La figura muestra el dieléctrico parcialmente insertado, la energía potencial acumulada en esta posición es igual a la energía de la parte con dieléctrico (x) más la energía de la parte sin dieléctrico ($L-x$).

$$U = \frac{1}{2} \frac{K\epsilon_0 a(x)}{d} (\Delta V)^2 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 a(L-x)}{d} (\Delta V)^2$$

La fuerza es $F = F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$

De aquí

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{K\epsilon_0 a(x)}{d} (\Delta V)^2 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 a(L-x)}{d} (\Delta V)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{K\epsilon_0 a}{d} (\Delta V)^2 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 a}{d} (\Delta V)^2$$

Finalmente $F = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 a}{d} (K - 1) (\Delta V)^2$

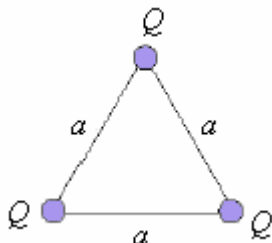
PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Considere dos esferas iguales cargadas con 1C separadas en una distancia r.
 (a) Calcule la masa que debieran tener las esferas para que se encuentren en equilibrio estático considerando la fuerza gravitacional y la electrostática.
 (b) Considerando que la densidad de masa de las partículas es de 5,5g/cm³ (aproximadamente la densidad del hierro), ¿Cuál es la distancia mínima a la cual se pueden poner dichas esferas?

Indicación: Aproxime la fuerza entre las esferas como cargas puntuales. La constante de gravitación universal es $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ y la constante en la Ley de Coulomb es $k = 9 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$.

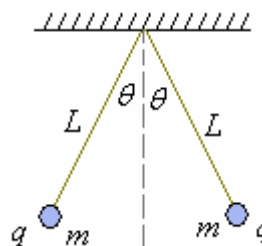
Respuesta.
 $m = 1,16 \cdot 10^{10} \text{kg}$; $r = 159,18 \text{m}$ (entre centros)

2. Tres cargas puntuales iguales a Q se encuentran ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a. Determine la magnitud de la fuerza eléctrica que experimenta cada una de ellas.



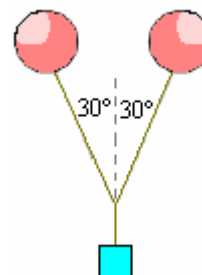
Respuesta.
 $F = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} \cos 30^\circ$

3. Dos pequeñas esferas de masa m están suspendidas de un punto común mediante cuerdas de longitud L. Cuando cada una de las esferas tiene carga q, las cuerdas forman un ángulo con la vertical como indica la figura. Demuestre que la carga q viene dada por $q = 2L \sin \theta mg \tan \theta / k$, donde k es la constante de Coulomb. Determine q si $m = 10\text{g}$, $L = 50\text{cm}$ y $\theta = 10^\circ$.



Respuesta. $2,4061 \times 10^{-7} \text{C}$

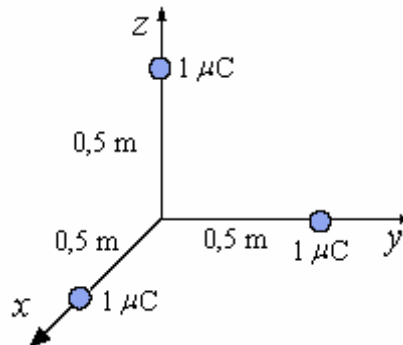
4. Dos globos iguales llenos de Helio, están cargados con carga igual Q. Mediante dos hilos de longitud 1m amarrados a los globos se suspende una masa de 0,005 kg quedando el sistema flotando en equilibrio con los hilos formando un ángulo de 60° entre sí. Determine el valor de la carga Q.



Respuesta. $1,2537 \times 10^{-6} \text{C}$

5. Dos cargas iguales a Q y 5Q están en línea recta separadas una distancia a. Determine los puntos en la línea que une las cargas donde el campo eléctrico es cero.

6. Se tienen tres cargas como se indica en la figura.



- a) Calcular el campo eléctrico en el origen del sistema coordenado.

b) Determinar la fuerza que se ejerce sobre la carga en el eje x .

7. Cuatro cargas puntuales q , $2q$, $-4q$ y $2q$ están fijas en los vértices de un cuadrado de lado b . En el centro del cuadrado se coloca una quinta carga q .

(a) Indique en que dirección apunta la fuerza que actúa sobre la carga central q .

(b) Calcule explícitamente la fuerza (magnitud y dirección).

Respuesta.

Elijiendo el eje x como la diagonal que va desde $-4q$ a $2q$ y el eje y como la diagonal que va desde la otra carga $2q$ a la carga q , las componentes de la fuerza

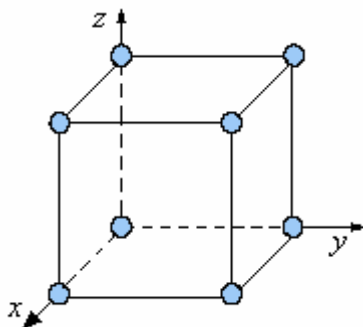
$$\text{son: } F_x = \frac{3q^2}{\pi\epsilon_0 b^2}, F_y = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 b^2}$$

8. Dos cargas Q_1 y Q_2 están a una distancia d :

(a) Determine el punto en la línea que une las cargas donde el campo eléctrico es cero.

(b) Si se trae desde el infinito una tercera carga situándolo donde el campo eléctrico es cero, ¿La energía gastada en el proceso es también cero?. Calcúlela.

9. Ocho cargas puntuales de magnitud q se encuentran en los vértices de un cubo de arista a .



a) Determine la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga en el origen, producida por las otras y

b) la magnitud de la fuerza sobre cualquier carga.

Respuesta.

$$\text{a) } \vec{F} = -\frac{kq^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$\text{b) } F = \frac{kq^2}{a^2} \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right)$$

10. En el problema anterior, calcule la energía que se requiere para formar la mencionada distribución de cargas

11. Dos cargas puntuales están colocadas sobre el eje x . $Q_1 = q$ en $x = a$ y $Q_2 = -4q$ en $x = -a$. Encuentre una expresión vectorial en coordenadas cartesianas para la fuerza que actúa sobre una carga de prueba Q , ubicada en un punto cualquiera del plano XY .

Encuentre las coordenadas (x, y) de todos los puntos

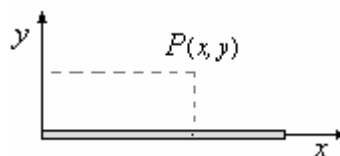
en los cuales la carga de prueba está en equilibrio. Discuta si el equilibrio es estable o inestable.

Respuesta.

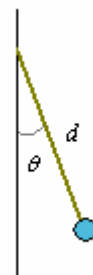
$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x-a)\hat{i} + y\hat{j}}{\left[(x-a)^2 + y^2 \right]^{3/2}} + 4 \frac{(x+a)\hat{i} + y\hat{j}}{\left[(x+a)^2 + y^2 \right]^{3/2}} \right\},$$

el punto $(3a, 0)$ es un punto de equilibrio inestable.

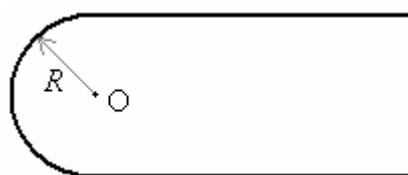
12. Deduzca una expresión para el campo eléctrico producido por un trozo recto de hilo de longitud L con carga Q distribuida uniformemente en su longitud, en un punto de coordenadas (x, y) , estando el origen en el extremo izquierdo del hilo y el eje y perpendicular al hilo.



13. De una barra fina vertical que tiene densidad lineal uniforme de carga $\lambda = 10^{-4} \text{ C/m}$, se suspende una carga puntual de magnitud $Q = 10^{-5} \text{ C}$ de masa $m = 0,1 \text{ g}$, amarrándola con un hilo de longitud $L = 1 \text{ m}$ a un punto de la barra. Determine la tensión en el hilo y el ángulo que forma con la vertical en la posición de equilibrio.

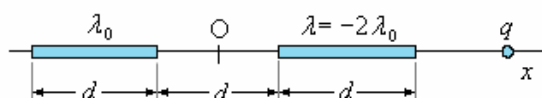


14. Una barra fina infinita, con densidad lineal de carga λ , se dobla en forma de horquilla como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el punto O.



Respuesta. $E = 0$

15. Dos barras aisladoras delgadas se disponen como se indica en la figura, una con densidad de carga ρ_0 y la otra con $\rho = 2\rho_0$.

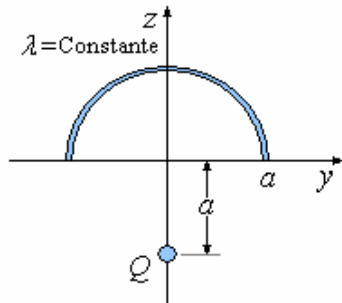


a) Calcular el campo eléctrico en el origen.

b) Determinar la fuerza que se ejercen las barras sobre una carga q dispuesta sobre el eje x .

c) Encuentre el o los puntos en los cuales la fuerza sobre q es nula.

16. En la figura la semicircunferencia yace en el plano yz mientras la carga Q es una carga puntual contenida en el eje z a la distancia a del origen. Tanto Q como λ son positivos.



- a) Encontrar una expresión para el campo eléctrico sobre el eje x debido a ambas cargas.
- b) ¿Qué relación debe existir entre Q y la carga total de la semicircunferencia para que el campo eléctrico en el origen sea nulo?

17. Un anillo metálico de radio a tiene una carga total Q distribuida uniformemente en su perímetro. Una carga puntual q se trae desde el infinito y se coloca en un punto a distancia d sobre el eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro. Determine el trabajo realizado por el campo eléctrico.

18. Un anillo aislador de radio a tiene una carga total Q distribuida uniformemente en su perímetro.

- a) Una carga puntual q se trae desde el infinito y se coloca en un punto a distancia d sobre el eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro. Determine el trabajo realizado por el campo eléctrico.
- b) Si la carga puntual hubiese estado fija y el anillo se trae desde infinito a la posición descrita antes, ¿Cuál sería su respuesta?

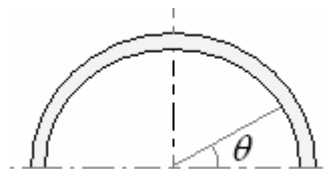
19. Dos partículas, cada una con masa m y carga q , están suspendidas por cuerdas de longitud ℓ desde un punto común. ¿Cuál es el ángulo θ que forman las cuerdas entre sí?

20. En los vértices de un cuadrado de 10 cm. de lado se colocan cargas 1×10^{-9} coulombios. ¿Cuál es la fuerza sobre cada carga?

21. Comparar la fuerza gravitacional y la fuerza eléctrica entre dos electrones colocados muy cerca. ($e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg)

22. Se tienen tres cargas iguales a q en los vértices de un triángulo equilátero, ¿qué carga y en qué posición debe colocarse para que el sistema esté en equilibrio?

23. Se tiene una semicircunferencia de radio R con una distribución de carga lineal $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$. Calcular la carga total.



24. Un cilindro recto de radio R y altura L orientado a lo largo del eje z , tiene una carga no uniforme $\rho(z) = \rho_0 + Az$ con referencia a un origen en el centro del cilindro. ¿Cuál es la fuerza sobre una carga q localizada en el centro del cilindro?

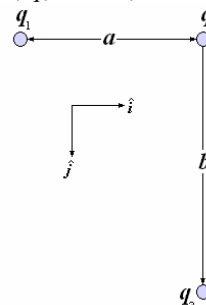
25. Un disco circular de radio R tiene una carga total Q uniformemente distribuida en su superficie. Calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje del disco a una distancia z del plano de dicho disco.

Respuesta.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \hat{z}$$

26. La figura muestra tres cargas que se mantienen fijas en el plano xy .

- a) Halle, en cartesianas, la fuerza eléctrica neta sobre q_3 debida a las otras dos cargas.
- b) Evalúe el resultado anterior para el caso $q_1 = 25$ mC, $q_2 = -16$ mC, $q_3 = 5$ mC, $a = 3$ m y $b = 4$ m.



Respuesta.

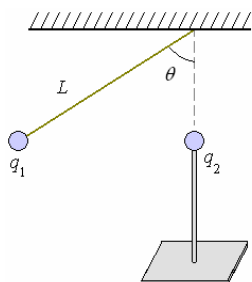
a)

$$\vec{F}_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{q_1 a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right] \hat{i} + \left[\frac{q_1 b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{q_2}{b^2} \right] \hat{j} \right\}$$

b) $\vec{F}_3 = 9(3\hat{i} - \hat{j})10^3$ N

27. El sistema de la figura se encuentra en reposo. Las dos partículas tienen la misma carga $q_1 = q_2 = q$ y se encuentran a la misma altura. La carga q_1 tiene masa m y cuelga de un hilo tenso que forma un ángulo θ con la vertical. La carga q_2 se mantiene fija en su lugar por medio de un soporte unido a una masa.

Halle la longitud L del hilo.

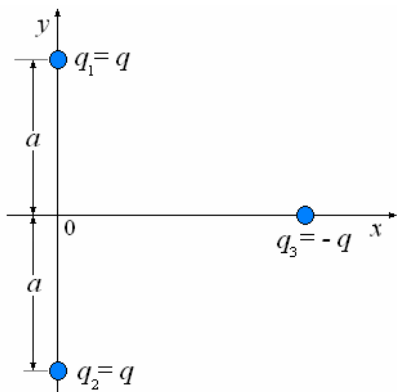


Respuesta.

$$L = \sqrt{\frac{q^2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \sin^3 \theta}}$$

28. La figura muestra un sistema de tres partículas cargadas en un plano xy horizontal. Las partículas 1 y 2 se mantienen fijas y la 3, de masa m , se está moviendo a lo largo del eje x bajo la influencia de las fuerzas eléctricas que le aplican las otras dos. Llame $x_{(t)}$ a la posición de q_3 respecto al origen.

- Halle la fuerza neta sobre q_3 y su ecuación de movimiento.
- ¿Es el punto $x = 0$ un punto de equilibrio? ¿Por qué?
- Halle el período del movimiento de q_3 si inicialmente se suelta desde el reposo en un punto $|x_{(0)}| \ll a$.



Respuesta.

$$a) \vec{F}_3 = -\frac{q^2 x \hat{i}}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + x^2)^{3/2}},$$

$$x + \frac{q^2 x}{2\pi\epsilon_0 m (a^2 + x^2)^{3/2}} = 0$$

$$b) \text{ Es un punto de equilibrio porque } \vec{F}_3(x) \Big|_{x=0} = 0$$

$$c) T = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m a^3}{q^2}}$$

29. Una carga puntual de $5 \mu C$ se coloca en el origen, otra carga puntual de $8 \mu C$ se coloca a 3 m del origen sobre el eje x , y una tercera carga de $12 \mu C$ se coloca a 3 m del origen sobre el eje y .

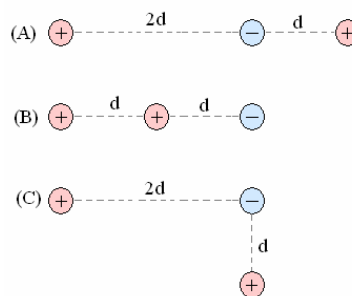
Aproxime $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ y halle la

magnitud de la fuerza sobre la carga en el origen.

Respuesta.

$$F = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)(q_1 q_2 + q_1 q_3)} = 10^4 N$$

30. Un electrón y dos protones se colocan en los tres diferentes arreglos mostrados en la figura. Llamemos F al módulo de la fuerza eléctrica total que los protones ejercen sobre el electrón. Compare F en los tres casos y ordene de mayor a menor.

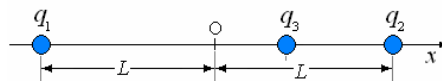


Respuesta.

En el caso B > que en el caso C > que en el caso A

31. En el sistema de la figura las tres partículas poseen la misma carga, $q_1 = q_2 = q_3 = q$. Las partículas 1 y 2 se mantienen fijas y la 3, de masa m , se está moviendo a lo largo del eje x bajo la influencia de las fuerzas eléctricas que le aplican las otras dos. Llamaremos $x_{(t)}$ a la posición de q_3 respecto al origen O.

- Halle la fuerza neta sobre q_3 y su ecuación de movimiento.
- ¿Es el punto $x = 0$ un punto de equilibrio? ¿Por qué?
- Suponga que $|x_{(t)}| \ll L$ y halle el período de las pequeñas oscilaciones de la partícula 3 en torno al origen.



Respuesta.

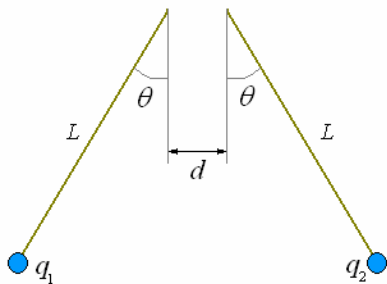
$$a) \vec{F}_3 = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(L+x)^2} - \frac{1}{(L-x)^2} \right] \hat{i},$$

$$x + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m} \left[\frac{1}{(L+x)^2} - \frac{1}{(L-x)^2} \right] = 0,$$

$$b) \text{ Es un punto de equilibrio porque } \vec{F}_3(x) \Big|_{x=0} = 0.$$

$$c) T = 2\pi \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m L^3}{q^2}}$$

32. Dos pequeños cuerpos con cargas q_1 y q_2 del mismo signo están en reposo suspendidos mediante hilos de longitud L . Los hilos, como se muestra en la figura, forman un ángulo θ con la vertical y sus puntos de sujeción al techo están separados una distancia d .
- Dibuje el diagrama de fuerzas de cada cuerpo.
 - Escriba en componentes (vertical y horizontal) la segunda ley de Newton para cada carga.
 - Determine las masas de los dos pequeños cuerpos.



Respuesta.

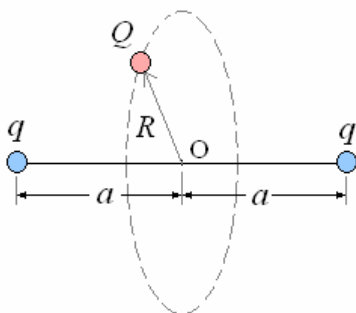
b) $T_1 \cos \theta = mg$,

$$T_1 \sin \theta = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (d + aL \sin \theta)^2}$$

para q_2 se cambia $T_1 \rightarrow T_2$ y $m_1 \rightarrow m_2$.

c) $m_1 = m_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \tan \theta (d + aL \sin \theta)^2}$

33. Dos partículas, fijas y de carga q cada una se encuentran separadas una distancia $2a$. Una tercera partícula de masa M y carga Q está sometida solamente a la fuerza electrostática de las partículas fijas, ella gira en una órbita circular de radio R ; la órbita es perpendicular a la línea que une las dos partículas fijas y tiene su centro en el punto medio entre ellas. Ver figura.
- Calcule la fuerza electrostática sobre Q . Indique qué signo debe tener Q .
 - Halle la rapidez de Q .
 - Determine para qué valor de R es máximo el módulo de la fuerza sobre Q .



Respuesta.

Tomaremos el vector unitario \hat{r} como aquél que apunta del centro O de la circunferencia hacia Q .

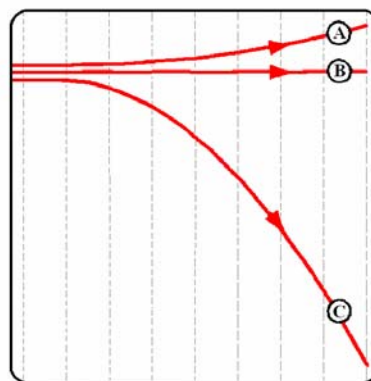
a) $\vec{F} = \frac{qQR}{2\pi\epsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}} \hat{r}$, $\text{Signo}(Q) = -$

$\text{Signo}(q)$.

b) $v = \sqrt{\frac{|qQ|R^2}{2\pi\epsilon_0 M (R^2 + a^2)^{3/2}}}$

c) $R = \frac{2}{\sqrt{2}}$

34. Un haz constituido por neutrones, electrones y protones, todos con igual velocidad, penetra en un campo vertical uniforme y se divide en otros tres haces A, B y C como indica la figura. Desprecie el efecto de la gravedad e indique a cuál tipo de partículas corresponde cada haz. Indique también qué se puede decir acerca del sentido del vector campo eléctrico.

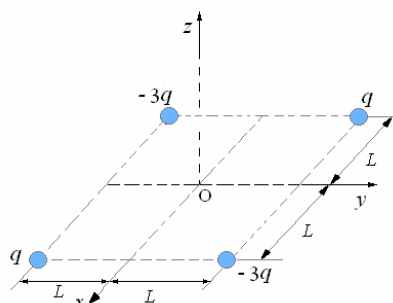


Respuesta.

Los neutrones forman el haz B los electrones el haz C y los protones el haz A.

El sentido del campo eléctrico es hacia arriba

35. En los vértices de un cuadrado de lado $2L$ se fijan 4 partículas cuyas cargas se señalan en el dibujo.
- Calcule el campo eléctrico del sistema en un punto z sobre el eje perpendicular al cuadrado y que pasa por su centro.
- Ayuda: Calcule por separado la contribución de cada par de cargas conectadas por una diagonal.



- b) En el punto z se coloca una partícula de masa m y carga $2q$, inicialmente en reposo. Suponga que la gravedad no es relevante en este problema.
- Halle la ecuación de movimiento de la partícula de masa m .

b₂) Suponga que $z < L$ y calcule el período de las pequeñas oscilaciones que describe la partícula.

Respuesta.

Tomaremos el vector unitario \hat{k} paralelo al eje z y apuntando hacia arriba.

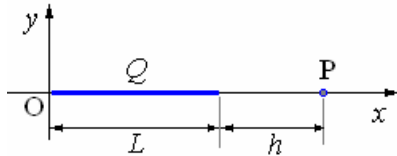
$$a) \vec{E} = -\frac{qz}{\pi\epsilon_0(z^2 + 2L^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

$$b_1) \ddot{z} + \frac{2q^2z}{\pi\epsilon_0 m(z^2 + 2L^2)^{3/2}}.$$

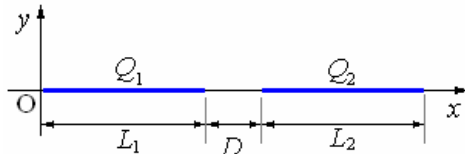
$$b_2) T = 2\pi \sqrt{\frac{\pi\sqrt{2}\epsilon_0 mL^3}{q^2}}$$

36. La figura muestra una barra delgada de longitud L y carga Q uniformemente distribuida. El punto P está en la misma línea de la barra y a una distancia h del extremo de la misma.

a) Halle el campo eléctrico producido por la barra en el punto P y la fuerza eléctrica que le aplicaría a una carga puntual q que se colocara allí.



b) La figura muestra dos barras delgadas, colineales, separadas una distancia D y de longitudes L_1 y L_2 . Sus cargas Q_1 y Q_2 están uniformemente distribuidas. Aproveche el resultado de la parte a) y halle la fuerza eléctrica entre las dos barras.



Respuesta.

$$a) \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+L} \right) \hat{i},$$

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+L} \right) \hat{i}$$

b) [Fuerza sobre Q_2] =

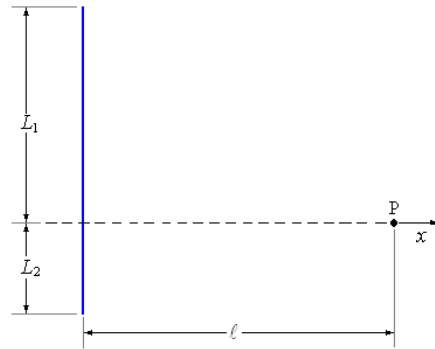
$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 L_1 L_2} \ln \left[\frac{(D+L_1)(D+L_2)}{D(D+L_1+L_2)} \right] \hat{i}$$

37. El hilo recto de la figura tiene longitud $L = L_1 + L_2$ y carga Q uniformemente distribuida.

a) Halle el campo eléctrico que produce el hilo en el punto P.

b₁) Halle el valor del campo eléctrico para puntos tales que $L_1 = L_2 = L/2$.

b₂) Reescriba el resultado de b₁ de forma tal que no aparezca Q y aparezca λ (la densidad longitudinal de carga del hilo).



c) Para hallar el campo eléctrico producido por un hilo recto de longitud infinita tomemos el límite $L \rightarrow \infty$ en b₁ y en b₂. Explique por qué son distintos los dos límites. ¿Cuál se debe tomar?

Respuesta.

a)

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell L} \left[\left(\frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + \ell^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + \ell^2}} \right) \hat{i} + \left(\frac{\ell}{\sqrt{L_1^2 + \ell^2}} - \frac{\ell}{\sqrt{L_2^2 + \ell^2}} \right) \hat{k} \right]$$

$$b_1) \vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + \ell^2}} \right) \hat{i} \right]$$

$$b_2) \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \ell} \left[\left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4\ell^2}} \right) \hat{i} \right]$$

c) $\lim_{L \rightarrow \infty} \vec{E}_1 = 0$ (corresponde a una carga Q finita diluida en un hilo infinito)

$\lim_{L \rightarrow \infty} \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \ell} \hat{i}$ (Corresponde a un hilo infinito con densidad de carga finita)

38. Un hilo circular de radio R y carga Q uniformemente distribuida está en el plano xy y su centro coincide con el origen.

a. Halle el campo eléctrico que produce en el punto de coordenadas cartesianas $(0, 0, z)$.

b. Estudie el comportamiento del campo encontrado en la parte a cuando $z > R$.

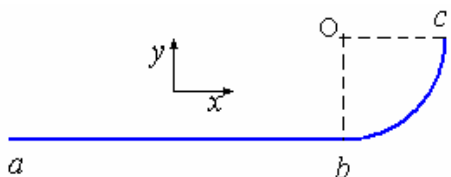
Respuesta.

$$a) \vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

b) $\vec{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{k}$ (desde lejos se ve como una carga puntual).

39. La figura muestra un hilo cargado abc con densidad longitudinal de carga λ . El tramo bc es un cuarto de una circunferencia de radio R y centro en O .

El tramo ab es recto, de longitud $L = 4R/3$ y perpendicular a la línea Ob .

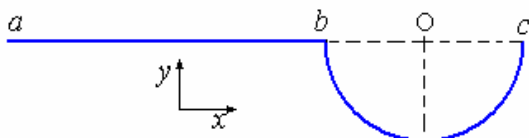


- a) Calcule el campo eléctrico que producen en el punto O cada uno de los dos tramos ab y bc .
- b) Halle el campo eléctrico neto que produce todo el hilo en el punto O.

Respuesta.

- a) $\vec{E}_{ab} = \frac{\lambda}{10\pi\epsilon_0 R}(\hat{i} + 2\hat{j}), \vec{E}_{bc} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(-\hat{i} + \hat{j})$
- b) $\vec{E}_{abc} = \frac{3\lambda}{20\pi\epsilon_0 R}(-\hat{i} + 3\hat{j})$

40. La figura muestra un hilo cargado con densidad longitudinal de carga). El tramo bc es la mitad de una circunferencia de radio R y centro en O. El tramo ab es recto, de longitud $L = 2R$ y paralelo a la línea bO

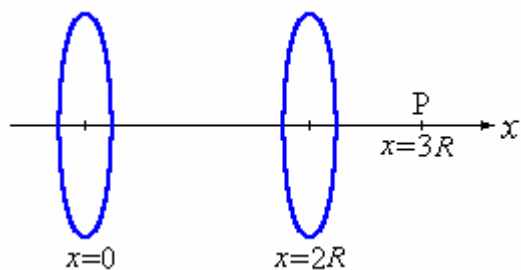


- a) Calcule el campo eléctrico que producen en el punto O cada uno de los dos tramos ab y bc .
- b) Halle la magnitud del campo eléctrico neto que produce todo el hilo en el punto O y el ángulo que forma con la dirección.

Respuesta.

- a) $\vec{E}_{ab} = \frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0 R}\hat{i}, \vec{E}_{bc} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{j}$
- b) $E_{ab} = \frac{|\lambda|}{6\pi\epsilon_0 R}$, ángulo $\text{arc tg}(3)$.

41. Dos discos de radio R se ubican como se muestra en la figura y una carga $q = -Q/2$ es puesta en el punto P. El disco izquierdo tiene una carga $Q (> 0)$ y el derecho $-Q$, ambas uniformemente distribuidas.



- a) Calcular la fuerza que la carga $q = -Q/2$, ejerce sobre cada uno de los planos.

b) Determinar el lugar donde pondría una segunda carga $q = -Q/2$ de modo que la fuerza neta sobre ella sea nula.

42. Determine la fuerza entre un disco de radio R cargado con densidad uniforme de carga σ y una varilla de largo L y densidad lineal λ colocada en el eje del disco, a una distancia b del mismo.

Respuesta.

$$\vec{F} = \frac{\sigma\lambda}{2\epsilon_0} \left[L + \sqrt{R^2 + b^2} - \sqrt{R^2 + (b+L)^2} \right] \hat{k}$$

43. Una esfera uniformemente cargada de radio R esta centrada en el origen con una carga Q . Determine la fuerza resultante que actúa sobre una línea uniformemente cargada, orientada radialmente y con una carga total q con sus extremos en $r = R$ y $r = R + d$.

Respuesta.

$$\vec{F} = \frac{Q\lambda d}{4\pi\epsilon_0 R(R+d)} \hat{r}$$

44. Un cilindro circular recto de radio R y altura L esta orientado a lo largo del eje z y tiene una densidad de carga volumétrica no uniforme dada por $\rho(r) = \rho_0 + \beta r$, donde r se mide respecto del eje del cilindro. Calcule el campo eléctrico producido por esta distribución sobre el eje del cilindro.

Respuesta. $\vec{E} = 0$

45. En la pregunta anterior suponga que la distribución de carga es $\rho(z) = \rho_0 + \beta z$ donde z se mide respecto de la base del cilindro. Calcule el campo eléctrico producido por esta distribución sobre el eje del cilindro.

46. Una carga lineal de densidad λ con la forma de un cuadrado de lado L se encuentra en el plano yz con su centro en el origen. Determine el campo eléctrico sobre el eje x a una distancia arbitraria x , y compare el resultado con el del campo que existe en el eje de una anillo cargado de radio $r = L/2$, con un centro en el origen y con la misma carga total.

Respuesta.

$$\vec{E}_{\text{cuadrado}(x)} = \frac{\lambda L}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + L^2/4)\sqrt{x^2 + L^2/2}} \hat{i},$$

$$\vec{E}_{\text{anillo}(x)} = \frac{\lambda L}{4\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + L^2/4)^{3/2}} \hat{i}$$

47. Una carga puntual q está situada en el centro de un cubo cuya arista tiene una longitud d .

- a) ¿Cuál es el valor del flujo de $\vec{E} \left(\int \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$ en una cara del cubo?

b) La carga se traslada a un vértice del cubo. ¿Cuál es el valor del flujo de a través de cada una de las caras del cubo?

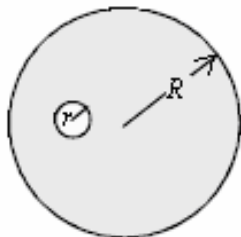
48. Dos láminas planas, paralelas e infinitas, cargadas con una densidad $\sigma_1 = 4 \mu\text{C}$ y $\sigma_2 = 6 \mu\text{C}$, distan 2 cm. Estudiar el campo eléctrico de este sistema. Supongamos que dichos planos en vez de estar paralelos se cortan perpendicularmente. Demostrar que la magnitud del campo es la misma en las cuatro regiones que ellos determinan en el espacio.

49. Calcule el campo eléctrico producido por una superficie circular de radio R con distribución de carga σ a lo largo del eje de simetría perpendicular al plano que la contiene y determine su valor en el límite $R \gg z$. Compare su resultado con el valor que se obtiene utilizando la ley de Gauss en el caso de un plano infinito.

50. Repita el cálculo anterior para el caso en que la superficie fuese un cuadrado de lado a y determine el valor límite cuando $a \gg z$

51. Un cilindro macizo, muy largo, de radio a , tiene una carga distribuida con una densidad de carga $\rho = -Ar$, donde A es una constante positiva. Determine el valor del campo eléctrico en el interior y el exterior cercano al cilindro, en puntos lejanos de sus extremos.

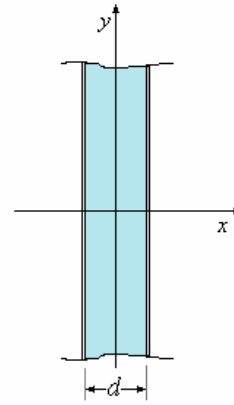
52. La figura muestra una esfera aisladora de radio R con densidad de carga $\rho = \text{constante}$, la cual tiene una burbuja esférica vacía en su interior, de radio r , situada a la distancia a del centro. Calcule el campo eléctrico:



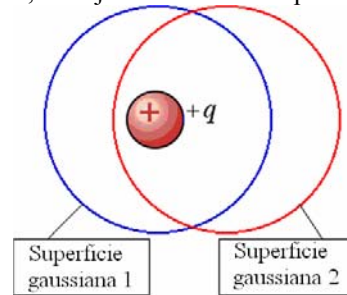
- a) en el centro de la burbuja,
- b) sobre una línea que contenga los centros de la esfera y la burbuja, dentro y fuera de la esfera y
- c) sobre un eje perpendicular a la línea que une los centros de la esfera y la burbuja, dentro y fuera de la esfera.

53. La figura representa un volumen aislante de espesor $d = 0,5\text{m}$ limitado por planos infinitos (perpendiculares al eje x) (en corte). La densidad de carga volumétrica es constante, $\rho = 10^{-6} \text{C/m}$.

- a) Determine el campo eléctrico a ambos lados del dieléctrico.
- b) ¿porqué $E = 0$ en el centro del dieléctrico?
- c) Determine el campo eléctrico en el interior del dieléctrico como función de x .

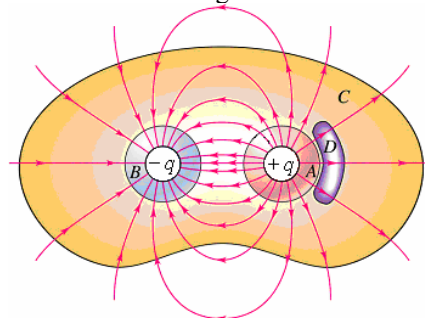


54. Una superficie gaussiana esférica (1) encierra y se centra en una carga puntual $+q$. Una segunda superficie gaussiana esférica (2) del mismo tamaño también encierra la carga pero no se centra en ella. ¿Cómo es comparado al flujo eléctrico a través de superficie 1, el flujo a través de la superficie 2?



Respuesta. iguales

55. Dos cargas del punto, $+q$ y $-q$, se arregla según lo demostrado. ¿A través de qué superficie(s) cerrada el flujo eléctrico neto es igual a cero?



Respuesta. La superficie C y la superficie D

56. Se tiene una superficie cuadrada de lado a con carga $\sigma \text{ C/m}^2$. ¿Cuál es el valor del Campo eléctrico en puntos situados en el eje que pasa por el centro del cuadrado.

57. Se tienen dos alambres infinitos separados por una distancia $2d$, con cargas iguales y opuestas λ y $-\lambda$, ¿cuál es la fuerza entre ellos?

58. Una esfera no conductora de masa m y cargada, cuelga por medio de un hilo de longitud ℓ , se

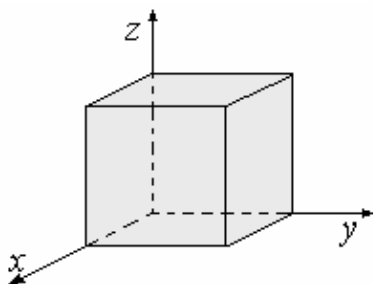
encuentra bajo la acción de un campo eléctrico \vec{E} . Calcular la carga da la esfera si el ángulo entre la vertical (perpendiculares al Campo) y el hilo es θ .

59. Se tiene una recta infinita con densidad de carga lineal λ y una carga q situada a una distancia perpendicular d , ¿cuál es el campo eléctrico en un punto entre ellos sobre la distancia d ?

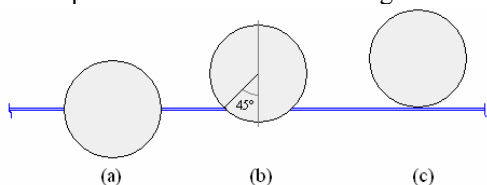
60. Un casquete esférico definido por el ángulo sólido π y radio R , tiene una carga superficial de densidad σ . ¿Cuál es el valor del Campo eléctrico en el centro de curvatura del casquete?

61. Se tiene una Carga q en el centro de un cilindro de longitud 2ℓ y radio R , encontrar el flujo a través de cada una de las caras y el flujo total.

62. Dado un campo eléctrico $\vec{E} = 2x\hat{i} + y\hat{j}$ N/C. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa cada una de las caras del cubo, de lado 1 m. y esté en el primer octante



63. Calcular el flujo eléctrico producido por una lámina con carga superficial de densidad σ que atraviesa una superficie esférica de radio R en cada una de las posiciones mostradas en la figura.



64. Encontrar el Campo eléctrico de un cilindro infinito de radio R y con densidad de carga ρ coulombios/m³ para puntos $r > R$, $r = R$ y $r < R$.

65. Se tiene una esfera de radio R y con densidad de $\rho(r) = c/r$. ¿A qué es igual el campo eléctrico dentro de la esfera ($r < R$)?

66. Una lámina infinita de espesor a contiene una densidad de carga uniforme ρ . Encontrar el campo eléctrico para todo punto.

67. Una nube de carga con simetría esférica origina un campo eléctrico dirigido radialmente hacia afuera desde el centro de la nube y es el siguiente

$$E(r) = \frac{A}{r^2} (1 - e^{-ar})$$

Hallar la densidad de carga $\rho(r)$ en la nube.

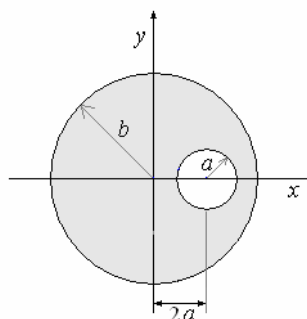
68. Dos cáscaras esféricas concéntricas de radios a y b , aisladas una de la otra, la interior tiene una Carga Q y la exterior está conectada a tierra. ¿Cuál es el campo eléctrico entre ellas? ¿Qué pasa cuando la esfera exterior no está conectada a tierra?

69. Dos cáscaras esféricas concéntricas de radios a y b tienen Cargas Q y $-Q/2$ respectivamente. ¿Cuál es el Campo eléctrico para todo punto?

70. ¿Cuál es la densidad de carga de la superficie infinita que sostiene flotante una partícula con masa m y carga q .

71. Hallar la fuerza por unidad de área sobre un plano infinito con carga uniforme debido a otro plano infinito con carga uniforme paralelo al primero.

72. Se tiene un cilindro infinito de radio b y un vacío cilíndrico de radio a , tal como se muestra en la figura. Si la carga por unidad de volumen es ρ ¿Cuánto vale al Campo eléctrico en todos los puntos?



73. Bajo ciertas circunstancias la intensidad del campo eléctrico en la atmósfera tiene un valor E_1 en la superficie y un valor E_2 a una altura h sobre la superficie. En ambos casos el sentido del vector es hacia la Tierra. Determinar el valor promedio de la densidad de carga promedio en la atmósfera debajo de h .

Calcular para $E_1 = 300$ V/m, $E_2 = 20$ V/m y $h = 1400$ m.

74. Un haz de electrones que se mueven con una velocidad de 2×10^6 m/s pasa entre dos placas horizontales que tienen densidad de carga 1×10^9 C/m² y -3×10^9 C/m². Suponer que el campo producido es el mismo a que si fueran placas infinitas. El haz ingresa paralelo a las placas y deja el campo después de pasar

1 cm., encontrar la deflexión resultante de los electrones.

75. Se tienen dos hilos aisladores muy largos, uno en la dirección del eje x con una densidad de carga λ_1 y el otro, en la dirección del eje y con una densidad de carga λ_2 . Hallar el potencial V y el campo eléctrico en cualquier punto del plano xy y mostrar que

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

76. Un globo esférico de radio R tiene una carga superficial con densidad σ .

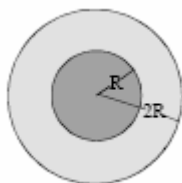
- Calcule el campo eléctrico en el interior y el exterior del globo.
- Determine la energía eléctrica que se requiere para cargar el globo trayendo las cargas desde el infinito.
- Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico generado por la carga en el globo al inflarlo entre R y $R + \Delta R$.

77. Una esfera aisladora de radio a y densidad de carga dada por $\rho = \rho_0 e^{-r}$. Calcular el campo eléctrico en el interior y exterior de la esfera.

78. Considere la misma esfera anterior, pero esta vez rodeada por un casquete esférico conductor de radio interior $b > a$ y espesor d . El casquete exterior tiene carga nula. Calcule el campo eléctrico y el potencial respecto de infinito,

- entre las esferas,
- en el interior de la esfera conductora y
- para un radio $r > b + d$.

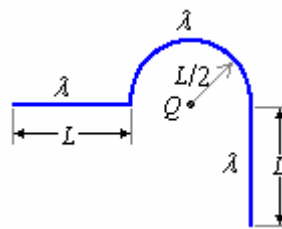
79. Se tiene una esfera aisladora con densidad de carga variable de la forma $\rho = \rho_0 e^{-r} r$ y radio R limitada exteriormente por una esfera conductora de radio interior R y exterior $2R$. En la esfera conductora hay una carga neta tal que el potencial exterior ($r > 2R$) es constante.



Determine:

- La carga total en la esfera aisladora.
- el campo eléctrico en el exterior ($r < 2R$).
- la diferencia de potencial entre $r = 3R/2$ (esfera conductora) y el centro de la esfera aisladora (considere el potencial cero ($V = 0$) en $r = \infty$).
- la densidad de carga en la superficie exterior de la esfera conductora.

80. Tres trozos de hilo cargado con densidad de carga λ se disponen como se indica en la figura.



- Determine el campo eléctrico total sobre la carga Q .
- Calcule la fuerza que ejerce Q sobre cada uno de los trozos de hilo.
- Determine la energía potencial de la carga Q .

81. Un volumen esférico de radio a está lleno con carga de densidad uniforme ρ . Calcular la energía potencial U de esta distribución esférica de carga, es decir, el trabajo requerido para formarla.

Respuesta.

$$U = \frac{3Q^2}{5a}, \text{ donde } Q \text{ es la carga total de la esfera.}$$

82. Un cilindro macizo, muy largo, de radio a , tiene una carga distribuida $\rho = -Ar$, donde A es una constante positiva. Determine el valor del campo eléctrico y el potencial en el interior y el exterior cercano al cilindro, en puntos lejanos a sus extremos.

83. Un plano conductor tiene una carga $+Q$ y a cada lado de éste, a las distancias x_1 y x_2 , se colocan, paralelas, placas infinitas conductoras con carga total nula.

Encontrar la diferencia de potencial entre las caras internas y entre las externas de las placas.

84. En una región del espacio, el potencial eléctrico está dado por $V(x, y) = Axy$ siendo A una constante. Determine la fuerza ejercida sobre una carga puntual q ubicada en un punto de coordenadas (x, y) . Calcule además el trabajo que realiza el campo eléctrico sobre q al moverse la carga desde el punto $(0, 0)$ al punto (x, y) en una línea recta.

85. Un disco circular de radio a tiene una densidad superficial de carga uniforme σ . El disco se encuentra en el plano xy con su centro coincidiendo en el centro del sistema de coordenadas.

- Obtenga una fórmula para el campo eléctrico en el eje del disco en función de z .
- Aproxime el resultado anterior a primer orden para

$$\frac{a}{z} \rightarrow 0 \text{ y pruebe que el resultado coincide con el}$$

campo de una carga puntual.

- Determine la posición de un punto sobre el eje z , mas allá del cual, el disco puede considerarse como

una carga puntual con un error en el cálculo de \vec{E} menor al 1%.

86. Calcular el campo eléctrico de un cascarón esférico de radio r con densidad de carga superficial uniforme σ en todo punto del espacio.

- a) Usando la ley de Coulomb.
b) Usando la ley de Gauss.

87. Suponga que en lugar de la ley de fuerza de Coulomb, se encuentra experimentalmente que la fuerza entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 está dada

$$\text{por, } \vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \sqrt{r_{12}})}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

- a) Halle el campo eléctrico alrededor de una carga puntual correspondiente a esta fuerza.
b) Pruebe que el campo es irrotacional.

c) Halle el flujo de \vec{E} a través de una superficie esférica centrada en la carga.

Compare con el caso de un campo coulombiano

88. Una carga q se encuentra en el vértice A del cubo ABCDEFGH. Calcular el flujo de campo eléctrico a través de la cara FECD.

89. Calcular el campo eléctrico de una esfera uniformemente cargada de carga total Q .

- a) Usando la ley de Coulomb.
b) Usando la ley de Gauss.

90. Considere dada una distribución de carga con simetría esférica. En este caso ρ es $\rho(r')$ siendo r' la distancia al centro de la distribución.

a) Encuentre una expresión general para el campo eléctrico en función de $\rho(r')$, en un punto cualquiera de una esfera de radio r y centro en el centro de la distribución.

b) Aplique el resultado anterior al cálculo del campo producido por una densidad de carga dada por

$$\rho(r') = -\frac{\epsilon_0 A b}{r'^2} e^{-br'} + 4\pi\epsilon_0 A \delta(r').$$

c) Un cascarón esférico tiene una densidad de carga $\rho = k/r^2$ en la región $a \leq r \leq b$ y cero en otro lado. Hallar el campo eléctrico en todo el espacio.

91. Un cable coaxial tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ en el cilindro interior ($r < a$) y una densidad de carga superficial uniforme σ en la superficie del cilindro exterior ($r = b$). La carga total del cable es cero. Hallar el campo eléctrico en todo el espacio.

92. Una plancha plana infinita de espesor $2d$ tiene una densidad de carga uniforme ρ . Hallar el campo eléctrico en todo punto como función de la distancia y al plano de simetría de la plancha. Graficar.

93. Dos esferas de radio R con densidades de carga $+\rho$ y $-\rho$ cuyos centros están separados por una distancia d tal que $d < 2R$ están parcialmente

superpuestas. Probar que el campo eléctrico en la región de intersección es constante y hallar su valor.

94. Una distribución estática de carga produce un

campo eléctrico radial dado por: $\vec{E} = A \frac{e^{-br}}{r} \hat{r}$,

donde A y b son constantes.

a) Hallar la densidad volumétrica de carga de la distribución.

b) Halle la carga total de la distribución

95. Considere un disco circular de radio a y densidad de carga uniforme.

a) Calcule el potencial en un punto cualquiera del eje y .

b) Determine la energía requerida para traer una carga desde el infinito hasta ese punto.

96. Calcule el potencial respecto del infinito en el centro de un cuadrado de lado b en el cual se tiene una distribución uniforme de carga superficial σ .

97. En una región de espacio existe un campo eléctrico que se deriva del potencial $V(x, y, z) = xyz - 3x - 2y - z$.

Determine el trabajo que realiza el campo eléctrico al llevarse una carga de $2 \mu\text{C}$ desde el punto $(0, 0, 0)$ al punto $(1, 1, 1)$ en forma cuasiestática (energía cinética despreciable).

98. Considere una esfera no conductora de radio R que tiene una carga total Q repartida uniformemente en su volumen. Determine el potencial eléctrico en todas partes.

99. Determine el trabajo que realiza el campo eléctrico al traer una carga puntual Q desde una distancia $2d$ hasta una distancia d de un hilo recto infinito que tiene una carga uniforme λ C/m.

100. Se tienen dos esferas metálicas aisladas de radio $r_1 = 0,10$ m y $r_2 = 0,20$ m, inicialmente descargadas y alejadas entre sí. Si a la esfera de radio r_1 se le coloca una carga de 6×10^{-8} C y luego se conectan ambas mediante un hilo conductor muy fino, calcule:

- a) La carga final de cada esfera.
b) El potencial final de las esferas.
c) La energía almacenada en el campo eléctrico antes y después de la conexión.

101. Calcule la diferencia de potencial entre dos esferas concéntricas de radios a y b ($a < b$) que tienen cargas q y Q respectivamente.

Respuesta.

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

102. Calcule el campo eléctrico producido por una distribución de carga tal que el potencial que produce

esta dado por: $V_{(r)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\lambda r}}{r}$. Encuentre la

distribución de carga $\rho = \rho_{(r)}$.

Respuesta.

$$E_{(r)} = q \frac{(1 + \lambda r)}{4\pi\epsilon_0} e^{-\lambda r}, \quad \rho_{(r)} = -q\lambda^2 \frac{e^{-\lambda r}}{4\pi r}$$

103. Las superficies interior ($r = a$) y exterior ($r = b$) de un cascaron esférico no conductor tienen la misma densidad de carga σ . La densidad de carga en el resto del espacio es nula. Encuentre el campo eléctrico en las zonas $r < a$, $a < r < b$, y $r > b$. Calcule el potencial electrostático en cada una de las regiones mencionadas.

Respuesta. $\vec{E}_{(r)} = E_{(r)}\hat{r}$, donde $E_{(r)} = 0$ si

$$r < a, \quad E_{(r)} = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \quad \text{si } a < r < b;$$

$$E_{(r)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 r^2} (a^2 + b^2) \quad \text{si } b < r,$$

$$V_{(r)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 r} (a^2 + b^2) \quad \text{si } r > b;$$

$$V_{(r)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 r} (a^2 + br) \quad \text{si } b > r > a \text{ y}$$

$$V_{(r)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (a + b) \quad \text{si } a > r.$$

104. Una burbuja de forma esférica tiene una carga Q . La energía asociada a la tensión superficial de la burbuja es proporcional a su superficie, es decir $U_{mec} = S\tau$, en que S es el área de la burbuja y τ es una constante. Calcule la energía total de la burbuja (eléctrica y mecánica) como función de su radio y grafíquela. Finalmente calcule el radio de equilibrio de la burbuja.

105. Calcúlese $\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ desde el origen e un punto

x_0, y_0 en el plano x, y para el Campo $\vec{E} = A(y\hat{i} - x\hat{j})$ a lo largo de tres trayectorias rectilíneas diferentes.

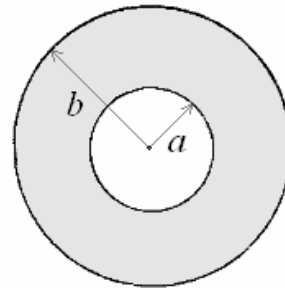
- desde $(0, 0)$ a $(0, y_0)$ y a (x_0, y_0)
- desde $(0, 0)$ a $(x_0, 0)$ y a (x_0, y_0)
- desde $(0, 0)$ directamente a (x_0, y_0)

106. Calcular el trabajo hecho contra las fuerzas electrostáticas en mover una carga de -1×10^{-10} C desde 10 cm. debajo de una carga de 1×10^{-5} C hasta una posición de 1 m. debajo de ella. En la posición final el cuerpo permanece suspendido, las fuerzas electrostáticas y gravitacionales son iguales y opuestas. ¿Cuál es la masa del cuerpo?

107. Un anillo de radio R está formado por dos semicircunferencias con cargas q y $-q$. Encontrar el potencial y el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo.

108. En un plano infinito se ha hecho un agujero circular de centro O y radio R , el plano tiene una densidad de carga $-\sigma$. Calcular el potencial y el campo en un punto en la recta perpendicular al plano en O .

109. Se tiene un cilindro infinito de radios a y b como se muestra en la figura, con densidad de carga volumétrica ρ . ¿Cuál es el valor del potencial para todo punto?



110. Encontrar la forma de las superficies equipotenciales para un segmento de recta de longitud $2a$, colocado entre $z = -a$ y $z = a$, con una carga total q .

111. Se acomodan linealmente tres cargas, la carga $-2q$ se coloca en el origen, y las otras dos cargas $+q$ se colocan en $(0, 2, 5)$ y $(3, 0, -a)$ respectivamente.

Encontrar el potencial $V_{(r)}$ para un punto en el espacio $r \gg a$.

A partir de este valor encontrar al campo eléctrico.

112. Un protón con una energía de 100 eV es disparado perpendicularmente hacia un plano metálico muy grande con una densidad de carga superficial de 10^{-7} C/m².

¿Desde dónde se disparará el protón si casi alcanza al plano?

113. Una gota de aceite tiene una carga neta de tres veces la carga del electrón y un radio de 10 cm. ¿Cuál es su velocidad terminal cuando cae entre dos placas horizontales con una diferencia de potencial de 1000 voltios y separadas 2 cm, la positiva es la de arriba?

Densidad del aceite 839 kg/m³

Densidad del aire 1,29 kg/m³

Viscosidad del aire 1,80 N.s/m²

114. La presión dentro y fuera de una pompa de jabón es la misma. ¿A qué potencial ha sido cargada la pompa de jabón de radio 2 cm? La tensión superficial de la solución de agua jabonosa es 0,0265 N/m.

115. Una esfera conductora de radio $R_1 = 3$ cm. lleva una carga negativa Q_1 . Una segunda esfera conductora le radio interior $R_2 = 4$ cm. y radio exterior $R_3 = 5$ cm, neutra, se colocan concéntricamente.

- a) Encontrar le repartición de las cargas. Si se establece contacto entre las esferas ¿cuál es la nueva repartición de las cargas?
 b) Considerando que la esfera interior está a un potencial $V_1 = 0$ lo esfera externa caté a potencial $V_2 = 10000$ V. ¿Cuál es le repartición de las cargas y el valor de estas?

116. Si una carga q se coloca a una distancia d de un plano conductor infinito mantenido a potencial cero. Se puede determinar que el campo eléctrico resultante en frente del plano es el mismo que si se tuviera una carga $-q$ a una distancia $-d$. Esta segunda carga se conoce como carga imagen. Encontrar la densidad de carga en el plano y verificar que la carga total en el plano es $-q$.

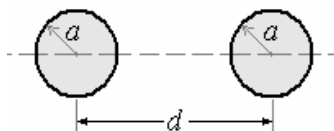
117. Encontrar las cargas imagen cuando una carga q está a iguales distancias de dos planos conductores a potencial cero que se encuentran formando un ángulo de 60° . Encontrar la fuerza sobre la Carga q .

118. Un condensador coaxial está formado por dos cilíndricos conductores concéntricos de radios a y b respectivamente y largo L . Suponiendo que el espacio entre los conductores es vacío y que el cilindro interior se encuentra a potencial $V = V_0$ y el exterior a potencial $V = 0$ y que tanto a como b son mucho menores que L , encuentre la capacidad del condensador coaxial.

Respuesta.

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$$

119. Considere un sistema formado por dos conductores cilíndricos paralelos, muy largos, de radio a , separados una distancia $d \gg a$, como muestra la figura. Entre los cilindros hay una diferencia de potencial V . Encuentre la capacidad por unidad de longitud para el sistema de conductores.



Respuesta.

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left[\frac{d + \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2a} \right]}$$

120- Encontrar la capacidad de un disco conductor muy delgado de radio a .

121. Determinar la capacidad de uno varilla delgada de radio R y longitud L , siendo $L \gg R$.

122. Determinar la capacidad por unidad de longitud entre dos alambres paralelos de radios R y distancia entre ellos d , siendo $d \gg R$.

123. Un condensador de $1 \mu F$ se carga $0V$ y otro de $2 \mu F$ se cargad a $200V$; estos se conectan de tal manera que la placa positiva de uno se conecta al negativa del otro. Encontrar la diferencia de potencial y la carga de cada condensador, así mismo la pérdida de energía que hubo.

124. En que forma cinco condensadores, cada uno de capacidad $1 \mu F$, deben de conectarse para producir una Capacidad total de $4/9 \mu F$.

125. Se tiene un condensador de placas paralelas de área de placas A y separación d , se le introduce una placa metálica paralela de espesor, calcular la capacidad resultante.

126. La Capacidad de un condensador variable cambia linealmente de 50 a $36 \mu F$ durante una rotación de 0° a 180° . Cuando se coloca a 75° una diferencia de potencial de 00 voltios se mantiene a través del condensador. ¿Cuál es la dirección y magnitud del torque electrostático experimentado por el condensador?

127. Un Condensador de $5 \mu F$ se carga a una diferencia de potencial de 12 voltios, se conecta en paralelo este condensador a otro inicialmente descargado, la diferenciada potencial disminuye a 3 voltios, ¿cuál es la capacidad del segundo condensador?

128. Se tiene dos condensadores planos de capacidades C_1 y C_2 con las armaduras de igual superficie A y con una separación d y $d/2$ respectivamente. Se conectan en paralelo y se cargan a una diferencia de potencial V_0 .

- a) Calcular la carga y la energía en cada condensador.
 b) Si es posible mover una de las armaduras del condensador C_2 , ésta se mueve hasta que la separación entre placas es d , ¿cuál es la carga en cada condensador, cuál es la nueva diferencia de potencial y cuál es la energía almacenada?
 c) ¿Cuál es la fuerza que se ejerce sobre la armadura móvil de C_2 en el estado intermedio x entre d y $d/2$ ¿cuál es el trabajo a realizar para llevar la armadura móvil de la posición inicial a la final?

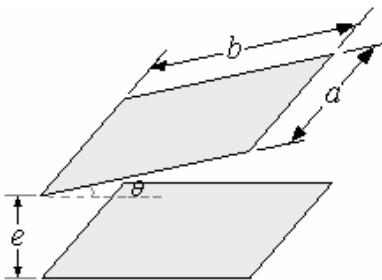
129. El Conductor exterior dz un cable coaxial tiene un radio fijo b . Determinar el radio a del conductor interior, tal que para determinada diferencia de potencial entre los conductores, la intensidad del campo eléctrico en su superficie sea mínima.

Determinar la capacidad por unidad de longitud de tal cable.

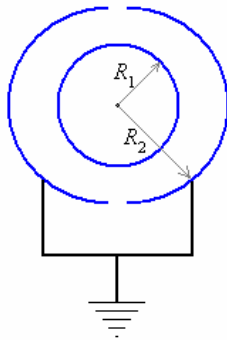
130. Una esfera metálica de un metro de radio tiene un exceso de carga eléctrica de 10^{-9} C. Se conecta mediante un alambre a una esfera inicialmente descargada de 30 cm. de radio que está lejos de la primera esfera (no tomar en cuenta la capacidad del alambre).

- a) ¿Cuál es la carga de cada una de las esferas?
- b) ¿Cuál es la energía antes de unir las y después de unir las? ¿Y si es diferente, qué pasa con la diferencia?

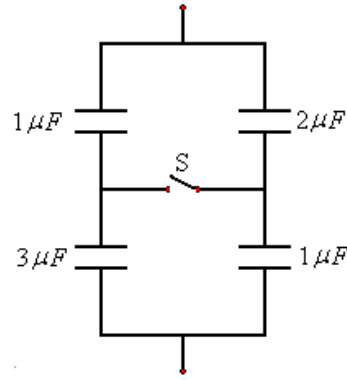
131. Las armaduras de un condensador forman un ángulo encontrar la capacidad en función de las dimensiones.



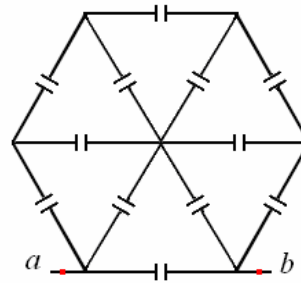
132. Un Condensador esférico está constituido de dos armaduras de radios R_1 y R_2 . La armadura exterior está formada por dos hemisferios iguales, unidos a tierra por un conductor. La armadura interna tiene una carga Q y está aislada. Calcular la fuerza a que esté sometido cada uno de los hemisferios exteriores.



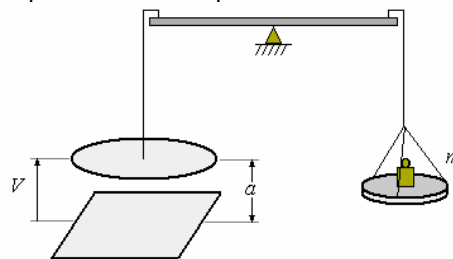
133. Se tiene el sistema de condensadores mostrado en la figura, inicialmente cargado a la diferencia de potencial de 100 V, Si se cierra la llave S ¿cual es la diferencia de potencial en cada condensador y la carga en cada uno de ellos?



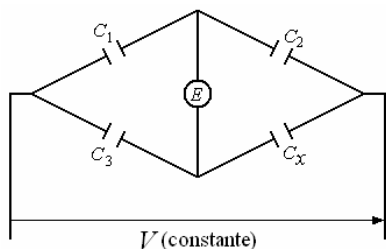
134. Encontrar la capacidad equivalente entre a y b en la figura, todos los condensadores tienen capacidad C .



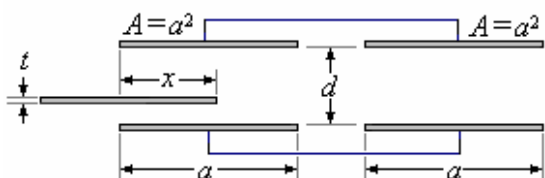
135. En la figura se muestra un **electrómetro** esquematizado, este se usa para determinar diferencias de potencial. Consiste en una balanza cuyo platillo izquierdo es un disco de área A , colocado a una distancia a de un plano horizontal formando un condensador, cuando se aplica una diferencia de potencial V entre el disco y el plano aparece sobre el disco una fuerza hacia abajo. ¿Cuál es el valor de la masa que debe ponerse en el otro platillo para retomar el equilibrio?



136. Una manera de determinar la capacidad de un condensador desconocido es utilizar el dispositivo mostrado en la figura donde E es un electrómetro. El procedimiento es tener los condensadores conocidos C_1 y C_2 ; buscar un condensador C_3 para el cual la lectura en el electrómetro sea cero. Encontrar la expresión para calcular C_x .



137. Dos condensadores idénticos de área A y lado a y separación entre placas d , inicialmente descargados, se conectan en paralelo. Mediante una batería se aplica al sistema una diferencia de potencial V_0 . Posteriormente se desconecta la batería, con lo cual los condensadores en paralelo quedan cargados y aislados. Se introduce en uno de los condensadores una placa conductora de igual área y de espesor t , como se muestra en la figura.



- Calcule la energía almacenada en el sistema cuando la placa de espesor t ha penetrado una distancia x en el condensador.
- Calcule la cantidad de carga transferida de un condensador a otro como función de x , e indique en que sentido es la transferencia.

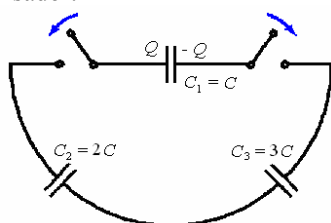
Respuesta.

a)
$$E = \frac{2\varepsilon_0 a^2}{d} \frac{a(d-t)}{2a(d-t) + at} V_0^2$$

b)
$$\Delta Q_A = -\frac{at}{2a(d-t) + at} \frac{Q}{2}$$
, donde Q es la carga total en el sistema.

138. La figura muestra un circuito con tres condensadores y dos interruptores unidos por hilos conductores. El condensador C_1 tiene carga Q y los otros dos están descargados. En cierto momento se cierran los interruptores y se espera hasta que el sistema alcance el equilibrio.

- Encuentre la carga que se almacena en cada placa de cada condensador.
- Halle la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador.



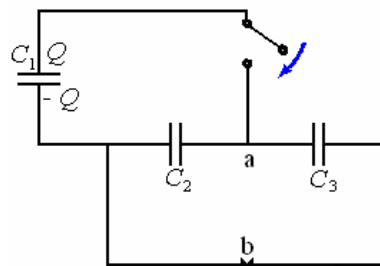
Respuesta. Llamaremos q_1, q_2 y q_3 a las cargas en las placas izquierdas de los condensadores C_1, C_2 y C_3 respectivamente.

a)
$$q_1 = \frac{5Q}{11}, q_2 = q_3 = \frac{6Q}{11}$$

b)
$$V_1 = \frac{5Q}{11C}, V_2 = \frac{3Q}{11C}, V_3 = \frac{2Q}{11C}$$

139. El condensador C_1 de la figura está cargado como se muestra y los otros dos condensadores están descargados. Se cierra el interruptor S y se espera hasta que el sistema alcance el equilibrio.

- Determine las cargas en las placas de los tres condensadores que están conectadas al punto a .
- Halle la diferencia de potencial $V_a - V_b$.



Respuesta.

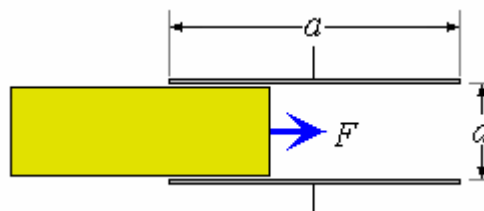
a)
$$q_1 = \frac{C_1 Q}{C_1 + C_2 + C_3}, q_2 = \frac{C_2 Q}{C_1 + C_2 + C_3},$$

$$q_3 = \frac{C_3 Q}{C_1 + C_2 + C_3}$$

b)
$$V_a - V_b = \frac{Q}{C_1 + C_2 + C_3}$$

140. Responder a la pregunta anterior cuando la placa que se introduce en el condensador de la izquierda está hecha con un dieléctrico cuya constante es ε .

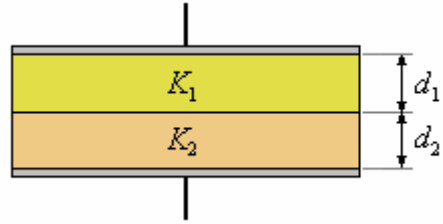
141. Entre las placas del condensador de la figura, de lados a y b , existe una diferencia de potencial constante V_0 .



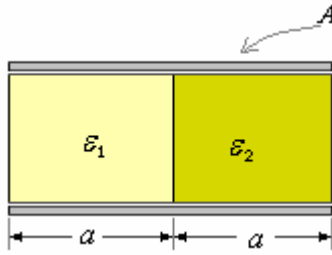
- Calcular la carga $Q(x)$ en las placas en función de la distancia x cuando se introduce un dieléctrico de constante ε y ancho b , como se indica.
- Determine la variación de energía en el condensador en función de x .
- Determine la fuerza sobre el dieléctrico en función de x .

Respuesta.

a) $Q_{(x)} = \frac{V_0 b}{d} [\epsilon x + \epsilon_0 (a - x)]$, b)
 $U_{(x)} = \frac{Q^2 d}{2b[\epsilon x + \epsilon_0 (a - x)]}$, c) $\vec{F} = -\nabla U_{(x)}$



142. En un condensador de placas cuadradas paralelas de área A , se introducen dos dieléctricos de constantes ϵ_1 y ϵ_2 que llenan totalmente el interior del condensador como se muestra en la figura. Calcule la capacidad del condensador.



Respuesta. $C = \epsilon_0 (\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{2a^2}{d}$, $A = 4a^2$

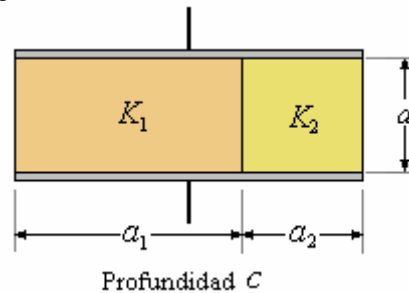
143. Un cubo dieléctrico de lado L tiene una polarización radial dada por $\vec{P} = A \vec{r}$, donde A es constante y $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. El origen de coordenadas está en el centro del cubo. Encontrar todas las densidades de carga y mostrar que la carga total se hace cero.

144. Dos placas conductoras paralelas están separadas una distancia d y mantenidas a la diferencia de potencial ΔV . Un dieléctrico de constante k y espesor uniforme t se ensarta entre las placas. Determinar los campos vectoriales E y D en el dieléctrico y en el vacío.

145. Se tiene un condensador de placas paralelas separadas una distancia d y área A . El espacio entre las placas se llena con dos dieléctricos como se muestra en la figura, calcular la capacidad del condensador.

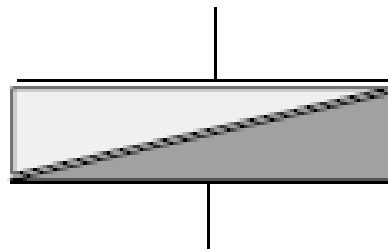
146. El dieléctrico en un Condensador de placas paralelas no es uniforme, varía linealmente de un valor en la superficie de una placa a en la superficie de la otra placa. Le distancia entre placas es d y su área A . Determinar la capacidad de este condensador.

147. ¿Cuál es la capacidad del condensador mostrado en la figura?



148. Considérese el mismo condensador del problema anterior, con los dieléctricos dispuestos diagonalmente como se indica, el cual se conecta a una batería que proporciona una tensión V .

- a) ¿Se distribuye en forma uniforme la carga en las placas? Explique.
- b) ¿Es el campo eléctrico y el campo de desplazamiento perpendiculares a las placas? Explique.
- c) Calcule la capacidad de este condensador y la distribución de carga en las placas.



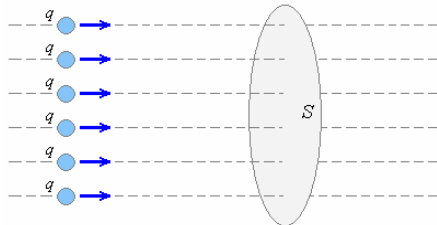
CAPÍTULO 2. Corriente Continua

CORRIENTE ELECTRICA.

Hasta ahora hemos considerado solamente cargas en reposo; ahora consideraremos cargas en movimiento. Esto implica que trabajaremos con conductores, porque en un conductor como ya dijimos los portadores de carga tienen movimiento libre. Aunque esta definición no solo es para conductores convencionales como los metales, sino también a los semiconductores, electrolitos, gases ionizados, dieléctricos imperfectos y aún en el vacío en vecindad de un cátodo los electrones emitidos termoiómicamente.

Los portadores de carga pueden ser positivos o negativos.

Las cargas en movimiento constituyen el flujo de corriente o simplemente corriente, definimos como corriente media (I_m) a través de una superficie limitada (S) como la cantidad de carga que atraviesa por unidad de tiempo.



Donde

$$I_m = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

La corriente instantánea es la corriente media calculada en el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

La unidad de corriente en el sistema MKS es el Ampere o Amperio (A).

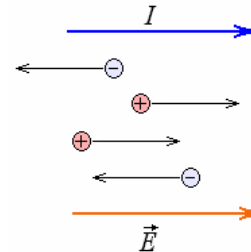
$$A = \frac{C}{s}$$

Como habíamos visto anteriormente el coulombio se define a partir de la corriente, hasta este punto todavía no podemos hacer una definición de el Ampere, lo cual haremos cuando estudiemos campos magnéticos. En un metal los portadores de carga son los electrones, mientras que los iones positivos están fijos a posiciones regulares en la estructura, solamente los electrones de valencia son los que participan en el proceso de la conducción.

En un electrolito los portadores de carga son iones positivos y negativos, como algunos iones se mueven con mayor rapidez que otros, la conducción de uno de los tipos de iones es la que predomina.

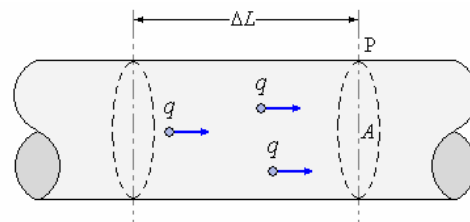
En una descarga de gas, los portadores de carga son tanto electrones como iones positivos, pero como los electrones tienen mayor movilidad la corriente prácticamente es llevada en su totalidad por los electrones

Para la dirección de la corriente vamos a utilizar la convención que toman la dirección de los portadores de cargas positivas, en dirección del campo eléctrico externo como se muestra en la figura siguiente.



DENSIDAD DE CORRIENTE

Consideremos un conductor con un solo tipo de conductores con carga q , el número de estos conductores por unidad de volumen es N , suponiendo que la velocidad de desplazamiento de estos conductores es v_d cuando está sujeto a un campo externo, en un tiempo Δt todos los elementos contenidos en el volumen $A\Delta L = Av_d\Delta t$ son $NAv_d\Delta t$ y su carga $\Delta Q = qNAv_d\Delta t$ y pasa a través de la sección A en P como se muestra en la figura.



La corriente en el punto P es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{qNAv_d\Delta t}{\Delta t} = qNAv_d$$

La corriente por unidad de área es la **Densidad de Corriente**.

$$J = \frac{I}{A} = qNv_d$$

Esta cantidad representa la rapidez del transporte de carga a través de una unidad de área normal a la dirección del flujo, es una cantidad vectorial orientada con v_d

$$\vec{J} = qN \vec{v}_d$$

La unidad de densidad de corriente en el sistema MKS es A/m^2 .

Siendo \vec{J} constante en toda la superficie A . La corriente que atraviesa A es

$$I = \vec{J} \cdot \hat{n}A$$

Siendo \hat{n} el vector unitario perpendicular al plano A . Si la densidad de corrientes no es uniforme.

$$I = \int_A \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Ejemplo 1. Un conductor de cobre conduce una corriente de densidad 1000 A/m^2 . Asumiendo que cada átomo de cobre contribuye con un electrón como portador de carga. Calcular la velocidad de desplazamiento correspondiente a esta densidad de corriente

Solución.

La densidad de corriente es $J = qNv_d$

La velocidad de desplazamiento es

$$v_d = \frac{J}{qN}$$

El valor de N (portadores por unidad de volumen) lo encontramos como sigue:

$$N = \frac{N_0 \times \rho \times \text{portadores/átomo}}{M}$$

$$N_0 \text{ (número de Avogadro)} = 6,02 \times 10^{23} \text{ N} \frac{\text{átomo}}{\text{mol}}$$

$$M \text{ (peso atómico)} = 63,5 \frac{\text{gramo}}{\text{mol}}$$

$$\rho \text{ (densidad)} = 8,92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 8,92 \times 10^6 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$$

$$\frac{\text{portadores}}{\text{átomo}} = 1$$

Finalmente

$$v_d = \frac{1000 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) \left(\frac{6,02 \times 10^{23} \text{ átomo}}{\text{mol}} \right) \left(8,92 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} \right) \frac{63,5 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{1}} = 0,739 \times 10^{-7} \text{ m/s}$$

Ejemplo 2. Protones de masa $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y que se mueven con una velocidad $2 \times 10^7 \text{ m/s}$ chocan con un blanco de masa 1 g y de capacidad calorífica específica $0,334 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$. La corriente de protones corresponde a una corriente de $4,8 \text{ A}$. ¿Con que razón la temperatura del blanco se eleva inicialmente, si una mitad de la energía de los protones se convierte en calor?

Solución.

Cada protón tiene una carga de $1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$. Si la corriente que fluye es $4,8 \text{ A}$, el número de los protones que chocan el blanco en 1 s debe ser n , donde

$$\frac{n(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})}{1 \text{ s}} = 4,8 \times 10^{-6} \text{ A}$$

$$\Rightarrow n = 3,00 \times 10^{13} \text{ protones.}$$

En un segundo la energía cinética total perdida por

los protones es $n \times \frac{1}{2} m_p v^2$, y un tercio de esta

energía se convierte en calor en el blanco. Si en un segundo la elevación de la temperatura del blanco es t , el calor ganado por la blanco es mct .

$$\text{Por lo tanto } mct = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} nm_p v^2 \text{ o}$$

$$t = \frac{nm_p v^2}{6mc} = \frac{(3,00 \times 10^{13}) (1,67 \times 10^{-27}) (2 \times 10^7)^2}{6(1)(4,18 \times 0,334)} = 2,39^\circ\text{C}$$

LA LEY DE OHM RESISTIVIDAD Y RESISTENCIA

Cuando un conductor conduce una corriente, existe un campo eléctrico E en su interior. Se ha encontrado experimentalmente para muchos conductores a temperatura constante que la densidad de corriente J es directamente proporcional a este campo. Siendo esta expresión LA LEY DE OHM.

$$\vec{J} = g \vec{E}$$

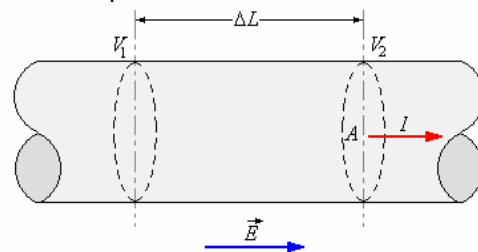
Donde la constante g es la conductividad del material, si esta conductividad no depende del campo eléctrico, se dice que el material obedece la ley de Ohm.

La ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza, como las leyes de Newton, sino es una descripción empírica que compara gran cantidad de sustancias,

El recíproco de la conductividad es la resistividad η .

$$\eta = \frac{1}{g}$$

En el caso de un conductor definido, digamos un alambre, podemos escribir la ley de Ohm en función de la caída de potencial



Escogemos un segmento corto de longitud L , la diferencia de potencial entre la sección 1 y 2 es $(V_1 - V_2) = \Delta V$. (El potencial en 1 es mayor)

Como $\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, es el igual en todos los puntos del alambre

$$\Delta V = EL \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{L}$$

Pero $\vec{J} = g \vec{E}$ y la corriente $I = \int_A \vec{J} \cdot \hat{n} dS = JA$

$$\text{De aquí } I = gEA = \frac{gA}{L} \Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{L}{gA} I$$

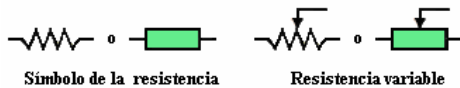
Esto nos da una relación lineal entre I y ΔV , equialente a la ley de Ohm.

A la cantidad $\frac{\Delta V}{I}$ ó $\frac{V}{I} = \frac{L}{gA}$, se la denomina

resistencia R del segmento de alambre

$$R = \frac{V}{I} = \frac{L}{gA} = \frac{\eta L}{A}$$

La unidad de resistencia es Voltio/Ampere, denominada Ohm o con el símbolo Ω y su representación esquemática se muestra en la siguiente figura.



Como podemos ver la resistencia de un conductor depende de la longitud, de su sección transversal y de la resistividad que es una propiedad intrínseca de cada material.

La unidad de la resistividad es el Ohm-m ($\Omega - m$) y para cualquier metal depende de la temperatura. A temperaturas normales la resistividad varía casi linealmente con la temperatura, suele referirse los valores a temperatura de 20°C . La relación entre resistividad y temperatura es la siguiente

$$\eta = \eta_{20^\circ} [1 + \alpha(t - 20^\circ\text{C})]$$

La tabla que se muestra e continuación nos da valores de η y α para algunos materiales a 20°C .

RESISTIVIDAD Y COEFICIENTE DE TEMPERATURA

Material	ρ a 20°C ($\Omega - m$)	α a 20°C 1°C
Plata	$1,6 \times 10^{-8}$	0,0038
Cobre	$1,69 \times 10^{-8}$	0,00393
Oro	$2,44 \times 10^{-8}$	0,0084
Hierro	10×10^{-8}	0,0050
Níquel	$7,24 \times 10^{-8}$	0,006
Aluminio	$2,83 \times 10^{-8}$	0,0039
Mercurio	$95,8 \times 10^{-8}$	0,00089
Tungsteno	$5,51 \times 10^{-8}$	0,0045
Constantan	44×10^{-8}	0,00002
Nicrón	100×10^{-8}	0,0004
Carbón	$3,5 \times 10^{-5}$	- 0,0005
Germanio	0,46	- 0,048
Silicio	640,0	- 0,075
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	
Mica	$10^{11} - 10^{15}$	
Cuarzo	$7,5 \times 10^{17}$	
Azufre	10^{15}	
Jebe duro	$10^{13} - 10^{16}$	
Ambar	5×10^{14}	
Madera	$10^8 - 10^{11}$	

Ejemplo 3. Un trozo de carbón tiene una longitud L y una sección cuadrada de lado a se mantiene una diferencia de potencial V entre los extremos de la dimensión L .

- a) ¿Cuál es la resistencia del bloque?
- b) ¿Cuál es la corriente?
- c) ¿Cuál es la densidad de corriente?

Solución.

a) Tenemos que $R = \eta \frac{L}{A}$

Como $A = a^2 \Rightarrow R = \eta \frac{L}{a^2}$

b) Por la ley de Ohm $\Delta V = RI$

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{\eta \frac{L}{a^2}} = \frac{a^2 \Delta V}{\eta L}$$

c) La densidad de corriente es

$$J = \frac{I}{A} = \frac{\eta L}{a^2} = \frac{\Delta V}{\epsilon L}$$

Ejemplo 4. Para encontrar cuánto alambre aislado se ha colocado en una bobina un técnico mide la resistencia total del alambre, encontrando $5,18 \Omega$. Después corta una longitud de 200 cm y encuentra que la resistencia de este es $0,35 \Omega$. ¿Cuál era inicialmente la longitud del alambre en la bobina?

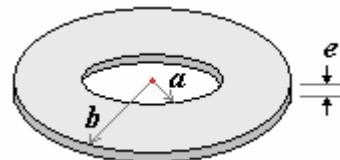
Solución.

La resistencia del alambre en la bobina es relacionada con su longitud por la fórmula $R = \frac{\rho \ell}{A}$. La longitud cortada tiene la misma resistencia y sección

transversal. Luego su resistencia es $R_0 = \frac{\rho \ell_0}{A}$

$$\therefore \frac{\ell_0}{\ell} = \frac{R_0}{R} \Rightarrow \ell_0 = 200 \frac{5,18}{0,35} = 2960 \text{ cm.}$$

Ejemplo 5. Se tiene un conductor de resistividad η en forma de anillo plano con radios a y b y espesor e como se muestra en la figura.



- a) ¿Cuál es su resistencia para una corriente perpendicular al plano?
- b) ¿Cuál es su resistencia para una corriente radial hacia afuera, de la circunferencia de radio a hacia la circunferencia de radio b ?

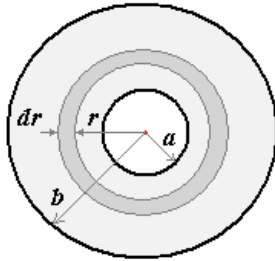
Solución.

a) $R = \eta \frac{L}{A}$

Donde $L = e$ y $A = \pi(b^2 - a^2)$

De aquí $R = \eta \frac{e}{\pi(b^2 - a^2)}$

b) Consideremos un elemento de radio r y ancho dr como se muestra en la figura.



en la expresión $R = \eta \frac{L}{A}$

En este caso la resistencia solo es un diferencial de resistencia (dR), la longitud dr , la sección transversal

$$A(2\pi r)e, \text{ de aquí: } dR = \frac{\eta dr}{2\pi e r}$$

La resistencia al flujo radial es

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\eta}{2\pi e} \frac{dr}{r} = \frac{\eta}{2\pi e} \ln r \Big|_a^b$$

$$\text{Finalmente } R = \frac{\eta}{2\pi e} \ln \frac{b}{a}$$

Ejemplo 6. Un alambre de cobre se encuentra a la temperatura de 20°C y tiene una longitud de 10 metros y una sección de $0,005\text{m}^2$ si le aplica una diferencia de potencial de 200 voltios, calcular:

- a) La resistencia del alambre a 120°C
- b) El campo eléctrico en el alambre.
- c) La densidad de corriente en el alambre.

Solución.

$$\text{a) } R = \eta \frac{L}{A}$$

Donde $L = 10 \text{ m}$, $A = 0,005 \text{ m}^2$,

$$\eta = \eta_{20} [1 + \alpha(t - 20^\circ\text{C})]$$

$$\eta = 1,7 \times 10^{-8} [1 + 0,0039(120 - 20)] = 2,36 \times 10^{-8} \Omega - m$$

$$\text{De allí } R = 2,36 \times 10^{-8} \frac{10}{0,005} = 4,72 \times 10^{-5} \Omega$$

b) Tenemos que

$$V = EL \text{ y } E = \frac{V}{L} = \frac{200}{10} = 20 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

c) Como $J = \frac{I}{A}$

Tenemos que

$$V = IR \Rightarrow$$

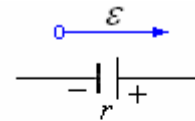
$$I = \frac{V}{R} = \frac{200}{4,72 \times 10^{-5}} = 42,37 \times 10^5 \text{ A}$$

$$\text{Luego } J = \frac{42,37 \times 10^5}{0,005} = 8,5 \times 10^8 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

FUERZA ELECTROMOTRIZ

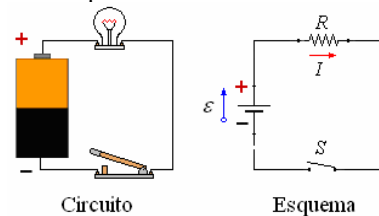
Para producir una corriente es necesario una diferencia de potencial, así mismo para poder cargar un condensador necesitamos una diferencia de potencial, en ambos casos estamos poniendo cargas en movimiento, O sea que se realiza trabajo, para esto se necesitan fuentes de energía, dispositivos que convierten le energía química o mecánica en energía eléctrica, estas son las pilas y baterías y los generadores.

Vamos a utilizarla abreviación fem por “fuerza electromotriz” que es un término que se refiere a energía y no a fuerzas) como símbolo tomamos ϵ y su representación esquemática es como se muestra en la figura siguiente.



fuerza electromotriz ϵ
Resistencia interna r
Terminal positivo (+)
Terminal negativo (-)

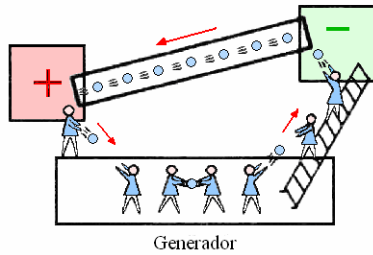
Consideremos una fem, por ejemplo una pila seca. En ella hay un terminal de bajo potencial (-) y un terminal de alto potencial (+). La diferencia de potencial entre los terminales (ΔV), cuando se emplea la pila para establecer una corriente I en un circuito como el de la figura siguiente, las cargas positivas son movidas por acción de fuerzas no electrostáticas contra las fuerzas electrostáticas (las fuerzas de coulomb ejercidas por las cargas en reposo) desde el terminal de bajo potencial hacia el terminal de alto potencial.



Si analizamos los portadores de carga del circuito de la figura vemos que al pasar de un potencial menor a uno mayor adquieren una energía que es equivalente al trabajo que hace la fuente para llevarlos del terminal negativo al terminal positivo, esto es $dW = \epsilon dq$

Suponiendo que los conductores son ideales (resistencia cero), la energía perdida por los portadores de carga al pasar por la resistencia es igual a le energía adquirida en la fem Podemos notar que la unidad de fem es también el Voltio.

¿Como se produce el flujo de electrones?



Para entender el flujo de electrones, que es la corriente eléctrica, hay que recordar las reglas de las cargas positiva y negativa.

Las cargas desiguales (+ y -) se atraen. Cargas iguales (+ y +), o (- y -) se repelen. Los electrones de un átomo tienen cargas negativas y son atraídos por las cargas positivas. Los electrones se mueven con facilidad de un átomo a otro. Para crear una corriente eléctrica en un alambre de cobre, se necesita una carga positiva en un extremo y una carga negativa en el otro.

Para crear y mantener la corriente eléctrica (movimiento de electrones), deben darse dos condiciones indispensables:

1. Que haya una fuente de electrones o dispositivo para su generación (generador), pila, batería, fotocélula, etc.
2. Que exista un camino, sin interrupción, en el exterior del generador, por el cual, circulen los electrones. A este Camino se le conoce como conductor.

ENERGIA Y POTENCIA EN LOS CIRCUITOS ELECTRICOS

Al pasar una corriente eléctrica por un conductor, la energía en realidad no se pierde sino se transforma convirtiéndose en energía térmica. Cuando ponemos un campo eléctrico en el conductor los electrones libres se aceleran

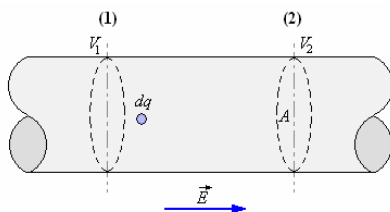
$$m \vec{a} = q \vec{E}$$

De donde $\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$

y su velocidad en el tiempo t es

$$\vec{v} = \vec{a} t = \frac{q}{m} \vec{E} t$$

Por consiguiente adquirimos una energía cinética adicional que se transfiere continuamente al conductor mediante choques entre los electrones y los iones de este. Es decir la energía se va transfiriendo inmediatamente manteniéndose la velocidad de desplazamiento en un valor medio.



En la figura anterior consideremos la carga dq que va de (1) a (2) con la corriente I en un tiempo de tal

manera que $dq = Idt$ sufre un cambio de energía

Potencial dada por $-dW = dq(V_1 - V_2) = dqV$

Donde $V = dq(V_1 - V_2)$ es la caída de potencial, luego

$$-dW = IdtV \Rightarrow -\frac{dW}{dt} = IV$$

Expresión que nos da la razón en que se pierde la energía, que viene a ser la Potencia perdida en el conductor.

$$P = IV$$

Si V está en voltios e I en amperes, que son unidades MKS, obtendremos la potencia en Joule/s = Vatios o Watts.

Como en un circuito ohmico $V = IR$, podemos escribir la expresión disipada como

$$P = I^2 R$$

A este resultado se le conoce como **Ley de Joule**, mientras que el caso de calentadores en que se desea transformar energía eléctrica en energía térmica este efecto es deseable, en otros casos esta disipación térmica es indeseable, por ejemplo en los alambres de conducción.

A esta pérdida (I^2R) se le denomina pérdida por calentamiento de Joule, a fin de reducir esta pérdida se utilizan conductores de baja resistencia (R) y mejor aún se trata de transmitir la potencia con la corriente más baja posible para lo cual hay que poner un voltaje muy elevado, por otra parte para usar la energía eléctrica con seguridad son recomendables los voltajes relativamente bajos. Para esto es necesario elevar y bajar los voltajes.

Ejemplo 7. Se diseña una unidad de calefacción que disipe 1000 watts, alimentado con una fuente de 220 voltios. ¿En qué porcentaje se reducirá la producción de calor si el voltaje se reduce a 200 voltios?

Solución.

Conectado a 220 Voltios

$$P = 1000 \text{ Watts}$$

$$\text{Como } P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R}$$

la resistencia de la unidad es

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2}{1000} = 48,4\Omega$$

Cuando la unidad se conecta a 200 Voltios la disipación será

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{200^2}{48,4} = 830 \text{ Watts}$$

El porcentaje en que se reduce el calor es

$$\% = \frac{1000 - 830}{1000} 100 = 17 \text{ por ciento.}$$

Ejemplo 8. Una tetera eléctrica contiene 2 litros de agua que caliente desde 20°C al punto de ebullición

en 5 minutos. El voltaje de la fuente es 200 V y la kW cuesta 2 centavos. Calcular

- la energía consumida (asumir que las pérdidas de calor son insignificantes),
- el costo de usar la tetera bajo estas condiciones seis veces,
- la resistencia del elemento de calefacción, y
- la corriente en el elemento.

Solución.

El calor ganado por el agua al ser llevado al punto de ebullición está dado por la expresión

$$Q = mc(\theta_2 - \theta_1).$$

- Con $m = 2 \times 10^3 \text{ cm}^3 \times 1 \text{ g/cm}^3 = 2 \times 10^3 \text{ g}$

$$c = 4,18 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ\text{C}}$$

Tenemos: $Q = (2 \times 10^3)(4,18)(100 - 20) = 6,69 \times 10^5 \text{ J}$,

y puesto que no se toman en cuenta las pérdidas de calor, ésta es la energía eléctrica consumida por la tetera. La energía es la energía consumida por segundo, la que es

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{6,69 \times 10^5 \text{ J}}{5 \times 60 \text{ s}} = 2,23 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 2,23 \text{ kW}.$$

- La tetera utiliza 2,23 kW por 5 minutos cada vez que se hierve el agua. Cuando se utiliza seis veces, 2,23 kW se usa por 30 min = 1/2 hora. Luego el costo es.

$$2,23 \text{ kW} \times \frac{1}{2} \text{ hr} \times 2 \text{ centavos.kW/hr} = 2,23 \text{ centavos}.$$

- La potencia consumida es 223 kW y el voltaje de la fuente es 200 V. Pero $P = V^2/R$ o

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(200 \text{ V})^2}{2,23 \times 10^3 \text{ W}} = 17,9 \Omega$$

- Pero también podemos escribir la potencia como $P = IV$.

$$\Rightarrow I = \frac{P}{V} = \frac{2,23 \times 10^3 \text{ W}}{200 \text{ A}} = 11,2 \text{ A}$$

Ejemplo 9. Un dínamo conducido por un motor de vapor que utiliza 10^3 kg de carbón por día produce una corriente de 200 A con una fuerza electromotriz de 240 V. ¿Cuál es la eficiencia del sistema si el valor del carbón es $6,6 \times 10^3 \text{ cal/g}$?

Solución.

La potencia provista por el carbón por segundo es

$$6,6 \times 10^3 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \left(4,18 \frac{\text{J}}{\text{cal}} \right) = 27,6 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{g}}$$

$$P_C = \frac{27,6 \times 10^3 \times 10^6}{24 \times 60 \times 60} = 3,2 \times 10^5 \text{ W}$$

La potencia eléctrica provista por el dínamo es $P = IV = 200 \text{ A} \times 240 \text{ V} = 4,8 \times 10^4 \text{ W}$.

Luego la eficiencia del sistema es

$$\frac{P}{P_C} \times 100\% = \frac{4,8 \times 10^4}{3,2 \times 10^5} \% = 15\%$$

Ejemplo 10. Un alambre de diámetro 1 milímetro que lleva una corriente elevada tiene una temperatura de 1200 K cuando ha alcanzado el equilibrio. Asumimos que el calor perdido del alambre es puramente por radiación. La temperatura de los alrededores es 300 K, la resistencia del alambre a esta temperatura es $5 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, y el coeficiente de temperatura de la resistencia del alambre es 4×10^{-3} por $^\circ\text{C}$. ¿Cuál es la magnitud de la corriente en el alambre?

Solución.

Puesto que el calor está siendo perdido por radiación solamente, la energía perdida por segundo por una l m de longitud de alambre es $W = A\sigma(T^4 - T_0^4)$,

donde A es el área superficial de la longitud del alambre y σ es la constante de Stefan, se asume que el alambre irradia como cuerpo negro.

Pero esta energía es provista por el flujo de corriente.

Así, si R es la resistencia de 1 m del alambre,

entonces $I^2 R = W = A\sigma(T^4 - T_0^4)$. Pero

$$R = \frac{\rho \ell}{A'} = \frac{\rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \ell}{A'}$$

Donde A' es la sección transversal, ℓ es la longitud, el ρ_0 es la resistencia a 300 K, y α es el coeficiente de temperatura de la resistencia. Por lo tanto

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{AA'\sigma(T^4 - T_0^4)}{\rho_0 [1 + (T - T_0)] \ell} \\ &= \frac{[1 \times 2\pi(0,5 \times 10^{-3})]^2 \pi (0,5 \times 10^{-3})^2 (5,67 \times 10^{-8})(1200^4 - 300^4)}{(5 \times 10^{-8}) [1 + (1200 - 300)] (1)} \\ &= 1258 \text{ A}^2. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = 35,5 \text{ A}.$$

Ejemplo 11. Un radiador eléctrico tiene una resistencia de $(50 + \alpha T^2) \Omega$ en la temperatura T K

y emite $\beta T^4 \text{ W}$, α y β son constantes. Su

resistencia es 125Ω cuando una diferencia potencial de 50 V es conecta a través de ella. ¿Qué corriente debe pasar a través del radiador para que emita 980 W?

Solución.

Si el radiador tiene una resistencia de 125Ω cuando hay una caída de 50 V a través de ella, la potencia consumida es

$$\frac{V^2}{R} = \frac{(50 \text{ V})^2}{125 \Omega} = 20 \text{ W}.$$

Si se asume que todo se irradiada, entonces

$$20 \text{ W} = \beta T^4 \text{ W}, \text{ Además,}$$

$$125 \Omega = (50 + \alpha T^2) \Omega \text{ o } 75 = \alpha T^4.$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{75^2}{20}$$

Cuando el radiador emite 980 W, tenemos:

$$980 \text{ W} = \beta T_1^4 \text{ W} = \frac{20\alpha^2}{75^2} T_1^4 \text{ W}$$

$$\Rightarrow \alpha T_1^2 = \sqrt{\frac{75^2 \times 980}{20}} = 525.$$

Así la resistencia del radiador ahora es $(50 + \alpha T_1^2) \Omega = 575 \Omega$. Pero la potencia, la resistencia, y la corriente se relacionan por $P = I^2 R$.

$$\text{Luego } I = \sqrt{\frac{980 \text{ W}}{575 \Omega}} = 1,3 \text{ A}.$$

Ejemplo 12. Un aparato fabricado para funcionar con 115 V y para disipar 500W es utilizado donde el voltaje es 230 V ¿qué resistencia debe colocarse en serie con el proyector antes de utilizarlo? ¿Qué energía se disipa en la resistencia agregada?

Solución.

El aparato tiene una resistencia R dada por $P = \frac{V^2}{R}$.

$$\text{Luego } R = \frac{(115\text{V})^2}{500\text{W}} = 26,45\Omega$$

La corriente se obtiene de la ecuación

$$I = \frac{P}{V} = \frac{500\text{W}}{115\text{V}} = 4,35 \text{ A}$$

Cuando el voltaje de fuente es 230 V, una resistencia adicional X se inserta en serie para dar la misma corriente. Así

$$R + X = \frac{230 \text{ V}}{4,35\text{A}} = 52,9\Omega \Rightarrow X = 26,45\Omega$$

La energía disipada en la resistencia agregada es

$$I^2 X = (4,35)^2 (26,45) = 500\text{W}.$$

Esto se ve más fácilmente de la manera siguiente. Si la misma corriente se va a sacar de una fuente con un voltaje dos veces el usado previamente, $P = IV$ será ahora el doble que antes.

Los 500 W extra serán disipados en la resistencia agregada, que debe tener la misma resistencia que el aparato, puesto que cada uno disipa la misma potencia.

Ejemplo 13. Una corriente de 2 A se pasa a través de un calentador de la resistencia $8,4 \Omega$ sumergido en 400 g de un líquido contenido en un calorímetro y la temperatura se eleva 10°C en 3 minutos. Cuando se utilizan 560 g de líquido en el mismo calorímetro y se pasa la misma corriente, la temperatura se eleva 10°C en 4 minutos. Despreciando cualquier pérdida de calor o cualquier cambio en la resistencia del calentador, calcule la capacidad calorífica del

calorímetro y la capacidad calorífica específica del líquido.

Solución.

El calor ganado por el calorímetro y el contenido debe ser igual al calor provisto por la energía eléctrica. Así si c es la capacidad calorífica específica del líquido y S la capacidad calorífica del calorímetro, entonces

$$S(10^\circ\text{C}) + (400\text{g})c(10^\circ\text{C}) = \frac{1}{4,18\text{J/cal}} (2\text{A})^2 (8,4\Omega)(3 \times 60\text{s})$$

si convertimos la energía eléctrica de julios a las calorías. Similarmente,

$$S(10^\circ\text{C}) + (560\text{g})c(10^\circ\text{C}) = \frac{1}{4,18\text{J/cal}} (2\text{A})^2 (8,4\Omega)(4 \times 60\text{s})$$

$$\begin{aligned} \therefore (560 - 400)\text{g} \times c(10^\circ\text{C}) &= \frac{1}{4,18\text{J/cal}} (2\text{A})^2 (8,4\Omega) 60(4 - 3)\text{s} \\ &= \frac{1}{4,18\text{J/cal}} (2\text{A})^2 (8,4\Omega) 60(4 - 3)\text{s} \end{aligned}$$

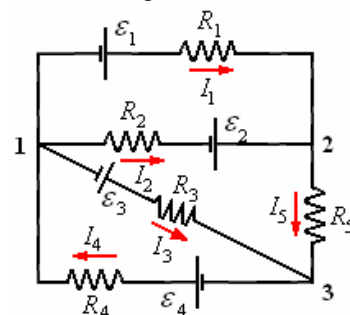
$$\therefore c = \frac{2^2 (8,4)(60)}{4,2(160)(10)} \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} = 0,3 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$$

Por lo tanto, volviendo a la primera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} S(10^\circ\text{C}) + 400\text{g} \left(0,3 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \right) (10^\circ\text{C}) &= 8 \times 3 \times 60 \text{ cal.} \\ \therefore S = \frac{(1440 - 1200)}{10^\circ\text{C}} &= 24 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{C}} \end{aligned}$$

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA. INTRODUCCION

Los sistemas de corriente eléctrica estacionarios, o sea no cambiante que encontramos son combinaciones de generadores y resistencias interconectados por alambres a los cuales se les considera conductores perfectos.



La figura muestra un circuito eléctrico esquemático, los puntos 1, 2, 3 son conocidos como **nodos** y el recorrido de un nodo a otro consecutivo se conocen como **ramas**, por ejemplo entre 1-2 (hay dos ramas), entre 1-3, entre 2-3 (hay una rama). La **mall**a es el recorrido completo de un hondo hasta volver al mismo siguiendo las ramas, por ejemplo 1-2-3, otro

ejemplo, 3-1, otro ejemplo 1-2-3-1 (hay tres mallas posibles).

A continuación estudiaremos circuitos sencillos compuestos de pilas o baterías, resistencias y condensadores en diversas combinaciones, pero solo con corriente continua que es la que no cambia de sentido como iones con las corrientes alternas, que es motivo de un estudio especial posterior.

Resolver un sistema significa que dados los valores de la fuerza electromotriz y las resistencias debemos determinar las intensidades de corriente en todas las ramas o en general dados dos de ellos encontrar el tercero.

LEYES DE KIRCHHOFF

Para resolver un circuito se necesitan dos reglas denominadas Leyes o reglas de Kirchhoff.

Primera ley de Kirchhoff

La suma de corrientes que entran e un nodo es igual a la suma de corrientes que salen del mismo, esto se deduce del principio de conservación de la carga. La primera ley de Kirchhoff podemos expresarla como

$$\sum I = 0 \quad (1)$$

En el nodo 2 de la figura anterior

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Si tenemos N nodos en un circuito podemos obtener N - 1 ecuaciones independientes, la ecuación del nodo N no es independiente ya que si la ecuación (1) cumple en (N-1) nodos, esta cumple automáticamente en el nodo N.

Segunda ley de Kirchhoff

La suma de las caídas de potencial a lo largo de cualquier **malla** o lazo debe ser igual a la suma de los aumentos de potencial

$$\sum \varepsilon - \sum RI = 0 \quad (2)$$

Esta ley se deduce del principio de conservación de la energía.

En el caso de la figura anterior, tenemos

$$V_1 + \varepsilon_1 - I_1 R_1 = V_2 \quad (\text{Rama 1-2})$$

$$V_2 - I_5 R_5 = V_3 \quad (\text{Rama 2-3})$$

$$V_3 + \varepsilon_4 - I_4 R_4 = V_1 \quad (\text{Rama 1-2})$$

Sumando estas expresiones obtenemos la suma de las caídas de potencial y aumento de potencial de la malla 1-2-3-1 (un lazo cerrado)

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - I_1 R_1 - I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - (I_1 R_1 + I_5 R_5 + I_4 R_4) = 0$$

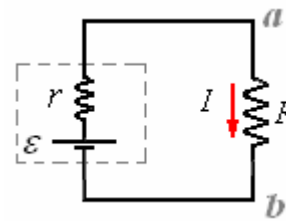
Expresión que en general viene a ser

$$\sum \varepsilon - \sum RI = 0$$

Ejemplo 14. ¿Cual es la diferencia de potencial en una resistencia R conectada entre los bornes de una pila de fuerza electromotriz ε y con resistencia interna r?

Solución.

Le figura muestra esquemáticamente el circuito con la pila y su resistencia



Aplicando la segunda ley de Kírchhoff. Siendo I la corriente que circula por el circuito

$$\varepsilon - Ir - IR = 0$$

De aquí

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

La diferencia de potencial en la resistencia es:

$$V_{ab} = IR = \frac{\varepsilon R}{r + R}$$

La potencia que se disipa a través de R es

$$P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}$$

Si queremos encontrar el valor de R para el cual la potencia disipada sea la mínima

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)^2} - \frac{2\varepsilon^2 R}{(r + R)^3} = 0$$

Resolviendo

$$(R + r) - 2R = 0 \Rightarrow R = r$$

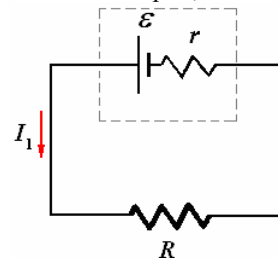
Ejemplo 15. Un estudiante de física conecta una pila a un circuito y encuentra que la corriente de la pila es I₁. Cuando conecta una segunda pila idéntica en serie con la primera, la corriente se convierte en I₂. Cuando conecta las pilas en paralelo, la corriente a través del circuito es I₃.

Demuestre que la relación que él encuentra entre las corrientes es 3I₂I₃ = 2 I₁(I₂ + I₃).

Solución.

Sea ε la fuerza electromotriz de cualesquiera de las pilas ser y r su resistencia interna. y el circuito externo tiene una resistencia R.

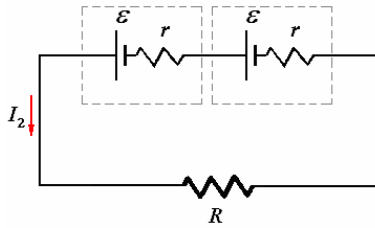
a) Cuando se usa una sola pila,



Aplicamos la ecuación del circuito,

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

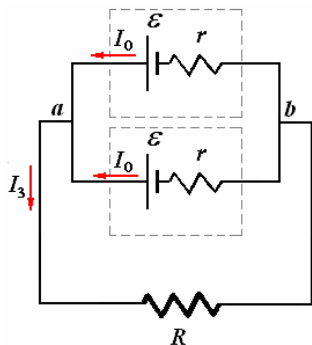
Si dos pilas idénticas se conectan en serie.



Sus fuerzas electromotrices actúan en igual sentido. Por lo tanto

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{R + 2r}$$

Cuando las pilas se conectan en paralelo, puesto que son idénticas, por la simetría del montaje, corrientes idénticas I_0 deben atravesar cada una de las pilas.



Además por la primera ley de Kichhoff

$$I_3 = I_0 + I_0 = 2I_0 \quad (1)$$

Considerando el paso de la corriente a través de cualquiera de las pilas, tenemos:

$$\varepsilon - I_0 r - I_3 R = 0 \quad (2)$$

De (1) $I_0 = \frac{I_3}{2}$

Reemplazando en (2):

$$\varepsilon - \frac{I_3}{2} r - I_3 R = 0 \Rightarrow \varepsilon = I_3 \left(R + \frac{r}{2} \right)$$

De aquí $I_3 = \frac{\varepsilon}{\left(R + \frac{r}{2} \right)}$

De estas ecuaciones de I_1 , I_2 e I_3 encontramos que

$$R + r = \frac{\varepsilon}{I_1}, \quad R + 2r = \frac{2\varepsilon}{I_2} \quad \text{y} \quad R + \frac{r}{2} = \frac{\varepsilon}{I_3}$$

Eliminando r entre las dos primeras ecuaciones da.

$$R = \varepsilon \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right),$$

y entre la primera y la tercera da

$$R = \varepsilon \left(\frac{2}{I_1} - \frac{2}{I_2} \right),$$

Dividiendo estas dos últimas ecuaciones una por la otra da

$$1 = \frac{2 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right)}{\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right)},$$

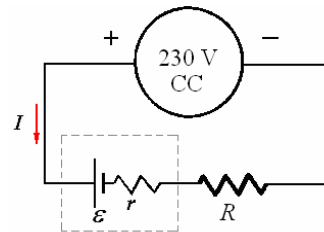
$$\therefore 2I_1 I_2 - I_2 I_3 = 2I_2 I_3 - 2I_1 I_3$$

$$\Rightarrow 3I_2 I_3 = 2I_1 (I_2 + I_3)$$

Ejemplo 16. Una batería de 50 pilas se está cargando de una fuente de C.C. de 230 V y de resistencia interna insignificante. ¿La fuerza electromotriz de cada pila en carga es 2,3 V, su resistencia interna es 0,1 2 y la corriente de carga necesaria es 6 A. ¿qué resistencia adicional debe ser insertada en el circuito?

Solución.

Sea R la resistencia adicional necesitada en el circuito.

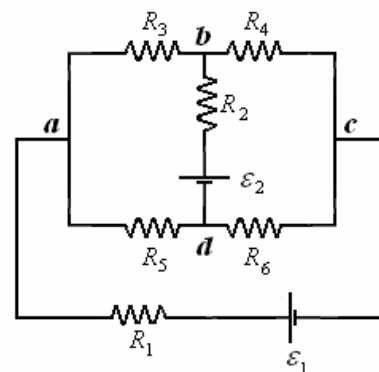


Las 50 pilas tienen una fuerza electromotriz total de 115 V y una resistencia interna total de 5Ω .

Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff para obtener $230 - \varepsilon = I(R + r) \Rightarrow 230 - 115 = 6(R + 5)$

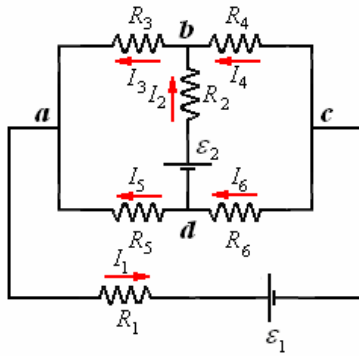
De aquí $R = \frac{115}{6} - 5 = 14,2 \Omega$

Ejemplo 17. Resolver el circuito mostrado en la figura.



Solución.

Como primer paso fijemos el sentido de la corriente en cada rama, las que finalmente pueden resultar con signo negativo, lo que significaría que el sentido es contrario al considerado.



Aquí tenemos seis incógnitas por lo tanto necesitamos seis ecuaciones

Por la primera ley de Kirchhoff. Nudo a:

$$I_3 + I_5 - I_1 = 0 \quad (1)$$

Nudo b:

$$I_4 + I_2 - I_3 = 0 \quad (2)$$

Nudo c:

$$I_1 - I_4 - I_6 = 0 \quad (3)$$

Por la segunda ley de Kirchhoff

Siendo cuatro nudos solo podemos obtener tres ecuaciones.

Camino a-c-d-a

$$-I_1 R_1 + \varepsilon_1 - I_6 R_6 - I_5 R_5 = 0 \quad (4)$$

Camino a-e-d-a

$$-I_1 R_1 + \varepsilon_1 - I_4 R_4 - I_3 R_3 = 0 \quad (5)$$

Camino a-d-b-a

$$+I_5 R_5 + \varepsilon_2 - I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \quad (6)$$

ya tenemos las 6 ecuaciones que nos resolverán el circuito.

Reordenando las ecuaciones:

$$0 = I_1(-1) + I_2(0) + I_3(1) + I_4(0) + I_5(0) + I_6(0)$$

$$0 = I_1(0) + I_2(1) + I_3(-1) + I_4(1) + I_5(0) + I_6(0)$$

$$0 = I_1(1) + I_2(0) + I_3(0) + I_4(-1) + I_5(0) + I_6(-1)$$

$$0 = I_1(R_1) + I_2(0) + I_3(0) + I_4(0) + I_5(R_5) + I_6(R_6)$$

$$\varepsilon_1 = I_1(R_1) + I_2(0) + I_3(R_3) + I_4(R_4) + I_5(0) + I_6(0)$$

$$\varepsilon_2 = I_1(0) + I_2(R_2) + I_3(R_3) + I_4(0) + I_5(-R_5) + I_6(0)$$

Que podemos resolver por determinantes

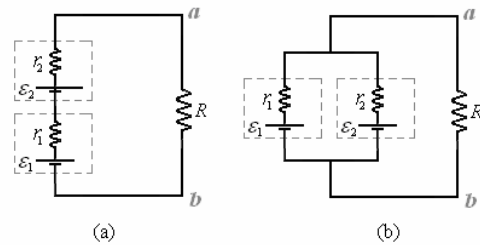
$$I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & R_5 & R_6 \\ \varepsilon_1 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & R_2 & R_5 & 0 & -R_5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & R_5 & R_6 \\ R_1 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_5 & 0 & -R_5 & 0 \end{vmatrix}$$

De igual modo para I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 .

Ejemplo 18. Se tienen dos baterías una de 6 voltios y resistencia interna 2 ohms y otra de 12 voltios y resistencia interna 4 ohms. Se conecta una resistencia de 12 ohms. ¿Cuál es la diferencia de potencial en la resistencia cuando se conecta tal como en

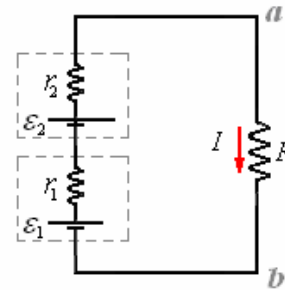
a) la figura (a)?

b) la figura (b)?



Solución.

a)



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff.

$$\varepsilon_1 - I r_1 + \varepsilon_2 - I r_2 - I R = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R}$$

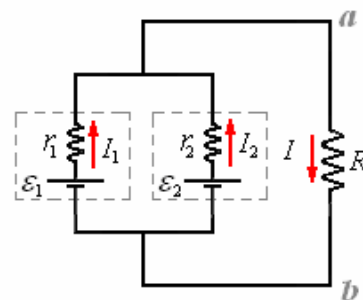
$$I = \frac{6 + 12}{2 + 4 + 12} = \frac{18}{18} = 1 \text{ ampere}$$

La diferencia de potencial en los puntos a y b es

$$V_{ab} = I R = 1 \text{ ampere} \times 12 \text{ ohms}$$

$$V_{ab} = 12 \text{ voltios}$$

b)



Aplicando la primera ley de Kirchhoff en el nudo a

$$I_1 + I_2 - I = 0 \quad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff de b, a, b por los dos caminos.

$$\varepsilon_1 - I_1 r_1 - I R = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon_2 - I_2 r_2 - I R = 0 \quad (3)$$

Reescribiendo las ecuaciones

$$0 = I_1(1) + I_2(1) + I(0)$$

$$\varepsilon_1 = I_1(r_2) + I_2(0) + I(0)$$

$$\varepsilon_2 = I_1(0) + I_2(r_2) + I(0)$$

Resolviendo por determinantes para I :

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ r_1 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & r_2 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ r_1 & 0 & R \\ 0 & r_2 & R \end{vmatrix}}$$

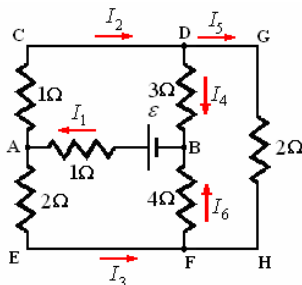
Reemplazando valores

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{-24 - 24}{-48 - 24} = 0,5 \text{ A}$$

La diferencia de potencial entre los puntos a y b es $V_{ab} = IR = 0,5 \text{ Amperes} \times 12 \text{ Ohms} = 6 \text{ voltios}$

Ejemplo 19. Un circuito se conecta como en el diagrama. ¿La disipación de la potencia no debe exceder a 1 W en ningún rama. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza electromotriz de la batería?

Solución.



Todos los puntos en el diagrama se han etiquetado, y las corrientes se han insertado en cada rama. Aplicando la primera ley de Kirchhoff a los puntos A, F, y D, tenemos

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad I_3 + I_5 = I_6, \quad I_2 = I_4 + I_5$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a los circuitos ACDB, BAEF, y DGHF. Tenemos

$$\varepsilon = I_1(1\Omega) + I_2(1\Omega) + I_4(3\Omega)$$

$$\varepsilon = I_1(1\Omega) + I_3(2\Omega) + I_6(4\Omega)$$

$$0 = I_5(2\Omega) + I_6(4\Omega) - I_4(3\Omega)$$

Resolviendo estas seis ecuaciones simultáneamente encontramos las soluciones siguientes:

$$I_1 = \frac{41\varepsilon}{139\Omega}, \quad I_2 = \frac{26\varepsilon}{139\Omega}, \quad I_3 = \frac{15\varepsilon}{139\Omega},$$

$$I_4 = \frac{24\varepsilon}{139\Omega}, \quad I_5 = \frac{2\varepsilon}{139\Omega} \text{ y } I_6 = \frac{17\varepsilon}{139\Omega}$$

La potencia disipada en una resistencia R_r a través de la cual pasa la corriente I_r es $P_r = I_r^2 R_r$. Aplicando esto a los elementos en el diagrama, tenemos

$$P_{AB} = \frac{1681\varepsilon^2}{(139)^2\Omega}, \quad P_{AC} = \frac{676\varepsilon^2}{(139)^2\Omega},$$

$$P_{AE} = \frac{450\varepsilon^2}{(139)^2\Omega},$$

$$P_{DB} = \frac{1728\varepsilon^2}{(139)^2\Omega}, \quad P_{GH} = \frac{8\varepsilon^2}{(139)^2\Omega},$$

$$P_{BF} = \frac{1156\varepsilon^2}{(139)^2\Omega}$$

Está claro que la mayor potencia disipada es en la resistencia entre los puntos B y D. Para satisfacer las condiciones del problema, P_{DB} es 1 W para el valor máximo de la fuerza electromotriz ε . Así:

$$\frac{1728\varepsilon^2}{(139)^2\Omega} = 1\text{W} \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{(139)^2}{1728} \text{V}^2$$

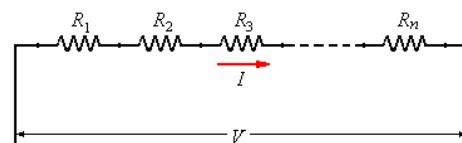
$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{139}{24\sqrt{3}} \text{V} = 3,34\text{V}$$

CONEXIONES DE RESISTENCIAS, EN SERIE Y EN PARALELO.

Cuando se tienen varias resistencias en un circuito es conveniente reducirlas a una resistencia equivalente con el objeto de facilitar la resolución del circuito.

En serie.

Se dice que n resistencias están conectadas en serie cuando están unidas extremo a extremo una a continuación de otra, como se muestra en la figura siguiente.



Con una diferencia de potencial V fluye una corriente I , aplicando la segunda ley de Kirchhoff

$$V - IR_1 - IR_2 - IR_3 - \dots - IR_n = 0$$

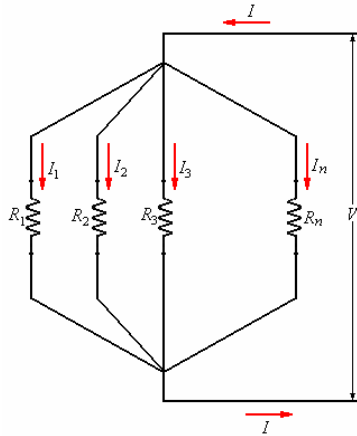
expresión de la cual se obtiene la resistencia equivalente

$$R_e = \frac{V}{I} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

$$R_e = \sum_{i=1}^n R_i$$

En paralelo.

Cuando n resistencias se conectan en la forma como muestra la figura siguiente, se dice que las resistencias están conectadas en paralelo.



De la primera ley de Kirchoff

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

De la segunda ley de Kirchoff

$$V = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + \dots + I_n R_n$$

De este última encontramos que

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, I_2 = \frac{V}{R_2}, I_3 = \frac{V}{R_3}, \dots$$

$$I_n = \frac{V}{R_n}$$

Reemplazando en la primera expresión

$$y \frac{I}{V} = \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$\text{De aquí } \frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Ejemplo 20. Dos conductores de la misma longitud y material pero con diferentes áreas de sección transversal son: a) conectados en serie, y b) en paralelo. ¿Cuándo una diferencia potencial se aplica a través de las combinaciones, en cual de los conductores el calentamiento será mayor?

Solución.

La resistencia de cada conductor tiene la forma

$$R = \rho \frac{\ell}{A}. \text{ Como la resistividad y las longitudes son}$$

$$\text{iguales en cada caso, } \frac{R_1}{R_2} = \frac{A_2}{A_1}.$$

a) Cuando los conductores están en serie, la misma corriente pasa con cada uno. Por lo tanto el cociente del calentamiento producido en los alambres es:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{I^2 R_1}{I^2 R_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

El calentamiento es mayor en el conductor con sección transversal de menor área.

b) Cuando los conductores están en paralelo, diferentes corrientes pasan a través de ellos pero la diferencia potencial a través de cada uno es igual. Por lo tanto

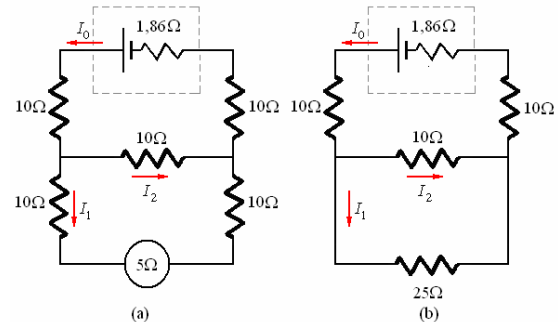
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{V^2 / R_1}{V^2 / R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

En este caso el calentamiento es mayor en el conductor con sección transversal de mayor área.

Ejemplo 21. Cinco resistencias, cada uno de 10Ω , se conectan para formar una letra H, una pila de 2 V y con resistencia interna $1,86 \Omega$ se conecta a través de los extremos superiores y un amperímetro con resistencia 5Ω a través de los extremos inferiores. ¿Qué corriente pasa a través del amperímetro?

Solución.

El circuito mostrado en el diagrama (a) es equivalente al circuito mostrado en el diagrama (a).

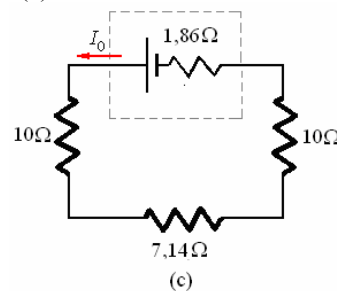


Las resistencias de 10Ω y 25Ω están en paralelo. Por lo tanto la resistencia equivalente es R , donde

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{10} + \frac{1}{25} = \frac{5+2}{50} = \frac{7}{50} \Rightarrow$$

$$R = \frac{50}{7} = 7,14 \Omega$$

El circuito es por lo tanto equivalente al mostrado en el diagrama (c).



Es posible ahora encontrar la corriente en el circuito.

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2}{10 + 10 + 7,14 + 1,86} = \frac{2}{29} \text{ A}$$

Esta corriente se divide en las corrientes I_1 e I_2 a través de las partes inferiores de los circuitos, según como se muestra en los diagramas (a) y (b), donde

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{10 \Omega}{25 \Omega} \Rightarrow \frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{10}{35}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{10}{35} (I_1 + I_2)$$

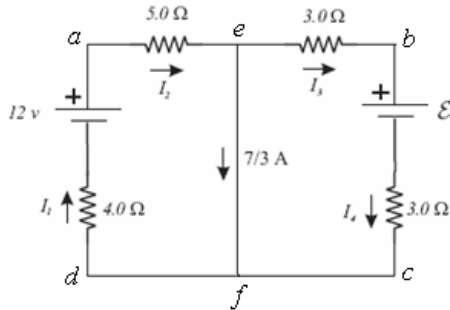
Por la primera ley de Kirchoff,

$$I_1 + I_2 = I_0$$

Luego $I_1 = \frac{10}{35} I_0 = \frac{10}{35} \times \frac{2}{29} = 0,0197 \text{ A}$

Es la corriente que atraviesa el amperímetro

Ejemplo 22. En la figura mostrada, calcular cada corriente en la dirección indicada para las resistencias y calcular ε .



Solución.

a) Cálculo de las corrientes:

En la malla *aefda*. $I_1 = I_2$

$$-4,0I_1 + 12 - 5,0I_1 = 0 \Rightarrow 9,0I_1 = 12 \Rightarrow$$

$$I_1 = I_2 = \frac{12}{9} = 1,33 \text{ A}$$

En el nudo e.

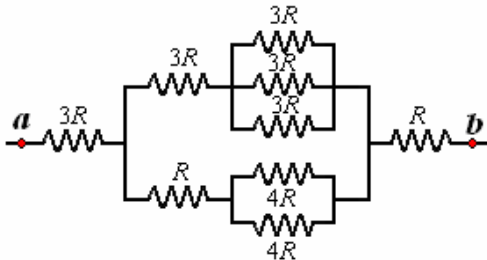
$$\frac{4}{3} - \frac{7}{3} - I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = I_4 = 1 \text{ A}$$

Cálculo de ε :

En la malla *ebcfb*.

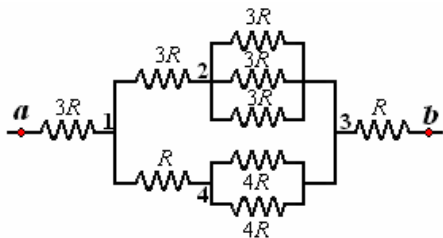
$$-3(1) - \varepsilon - 3(1) = 0 \Rightarrow \varepsilon = 6 \text{ V}$$

Ejemplo 23. Encuentre la resistencia equivalente entre los terminales *a* y *b* del circuito de la figura.



Solución.

Este circuito formado por partes en serie y partes en paralelo



La resistencia entre 2 y 3 es

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} = \frac{3}{3R} = \frac{1}{R}$$

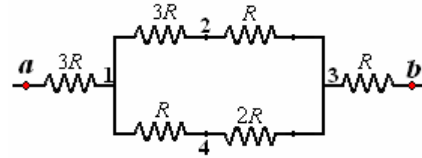
$$R_{23} = R$$

La resistencia entre 4 y 3 es

$$\frac{1}{R_{43}} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{4R} = \frac{2}{4R} = \frac{1}{2R}$$

$$R_{43} = 2R$$

El circuito queda reducido a



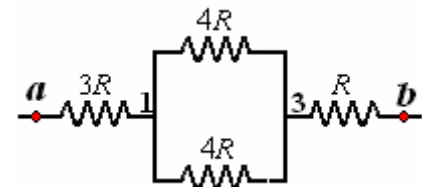
La resistencia entre 1, 2, 3 es

$$R_{123} = 3R + R = 4R$$

La resistencia entre 1, 4, 3 es

$$R_{143} = 2R + 2R = 4R$$

El circuito queda reducido a



La resistencia entre 1 y 3 es

$$\frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{4R} = \frac{2}{4R} = \frac{1}{2R}$$

$$R_{13} = 2R$$

El circuito queda reducido a



Finalmente la resistencia entre a y b es

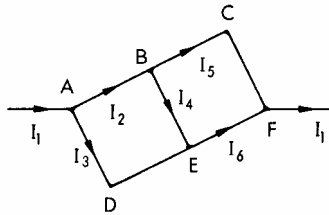
$$R_{ab} = 3R + 2R + R = 6R$$



Ejemplo 24. Con un pedazo de alambre uniforme se forman dos cuadrados con un lado común de longitud 10cm. Una corriente ingresa al sistema rectangular por una de las esquinas y va diagonalmente para salir por la esquina opuesta. Demuestre que la corriente en el lado común es un quinto de la corriente que entra. ¿Qué longitud del alambre conectado entre la entrada y la salida (A y F), tendría un efecto resistente equivalente tendría un efecto resistivo equivalente?

Solución.

Sea la R resistencia de cada lado del cuadrado, y el flujo de corrientes tal como el mostrado en el diagrama.



Aplicando la primera ley de Kirchoff, $\sum I = 0$, a los puntos A, B, y E da:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

$$I_2 - I_4 - I_5 = 0 \quad (2)$$

$$I_3 + I_4 - I_6 = 0 \quad (3)$$

La aplicación de la segunda ley de Kirchoff a los circuitos ABED y BCFE da

$$I_2 R + I_4 R - I_3 2R = 0 \quad (4)$$

$$I_5 2R - I_6 R - I_4 R = 0 \quad (5)$$

Eliminando I_5 e I_6 de las ecuaciones, (2), (3), y (4) obtenemos:

$$2I_2 - I_3 - 4I_4 = 0 \quad (6)$$

Eliminando I_2 las ecuaciones (1), (4), y (6):

Obtenemos:

$$(1) + (4) \quad I_1 - 3I_3 + I_4 = 0 \quad (7)$$

$$2(1) + (6) \quad 2I_1 - 3I_3 - 4I_4 = 0 \quad (8)$$

Eliminando I_3 de (7) y (8):

$$(8) - (7) \quad I_1 - 5I_4 = 0 \Rightarrow I_4 = \frac{1}{5} I_1 \quad (9)$$

Además, la caída de potencial de A a F por el camino ADEF, empleando las ecuaciones. (3), (7), y (9), es:

$$\begin{aligned} V_{AF} &= I_3 2R + I_6 R = R(2I_3 + I_3 + I_4) \\ &= R(I_1 + 2I_4) = I_1 R \left(1 + \frac{2}{5} \right) \\ &= \frac{7}{5} R I_1 \end{aligned}$$

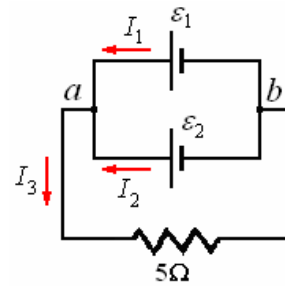
Empleando las ecuaciones. (3), (7), y (9).

Por lo tanto el efecto equivalente se obtiene si un alambre $7/5$ veces la longitud de cualquier lado del cuadrado se conecta entre A y F, porque produce la misma caída de potencial que el cuadrado doble entre estos puntos.

Ejemplo 25. Dos pilas, una de fuerza electromotriz 1,2V y resistencia interna $0,5 \Omega$, la otra de fuerza electromotriz 2V y resistencia interna $0,1 \Omega$, están conectadas en paralelo y la combinación se conecta en serie con una resistencia externa de 5Ω . ¿Qué corriente pasa con esta resistencia externa?

Solución.

El circuito es como el mostrado en la figura siguiente:



Aplicando la primera ley de Kirchoff

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff al circuito cerrado que contiene ambas pilas y luego al circuito cerrado con la pila inferior y la resistencia externa, tenemos

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (2 - 1,2) = 0,1 I_2 - 0,5 I_1 \text{ y}$$

$$\varepsilon_2 = 2 = 0,1 I_2 + 5 I_3$$

De aquí $I_2 - 5 I_1 = 8$ y $I_2 + 50(I_1 + I_2) = 20$ o $10 I_2 - 50 I_1 = 80$ y $51 I_2 + 50 I_1 = 20$.

$$\text{Luego } I_2 = \frac{100}{61} = 1,64 \text{ A,}$$

$$I_1 = -\frac{388}{355} = -1,27 \text{ A,}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0,37 \text{ A}$$

Ejemplo 26. Un galvanómetro de resistencia 20Ω da una desviación de toda la escala cuando una corriente de 1 mA pasa a través de ella. ¿Qué modificación se debe hacer al instrumento de modo que dé la desviación de toda la escala para (a) una corriente de 0,5 A, y (b) una diferencia potencial de 500V?

Solución.

Si un galvanómetro tiene una resistencia de 20Ω y da la desviación completa para una corriente de 1 mA, después la caída de voltaje a través de ella bajo estas circunstancias es

$$V = IR = (10^{-3})(20) = 0,02 \text{ V}$$

(a) Para permitir que el galvanómetro lea hasta 0,5 A, una resistencia de desviación debe ser agregada. Esta resistencia debe tomar 499 mA, permitiendo solamente 1 mA a través del galvanómetro. Pero la diferencia potencial a través de cada una es igual. Así si r es la resistencia de la desviación, entonces $1 \text{ mA} \times 20 \Omega = 499 \text{ mA} \times r$,

$$\Rightarrow r = \frac{20}{499} = 0,0401 \Omega.$$

(b) Para cambiar la lectura del voltímetro hasta 500 V, uno debe agregar una resistencia en serie.

Solamente 0,02 V caen a través del galvanómetro para la corriente máxima de 1 mA. Así 499,98 V deben caer a través de la resistencia R . La misma corriente atraviesa la resistencia y el galvanómetro. Por lo tanto

$$R = \frac{499,98 \text{ V}}{10^{-3} \text{ A}} = 499,980 \Omega.$$

Ejemplo 27. Una bobina del alambre está conectada a través de un puente de Wheatstone y de una resistencia estándar de temperatura controlada de 1Ω a través del otro. Si la temperatura de la bobina es 0°C , los otros brazos del puente tienen cociente de 0,923 entre las resistencias en él. Si la temperatura de la bobina es 100°C el cociente es 1,338. ¿Cuál es el coeficiente de temperatura de la resistencia del alambre?

Solución.

De la ecuación del puente de Wheatstone, las resistencias de la bobina, R_0 a 0°C y R a 100°C , son $R_0 = 0,923 \Omega$ y $R_t = 1,338 \Omega$. Pero

$R_t = R_0(1 + \alpha t)$, donde α es el coeficiente de temperatura del alambre de la resistencia. Así

$$\alpha = \frac{(R_t/R_0) - 1}{t} = \frac{(1,338/0,923) - 1}{100^\circ\text{C}} = 0,0045 /^\circ\text{C}$$

Ejemplo 28. Una resistencia variable en serie con una pila 2 V y un galvanómetro se ajusta para dar una desviación a escala completa, para una corriente de 1 mA. ¿Qué resistencia puesta en serie en el circuito reducirá la lectura del galvanómetro por 1/f?

El galvanómetro está calibrado para medir resistencia sobre esta base, pero la fuerza electromotriz de la pila cae el 5% y se reajusta la resistencia variable de modo que la desviación a escala completa corresponda otra vez al cero de la resistencia variable. ¿Qué error del porcentaje ahora se da en una resistencia que tenga un valor verdadero de 3800Ω ?

Solución.

La resistencia total en el circuito cuando el galvanómetro está dando la desviación a escala completa es

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{2 \text{ V}}{10^{-3} \text{ A}} = 2000 \Omega$$

Si una resistencia desconocida X se agrega al circuito y produce una lectura de $(1/f)$ mA en el galvanómetro, entonces

$$R + X = \frac{2}{(1/f) \times 10^{-3}} = 2000 f \Omega \Rightarrow$$

$$X = (2000 f - 2000) = 2000(f - 1) \Omega$$

La fuerza electromotriz de la pila cae a $\frac{95}{100}$ de 2 V =

1,9 V.

Para la desviación a escala completa la resistencia en el circuito será:

$$R' = \frac{1,9}{10^{-3}} = 1900 \Omega, \text{ y si otra resistencia de } 3800$$

Ω se inserta en el circuito, la corriente es

$$\frac{1,9 \text{ V}}{(1900 + 3800) \Omega} = \frac{1}{3} \text{ mA. Pero de la calibración}$$

del galvanómetro, cuando la corriente cae a un tercio de su valor, la resistencia insertada debe tener un valor

$$X = [2000(3 - 1)] \Omega = 4000 \Omega.$$

El error en la lectura es así 200Ω , y el error del porcentaje es

$$\frac{200}{3800} \times 100\% = 5,3\%$$

Ejemplo 29. Una longitud de 300 cm de alambre de potenciómetro se requiere para balancear la fuerza electromotriz de una pila. Cuando una resistencia de 10Ω se conecta a través de la pila, la longitud requerida para el balance es 250 cm. Calcule la resistencia interna de la pila.

Solución.

El alambre del potenciómetro es uniforme y la caída de potencial a lo largo de él es regular. Por lo tanto la longitud a lo largo del alambre es directamente proporcional a la caída potencial a través de él. Así $\mathcal{E} = k \times 300 \text{ cm}$, donde k es la constante de proporcionalidad entre el potencial y la longitud, teniendo unidades de V/cm.

Cuando una resistencia de 10Ω se pone a través de los terminales de la pila, el potencial a través del resistor es $V = k \times 250 \text{ cm}$.

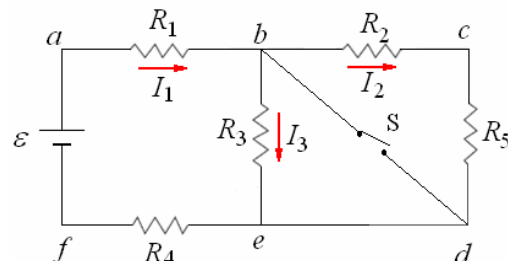
$$\text{Luego } \frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{300}{250} = \frac{6}{5}.$$

Pero cuando una resistencia se coloca a través de los terminales de la pila, una corriente fluirá en ese circuito, donde $V = IR$ y $\mathcal{E} = I(R + r)$.

$$\text{De aquí } \frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{6}{5} = \frac{R + r}{R} = \frac{10 \Omega + r}{10 \Omega} \Rightarrow$$

$$r = 2 \Omega$$

Ejemplo 30. Se tiene el circuito mostrado en la figura. Los valores de los diferentes elementos son: $R_1 = 15,0 \Omega$, $R_2 = 5,0 \Omega$, $R_3 = 10,0 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$, $R_5 = 5,0 \Omega$, y $\mathcal{E} = 80 \text{ V}$



a) Si el interruptor S permanece abierto, calcule la resistencia equivalente del circuito y la corriente total I_1 . Luego calcular las corrientes I_2 e I_3 .

b) Utilizando el resultado de la parte a), calcule la potencia entregada por la fuente y la potencia disipada por cada resistencia (si el interruptor "S")

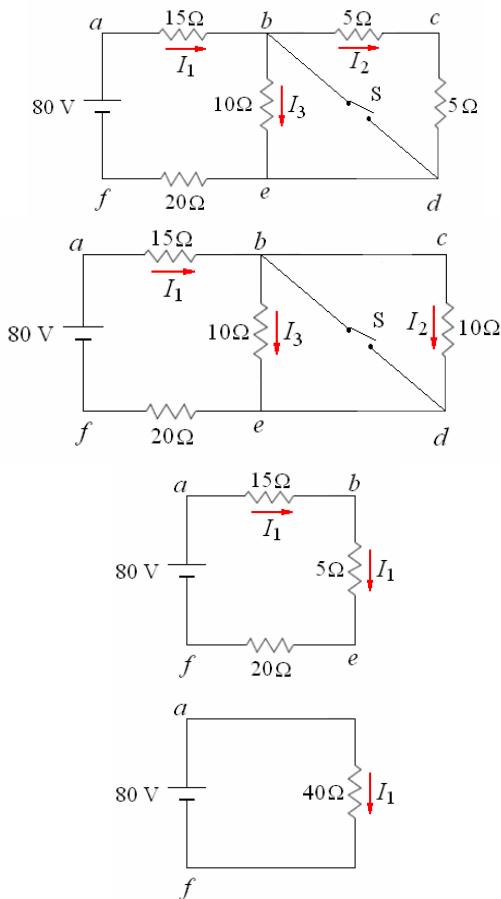
permanece abierto). Compare sus dos resultados y comente.

c) Suponga que el potencial eléctrico del punto e es cero (V_e). Determine el potencial eléctrico de los puntos a y c .

d) Se adiciona 60 voltios al voltaje de la fuente, y a continuación se cierra el interruptor "S". Calcule la corriente total en el circuito.

Solución.

a) La corriente total I_1 .



La resistencia equivalente es 40Ω .

$$I_1 = \frac{80}{40} = 2 \text{ A.}$$

Las corrientes I_2 e I_3 .

$$I_1 = I_2 + I_3 = 2, \quad I_2 = I_3 \Rightarrow I_2 = I_3 = 1 \text{ A.}$$

b) La potencia entregada por la fuente:

$$P_e = I_1^2 R = (2^2)(40) = 160 \text{ W.}$$

La potencia disipada por cada resistencia con el interruptor "S" abierto.

$$P_1 = I_1^2 R_1 = (2^2)(15) = 60 \text{ W.}$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (1^2)(5) = 5 \text{ W.}$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = (1^2)(10) = 10 \text{ W.}$$

$$P_4 = I_4^2 R_4 = (2^2)(20) = 80 \text{ W.}$$

$$P_5 = I_5^2 R_5 = (1^2)(5) = 5 \text{ W.}$$

La suma de la potencia disipada por las resistencias es igual a la potencia entregada por la fuente porque la fuente es ideal sin resistencia interna.

$$c) \quad V_e - 20I_1 + 80 = V_a$$

Con $I_1 = 2 \text{ A}$ y $V_e = 0$:

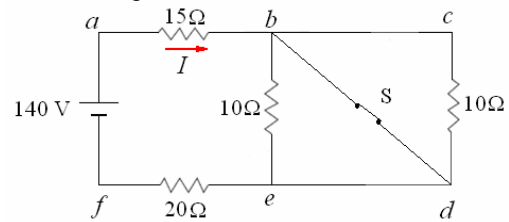
$$0 - 20(2) + 80 = V_a \Rightarrow V_a = 40 \text{ V}$$

$$V_e + 10I_2 = V_c$$

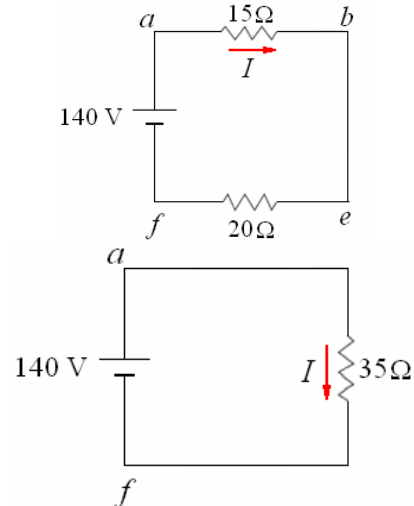
Con $I_2 = 1 \text{ A}$ y $V_e = 0$:

$$0 - 10(1) = V_c \Rightarrow V_c = -10 \text{ V}$$

d) Se adiciona 60 voltios al voltaje de la fuente, y se cierra el interruptor "S".



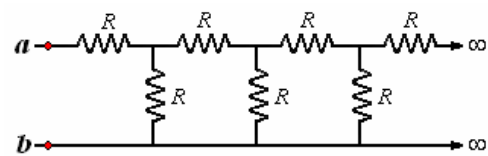
La parte $bcde$ equivale a un corto circuito.



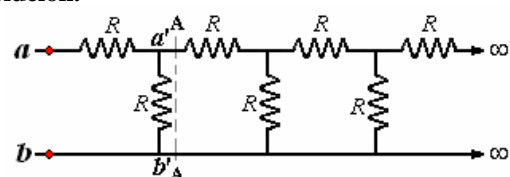
La corriente del circuito es:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{140}{35} = 4 \text{ A.}$$

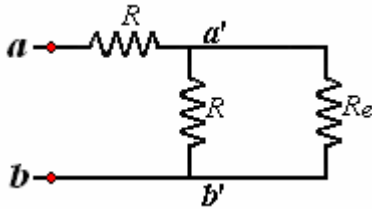
Ejemplo 31. Encontrar la resistencia equivalente entre los terminales a y b del circuito mostrado en la figura.



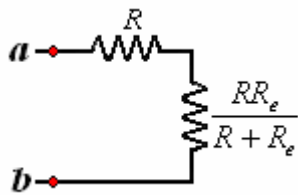
Solución.



Consideremos que la resistencia entre a y b es R_e observemos ahora el corte AA en la figura, considerado el lado izquierdo la resistencia entre a' y b' es también igual a R_e . Luego podemos dibujar el circuito como en la figura siguiente.



Este circuito es equivalente a



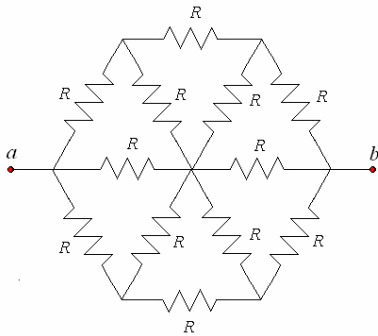
Que es un circuito en serie cuya resistencia total es $R + \frac{RR_e}{R + R_e}$, que a su vez es igual a R_e , de aquí

$$R_e = R + \frac{RR_e}{R + R_e} \text{ y } R_e^2 - RR_e - R^2 = 0$$

Resolviendo para R_e obtenemos el valor positivo

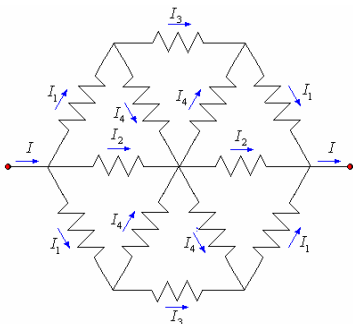
$$R_e = \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2} R$$

Ejemplo 32. Encontrar la resistencia equivalente entre los terminales a y b del circuito de la figura.

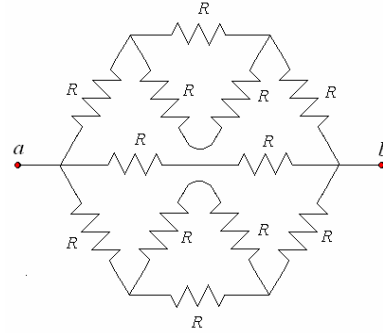


Solución.

Como se trata de un circuito simétrico, la distribución de corrientes será simétricamente como mostramos a continuación.

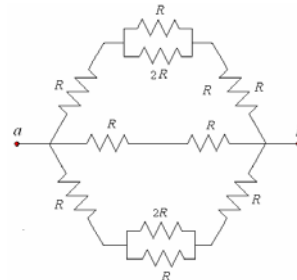


Seguindo las corrientes este circuito es equivalente a:

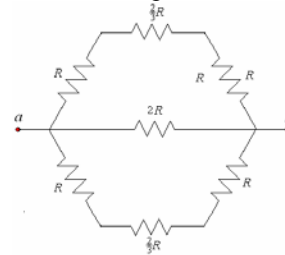


Circuito que asta formado por partes en paralelo y en serie.

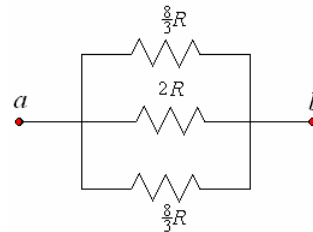
El circuito se reduce a:



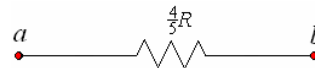
Reducidos los circuitos en paralelo se tiene:



Este a su vez se reduce a

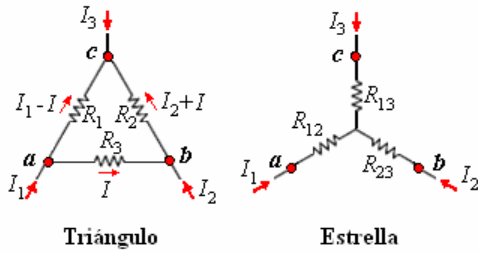


Finalmente



CAMBIO DE UN CIRCUITO TRIANGULO A ESTRELLA

Se presentan algunos casos que no son en serie ni en paralelo, cuya resolución es larga, pero que es posible simplificar realizando ciertas transformaciones, cambiar un circuito **triángulo**, a otro equivalente **estrella**, mostrados en la figura siguiente.



Por ser equivalentes los intensidades de corriente en los nodos a, b, c en los dos circuitos deben ser iguales respectivamente, las que de acuerdo a la primera ley de Kirchhoff se reparten en el circuito triángulo.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al lazo a, b, c, a en el triángulo

$$IR_2 + (I_2 + I)R_3 - (I_1 - I)R_1 = 0$$

de donde

$$I = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff entre a y b de los dos circuitos, el potencial V_{ab} de ambos deben de ser iguales.

$$V_{ab} = IR_2 = I_1 R_{12} - I_2 R_{23} \quad (2)$$

Reemplazando el valor de I de (1) en (2)

$$\frac{I_1 R_1 - I_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} R_2 = I_1 R_{12} - I_2 R_{23}$$

$$I_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} - I_2 \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = I_1 R_{12} - I_2 R_{23} \quad (3)$$

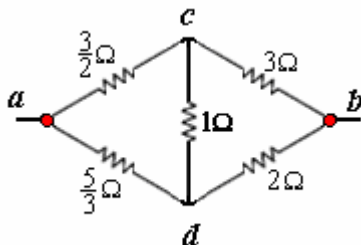
Por observación de la expresión (3)

$$R_{12} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

De igual manera se puede deducir

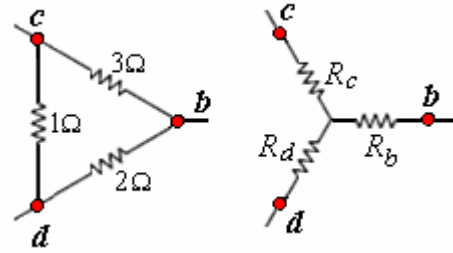
$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Ejemplo 33. Encontrar la resistencia equivalente entre los terminales a y b de la figura.



Solución.

Busquemos el circuito estrella equivalente al circuito triángulo cdb

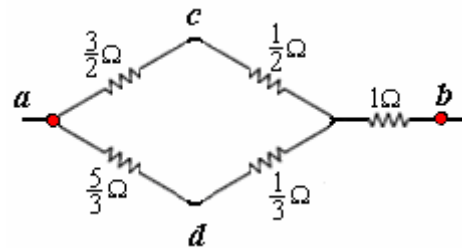


$$R_c = \frac{3 \times 1}{1 + 3 + 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Omega$$

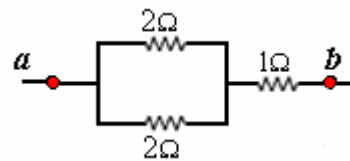
$$R_b = \frac{3 \times 2}{1 + 3 + 2} = \frac{6}{6} = 1 \Omega$$

$$R_d = \frac{1 \times 2}{1 + 3 + 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Omega$$

E]. circuito se convierte en



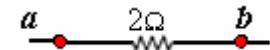
Reduciendo los partes en serie



Reduciendo las partes en paralelo



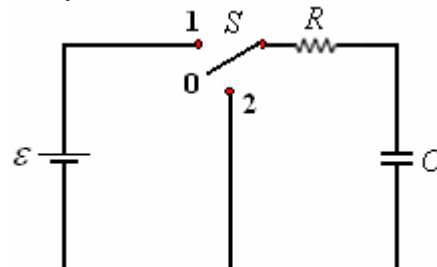
y finalmente



La resistencia equivalente es 2Ω

CIRCUITO RC

En esta parte estudiaremos un circuito en el que la corriente no es estacionaria, se trata del circuito con resistencia y condensador en serie.

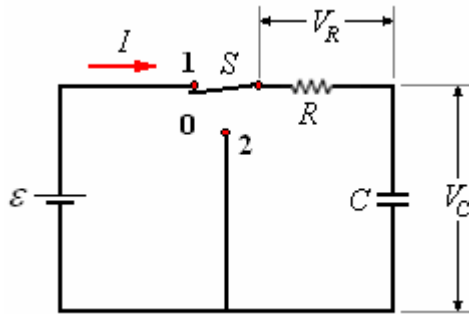


La figura muestra un condensador C , una resistencia R que se conecta a una fuerza electromotriz ϵ por medio de una llave S con tres posiciones.

Inicialmente el circuito está abierto, no hay carga en el condensador. (Posición 0).

Carga.

En el instante $t = 0$ ponemos la llave S en la posición 1; empieza a fluir una corriente I .



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff en el circuito de la figura anterior

$$\varepsilon - V_R - V_C = 0$$

V_R , diferencia de potencial en la resistencia = IR

V_C , diferencia de potencial en el condensador = $\frac{q}{C}$,

llamando q a la carga del condensador e I a la corriente en cierto instante t .

De aquí

$$\varepsilon - IR - \frac{q}{C} = 0$$

Como $I = \frac{dq}{dt}$, podemos escribir

$$\varepsilon - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{o } \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q - \frac{\varepsilon}{R} = 0$$

Resolviendo la ecuación para las condiciones iniciales, para $t = 0, q = 0$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - \varepsilon C)$$

$$\frac{dq}{(q - \varepsilon C)} = -\frac{1}{RC} dt$$

integrando

$$\int_0^q \frac{dq}{(q - \varepsilon C)} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln(q - \varepsilon C) \Big|_0^q = -\frac{1}{RC} t \Big|_0^t$$

$$\ln \frac{(q - \varepsilon C)}{-\varepsilon C} = -\frac{1}{RC} t$$

$$\frac{(q - \varepsilon C)}{-\varepsilon C} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

Finalmente

$$q = \varepsilon C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

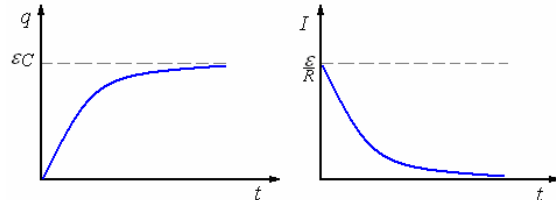
Para $t = \infty$, tenemos $q = \varepsilon C = Q_0$

La variación de la corriente es

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Para $t = 0, I = \frac{\varepsilon}{R}$ y para $t = \infty, I = 0$

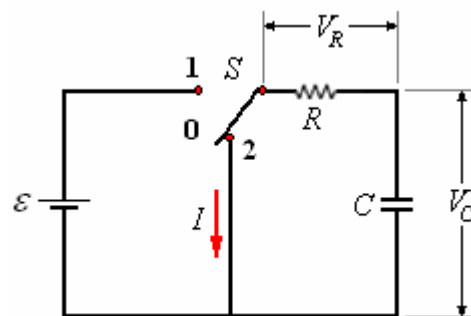
La figura siguiente muestra los diagramas q versus t e I versus t durante la carga



Descarga.

Una vez que ha pasado un tiempo igual a varias veces el valor del producto RC conocido como constante de tiempo del circuito se puede considerar que el condensador está con su carga total $Q_0 = \varepsilon C$.

Pasamos la llave a la posición 2 y obtenemos el circuito mostrado a continuación.



En este caso en el instante $t = 0$, la carga en el condensador es $q = Q_0$.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff

$$V_R + V_C = 0 \Rightarrow IR + \frac{q}{C} = 0$$

Como $I = \frac{dq}{dt}$, escribimos $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$

Resolviendo la ecuación para las condiciones iniciales

$t = 0, q = Q_0$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

Integrando

$$\int_0^2 \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln q \Big|_0^{Q_0} = -\frac{1}{RC} t \Big|_0^t$$

$$\ln \frac{q}{Q_0} = -\frac{1}{RC} t$$

$$\frac{q}{Q_0} = e^{-t/RC}$$

Finalmente

$$q = Q_0 e^{-t/RC} = \epsilon C e^{-t/RC}$$

para $t = 0$, tenemos $q = Q_0$

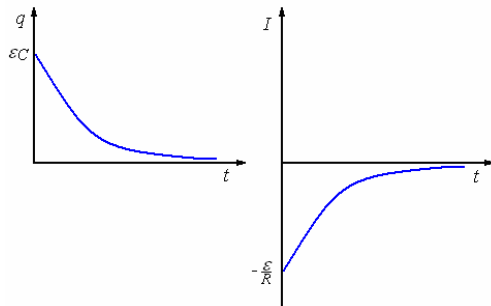
La variación de la corriente es

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC}$$

Para $t = 0$, $I = -\frac{\epsilon}{R}$ y para $t = \infty$, $I = 0$

La corriente es en sentido contrario a la corriente durante la carga.

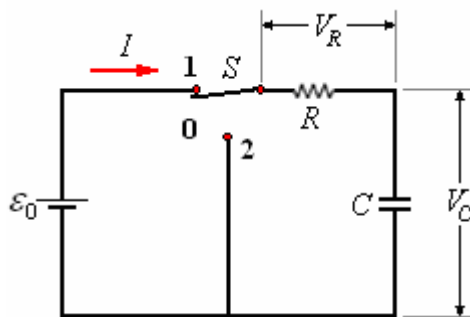
La figura a continuación muestra los diagramas q versus t e I versus t durante la descarga.



Ejemplo 34. Halle la ecuación para la carga de un condensador conectado en serie con una resistencia R y una fuente continua ϵ_0 .

Solución.

En el instante $t = 0$ ponemos la llave S en la posición 1; empieza a fluir una corriente I .



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff en el circuito de la figura anterior

$$\epsilon_0 - V_R - V_C = 0$$

V_R , diferencia de potencial en la resistencia = IR

V_C , diferencia de potencial en el condensador = $\frac{q}{C}$,

llamando q a la carga del condensador e I a la corriente en cierto instante t .

De aquí

$$\epsilon_0 - IR - \frac{q}{C} = 0$$

Como $I = \frac{dq}{dt}$, podemos escribir

$$\epsilon_0 - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{o } \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q - \frac{\epsilon_0}{R} = 0$$

Resolviendo la ecuación para las condiciones iniciales, para $t = 0$, $q = 0$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} (q - \epsilon_0 C)$$

$$\frac{dq}{(q - \epsilon_0 C)} = -\frac{1}{RC} dt$$

integrando

$$\int_0^q \frac{dq}{(q - \epsilon_0 C)} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln(q - \epsilon_0 C) \Big|_0^q = -\frac{1}{RC} t \Big|_0^t$$

$$\ln \frac{(q - \epsilon_0 C)}{-\epsilon C} = -\frac{1}{RC} t$$

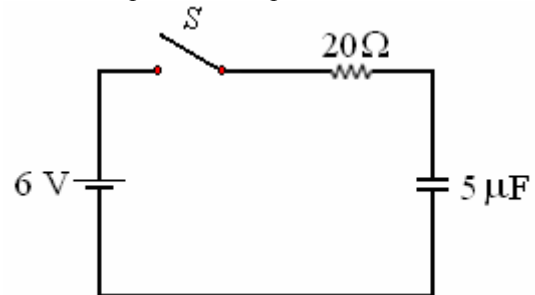
$$\frac{(q - \epsilon_0 C)}{-\epsilon_0 C} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

Finalmente

$$q = \epsilon_0 C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Ejemplo 35. En el circuito de la figura, estando el condensador descargado, se cierra la llave, calcular:

- El tiempo para el cual el condensador almacene la mitad de la carga.
- La diferencia de potencial en el Condensador y en la resistencia para ese tiempo.



Solución.

- La carga total del condensador sería Q_0 , la mitad de la carga $Q_0/2$.

La expresión para la carga del condensador es

$$q = Q_0 \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

Si para el tiempo $t_{1/2}$, $q = \frac{Q_0}{2} \Rightarrow$

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0(1 - e^{-t_{1/2}/RC}) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-t_{1/2}/RC} \Rightarrow$$

$$e^{-t_{1/2}/RC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t_{1/2}}{RC} = \ln 2 \Rightarrow$$

$$t_{1/2} = 0,692RC = 0,692 \times 20 \times 5 \times 10^6 = 0,692 \times 10^4 \text{ s.}$$

b) La diferencia de potencial en el condensador es

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon C}{C}(1 - e^{-t_{1/2}/RC}) = \varepsilon(1 - e^{-t_{1/2}/RC}) =$$

$$\varepsilon(1 - e^{-RC \ln 2 / RC}) = 6\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3 \text{ V.}$$

La diferencia de potencial en la resistencia es

$$V_R = IR = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t_{1/2}/RC} R = \varepsilon e^{-t_{1/2}/RC}$$

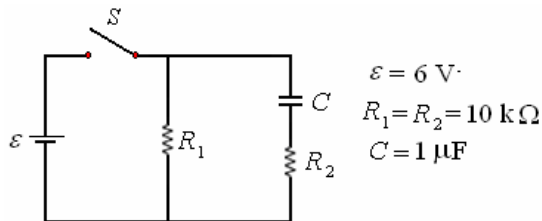
Para $t_{1/2} = 0,692 \times 10^{-4} = RC \ln 2$

$$V_R = IR = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t_{1/2}/RC} R = \varepsilon e^{-t_{1/2}/RC}$$

$$= \varepsilon e^{-RC \ln 2 / RC} = \frac{\varepsilon}{2} = 3 \text{ V.}$$

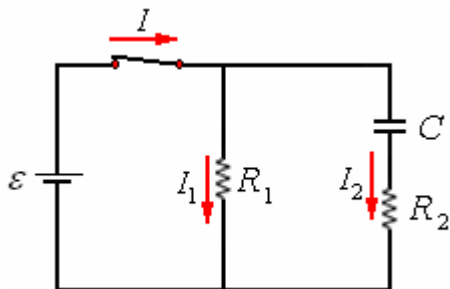
Ejemplo 36. En el circuito de la figura, estando el condensador descargado, se cierra la llave.

- a) ¿Cuál es la corriente suministrada por el fem en el momento que se cierra la llave y cuál después de largo tiempo?
- b) Después de un tiempo largo t' se abre la llave. ¿Cuánto tiempo tarda en disminuir la carga del condensador en un 90% con relación a la que tenía en t' ?



Solución.

Cuando se cierra la llave circula la corriente tal como se muestra a continuación.



Por le primera ley de Kirchhoff

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

Por le segunda ley de Kirchhoff

$$\varepsilon - I_1 R_1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{y } \varepsilon - I_2 R_2 - \frac{q}{C} = 0 \quad (3)$$

De (2) obtenemos

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

Trabajando con (3)

$$I_2 R_2 + \frac{q}{C} - \varepsilon = 0, \quad I_2 = \frac{dq}{dt}$$

$$\text{Luego } \frac{dq}{dt} + \frac{1}{R_2 C} q - \frac{\varepsilon}{R_2} = 0$$

Cuya solución es

$$q = \varepsilon C(1 - e^{-t/R_2 C})$$

y la corriente es

$$I_2 = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-t/R_2 C}$$

Reemplazando las expresiones de I_1 e I_2 en (1)

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-t/RC} \Rightarrow$$

$$I = \varepsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} e^{-t/RC} \right)$$

Esta expresión corresponde a la corriente.

En el instante en que se cierra la llave, $t = 0$.

$$I = \varepsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \varepsilon \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

Con los valores

$$I = 6 \frac{(10 \times 10^3 + 10 \times 10^3)}{10 \times 10^3 \times 10 \times 10^3} = 12 \times 10^{-4} \text{ A}$$

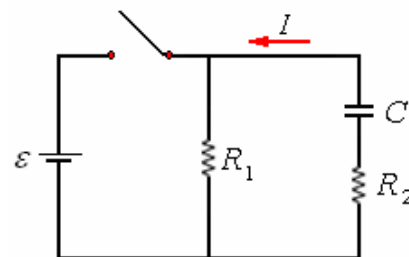
Mucho tiempo después, $t = \infty$.

$$I = \varepsilon \left(\frac{1}{R_1} \right) = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

Con los valores

$$I = \frac{6}{10 \times 10^3} = 6 \times 10^{-4} \text{ A}$$

b) Después de un tiempo largo se abre la llave. En ese instante la carga del condensador es Q_0 , y el circuito queda como se muestra a continuación.



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff

$$IR_1 + IR_2 + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow I(R_1 + R_2) + \frac{q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow I + \frac{1}{(R_1 + R_2)} q = 0$$

Con $I = \frac{dq}{dt}$:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2)} q = 0$$

Cuya solución es

$$q = Q_0 e^{-t/(R_1+R_2)C}$$

Cuando la carga disminuye en un 90% queda el 10%

de la Carga o sea, $q = \frac{Q_0}{10}$.

$$\frac{Q_0}{10} = Q_0 e^{-t/(R_1+R_2)C} \Rightarrow t = (R_1 + R_2)C \ln 10$$

Poniendo valores

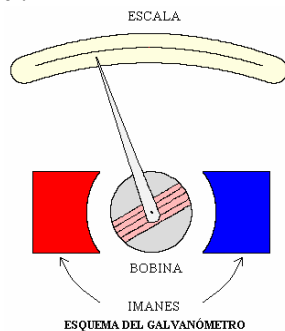
$$t = (10 \times 10^3 + 10 \times 10^3) 10^{-6} (2,3) = 4,6 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

INSTRUMENTOS Y DISPOSITIVOS DE MEDICION

Amperímetros y Voltímetros.

Los dispositivos que miden, la corriente, la diferencia de potencial en un circuito son el amperímetro y el voltímetro, respectivamente.

La parte principal de estos instrumentos es un **Galvanómetro**, que es un aparato que sirve para detectar el paso de pequeñas corrientes. El tipo más común es el Galvanómetro de D'Ansonval, funciona basado en el principio de que una bobina por la cual circula corriente y que está en el interior de un campo magnético experimenta la acción de un torque proporcional al paso de la corriente de tal modo que la lectura en la escala es proporcional a la corriente que pasa por él.



Los parámetros más importantes que se deben conocer son la resistencia del galvanómetro (R_g) y la corriente que produce la máxima desviación en la aguja del galvanómetro (I_g), un ejemplo típico de valores es una resistencia $R_g = 20\Omega$ y una

desviación máxima para una corriente de 1 miliampere ($I_g = 1 \text{ mA}$).

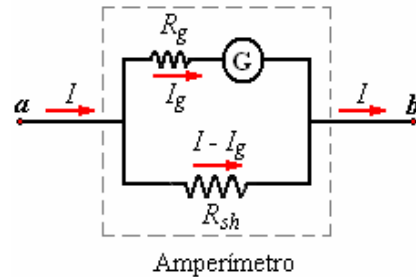
Este instrumento conectado en la forma conveniente con una resistencia de determinado valor y montado

en una caja con solo los terminales y la escala visibles viene a ser un amperímetro o un voltímetro.

Ejemplo 37. Con el galvanómetro, proyectar un amperímetro de 0 a 1 Ampere.

Solución.

Para tener un amperímetro de 0 a 1A es necesario que el galvanómetro marque una desviación máxima de 1 A. Como esto sucede para una corriente $I_g = 1 \text{ mA}$, es preciso hacer un desvío a la corriente como se muestra en la siguiente figura.



Esto se logra conectando una resistencia en paralelo llamado shunt (R_{sh}), cuyo valor se determina como sigue:

La diferencia de potencial entre a y b , es

$$V_{ab} = I_g R_g = (I - I_g) R_{sh} \Rightarrow$$

$$R_{sh} = R_g \frac{I_g}{(I - I_g)}$$

con los datos

$$R_{sh} = 20 \frac{10^{-3}}{(1 - 10^{-3})} = 0,020002\Omega$$

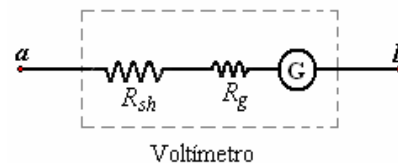
Se debe de conectar en paralelo al galvanómetro una resistencia de $0,020002\Omega$ y se tendrá un amperímetro 0 - 1 A entre los terminales a y b .

Un amperímetro ideal debe tener una resistencia cero, ya que se conecta en serie al circuito que se quiere medir.

Ejemplo 38. Con el mismo galvanómetro proyectar un voltímetro de 0 a 6 Voltios.

Solución.

Para tener un voltímetro de 0 a 6V es necesario que el galvanómetro marque a desviación máxima 6 Voltios, como esto sucede cuando pasa una corriente 1 mA, es preciso aumentar la resistencia de éste, esto se logra mediante una resistencia en serie, como se muestra en la figura a continuación.



La diferencia de potencial entre a y b , es

$$V_{ab} = (R_{sh} + R_g) I_g \Rightarrow R_{sh} = \frac{V_{ab}}{I_g} - R_g$$

con los datos

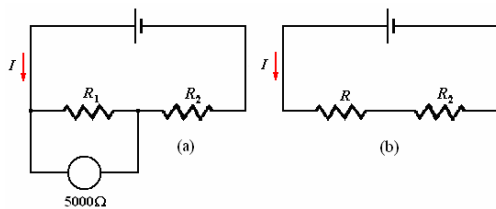
$$R_{sh} = \frac{6}{10^{-3}} - 20 = 5980\Omega$$

Se debe conectar en serie al galvanómetro una resistencia de 5980Ω y se tendría un voltímetro 0 – 6 V entre los terminales a y b .

Un voltímetro ideal debe tener una resistencia infinita ya que se conecta en paralelo al circuito que se quiere medir.

Ejemplo 39. Un banco de las pilas que tienen una fuerza electromotriz total de 12 V y una resistencia interna insignificante está conectado en serie con dos resistencias. Un voltímetro de resistencia 5000Ω se conecta alternadamente a través de las resistencias, y da las medidas 4 V y 6 V, respectivamente. ¿Cuáles son los valores de las resistencias?

Solución.



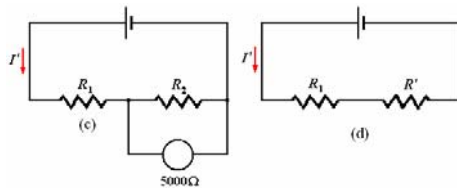
El voltímetro está conectado a través de R_1 como en el diagrama (a), y es equivalente al circuito mostrado en el diagrama (b), donde

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{5000} \Rightarrow R = \frac{5000R_1}{5000 + R_1}$$

Puesto que 4 V es la caída a través de la resistencia R y 8 V a través de la resistencia R_2 , tenemos:

$$4V = IR \text{ y } 8V = IR_2.$$

$$\text{Luego } R = \frac{5000R_1}{5000 + R_1} = \frac{R_2}{2}$$



Similarmente, de los diagramas (c) y (d), muestran la segunda conexión del voltímetro y del circuito equivalente, tenemos

$$R' = \frac{5000R_2}{5000 + R_2} \text{ y } 6V = IR_1 = I'R'$$

$$\text{Luego } R' = \frac{5000R_2}{5000 + R_2} = R_1,$$

Por lo tanto, de las dos ecuaciones obtenidas, tenemos

$$10000R_1 = 5000R_2 + R_1R_2 \text{ y}$$

$$5000R_2 = 5000R_1 + R_1R_2$$

Restando estas ecuaciones, obtenemos

$$15000R_1 = 10000R_2 \Rightarrow R_1 = \frac{2}{3}R_2$$

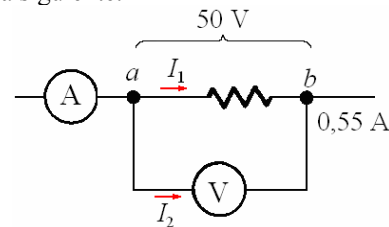
Substituyendo nuevamente dentro de las ecuaciones, obtenemos

$$R_1 = \frac{5000}{3} = 1667\Omega \text{ y } R_2 = \frac{5000}{2} = 2500\Omega$$

Ejemplo 40. El valor de una resistencia se mide usando un voltímetro y un amperímetro. Cuando el voltímetro se conecta directamente a través de la resistencia, las lecturas obtenidas son 50 V y 0,55 A. Cuando el voltímetro se conecta a través del amperímetro y de la resistencia, las lecturas son 54,3 V y 0,54 A. La resistencia del voltímetro es 1000Ω . Encuentre el valor de la resistencia y la resistencia del amperímetro.

Solución.

Sea el valor de la resistencia R y la resistencia del amperímetro r . La primera conexión se muestra en el diagrama siguiente.



Por la primera ley de Kirchhoff,

$$I_1 + I_2 = 0,55A.$$

Por la segunda ley de Kirchhoff,

$$V_{ab} = I_1R = 1000I_2 = 50V \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{50}{1000} = \frac{1}{20}A$$

$$\text{e } I_1 = (0,55 - 0,05)A = 0,5A \Rightarrow$$

$$R = \frac{50V}{0,5A} = 100\Omega$$

El segundo método de conexión se demuestra en

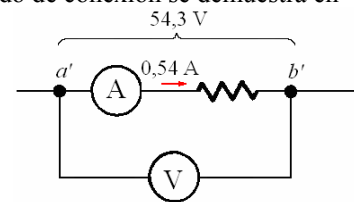


diagrama siguiente.

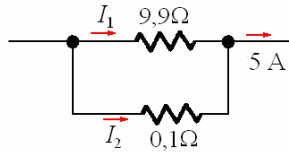
Aquí $54,3V = 0,54A \times (R + r)$.

$$\text{Luego } r = \frac{51,3V}{0,54A} - R = 100,56 - 100 = 0,56\Omega$$

Ejemplo 41. Un galvanómetro cuya resistencia es $9,9\Omega$ se le coloca una resistencia shunt de $0,1\Omega$, cuando se utiliza como amperímetro con la desviación a escala completa de 5 A. ¿Cuál es la corriente del galvanómetro que lleva en la desviación máxima? ¿Qué resistencia se debe utilizar y cómo debe ser conectada si el galvanómetro va a ser utilizado como voltímetro con la desviación a escala completa de 50 V?

Solución.

Cuando el galvanómetro se utiliza como amperímetro debe conectarse tal como se muestra en el siguiente diagrama.



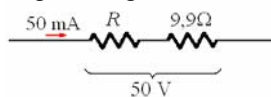
Por la primera ley de Kirchhoff,
 $I_1 + I_2 = 5A$
 Por la segunda ley de Kirchhoff,

$$-9,9I_1 + 0,1I_2 = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{99} \Rightarrow$$

$$\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{1}{100}$$

Luego $I_1 = \frac{5A}{100} = 50 \text{ mA}$.

Cuando el galvanómetro se utiliza como voltímetro debe tener una resistencia en serie con él, como se muestra en el diagrama siguiente.



En la desviación a escala completa 50 mA afluyen a través del galvanómetro, según lo calculado en la primera parte del problema. La caída de potencial a través del galvanómetro debe por lo tanto ser $V = IR = (50 \times 10^{-3} \text{ A})(9,9\Omega) = 0,495 \text{ V}$.

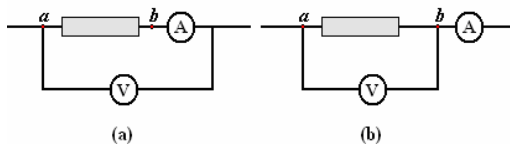
Pero 50 V caen a través de R y del galvanómetro. Así 49,505 V es la caída en la resistencia en serie. Por lo tanto tiene un valor.

$$R = \frac{49,505 \text{ V}}{50 \times 10^{-3} \text{ A}} = 990,1\Omega$$

MEDICION DE POTENCIAS

Como $P = V_{ab}I$ y $R = \frac{V_{ab}}{I}$, es necesario hacer la

medición de V_{ab} e I , para esto hay dos formas posibles de conectar el voltímetro y el amperímetro como se muestra en la figura siguiente.

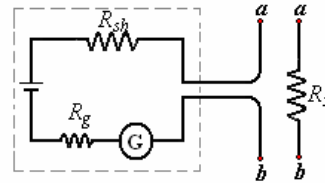


Forma a), en esta forma el voltímetro incluye la diferencia de potencial en el amperímetro, la que si es pequeña (Resistencia de amperímetro muy baja) no necesitaría corrección.

Forma b) en esta forma el amperímetro incluye la corriente que pasa por el voltímetro, si la resistencia del voltímetro es muy alta la corriente debe ser muy pequeña y no necesitaría corrección.

MEDICION DE RESISTENCIAS

Ohmímetro. Es un instrumento que sirve para medir resistencias rápidamente, consta de una pila y una resistencia en serie R_{sh} como se muestra en la figura a continuación.



Ohmímetro

El valor de R_{sh} está dado de tal manera que el galvanómetro marque desviación máxima al unirse a y b, lo que correspondería a una resistencia cero.

Sea R_x la resistencia a medir, se conecta a los terminales a y b y la ecuación del circuito es

$$\mathcal{E} - IR_{sh} - IR_x - IR_g = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_x + R_{sh} + R_g}$$

Como el valor de I depende de R_x y no tienen una relación lineal y además depende de la constancia de \mathcal{E} , este instrumento no es de alta precisión pero es de gran utilidad dada la rapidez de las lecturas.

Ejemplo 42. Con el galvanómetro de ejemplos anteriores proyectar un ohmímetro.

Solución.

Usemos el galvanómetro con una pila común de 1,5V. La deflexión máxima debe de producirse con $R_x = 0$ o sea

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_x + R_g}$$

Con los datos

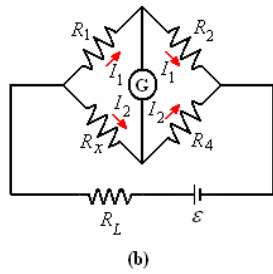
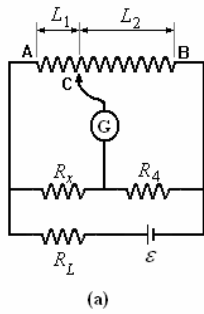
$$10^{-3} = \frac{1,5}{R_{sh} + 20}$$

De donde

$$R_{sh} = 1480\Omega$$

El galvanómetro hay que conectarlo en serie a una pila de 1,5 Voltios y a una resistencia de 1480Ω , luego proceder a su calibración.

Puente de Wheatstone. Usando el circuito conocido como Puente de Wheatstone se pueda medir resistencias con exactitud. La figura (a) muestra un esquema de este dispositivo.



Consiste de un alambre AB de alta resistencia y longitud 1 metro, un galvanómetro G con un terminal de posición variable C, una resistencia conocida R_x , una pila ε y una resistencia R_L limitadora de corriente. La figura (b) muestra la distribución de las corrientes cuando se ha logrado que no haya paso de corriente a través de l mediante la variación de la posición C. Bajo estas condiciones tenemos:

$$I_1 R_1 = I_2 R_x \text{ y } I_1 R_2 = I_2 R_4$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_4} \Rightarrow R_x = R_4 \frac{R_1}{R_2}$$

Es aconsejable que el valor de sea del orden del valor de la resistencia por conocer.

Por otro lado, siendo uniforme el alambre que se usa (mismo material e igual sección).

$$R_1 = \eta \frac{L_1}{A} \text{ y } R_2 = \eta \frac{L_2}{A}$$

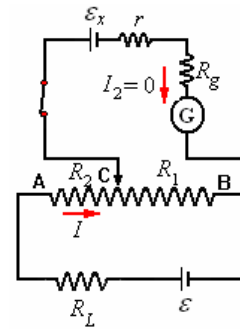
Tenemos que

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

De aquí

$$R_x = R_4 \frac{L_1}{L_2}$$

Potenciómetro. Este dispositivo se usa para medir la fuerza electromotriz de un generador sin que pase corriente por él, La figura siguiente muestra un esquema de este dispositivo.



Consiste de un alambre de alta resistencia AB, un galvanómetro con resistencia interna R_g , una fuerza electromotriz ε , una resistencia limitadora R_2 , una fuerza electromotriz patrón ε_p y por supuesto la fuerza electromotriz por conocer ε_x con resistencia interna r_i .

Se mueve el terminal variable hasta que el galvanómetro marque cero ($I_2 = 0$).

La diferencia de potencial entre C y B es

$$V_{CB} = IR_1$$

También

$$V_{CB} = I_2(R_g + r) - (-\varepsilon_x) = \varepsilon_x$$

De tal manera que

$$\varepsilon_x = IR_1$$

Se repite la experiencia pero esta vez en lugar de la fem desconocida ε_x se pone la fem patrón ε_p ,

como I_2 es cero y el valor de $(R_1 + R_2)$ es constante el valor de I permanece igual, pero tenemos un nuevo R_1 que es R'_1 .

$$\varepsilon_p = IR'_1$$

De estos resultados se ve que

$$\varepsilon_x = \varepsilon_p \frac{R_1}{R'_1}$$

Siendo R_1 y R'_1 el mismo alambre se puede decir que

$$\varepsilon_x = \varepsilon_p \frac{L_1}{L_2}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un alambre de cobre de sección transversal $3 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ conduce una corriente de 10 A. Hallar la velocidad media de los electrones en el alambre. Datos: carga del electrón $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Peso atómico del cobre 63,5 g/mol, número de Avogadro $6,02 \times 10^{23}$ átomos/mol, se supone que cada átomo de cobre contribuye con un electrón libre a la conducción.

2. La cantidad de carga (en C) que pasa a través de una superficie de área 2 cm^2 varía con el tiempo como $q = 4t^3 + 5t + 6$, donde t está en s.

a) ¿Cuál es la corriente instantánea a través de la superficie en $t = 1 \text{ s}$?

b) ¿Cuál es el valor de la densidad de corriente?

3. La corriente I (en Amperes) en un conductor depende del tiempo como $I = 2t^2 - 3t + 7$, donde

t está en s ¿Qué cantidad de carga pasa a través de una sección del conductor durante el intervalo comprendido entre $t = 2s$ y $t = 4s$?

4. Corriente en la atmósfera: En la atmósfera inferior de la Tierra existen iones negativos y positivos, creados por elementos radioactivos en el suelo y en los rayos cósmicos del espacio. En cierta región, la intensidad del campo eléctrico atmosférico es de 120 V/m dirigido verticalmente hacia abajo. Debido a este campo, los iones con una sola carga e positiva, que son 620 por cm^3 , se dirigen hacia abajo con velocidad $1,7 \text{ cm/s}$, y los iones con una sola carga negativa, $-e$, 550 por cm^3 , se dirigen hacia arriba con velocidad $1,7 \text{ cm/s}$.

- ¿Cuál es la densidad de carga de los iones positivos en el aire?
- ¿Cuál es la densidad de carga de los iones positivos en el aire?
- ¿Cuál es la densidad de corriente en el aire?
- ¿Cuál es la resistividad del aire según los datos dados?

5. Un cable cilíndrico de Plata de 1 mm^2 de sección y 5 m de largo, conduce una corriente de $0,5 \text{ A}$.

Determinar:

- La resistencia del conductor.
- La diferencia de potencial ΔV entre los extremos del conductor.
- El campo eléctrico E (uniforme) que determina ΔV en el conductor. (Resistividad de la Plata $\rho = 1,59 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$).

6. Se tiene un cable de Nicromio de radio $0,321 \text{ mm}$.

- ¿Cuál es la longitud de este si tiene una resistencia de 28Ω ?
- ¿Cuál es la ΔV entre los extremos de este cable si conduce una corriente de $4,3 \text{ A}$?
- Calcular la densidad de corriente y el campo eléctrico en el cable en el caso anterior.

(Resistividad del Nicromio $\rho = 1,5 \times 10^{-6} \Omega \text{ m}$).

7. Al considerar la energía eléctrica en un circuito se suele despreciar la energía cinética de las cargas móviles. En este problema vamos a calcular esta energía cinética para un alambre de cobre de longitud 1 m y diámetro 1 mm , que conduce una corriente de 1 A .

Los electrones móviles tienen un movimiento aleatorio térmico de alta velocidad más una lenta deriva debido a la diferencia de potencial entre los extremos del alambre que da al electrón una velocidad promedio v_d . Los electrones tienen una importante energía cinética media por el movimiento térmico. La deriva de un electrón debido a la diferencia de potencial agrega una cantidad $\frac{1}{2} m_e v_d^2$ a su energía cinética por encima de su energía térmica, donde m_e es la masa del electrón.

a) ¿Cuál es la velocidad de arrastre v_d en nuestro alambre cuando la corriente es de 1 A ?

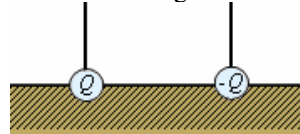
Datos: densidad del cobre: $8,95 \text{ g/cm}^3$; masa molar del cobre: $63,5 \text{ g/mol}$; número promedio de electrones móviles por átomo de cobre: $1,3$.

b) ¿Cuál es la energía cinética (por encima de su energía térmica) de los electrones en el alambre?

c) Considerar los electrones que se encuentran en el primer mm del alambre en un instante inicial.

¿Cuánta energía potencial eléctrica pierden estos electrones viajando hasta el final del alambre? La resistividad de cobre es $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$.

8. En la «prospección eléctrica» los geólogos ponen dos electrodos en la superficie de la Tierra y miden la resistencia entre ellos, la cuál depende de los materiales que hay entre los electrodos y por tanto brinda información sobre estos. En este problema vamos a tratar el caso más sencillo posible, en el cual que la Tierra consiste, hasta una profundidad debajo de casi todas las corrientes, de una mezcla de arena con agua con conductividad de la mezcla σ_0 y constante dieléctrica $k = 1$, y la superficie es un plano infinito. Supongamos además que los electrodos son esferas de radio r separadas por una distancia $R \gg r$. Estas esferas están enterradas hasta sus ecuadores en el suelo como muestra el diagrama.



- Si los electrodos esféricos tienen carga Q y $-Q$ respectivamente y no hay acumulaciones de carga presente fuera de los electrodos ¿cuál es la diferencia de potencial V entre los electrodos?
- Usando la Ley de Ohm microscópica y la Ley de Gauss, ¿Cuál es la corriente total que entra en el electrodo negativo? (No olviden que I es el flujo de la

densidad de corriente J : $\int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA = I_S$ es la

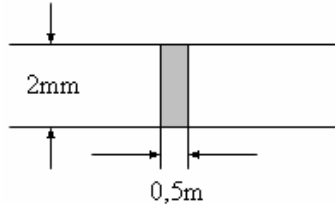
corriente a través la superficie S en el sentido de la normal \hat{n} .)

c) ¿Cuál es la resistencia entre los electrodos? Si los electrodos están lejos uno del otro, la resistencia se acerca a un valor fijo independiente de la separación. Es como si cada electrodo fuera conectado por un alambre de resistencia fija R_{tierra} a un conductor perfecto (de resistencia cero) común. Esto es el motivo por lo cual se puede usar la Tierra como un cero de potencial: un conductor perfecto mantiene un potencial uniforme bajo todas circunstancias. Como se vio en c) esto funciona aun si la resistividad de la Tierra no es muy baja. R_{tierra} se llama la “resistencia de conexión a Tierra”.

d) ¿Cuál es la resistencia de conexión a Tierra de nuestros electrodos esféricos enterrados hasta su mitad? ¿Cómo se puede disminuir esta resistencia?

9. Una resistencia real no tiene solo resistencia sino también una capacidad. De hecho son las cargas

acumuladas en la resistencia que producen el campo eléctrico, y por tanto la diferencia de potencial, a través de esta. Supongamos que una cierta resistencia consiste en un disco de carbón de grosor de radio 1 mm y 0,5 mm de altura. Cada una de las caras está unida con un alambre de radio 1 mm de un metal de resistividad despreciable (ver diagrama).



- ¿Cuál es la resistencia del resistor? La resistividad de carbón es de $3 \times 10^{-5} \Omega \text{m}$.
- Supongamos que una corriente de 1 A pasa por el conjunto, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los bornes del resistor? Como la resistividad de los alambres es despreciable el campo eléctrico también es despreciable en estos, y el potencial prácticamente constante. Por lo tanto el potencial es constante sobre cada borne.
- ¿Cuál es el campo eléctrico en la resistencia? (El campo eléctrico es uniforme).
- Según la Ley de Gauss ¿cuál es la carga eléctrica en las caras del resistor? La constante dieléctrica del carbón es $k = 2,7$, entonces la cantidad de carga libre (no de polarización) es mayor que la carga neta sobre cada borne. ¿Cuánta carga libre hay sobre las caras de la resistencia?
- Se quiere modelar esta resistencia real con un dispositivo con dos bornes hecho de una resistencia ideal (que tiene resistencia pero no acumula carga alguna en su interior) y un condensador ideal (que se deja cargar pero que no deja pasar corriente alguna). Proponga un arreglo de estos elementos ideales que modela (es decir, que se comporta de manera similar a) el resistencia real.
- En términos de la corriente y el voltaje a través del resistor real (las cantidades eléctricas más fácilmente medibles) ¿se les ocurre alguna forma en cómo se manifiesta el hecho de que el resistencia real funciona también como condensador?

10. Un alambre de cobre de resistividad $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$, tiene una longitud de 24 cm y una sección circular de diámetro 2 mm. Calcular la resistencia del alambre

11. Un anillo de radio R tiene una carga por unidad de longitud λ . El anillo gira con una velocidad angular ω alrededor de su eje. Hallar la expresión que nos da la corriente en un punto del anillo.

12. A una esfera metálica se le proporciona carga por medio de un alambre conductor de radio r , de acuerdo con la expresión $q = q_0 e^{-at}$.

- Encuentre la expresión para la corriente eléctrica.
- Calcule la densidad de corriente para el tiempo t .

13. Un cable coaxial consiste en un cilindro metálico hueco de radios interior a y exterior b , y conduce la corriente en dirección radial desde el interior hacia el exterior. Hallar la resistencia del cable.

14. Si existe una caída IR de 1,5 V en un conductor de cobre de 20 metros de longitud, hallar:

- El campo eléctrico en el conductor.
- La densidad de la corriente en el conductor.
- La corriente en el conductor si la sección transversal es igual a 2 mm^2 .

15. La región comprendida entre dos esferas concéntricas de radios a y b está llena de un material conductor de conductividad g . La esfera interior se mantiene a un potencial V_a y la exterior a un potencial V_b de tal modo que existe una corriente radial hacia afuera, encontrar:

- La resistencia entre las esferas.
- La intensidad de corriente.
- La densidad de corriente.
- La intensidad del campo eléctrico en un punto situado entre a y b .

16. La región comprendida entre dos cilindros conductores de radio interior a y exterior b está llena de una resistencia de resistividad η . El cilindro interior está a un potencial V_a y el exterior a un potencial V_b de modo que la corriente se dirige radialmente hacia afuera, encontrar:

- La resistencia correspondiente a una longitud L .
- La intensidad del campo eléctrico entre los cilindros.

17. La resistividad de cierto material varía con la temperatura de acuerdo a la expresión:

$$\eta = \eta_{20} (1 + 2t - t^2).$$

¿A qué temperatura tendrá un alambre de este material la resistencia mínima?

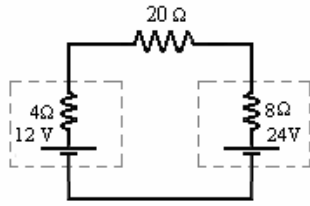
18. Mientras una carga de 2 pasa por una cierta fem, el trabajo realizado sobre la carga por fuerzas no eléctricas es de 16 Joules. ¿Cuál es la fem de la fuente?

19. Una batería de 6 voltios suministra 30 amperes durante 3 segundos en el encendido de un motor de su automóvil. ¿Cuánta energía proporciona la batería?

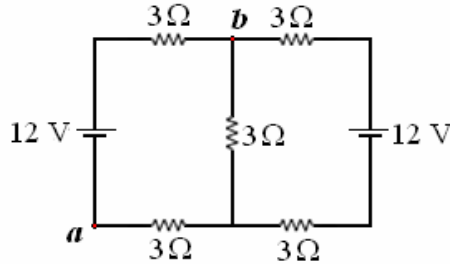
20. Una refrigeradora conectada a 220 voltios funciona durante 150 horas cada mes.

- Si la corriente requerida para el funcionamiento es de 1,6 A. ¿Cuánta energía consume?
- Comparar con el consumo de un receptor de televisión que requiere 1,2 A a 220 voltios y funciona durante 90 horas al mes.

21. En el circuito simple de la figura. ¿Cuál es la potencia que suministra cada fuente?

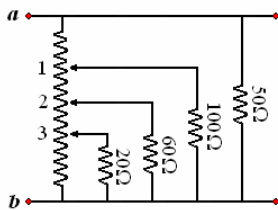


22. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y b de la figura.

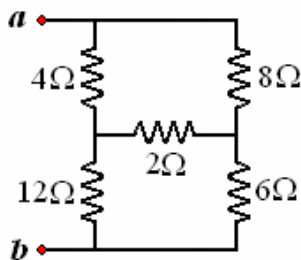


23. La resistencia larga entre a y b vale 32Ω y está dividida en cuatro partes iguales por tres tomas de corriente.

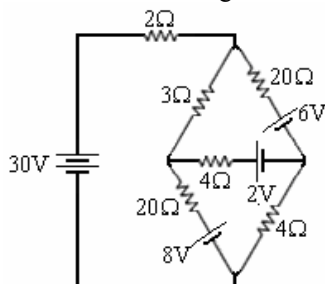
- ¿Cuál es la resistencia entre a y b ?
- Si la diferencia de potencial entre a y b es 220 voltios ¿cuál es la diferencia de potencial entre 2 y 3?



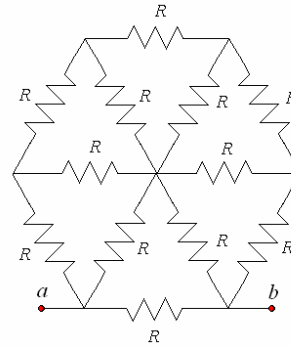
24. Hallar la resistencia equivalente entre los terminales a y b .



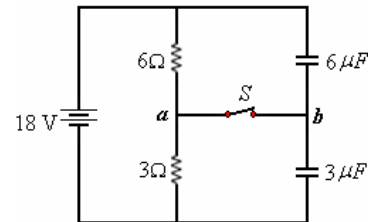
25. Encontrar la intensidad de corriente en cada una de las ramas del circuito de la figura.



26. ¿Cuál es la resistencia equivalente entre a y b ?



- En la figura. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y b cuando la llave S está abierta?
- ¿Cuál es la diferencia de potencial entre a y b cuando se cierra la llave, y cuánto cambia la carga de cada condensador?



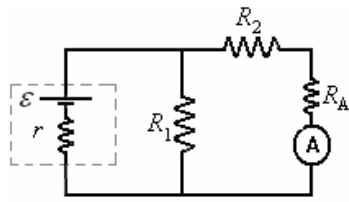
- A un condensador de $0,1 \mu F$ se le da una carga Q_0 . Después de 4 s se observa que su carga es $Q_0/2$. ¿Cuál es la resistencia efectiva a través de este condensador?

29. Un conductor de capacidad $0,2 \mu F$ está aislado de tierra por medio de una placa de silicio de 2,5 mm de espesor y 5 cm^2 de área. ¿Cuál es la resistividad mínima del silicio si la razón de disminución de potencial no debe ser mayor que 0,1% por minuto?

30. Un tubo de neón se conecta a través de un condensador de capacidad $25 \mu F$ el cual está siendo cargado continuamente a través de una resistencia de $0,5 \text{ M}\Omega$ de una fuente de 2500V. Un flash de duración despreciable descarga completamente al condensador cuando el potencial a través del tubo de neón alcanza 200V. ¿Cuántos flashes ocurren por minuto y cuánta energía se disipa en cada descarga?

31. Un galvanómetro cuya resistencia es $9,9 \Omega$ se conecta con un-shunt de $0,1 \Omega$ cuando se usa como amperímetro de 0 a 5A. ¿Cuál es la corriente de máxima deflexión? ¿Qué resistencia debe usarse para tener un voltímetro de 0 a 50V?

32. En el circuito de la figura. ¿Cuál es la lectura del amperímetro?

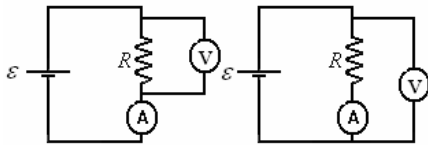


33. La figura muestra dos modos posibles para medir una resistencia incógnita.

La resistencia del amperímetro es 100Ω veces la del amperímetro. El valor calculado de R se considera

que es $R_c = \frac{V}{I}$, discutir en cuál de las formas se

obtiene un mejor resultado

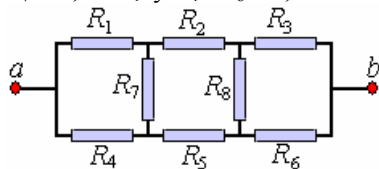


34. Se tiene un hilo conductor de 1 m de longitud y 0,5 mm de radio, cuya

resistividad es $5 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$. Se aplica una diferencia de potencial entre sus extremos de 5 V. Calcule:

- el campo eléctrico en el interior del conductor;
- la densidad de corriente en el conductor;
- la velocidad efectiva de desplazamiento de los portadores de carga.;

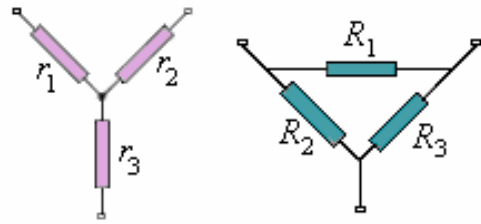
35. Hallar la resistencia entre los puntos a y b del circuito de la figura. $R_1 = R_5 = 1,00 \Omega$, $R_2 = R_6 = 2,00 \Omega$, $R_3 = R_7 = 3,00 \Omega$ y $R_4 = R_8 = 4,00 \Omega$..



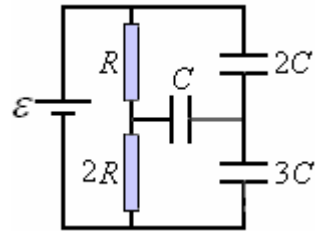
36. Para determinar el lugar de daño del aislamiento entre los conductores de una línea bifilar telefónica de longitud $L = 4,0$ km a un extremo de esta se coloca una fuente de fuerza electromotriz $\mathcal{E} = 15$ V. Con esto resulta que si los extremos opuestos están separados, la corriente por la batería es $I_1 = 1,0$ A, y si se unen la corriente por la batería es $I_2 = 1,8$ A. La resistencia por unidad de longitud del conductor es $\lambda = 1,25 \Omega/km$. Hallar el punto en que se encuentra el deterioro y la resistencia del aislamiento en dicho punto.

La resistencia de la batería se desprecia.

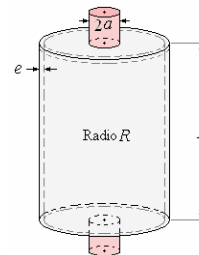
37. Encontrar la condición que deben satisfacer las resistencias R_1 , R_2 y R_3 , para que el arreglo de la figura sea equivalente eléctricamente al arreglo de la figura derecha conformado por las resistencias r_1 , r_2 y r_3 .



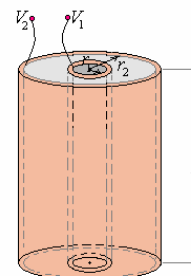
38. En el circuito de la figura, hallar la carga del condensador C después de que el circuito ha estado conectado por mucho tiempo. Despreciar la resistencia interna de la batería.



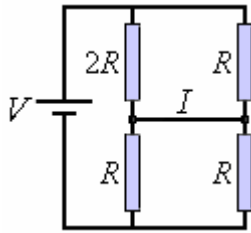
39. Considere un manto cilíndrico de largo L , radio medio R y espesor e ($R \gg e$), con tapas en ambos extremos del mismo espesor e . El manto y las tapas están construidos de un material de conductividad g . En el centro de ambas tapas se han soldado electrodos circulares de radios a ($a < R$) de un metal de muy alta conductividad. Calcule la resistencia total entre ambos electrodos.



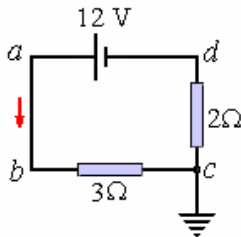
40. En la figura se muestran dos tubos cilíndricos de cobre de radios r_1 y r_2 , el espacio entre ellos lleno de grafito. ¿Cuál es la resistencia entre los terminales? Indicación: Como la conductividad a temperatura ambiente del cobre es 10^5 mayor que la del grafito, suponga que cada tubo de cobre es una equipotencial.



41. En el circuito de la figura, calcule la corriente I que circula por la rama central.



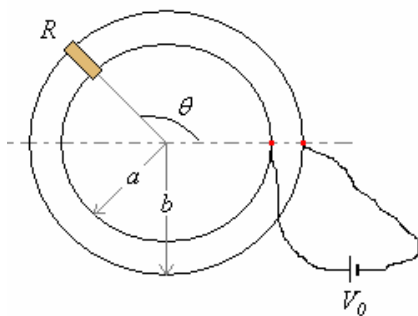
42. En el circuito de la figura la batería tiene una resistencia interna de 1Ω . El punto c está conectado a tierra. Encuentre los potenciales en los puntos b y d .



43. Considere un tren de juguete como se ilustra en la figura. Los rieles son circunferencias concéntricas de radios a y b respectivamente. Están conectados a una batería V_0 . Suponga que los rieles tienen una resistencia por unidad de longitud λ . El tren a su vez se puede modelar como una resistencia R .

La posición del tren queda descrita por el ángulo θ de la figura.

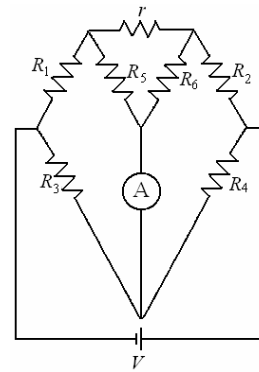
- Para un ángulo fijo encuentre el circuito equivalente de este sistema.
- Para un ángulo fijo encuentre la corriente $I(\theta)$ que circula por el tren (es decir, por la resistencia R).
- ¿Para que posición angular la corriente es máxima? ¿Para que posición es mínima?



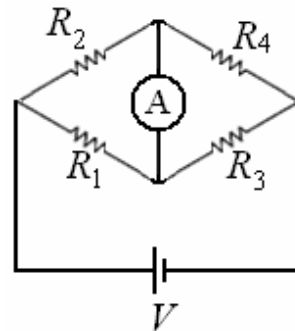
44. En el circuito de la figura, muestre que una condición de balance (es decir que no circule corriente por el amperímetro ideal) que es independiente del valor de r es:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_5}{R_6}$$

Este es el doble puente de Kelvin que se utiliza para medir resistencias pequeñas, del orden de $0,01 \Omega$. La resistencia r representa una resistencia de contacto entre las dos resistencias R_1 ; R_2 , y su valor no afecta el balance.

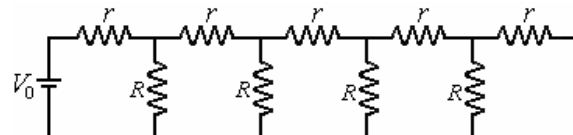


45. Se ubican tres resistencias R_1 , R_2 , R_3 cada una de 10Ω , en tres de los brazos de un puente de Wheatstone y una cuarta resistencia R_4 es ajustada en el cuarto, de modo que el puente quede balanceado (es decir, no circula corriente por el amperímetro ideal de la figura). Luego se reemplaza la resistencia R_3 por una resistencia R_x y el balance se recupera poniendo en paralelo con R_4 una resistencia de $10,123 \Omega$. ¿Cuál es el valor de R_x ? Discuta las ventajas y desventajas de este método para medir resistencias cuando se requiere gran precisión.



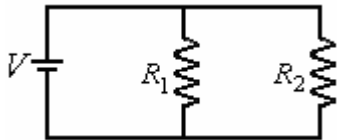
46. Una línea de transmisión consiste de un cable sostenido por postes. Si la resistencia del cable entre dos postes es r y la resistencia de fuga hacia tierra en cada poste es R , calcule la resistencia de la línea de transmisión.

Indicación: Considere que la tierra es un conductor perfecto. Note que como la línea es muy larga, la resistencia no se altera al agregarle un poste y un segmento de cable más.

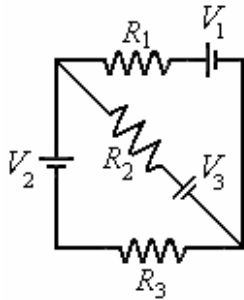


47. Un cubo tiene una resistencia R en cada una de sus aristas.
 a) Calcule la resistencia entre dos vértices opuestos.
 b) Calcule la resistencia entre dos vértices opuestos de una cara del cubo.

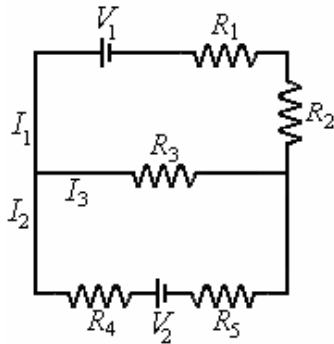
48. Demostrar que las corrientes en el circuito de la figura se distribuyen de modo que la pérdida de energía en forma de calor es mínima.



49. En el circuito de la figura, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, cada batería tiene una resistencia interna de $0,5 \Omega$, $V_1 = 3 \text{ V}$, $V_2 = 5 \text{ V}$ y $V_3 = 7 \text{ V}$. Calcular las corrientes en las diferentes resistencias y los potenciales en las cuatro esquinas del cuadrado.



50. En el circuito de la figura, $R_3 = 8 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$ y $R_5 = 3 \Omega$. Encuentre las corrientes I_1 , I_2 e I_3 .



51. Un foco de alumbrado de $0,4 \text{ W}$ se diseña para que trabaje con 2 V entre sus terminales. Una resistencia R se coloca en paralelo con la bombilla y la combinación se coloca en serie con una resistencia

de 3Ω y una batería de 3 V cuya resistencia interna es de $1/3 \Omega$. ¿Cuál deberá ser el valor de R si la lámpara ha de funcionar al voltaje diseñado?

52. La carga en un condensador de placas paralelas ha caído hasta el 95% de su valor original después de un día debido a las pérdidas a través del dieléctrico. Si la resistividad y la permitividad del dieléctrico son η y ϵ respectivamente, ¿cuál es la magnitud de $\eta\epsilon$?

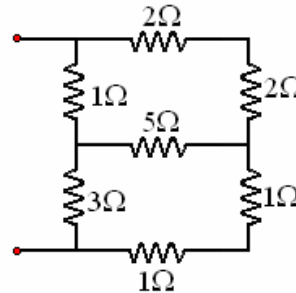
Respuesta. $1,68 \times 10^6 \Omega\text{F}$

53. Una batería de fuerza electromotriz $4,5 \text{ V}$ y resistencia interna $0,3 \Omega$ está conectada en paralelo con una segunda batería de fuerza electromotriz $4,0 \text{ V}$ y resistencia interna $0,7 \Omega$. El sistema común proporciona la corriente para una resistencia externa de 10Ω .

¿Cuál es la diferencia potencial a través de la resistencia externa y la corriente que atraviesa de cada batería?

Respuesta. $4,26 \text{ V}$; $0,978 \text{ A}$; $-0,372 \text{ A}$

54. Encuentre la resistencia equivalente de la red mostrada en el dibujo.



Respuesta. $2,27 \Omega$

CAPÍTULO 3. Campo magnético

INTRODUCCION

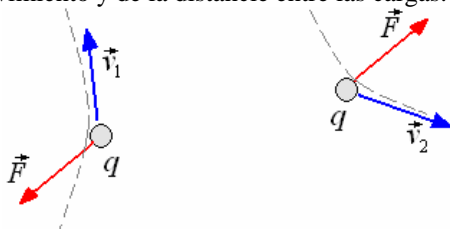
Otro campo que entra en el estudio de la electricidad y el magnetismo es el campo magnético. Los efectos de estos campos son conocidos desde tiempos antiguos. En la Grecia antigua era conocido que ciertas piedras procedentes de Magnesia (ahora denominadas magnetitas) atraían trocitos de hierro.



Magnetita

El descubrimiento de la propiedad de orientación de este material en sentido norte-sur, influyó profundamente en la navegación y exploración.

Aparte de esta aplicación el magnetismo tuvo poco uso y no fue explicado hasta cuando se inventó la pila voltaica. La pila proporciona corrientes continuas del orden de amperios, con tales corrientes se descubrieron nuevos procesos uno detrás de otro en rápida sucesión que relacionaron el magnetismo con la electricidad. Como habíamos visto en la interacción de dos cargas eléctricas estática la existencia del campo eléctrico, cuando estas partículas cargadas están en movimiento aparece un cambio en el movimiento debido a una fuerza que no es mecánica ni electrostática, es la fuerza de interacción magnética y depende de las velocidades relativas de las partículas cargadas, de la carga de cada una, de la dirección relativa del movimiento y de la distancia entre las cargas.



En la figura anterior mostramos dos cargas en movimiento, estas experimentan fuerzas magnéticas \vec{F} . Una carga eléctrica en movimiento genera un campo magnético la otra carga eléctrica móvil sufre una fuerza debido a la influencia de dicho campo sobre ella. Este

fenómeno tiene dos partes, primero la generación del campo magnético y segundo la influencia del campo magnético sobre cargas móviles. Por ahora solo nos ocuparemos de esta segunda parte.

DEFINICIÓN DE CAMPO MAGNETICO \vec{B}

El campo magnético se define por sus efectos sobre una carga en movimiento. Supongamos una región del espacio que contiene varias fuentes magnéticas. Los experimentos que incluyen la observación de las trayectorias de las partículas cargadas que se desplazan por esa región demuestran que la fuerza que actúa sobre ellos tiene las características siguientes:

\vec{F} es directamente proporcional a la carga (q)

\vec{F} es directamente proporcional a la magnitud de la velocidad de la partícula (v)

\vec{F} es perpendicular a \vec{v} en toda la trayectoria de la partícula.

Debido a las propiedades experimentales mencionadas podemos definir el campo magnético que se asocia a las fuentes dadas mediante la relación

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

A \vec{B} se le conoce también como:

Campo magnético vectorial

Inducción magnética

Densidad de flujo magnético

La magnitud de F está dada por $qvB\text{sen}\theta$,

siendo θ el ángulo entre \vec{v} y \vec{B} .

El campo magnético B está dado por la relación

$$B = \frac{F}{qv}$$

En el sistema MKS, la unidad de B es

$$\frac{\text{N}}{\text{C} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N}}{\text{Am}}$$

A esta unidad se le conoce como tesla (T)

Otra denominación de esta unidad es

$$\frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

$$\text{T} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

También se usa el Gauss (G)

$$\text{G} = 10^{-4} \text{T}$$

Para tener una idea de la magnitud del Gauss daremos algunos ejemplos de campos magnéticos.

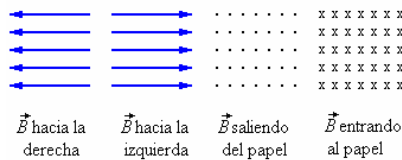
De la Tierra es del orden de 0,5 G
 De un imán pequeño 100 G
 De un imán grande 20000 G
 De un acelerador de partículas 60000 G
 Como la fuerza magnética sobre una partícula carga da se presenta además de la fuerza eléctrica con la formulación obtenida es posible escribir una expresión para la fuerza total experimentada por una partícula cargada. La fuerza electromagnética total sobre la partícula cargada es la suma vectorial de las fuerzas magnéticas y las fuerzas eléctricas, es decir,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Esta ecuación es conocida como **la ley de Fuerza de Lorentz**.

EL FLUJO MAGNETICO

De la misma manera que en la teoría del campo eléctrico, asociaremos el campo magnético \vec{B} a un flujo magnético; A las líneas del campo magnético se las llama líneas de inducción, una carga eléctrica moviéndose a lo largo de una línea de inducción experimenta una fuerza magnética igual a cero. Las líneas así definidas y trazadas en el espacio constituyen una representación del campo magnético. Cuando el campo tiene intensidad uniforme se representa por líneas rectas, uniformemente espaciadas, tal casa se muestra a continuación.



Si se construye un área S normal a la superficie, el flujo se define como:

$$\Phi_B = BS$$

Si el campo no es uniforme y la superficie no es uniforme, usaremos la expresión general

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n}dS$$

el sentido de \hat{n} es hacia afuera para superficies cerradas.

El flujo neto a través de cualquier superficie es

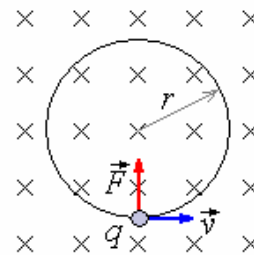
$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}dS$$

El flujo magnético se mide en unidades de campo magnético por unidad de área o sea Weber (Wb). Se hará uso de ésta parte cuando discutamos la inducción electromagnética.

MOVIMIENTO DE UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO MAGNETICO

De la ecuación $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ se observa que una característica de la fuerza magnética que actúa

sobre la partícula cargada es que siempre es perpendicular a la velocidad de la partícula. Cuando el campo magnético es uniforme y la velocidad inicial es perpendicular a \vec{B} , tanto la fuerza como la velocidad quedan en un plano fijo perpendicular a \vec{B} . Como la fuerza es constante en magnitud y siempre perpendicular a \vec{v} el movimiento es circular uniforme como se muestra a continuación.



Por la segunda ley de Newton

$$\sum F_r = ma_r = qvB$$

a_r es la aceleración centrípeta $\frac{v^2}{r}$

De aquí

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

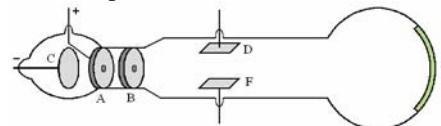
El radio es

$$r = \frac{mv}{qB}$$

La velocidad angular de la partícula $\omega = \frac{v}{r}$ es:

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

Ejemplo 1. Medida de la relación $\frac{q}{m}$ para electrones (experimento de Thomson)



La figura muestra el tubo de Thomson usado para la medición para la medición de $\frac{q}{m}$.

Los electrones proceden del cátodo C que c encuentra a una diferencia de potencial V con el ánodo A.

Los electrones pasan a través de las rendijas A y B con una velocidad que se calcula de la siguiente manera:

La carga q al moverse entra el cátodo y el ánodo que se encuentran a una diferencia de potencial ΔV gana una cantidad de energía igual al

producto $q\Delta V$, la que se convierte en energía cinética $E_K = \frac{1}{2}mv^2$, siendo m la masa de la carga y v la velocidad adquirida. De esto obtenemos la relación

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2$$

y de aquí $v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$

Cuando este haz de electrones ingresa en un campo magnético perpendicular forma una trayectoria circular cumpliéndose la relación

$$\frac{mv}{r} = qB, \text{ de donde}$$

$$v = \frac{qBr}{m}$$

Igualando ambas expresiones para la velocidad:

$$\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \frac{qBr}{m}$$

Finalmente

$$\frac{q}{m} = \frac{B^2 r^2}{2\Delta V}$$

Siendo las cantidades B , r y ΔV susceptibles de

medición se encuentra la relación $\frac{q}{m}$ para el electrón

$$\frac{q}{m} = 1,76 \times 10^{11} \frac{C}{s}$$

También puede utilizarse los efectos de campos magnéticos y eléctricos en la misma región. Si los campos y la velocidad son mutuamente perpendiculares entre sí y además se ajustan las magnitudes de los campos de tal forma que

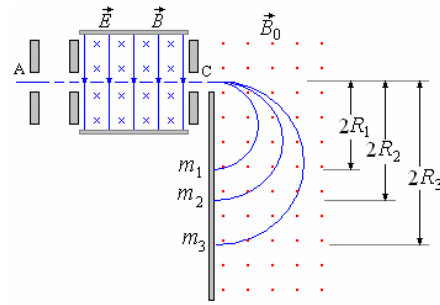
$$qvB = qE, \text{ tendremos que } v = \frac{E}{B}. \text{ Esta}$$

medición puede combinarse con las otras a fin de

obtener el valor de $\frac{q}{m}$.

Ejemplo 2. El espectrómetro de masas.

El espectrómetro de masas es un aparato que utiliza los principios anteriores para medir la masa de los isótopos. Mide la razón q/m de los iones, determinando la velocidad de estos y luego midiendo el radio de su órbita circular en el interior de un campo magnético uniforme



En la figura se muestran los elementos de un espectrómetro, la sección entre A y C actúa como se-lector de velocidades y pasan por la ranura C solo las partículas con velocidad común v .

Al salir de C estas partículas entran en una región

en la que hay un campo magnético constante \vec{B}_0 perpendicular al plano de la figura, las partículas forman una trayectoria circular hasta que chocan con la pantalla o algún instrumento detector. La distancia a la que se detecta la partícula está dada por

$$2R = \frac{2mv}{qB_0}, \text{ por debajo e C}$$

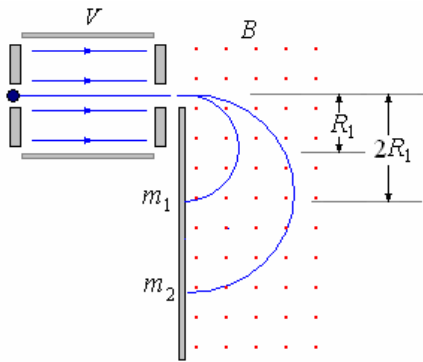
Como $v = \frac{E}{B} \Rightarrow R = m \left(\frac{E}{qBB_0} \right)$

Sendo conocido q , y pudiendo conocerse \vec{E} , \vec{B} y \vec{B}_0 , es posible determinar la masa m con la medición de R .

Ejemplo 3. Fuerzas sobre cargas eléctricas. Un ión de masa m_1 con carga eléctrica q se acelera desde el reposo por medio de una diferencia de potencial V . Luego el ión entra en una zona de campo magnético uniforme B perpendicular a su velocidad, por lo cual es desviado en una trayectoria semicircular de radio R_1 .

Después de esta experiencia, un segundo ión e carga $2q$ y masa m_2 se acelera a través de la misma diferencia de potencial V y se le desvía mediante el mismo campo magnético B dando Como resultado una trayectoria semicircular de radio $R_2 = 2R_1$. ¿Cuál es la relación de las masas m_1 y m_2 de los iones?

Solución.



Para el ión 1:

$$qV = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (1),$$

$$qv_1 B = m_1 \frac{v_1^2}{R_1} \quad (2)$$

Para el ión 2:

$$2qV = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (3),$$

$$qv_2 B = m_2 \frac{v_2^2}{2R_1} \quad (4)$$

Dividiendo (1): (3):

$$\frac{1}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} \quad (5)$$

Dividiendo (2): (4):

$$\frac{v_1}{2v_2} = \frac{m_1 2v_1^2}{m_2 v_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \quad (6)$$

Dividiendo (6)²: (5):

$$\frac{1}{16} = \frac{m_1^2 v_1^2}{m_2^2 v_2^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{8}$$

La relación de las masas m_1 y m_2 es 1/8.

Ejemplo 4. ¿Es posible diseñar o plantear un campo magnético capaz de modificar la trayectoria y velocidad de una partícula cargada a nuestra conveniencia? ¿Cómo? o ¿por qué?

Solución.

Con campos eléctricos y campos magnéticos.

Campos eléctricos

Causa una fuerza sobre la partícula cargada

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

Campos magnéticos.

Causa una fuerza sobre la partícula cargada

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Ejemplo 5. Se lanza una partícula se lanza horizontalmente con una velocidad de 10^4 m/s en tal dirección que se mueve perpendicularmente a un campo magnético horizontal, de magnitud $4,9 \times 10^{-5}$ Wb.m². La partícula, que lleva una sola carga electrónica, permanece en el mismo plano horizontal. ¿Cuál es su masa?

Solución.

Puesto que la partícula permanece en el mismo plano horizontal durante su movimiento, la fuerza magnética en ella debe equilibrar su peso. Puesto que el movimiento es perpendicular a la dirección de la inducción magnética, se deduce que

$$-m \vec{g} = q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right), \text{ y así } mg = qvB \text{ y}$$

$$m = \frac{qvB}{g}$$

Reemplazando valores:

$$m = \frac{(1,6 \times 10^{-19})(10^4)(4,9 \times 10^{-5})}{9,8} = 8,0 \times 10^{-21} \text{ kg.}$$

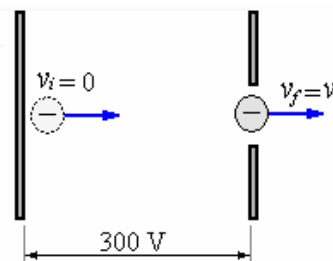
Ejemplo 6. Un haz de electrones acelerado por una diferencia de potencial de 300 V, se introduce en una región donde hay un campo magnético uniforme perpendicular al plano del papel y hacia el lector de intensidad $1,46 \times 10^{-4}$ T. La anchura de la región es de 2,5 cm. Si no hubiese campo magnético los electrones seguirían un camino rectilíneo.

- ¿Qué camino seguirán cuando se establece el campo magnético?
- ¿Cuánto se desviarán verticalmente al salir de la región? Razónese las respuestas

Datos: masa del electrón 9.1×10^{-31} kg, carga $1,6 \times 10^{-19}$ C.

Solución.

a)



El haz de electrones acelerado por una diferencia de potencial de 300 V adquiere una velocidad que se obtiene por:

$$q.V = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow$$

$$(1,6 \times 10^{-19})300 = \frac{1}{2}9,1 \times 10^{-31}v^2 \Rightarrow$$

$$v = 1,03 \times 10^7 \frac{m}{s}$$

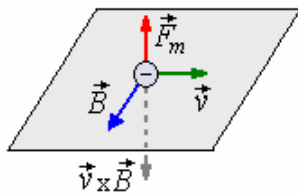
Cuando se establece el campo magnético:

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}, F_B = qVB \text{sen}90^\circ$$

Por la segunda ley de Newton:

$$ma_c = F_B \Rightarrow m \frac{v^2}{r} = qVB \Rightarrow$$

$$r = \frac{mv}{qB} = 0,4 \text{ m}$$

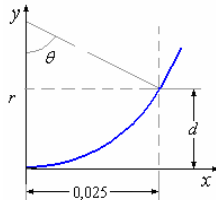


$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}, F_B = qvB \text{sen}90^\circ$$

Por la segunda ley de Newton: $ma_n = F_B$,

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} = 0,4 \text{ m}$$

b) Al salir de la región deja de actuar el campo magnético y el haz de electrones continúa con su última dirección.



$$\text{sen} \theta = \frac{0,025}{r},$$

$$d = r - r \cos \theta = 7,82 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

Ejemplo 7. En un tipo de espectrómetro las partículas cargadas pasan a través de un selector de velocidades antes de ingresar al campo magnético. En otras las partículas pasan a través de un campo eléctrico fuerte antes de ingresar al campo magnético. Compare el cociente de los radios de iones simples de litio cargados de masas 6 amu y 7 amu en los dos casos.

Solución.

En el campo magnético un ion se mueve en un círculo, la fuerza centrípeta necesaria es proporcionado por la fuerza magnética sobre él.

$$\text{Así } qvB = m \frac{v^2}{R}.$$

a través de un selector de la velocidad, ambos iones del litio tienen la misma velocidad en el campo. Además, tienen la misma carga y la misma densidad magnética del flujo. Luego $R_6/m_6 = R_7/m_7$.

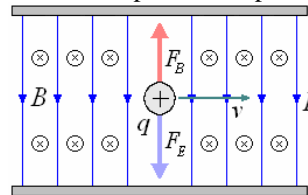
$$\therefore \frac{R_6}{R_7} = \frac{m_6}{m_7} = \frac{6}{7} = 0,857.$$

Si los iones han pasado a través de un campo eléctrico fuerte, ambos han adquirido la misma energía. Pero, de la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2 B^2 r^2}{2m}.$$

$$\therefore \frac{r_6^2}{m_6} = \frac{r_7^2}{m_7} \text{ o } \frac{r_6}{r_7} = \sqrt{\frac{m_6}{m_7}} = 0,926.$$

Ejemplo 8. Cierta tipo de selector de velocidades consiste en un par de las placas paralelas entre las cuales se establece un campo eléctrico E . Un haz de partículas de la masa m , carga q , y velocidad v es dirigido paralelamente a las placas en la región entre ellas. Se aplica un campo magnético B perpendicular a E y a v . en la figura B se dirige hacia el papel, según lo indicado. Determine una expresión para la velocidad de las partículas que no son deflectadas por este dispositivo.



Solución.

La fuerza magnética qvB balancea la fuerza del campo eléctrico qE , tal que:

$$qvB = qE \text{ y } v = \frac{B}{E}.$$

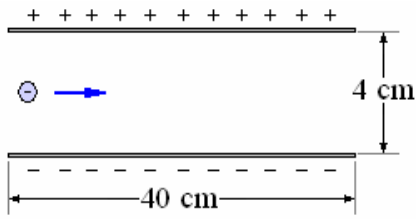
Ejemplo 9. Un electrón es acelerado por una diferencia de potencial de 300 V, entra en una región donde hay un campo eléctrico producido por las placas de un condensador de 40 cm de longitud y separadas 4 cm a las cuales se les aplica una diferencia de potencial de 100 V.

a) Calcular el punto de impacto o la desviación del electrón a la salida de las placas.

b) Ahora, aplicamos hay un campo magnético perpendicular al plano. Determinar la intensidad y el sentido (hacia dentro o hacia afuera) del campo magnético para que el electrón no se desvíe.

c) Se suprime el campo eléctrico, determinar el radio de la órbita del electrón. Dibujar su trayectoria. ¿Chocará contra las placas?

Razónese todas las respuestas haciendo los esquemas correspondientes.



Datos: carga del electrón $1,6 \times 10^{-19}$ C, masa $9,1 \times 10^{-31}$ kg.

Solución.

a) Para calcular la velocidad del electrón. Por conservación de la energía

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \Delta V = 300 \text{ V},$$

$$v_2 = v_0,$$

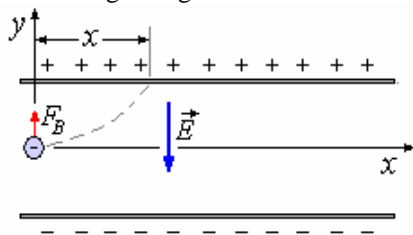
$$v_1 = 0,16 \times 10^{-19} (300) = \frac{1}{2} 9,1 \times 10^{-31} v_0^2$$

$$\Rightarrow v_0 = 1,027 \times 10^7 \frac{m}{s}$$

La fuerza debido al campo eléctrico constante

$$F_E = qE, E = \frac{\Delta V'}{d} = \frac{100}{0,04} = 2500 \frac{N}{C}$$

El movimiento del electrón en presencia del campo magnético es parabólico tal como el que se muestra en la figura siguiente:



Este movimiento esta dado por:

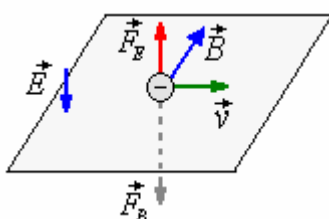
$$a \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{F_E}{m} = \frac{2500}{9,1 \times 10^{-31}} = 2,75 \times 10^{29} \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

$$v \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = a_y t \end{cases} \quad y \quad r \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

Para $x = 0,4 \text{ m} \Rightarrow y = 0,033 \text{ m}$, impacta antes de salir

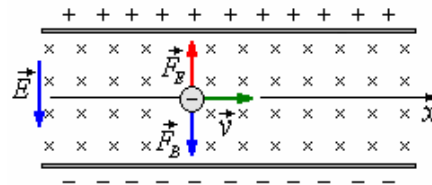
El punto de impacto es cuando $y = 0,02 \text{ m} \Rightarrow x = 0,098 \text{ m}$

b) Para que el electrón no se desvíe.



$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}, \vec{F}_B \text{ es de signo contrario a}$$

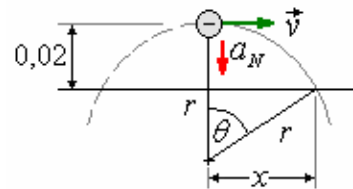
$\vec{v} \times \vec{B}$, ya que la carga es negativa. Luego \vec{B} debe de ser perpendicular al plano del papel y hacia adentro.



$$F_E = F_B, qE = qvB \text{sen} 90^\circ$$

$$\Rightarrow B = \frac{E}{v} = 2,43 \times 10^{-4} \text{ T}$$

c) Cuando se suprime el campo eléctrico.



Por la segunda ley de Newton

$$F_B = ma_N$$

$$qE = qvB \text{sen} 90^\circ = m \frac{v^2}{r}$$

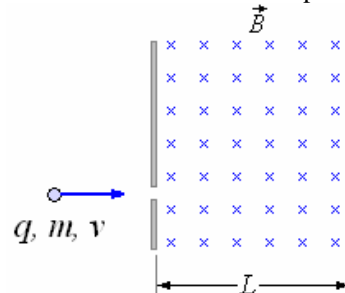
$$\Rightarrow r = \frac{mv}{qB} = 0,24 \text{ m}$$

Punto de impacto: $0,02 = 0,24 - 0,24 \cos \theta$

$$\Rightarrow 0,02 + 0,24 \cos \theta = 0,24 \Rightarrow \theta = 23,6^\circ$$

$$x = 0,24 \text{sen} \theta \Rightarrow x = 0,096 \text{ m}$$

Ejemplo 10. Se tiene un campo magnético uniforme tal como se muestra en la figura, una partícula de masa m y carga q ingresa perpendicularmente con velocidad v . ¿Cuál es la trayectoria cuando abandona el campo magnético?

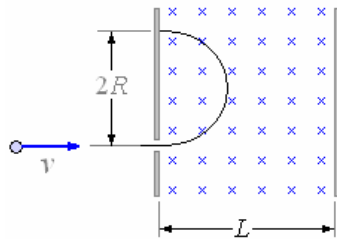


Solución.

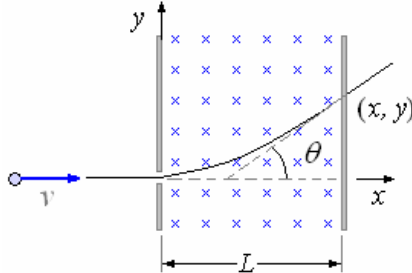
Al ingresar la partícula en el campo magnético esta toma una trayectoria circular cuyo radio es

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Si el valor de R es menor que L la partícula sale en sentido contrario al que ingreso tal como se muestra en la figura a continuación.



Si el valor de R es mayor que L



el radio sigue siendo $R = \frac{mv}{qB}$

la ecuación de la trayectoria de la partícula es

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

El punto de salida es cuando $x = L$ y corresponde a

$$L^2 + (y - R)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$y - R = (R^2 - L^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$y = R + (R^2 - L^2)^{1/2}$$

la salida es en $x = L$, $y = R + (R^2 - L^2)^{1/2}$

La inclinación está dada por el ángulo θ .

Derivando con respecto a x la ecuación de la trayectoria:

$$2x + 2(y - R) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y - R}$$

Esta pendiente corresponde a $\tan \theta$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y - R}$$

En el punto salida

$$\tan \theta = -\frac{L}{(R^2 - L^2)^{1/2}}$$

Ejemplo 11. ¿Un protón (masa $1,67 \times 10^{-27}$ kg) se mueve a lo largo de un arco de radio 32 cm cuando se mueve perpendicular a un campo magnético de 1,4 T. ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón y la cantidad de movimiento del protón?

Solución.

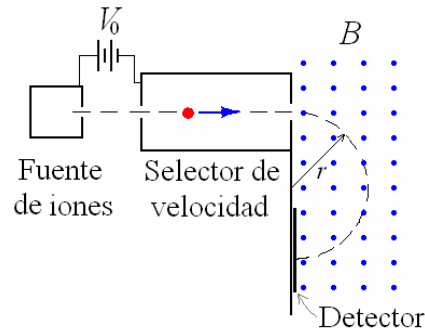
La cantidad de movimiento:

$$mv = qBr = (1,6 \times 10^{-19} \text{C})(1,4 \text{T})(0,32 \text{m}) = 7,17 \times 10^{-20} \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

La frecuencia:

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{qB}{m} = \frac{(1,6 \times 10^{-19})(1,4)}{2\pi(1,67 \times 10^{-27})} = 21 \text{ MHz}$$

Ejemplo 12. Un espectrómetro de masas es un instrumento usado para separar los iones de masas ligeramente diferentes. Éstos son a menudo isótopos de un elemento, ellos tienen características químicas muy similares. La construcción de un espectrómetro de masas se muestra en la figura. Los iones de carga $+q$ y masa m se aceleran con una diferencia potencial V_0 . Los iones luego se mueven en un campo magnético perpendicular B , donde forman una trayectoria semicircular. Se detectan a una distancia $d = 2r$ de la puerta de la entrada. Determine la masa del ion en términos de los parámetros conocidos.



Solución.

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV_0 \text{ y } qvB = \frac{mv^2}{r}$$

Resolviendo:

$$m = \frac{qr^2}{2V_0} B^2$$

B puede ser variado para hacer que diversas masas lleguen al detector.

Solamente la componente de la velocidad perpendicular al campo magnético es cambiada por la fuerza magnética. Por lo tanto, una partícula que se mueve en ángulo con excepción de 90° al campo magnético se moverá en una trayectoria helicoidal.

Ejemplo 13. Sea la región del espacio $x \geq 0$, en la cual existe un campo magnético uniforme

$\vec{B} = B_0 \hat{k}$. Desde una posición $x < 0$ se dispara una partícula de carga positiva q con una

velocidad $\vec{v} = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}$.

a) Calcule el vector Fuerza Magnética que actúa sobre la partícula en el punto de ingreso a la región de campo magnético.

b) Para el caso que las componentes iniciales v_{0x} , y v_{0y} , sean iguales y positivas. Trace

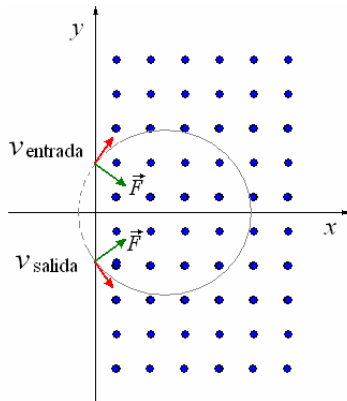
(esquemáticamente) la trayectoria de la partícula en la región de campo magnético. ¿Cuál es el vector velocidad de la partícula al salir de la región de campo magnético?

Solución.

$$a) \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = qB_0 \hat{k} \times (v_{0,x} \hat{i} + v_{0,y} \hat{j}) = qB_0 (v_{0,x} \hat{j} - v_{0,y} \hat{i})$$

b) Al ingresar la carga en la región del campo magnético tiene una trayectoria circular sobre el plano xy , el radio está dado por $R = \frac{\sqrt{v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2}}{qB}$

El gráfico muestra el caso en que $v_{0,x} = v_{0,y}$



Se puede observar que a la salida del campo el vector velocidad continuará con el sentido que tenía en ese instante (tangente a la trayectoria).

$$\vec{v}_{salida} = -v_{0,x} \hat{i} + v_{0,y} \hat{j}$$

Ejemplo 14. Un selector de velocidades se puede construir usando el principio siguiente: Los iones de carga q y masa m mueven hacia arriba comenzando en el origen con la velocidad v_0 a un ángulo θ con el eje de z . Un campo magnético B se establece a lo largo del eje de z . Determine el primer punto donde los iones regresan al eje de z .

Solución.

Los iones se mueven en una trayectoria helicoidal y volverán al eje de z después de un período de la frecuencia del ciclotrón. Durante este tiempo viajarán una distancia $z = v_0 \cos \theta T$ a lo largo del eje z .

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{qB}{m} = \frac{1}{T} \text{ y } z = \frac{2\pi m v_0 \cos \theta}{qB}$$

Ejemplo 15. En una emulsión fotográfica el trazo de un protón que se mueve perpendicular a un campo magnético de 0,60 T se observa que es una circunferencia de radio 1,2 cm. ¿Cuál es la energía cinética del protón en electronvoltios?

Solución.

$$r = \frac{mv}{qB},$$

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{r^2 e^2 B^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{(0,012)^2 (1,6 \times 10^{-19})^2 (0,60)^2}{(1,67 \times 10^{-27})} = \frac{3,97 \times 10^{-16} \text{ J}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2480 \text{ eV}$$

Ejemplo 16. Un electrón se mueve con una de velocidad $3,2 \times 10^5$ m/s en la dirección positiva de x en presencia de un campo magnético

$\vec{B} = 0,1\hat{i} + 0,3\hat{j} - 0,2\hat{k}$ (en teslas). ¿Qué fuerza experimenta el electrón?

Solución.

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = -(1,6 \times 10^{-19}) \left((2 \times 10^5 \hat{i}) \times (0,1\hat{i} + 0,3\hat{j} - 0,2\hat{k}) \right) = 0,96 \times 10^{-14} \hat{k} - 0,64 \times 10^{-14} \hat{j}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1,1 \times 10^{-14} \text{ N}$$

Ejemplo 17. Un ión de litio cargado tiene una masa de $1,16 \times 10^{-26}$ kg. Se acelera con un voltaje de 600 V y después entra en un campo magnético perpendicular a su velocidad de 0,60 T. ¿Cuál es el radio de la trayectoria del ion en el campo magnético?

Solución. $qV = \frac{1}{2} mv^2,$

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}} = \frac{1}{0,60} \sqrt{\frac{2(1,16 \times 10^{-26})(600)}{1,6 \times 10^{-19}}} = 0,016 \text{ m}$$

Ejemplo 18. Iones positivos, con carga simple se aceleran a través de una diferencia potencial y entran en un campo magnético uniforme normal a su línea de movimiento. ¿Si una diferencia potencial de 1000 voltios trae Li^6 al detector, qué diferencia potencial haría que los iones Li^7 atravesen la misma trayectoria?

Solución.

En el campo magnético la fuerza que actúa en los iones provee la fuerza centrípeta necesaria para mantenerlos en una circunferencia. Por lo tanto

$$\frac{mv^2}{R} = qvB.$$

$$\therefore v = \frac{qRB}{m} \text{ o } \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2R^2B^2}{2m}$$

Pero esta energía cinética es adquirida pasando a través de una diferencia de potencial V.

$$\therefore qV \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2R^2B^2}{2m} \text{ o } V = \frac{qR^2B^2}{2m}$$

Para ambos iones, q, R, y B son iguales. Por lo tanto

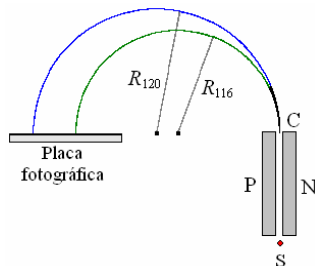
$$V_1 = \frac{k}{m_1} \text{ y } V_2 = \frac{k}{m_2},$$

$$\therefore \frac{V_2}{V_1} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow$$

$$V_2 = \frac{m_1}{m_2} V_1 = \left(\frac{6}{7}\right)(1000) = 857 \text{ V.}$$

Ejemplo 19. La figura siguiente representa el dispositivo diseñado por Bainbridge para medir exactamente masas de isótopos. S es la fuente de iones cargados positivamente del elemento investigado. Todos los iones tienen la misma carga e pero tienen una gama de velocidades. A través de la región un campo magnético uniforme \vec{B} dirigida ingresando perpendicularmente a la página. Además, un campo eléctrico \vec{E} , dirigido paralelo al plano de la página, se instala entre los electrodos P y N.

- Demuestre que solamente los iones que velocidad y iguala E/B emergerán en C.
- Demuestre que la masa m de un ion es proporcional al radio R de su trayectoria semicircular.



Solución.

a) De acuerdo a la figura anterior los iones que viajan de S a C está sujetos a una fuerza eléctrica

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \text{ y una fuerza magnética}$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}. \text{ Aquí } \vec{E} \text{ se dirige hacia la}$$

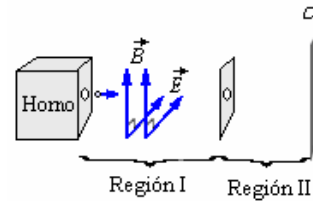
derecha (de P a N) y $\vec{v} \times \vec{B}$ señala en la dirección opuesta y tiene una magnitud vB .

Estas fuerzas se cancelan cuando $qE = qvB$ y

$$v = \frac{E}{B}.$$

$$\text{b) De } \frac{mv^2}{R} = evB \Rightarrow m = \frac{eB}{v} R = \frac{eB^2}{E} R$$

Ejemplo 20. En un horno a altas temperaturas una muestra de sodio es calentada al punto de evaporarse, el gas de sodio resultante está formado por átomos que perdieron un electrón (carga del electrón, - e).



a) ¿Cuál debe ser la relación entre los módulos de \vec{E} y \vec{B} en la región I, de manera que sólo los átomos con velocidad exactamente igual a v_0 sigan sin desviarse? Suponga que la masa de los átomos es m_0

b) Si queremos que los átomos se detengan exactamente cuando lleguen a la placa cargada con σ , ¿cuál es el espesor de la región II?

c) Considerando que el campo magnético de la tierra \vec{B}_H , está también presente en ambas regiones, en la misma dirección en la que se mueven las partículas cargadas. ¿Influirá en la trayectoria de los átomos cargados? ¿Cómo?

Solución.

$$\text{a) } qv_0B = qE \Rightarrow \frac{E}{B} = v_0$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}m_0v_0^2 = e \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Delta L \Rightarrow \Delta L = \frac{m_0v_0^2\epsilon_0}{e}$$

c) No, porque el campo magnético de la tierra \vec{B}_H , está en la misma dirección en la que se mueven las partículas cargadas

Ejemplo 21. El elemento estaño se analiza en un espectrómetro de Bainbridge. Están presentes los isótopos de masas 116, 117, 118, 119, y 120 u. Los campos eléctricos y magnéticos $E = 20 \text{ kV/m}$ y $B = 0,25 \text{ T}$. ¿Cuál es el espaciamiento entre las marcas producidas en la placa fotográfica por los iones de estaño 116 y los iones de estaño -120?

Solución.

Del problema anterior, la distancia x del punto C a la imagen de un isótopo se da por

$$x = 2R = \frac{2E}{eB^2} m \text{ por lo tanto,}$$

$$\Delta x = \frac{2E}{eB^2} \Delta m = \frac{2(2,0 \times 10^4)}{(1,6 \times 10^{-19})} (4u) \left(1,66 \times 10^{-27} \frac{\text{kg}}{u} \right) = 2,66 \times 10^{-2} \text{mm}.$$

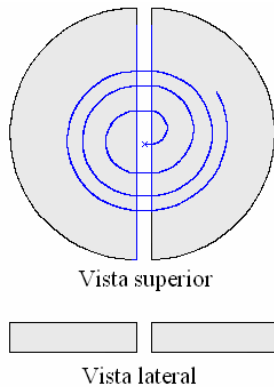
Ejemplo 22. Una partícula con la carga q y masa m orbita alrededor perpendicular a un campo magnético uniforme \vec{B} . Demostrar que su frecuencia del movimiento orbital es $\frac{BQ}{2\pi m}$ Hz.

El hecho de que la frecuencia es independiente de la velocidad de la partícula es importante en los aceleradores de la partícula llamados ciclotrones; esta frecuencia se llama la frecuencia del ciclotrón

Solución.
El periodo es $\frac{2\pi r}{v}$, tal que $f = \frac{v}{2\pi r}$.

Usando $qvB = \frac{mv^2}{r}$, tenemos $f = \frac{qB}{2\pi m}$.

Ejemplo 23. Describa un ciclotrón y su operación.



Solución.
Un ciclotrón es un dispositivo para acelerar partículas nucleares. El corazón del aparato consiste en una caja metálica partida por la mitad. La figura muestra las vistas lateral y superior de las mitades llamadas Des. Una diferencia potencial oscilante se aplica entre las Des. Esto produce un campo eléctrico oscilante en el espacio entre las Des, la región dentro de cada D que esencialmente está libre de campo eléctrico. Las Des se encierran en un envase evacuado, y la unidad entera se pone en un campo magnético uniforme \vec{B} con dirección normal al plano de las Des. Una partícula cargada de la masa m y carga q en el espacio entre las Des es acelerada por el campo eléctrico hacia uno de ellos. Dentro de las Des, se mueve con velocidad constante en un semicírculo.

Del problema anterior el período del movimiento circular uniforme es $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi m}{qB}$. Para la

mitad de un círculo $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}$ y es

independiente de la velocidad. Si el medio período del campo eléctrico oscilante es igual a este tiempo, la partícula cargada será acelerada otra vez cuando cruce el espacio entre las Des nuevamente, debido a la dirección inversa del campo eléctrico. Así ganará energía. Esto hace que el semicírculo siguiente tenga un radio más grande, según como se muestra en la figura. El aumento de energía se puede repetir muchas veces.

Ejemplo 24. Un ciclotrón tiene una frecuencia del oscilador de 11,4 MHz y un radio de 60 cm.

- ¿Qué intensidad de campo magnético se requiere para acelerar los protones de la masa $1,67 \times 10^{-27}$ kg y carga $1,6 \times 10^{-19}$ C,
- ¿Cuál es la energía final que adquieren?
- ¿Qué error se comete si se asume que la masa de los protones sigue siendo constante?

Solución.

a) La frecuencia angular de los protones en el

$$\text{ciclotrón es, } \omega = \frac{Bq}{m} \text{ o } f = \frac{Bq}{2\pi m}.$$

∴

$$B = \frac{2\pi fm}{q} = \frac{2\pi(11,4 \times 10^6)(1,67 \times 10^{-27})}{1,6 \times 10^{-19}} = 0,748 \text{Wb/m}^2.$$

b) La energía final de los protones es

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} = \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2 (0,748)^2 (0,6)^2}{2(1,67 \times 10^{-27})} = 0,154 \times 10^{-11} \text{ J} = \frac{0,154 \times 10^{-11} \text{ J}}{1,6 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}} = 9,64 \text{ MeV}.$$

c) Desde $E = mc^2$, esta energía es equivalente a un incremento de masa

$$\Delta m = \frac{0,154 \times 10^{-11} \text{ J}}{9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2} = 0,017 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Luego el error es

$$\frac{\Delta m}{m} \times 100 = \frac{0,017}{1,67} \times 100 = 1,02\%.$$

Ejemplo 25. Un ciclotrón está acelerando los deuterones los cuales son núcleos de hidrógeno pesado que llevan una carga $+e$ y tienen una masa de $3,3 \times 10^{-27}$ kg.

a) ¿Cuál es la frecuencia requerida del campo eléctrico oscilante si $B = 1,5$ T.

b) Si los deuterones deben adquirir el 15 meV de energía cinética y la diferencia de potencial a través de la separación es 50 kV, cuántas veces el deuterón experimenta la aceleración?

Solución.

a) El período de la oscilación del campo eléctrico debe igualar al período orbital, así que la frecuencia requerida de la oscilación es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m_0} = \frac{(1,6 \times 10^{-19})(1,5)}{2\pi(3,3 \times 10^{-27})} = 11,6$$

MHz.

b) El deuterón al cruzar la separación, gana 50 keV = 5×10^4 eV. Para ganar un total de 15 meV = 15×10^6 eV, el deuterón debe experimentar $(15 \times 10^6)/(5 \times 10^4) = 300$ travesías de la separación.

Ejemplo 26. Un ciclotrón se ha ajustado para acelerar deuterones. Debe ahora ser ajustado para acelerar, que tienen casi exactamente la mitad de la masa del deuterón.

a) ¿Qué cambio debe ser realizado si no hay cambio en la frecuencia, de la diferencia potencial oscilante aplicada entre el Des?

b) ¿Qué cambio debe ser realizado si cambio en campo magnético normal aplicado a las Des?

Solución.

a) La frecuencia angular del ciclotrón es

$$\omega = \frac{qB}{m}, \text{ así tenemos:}$$

$$B = \frac{m\omega}{q}$$

Desde el protón y el deuterón tienen la misma

carga $q_p = q_d$ y $m_p = \frac{1}{2}m_d$, el campo

magnético debe ser disminuido a la mitad.

b) Referente a la ecuación $B = \frac{m\omega}{q}$. Si B debe

permanecer invariable, la frecuencia de la oscilación del campo debe ser duplicada.

Ejemplo 27. ¿Cómo cada uno de los cambios en el problema anterior altera la energía máxima que los protones pueden adquirir?

Solución.

Si se asume que la mecánica no relativista es aplicable a través del movimiento, la energía cinética máxima

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \text{ y } qv_{\max}B = \frac{mv_{\max}}{R}, \text{ donde}$$

R es el radio R del dispositivo. (la cantidad R es un límite superior para el radio orbital de una partícula acelerada). Resolviendo para K_{\max} ,

$$\text{encontramos que } K_{\max} = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2 R^2}{m}.$$

a) La energía cinética máxima se parte en dos:

$$K_{\max}(p) = \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)} \right] K_{\max}(d) = \left(\frac{1}{2}\right) K_{\max}(d)$$

(b) La energía cinética máxima se duplica:

$$K_{\max}(p) = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} \right] K_{\max}(d) = 2K_{\max}(d)$$

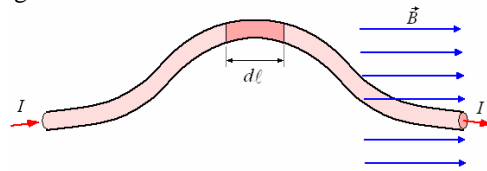
Ejemplo 28. En un experimento de resonancia de ciclotrón, el campo magnético se dirige hacia arriba. Los resultados indican que las partículas cargadas están circulando a la izquierda según la vista de arriba. ¿Cuál es el signo de la carga en las partículas?

Solución.

Negativo (la fuerza debe estar dirigida al centro del círculo).

FUERZA SOBRE UN ALAMBRE CON CORRIENTE.

Cuando las cargas eléctricas se mueven en un conductor que esté en un campo magnético, existe una fuerza sobre el conductor que es la suma de las fuerzas magnéticas sobre las partículas cargadas en movimiento.



la figura muestra un conductor de sección A por el que pasa una corriente I y se encuentra en un

campo magnético \vec{B} , producido por fuentes magnéticas diferentes. Tomemos un elemento infinitesimal $d\ell$ del alambre, consideremos que el flujo de corriente se debe a N portadores de carga por unidad de volumen, cada uno de los cuales se desplaza con velocidad v_d en la dirección de la corriente, por consiguiente la carga total que participa es $\Delta Q = qNA d\ell$ siendo q la carga de cada portador.

La fuerza $d\vec{F}$ sobre el elemento $d\ell$ podemos expresarla como

$$d\vec{F} = (\Delta Q) \vec{v}_d \times \vec{B} = qNA \vec{v}_d \times \vec{B}$$

En esta expresión podemos hacer un intercambio

entre $d\ell$ y \vec{v}_d donde el sentido vectorial sin

alterar la expresión o sea usar en cambio $d\vec{\ell}$ y v_d ($d\vec{\ell}$ con el sentido de I).

$$d\vec{F} = qNAv_d d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

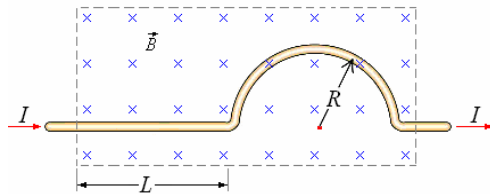
La corriente es $I = qNAv_d$, por consiguiente

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

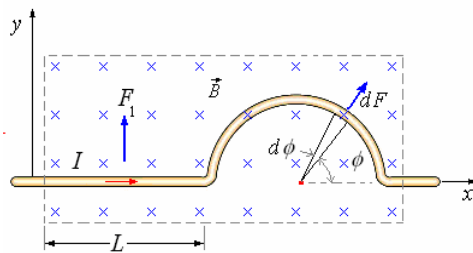
Que es la expresión para calcular la fuerza magnética sobre un alambre con corriente. Para una longitud dada L , la fuerza es:

$$\vec{F} = I \int_L d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Ejemplo 29. ¿Cuál es la fuerza sobre el alambre mostrado en la figura siguiente?



Solución.



La figura consta de dos partes, la parte recta y la parte curva.

La fuerza sobre la parte recta es

$$\vec{F}_1 = I \int_0^L d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Donde $d\vec{\ell} = dx\hat{i}$, $\vec{B} = -B\hat{k}$

$$\vec{F}_1 = I \int_0^L (dx\hat{i}) \times (-B\hat{k}) = I \int_0^L B dx \hat{j} = IBL\hat{j}$$

La fuerza sobre la parte curva es

$$\vec{F}_2 = I \int_0^\pi d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Donde $d\vec{\ell} = R d\phi (\sin\phi \hat{i} - \cos\phi \hat{j})$,

$\vec{B} = -B\hat{k}$.

$$\vec{F}_2 = I \int_0^\pi R d\phi (\sin\phi \hat{i} - \cos\phi \hat{j}) \times (-B\hat{k}) =$$

$$IRB \int_0^\pi (\sin\phi \hat{j} + \cos\phi \hat{i}) d\phi = IRB(2)\hat{j} = 2IRB\hat{j}$$

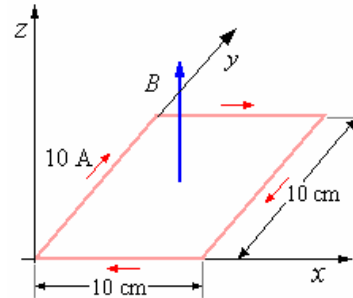
La fuerza total es

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = IB(L + 2R)\hat{j}$$

Ejemplo 30. Una espira de alambre cuadrada de 10 cm de lado yace en el plano xy tal como se muestra en la figura. Se aplica un campo magnético paralelo al eje z , que varía a lo largo del eje x de la forma $B = 0,1x$ T (donde x se expresa en metros).

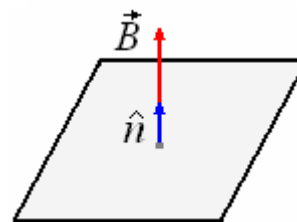
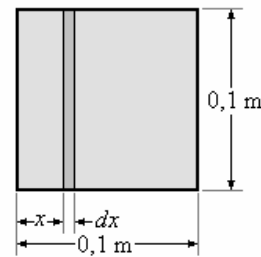
a) Calcular el flujo del campo magnético que atraviesa la espira.

b) La fuerza (módulo, dirección y sentido) sobre cada uno de los lados de la espira.



Solución.

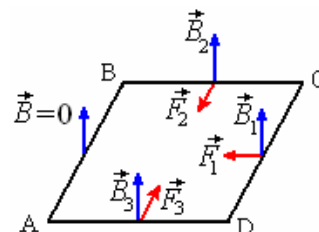
a)



$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int B dS \cos 0^\circ =$$

$$\int_0^{0.1} (0,1x)(0,1dx) = 0,01 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,1} = 5 \times 10^{-5} \text{Wb}$$

b)



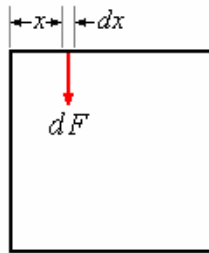
Lado AB: $B = 0 \Rightarrow F = 0$

Lado CD: $B_1 = 0,1(0,1) = 0,01 \text{ T}$

$\Rightarrow F_1 = (10)(0,1)(0,01)\text{sen}90^\circ = 0,01 \text{ N}$, en el sentido negativo de x

$$\vec{F}_1 = -0,01\hat{i}$$

Para los lados BC y AD las fuerzas son iguales y de sentidos opuestos, como B no es constante hay que calcular la fuerza sobre un elemento dx y luego por integración la fuerza total sobre el lado.



Para el lado BC: $dF = (10)(dx)(0,1x)\text{sen}90^\circ = xdx$

$$F_2 = \int_0^{0,1} xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,1} = 5 \times 10^{-3} \text{ N}$$
, fuerza

aplicada en el extremo C del lado BC.

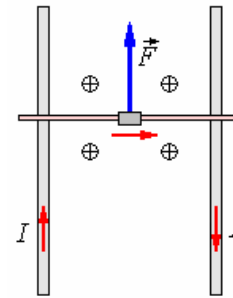
$$\vec{F}_2 = -5 \times 10^{-3} \hat{j}$$

Para el lado AD: Es igual a F_2 , pero de sentido opuesto, aplicada en el extremo D de AD.

$$\vec{F}_3 = 5 \times 10^{-3} \hat{j}$$

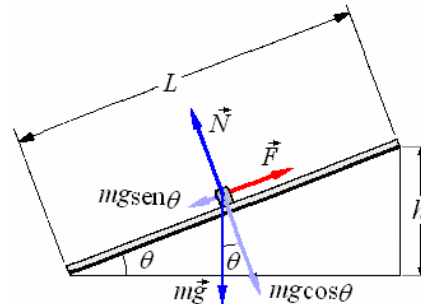
Ejemplo 31. Un príncipe científico ha encontrado un método de enviar mensajes secretos a una princesa hermosa que ese encuentra prisionera de un ogro travieso en el piso superior de su castillo a 15 m del suelo. El príncipe coloca dos barras ligeras del metal (demasiado ligeras para ser usadas para subir) contra el travesaño de la ventana, y entre las barras él monta un alambre 10 cm de largo, en el cual pone el mensaje y un imán, de tal manera que el alambre está permanentemente en un campo magnético de fuerza $0,049 \text{ Wb/m}^2$, perpendicularmente al plano de las barras. Cuando él pasa una corriente de 10 A por una barra, a través del alambre que conecta y vuelve por la otra barra, el mensaje, el alambre y el imán viajan con velocidad uniforme hacia arriba de las barras. El conjunto móvil tiene una masa de 0,25 kg. Despreciando la fricción, calcule cual debe ser la longitud de las barras.

Solución.



Del primer diagrama, vemos que el campo magnético debe ser perpendicular al plano de las barras y debe actuar hacia abajo. La magnitud de la fuerza experimentada por el alambre y los accesorios es

$$F = I\ell B = (0,1)(10)(0,049) = 0,049 \text{ N}$$



Del segundo diagrama, vemos en que las fuerzas que actúan sobre el alambre y los accesorios son tres: el peso que actúa verticalmente hacia abajo, la fuerza F , y N , la reacción normal. Puesto que el conjunto se mueve con velocidad uniforme, $N = mg \cos \theta$ y $F = mg \text{sen} \theta$.

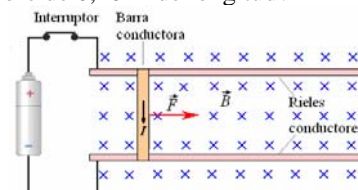
$$\therefore \text{sen} \theta = \frac{0,049}{(0,25)(9,8)} = 0,02$$

Del diagrama, $\frac{h}{L} = 0,02$

$$\text{Luego } L = \frac{h}{0,02} = \frac{15}{0,02} = 750 \text{ m}$$

Llevar tales barras sería absolutamente una hazaña. ¡El Príncipe mejor haría en recurrir a los servicios de una buena bruja!

Ejemplo 32. Un alambre que está a lo largo del eje de x lleva 2,0 A. La corriente fluye en la dirección positiva de x . Un campo magnético de 1,2 T paralelo al plano xy y que forma un ángulo de 30° con el eje de x (apuntando al primer cuadrante). ¿Cuál es la fuerza sobre un segmento de alambre de 0,40 m de longitud?



Solución.

$$\begin{aligned}
 F &= BIL \text{sen } \theta \hat{k} \\
 &= (1,2 \text{ T})(2 \text{ A})(0,40 \text{ m}) \text{sen } 30^\circ \hat{k} \\
 &= 0,48 \hat{k} \text{ N}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 33. Un riel electromagnético para lanzar puede ser construido como sigue: Una barra conductora de masa m sobre dos carriles conductores horizontales paralelos separados una distancia L . Una fuente de poder hace circular una corriente I por los rieles y la barra. A la distancia para atravesar los carriles y la barra. Se mantiene un campo magnético vertical uniforme B . ¿Si la barra está inicialmente en reposo, cuál será la velocidad después de que haya movido una distancia x ? Se ha sugerido que este dispositivo se podría utilizar para proyectar cargas útiles en órbita alrededor de la tierra, o transportar el mineral de la superficie de la luna a una fábrica en el espacio, o inducir reacciones de fusión nuclear con choques de alta velocidad.

Solución.

$$v^2 = v_0^2 + 2ax = 0 + 2\left(\frac{F}{m}\right)x \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2Fx}{m}}$$

Como $F = BIL$:

$$v = \sqrt{\frac{2BILx}{m}}$$

Ejemplo 34. Un alambre recto que está a lo largo del eje de x y que lleva una corriente de 2,0 A en la dirección positiva de x . Un campo magnético uniforme de 0,08 T en el plano xy hace un ángulo de 60° con el alambre. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética en un segmento del 1,5 m del alambre.

Solución.

$$\begin{aligned}
 F &= BIL \text{sen } \theta \\
 &= (0,08)(2)(1,5) \text{sen } 60^\circ \\
 &= 0,21 \text{ N en la dirección positiva de } z.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 35. Un alambre que está en una superficie horizontal en el plano xy lleva 1,5 A. Un extremo del alambre está en el origen y el otro está en (3 m, 4 m). El alambre sigue una trayectoria errática a partir de un extremo al otro. Un campo magnético de 0,15 T dirigido verticalmente hacia abajo está presente. ¿Que fuerza magnética actúa en el alambre?

Solución.

Divida la trayectoria en pasos pequeños dx hacia la derecha y dy hacia arriba. La fuerza en cada segmento es $d\vec{F} = BIdx\hat{j} + BIdy(-\hat{i})$. La fuerza total luego es:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= (0,15\text{T})(1,5\text{A})\left(\hat{j}\int_0^3 dx - \hat{i}\int_0^4 dy\right) = \\
 &0,225(3\hat{j} - 4\hat{i})
 \end{aligned}$$

La magnitud de la fuerza es

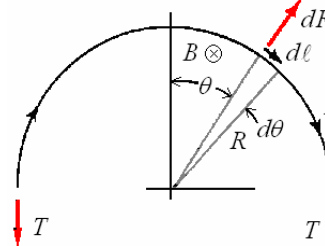
$$F = (0,225)\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 1,13 \text{ N}$$

Observe que no importa la trayectoria exacta del alambre, desde que el alambre zigzaguea hacia adelante y hacia atrás, las fuerzas se cancelan en las partes que retroceden. La fuerza total es justamente la que resultaría si el alambre fuera en línea recta de (0, 0) a (3, 4).

Ejemplo 36. Un lazo circular de alambre de radio R lleva una corriente I . Un campo magnético uniforme B actúa perpendicularmente al plano del lazo. ¿Cuál es la tensión en el alambre?

Solución.

La fuerza en la mitad superior del lazo es equilibrada por la fuerza de la tensión en cada extremo del semicírculo. Usando la regla derecha, se ve que la fuerza magnética está dirigida radialmente hacia fuera. Por simetría la fuerza resultante en el lazo está dirigida en la dirección z , donde $F_z = F \cos \theta$.

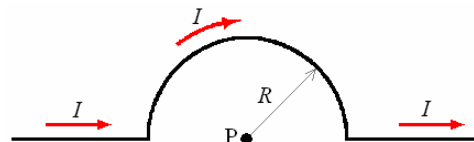


$$F_z = \int_0^\pi BId\ell \cos \theta, \text{ donde } d\ell = R d\theta$$

$$\begin{aligned}
 F_z &= 2 \int_0^{\pi/2} BIR \cos \theta d\theta = 2BIR(\text{sen } \theta)_0^{\pi/2} \\
 &= 2BIR = 2T
 \end{aligned}$$

De aquí $T = BIR$

Ejemplo 37. ¿Un alambre recto largo que lleva una corriente I tiene una "torcedura semicircular" en ella de radio R . ¿Cuál es el campo magnético en el centro del semicírculo?



Solución.

Las secciones rectas no contribuyen nada a B , ya que para ellas $\theta = 0^\circ$ y $dx \text{sen } \theta = 0$. La contribución del semicírculo es justamente la que corresponde a la mitad de un círculo completo,

$$B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2R}. \text{ Luego}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Ejemplo 38. En un altoparlante un imán permanente crea un campo magnético de 0,12 T dirigido radialmente hacia fuera del eje de z . La bobina del altoparlante tiene 60 vueltas y un radio de 0,013 m y se coloca en el plano xy . ¿Qué fuerza actúa en la bobina cuando lleva una corriente de 1,5 A?

Solución.

$$\begin{aligned} F &= NBIL\text{sen}\theta \\ &= (60)(0,12)(1,5)(2\pi)(0,013)\text{sen}\theta \\ &= 0,88 \text{ N} \end{aligned}$$

Ejemplo 39. Un alambre con masa por unidad de longitud 0,04 kg/m lleva 3 A horizontalmente al este. ¿Qué campo magnético mínimo se requiere para equilibrar este alambre contra la fuerza de la gravedad?

Solución.

$$\begin{aligned} F &= BIL\text{sen}\theta = mg, \quad m = \lambda L, \\ B &= \frac{\lambda Lq}{IL} = \frac{(0,04)(9,8)}{3} = 1,13 \text{ T} \end{aligned}$$

Ejemplo 40. Un lazo cuadrado de lado L y de n vueltas lleva una corriente I . Un lado del cuadrado está a lo largo del eje de z , y la corriente fluye hacia abajo en este lado. El resto del lazo está en el cuadrante xy positivo, y el plano del lazo hace un ángulo $\phi < 90^\circ$ con el eje x . Un campo magnético B se dirige a lo largo del eje positivo de x . ¿Qué torque experimenta el lazo? ¿Cuándo es visto de arriba, en qué dirección el lazo tenderá para rotar?

Solución.

$$\begin{aligned} m &= nIA = nIL^2 \\ \tau &= mB\text{sen}\theta = nIL^2 B \cos\phi \end{aligned}$$

ya que $\theta + \phi = 90^\circ$

El lazo rotará en el sentido antihorario.

Ejemplo 41. Un alambre de longitud L en forma de un lazo rectangular. ¿Lleva una corriente I . ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para maximizar el torque en él cuando es colocado en un campo magnético?

Solución. $\tau = mB\text{sen}\theta$, τ es máximo cuando $m = IA$ es un máximo, es decir, cuando A es un máximo. Sea $x =$ longitud de un lado

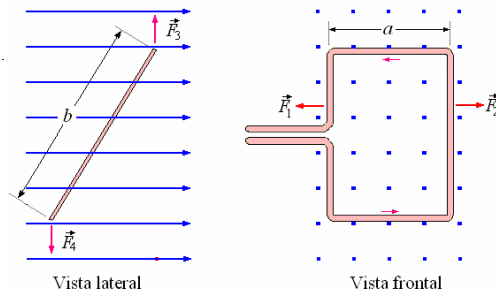
$$\text{Luego } A = \left(x\right)\left(\frac{L}{2} - x\right),$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 = \left(\frac{L}{2} - x\right) - x \Rightarrow x = \frac{L}{4}$$

Un lazo cuadrado da el torque máximo. (Un lazo circular da aún más torque para una longitud dada de alambre.)

FUERZA Y TORQUE SOBRE UNA ESPIRA CON CORRIENTE

Consideremos una espira rectangular de lados a y b , situada en un campo magnético uniforme tal como se muestra en la figura siguiente.



Sobre los miembros verticales (lados de longitud b) actúan las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 que son iguales y opuestas cuyo efecto es tratar de abrir la espira o cerrarla en caso de invertir la corriente, nosotros consideramos una espira rígida indeformable de tal manera que no causan efecto alguno. Sobre los miembros horizontales (lados de longitud a) actúan las fuerzas \vec{F}_3 y \vec{F}_4 , tal que $F_3 = F_4 = IaB$.

Estas fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en sentido, formando así un par de fuerzas de valor

$$\tau = F_3 b \text{sen}\theta = IaBb \text{sen}\theta$$

con $ab = A$ (área de la espira) podemos escribir $\tau = IAB \text{sen}\theta$

Este par puede escribirse como producto vectorial de \hat{n} (normal a la superficie A) y \vec{B} .

$$\vec{\tau} = IA\hat{n} \times \vec{B}$$

Si llamamos momento magnético \vec{m} a $IA\hat{n}$.

$$\vec{m} = IA\hat{n}$$

El par viene a estar dado por

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Esta expresión deducida para una espira rectangular es válida para una espira de forma cualquiera.

Ejemplo 42. Una bobina circular de alambre lleva 50 mA de corriente. La bobina tiene 50 vueltas y un área de 2,0 cm². Un campo magnético de 0,300 T orientado paralelo al plano de la bobina está presente. ¿Qué torque actúa sobre la bobina?

Solución.

Cincuenta vueltas que llevan 50 mA son equivalentes a una vuelta que lleva (50)(50 mA), tal que

$$\tau = NIAB \sin \theta = 50(2 \times 10^{-4})(50 \times 10^{-3})(0,30) \sin 90^\circ = 1,5 \times 10^{-4} \text{ N.m}$$

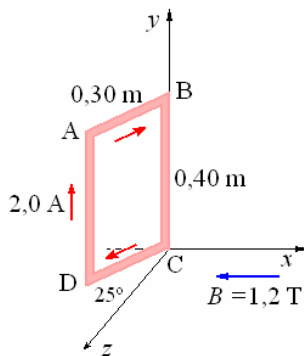
Si uno intenta rotar un dipolo magnético en un campo magnético, un torque $-\mu B \sin \theta$ debe aplicarse. Así $U - U_0 = -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau B \sin \theta d\theta =$

$$-mB(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Elegimos U_0 tal que $U = 0$ cuando $\theta = 90^\circ$, luego

$$U = -\mu B \cos \theta = -\vec{m} \cdot \vec{B}, \text{ energía potencial de un dipolo magnético.}$$

Ejemplo 43. Un lazo rectangular rígido, que mide 0,30 m por 0,40 m, lleva una corriente de 2,0 A, como se muestra. Un campo magnético externo uniforme de la magnitud 1,2 T en la dirección negativa de x está presente. El segmento CD está en el plano xz y forma un ángulo 25° con el eje de z .



- ¿Cuál es el valor de la componente y de la fuerza magnética en el segmento AB?
- Un torque externo se aplica al lazo y lo mantiene en equilibrio estático. ¿Cuál es la magnitud del torque externo?
- ¿Cuál es el flujo magnético a través del lazo debido al campo externo?

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{F} &= I \vec{\ell} \times \vec{B} \\ &= 2,0(-0,3 \cos 25^\circ \hat{k} + 0,3 \sin 25^\circ \hat{i}) \times (-1,2 \hat{i}) \\ &= + (7,2)(0,91) \hat{j} = +0,65 \hat{j} \end{aligned}$$

$$F = +0,65 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{F} &= I \vec{\ell} \times \vec{B} = 2,0(0,4 \hat{j}) \times (-1,2 \hat{i}) \\ &= +0,96 \hat{k} \end{aligned}$$

Esta fuerza es producida en los dos lados largos produciendo un par de fuerzas o cupla, para mantener en equilibrio se debe aplicar un torque opuesto a este, cuya magnitud es:

$$\begin{aligned} \tau &= (0,96)(0,3 \sin 25^\circ) = (0,288)(0,42) \\ &= 0,12 \text{ N m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \Phi &= BA \cos 25^\circ \\ &= (1,2)(0,4 \times 0,3) \cos 25^\circ = 0,13 \text{ Wb} \end{aligned}$$

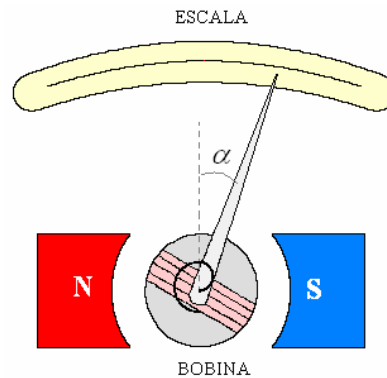
Ejemplo 44. Una bobina circular radio 4 cm y 100 vueltas lleva una corriente de 1,2 A. En presencia de un campo magnético de 0,80 T, orientado perpendicularmente al plano de la bobina. ¿Cuánto trabajo es requerido para dar una vuelta de 180° a la bobina?

Solución.

$$\begin{aligned} W &= -\mu B (\cos 180^\circ - \cos 0^\circ) \\ &= 2\mu B = 2NAIB \\ &= 2(100)(\pi 0,04^2)(1,2)(0,8) = 0,97 \text{ J} \end{aligned}$$

Aplicación 1: El Galvanómetro de D'ansorval.

Como ya vimos anteriormente el **Galvanómetro** consiste de un campo magnético producido por un imán permanente y una bobine de n espiras, la cual tiene libertad de rotar contra un torque restaurador de un espiral de suspensión. El torque de rotación es causado por la corriente I que fluye por la bobina y es justamente la que queremos medir.



El torque producido por el movimiento es $\tau = nIAB \cos \alpha$, siendo α el ángulo rotado desde la posición cero de equilibrio.

La rotación se detendrá cuando el torque restaurador producido por el resorte se iguale al torque magnético, para obtener la posición de equilibrio α con la corriente que pasa tenemos $\kappa \alpha = nIAB \cos \alpha$

Si el ángulo de deflexión es pequeño, $\cos \alpha \approx 1$, la deflexión α directamente proporcional a la corriente I .

Ejemplo 45. Una bobina de un galvanómetro tiene 500 vueltas de alambre enrollado alrededor de un marco de 2 cm de largo y 1 cm de ancho. La bobina rota en un campo magnético de 0,05 Wb/m², siempre paralelo a su plano y perpendicular a su largo. ¿Qué torque actúa en la bobina cuando lleva una corriente de 10^{-8} A?

Solución.

La magnitud del torque que actúa en una sola vuelta de la bobina es,

$$\tau = AIB \cos \alpha .$$

Cuando la bobina tiene n vueltas,

$$\begin{aligned} \tau &= nAIB \cos \alpha \\ &= (500)(0,02 \times 0,01)(10^{-8})(0,05)(1) \\ &= 5 \times 10^{-11} \text{ N.m.} \end{aligned}$$

Ejemplo 46. La bobina de un galvanómetro tiene 150 vueltas de área media 1 cm^2 y el par restaurador de la suspensión es 10^{-6} N.m por radián. La magnitud del campo magnético radial en la cual la bobina gira es $0,2 \text{ Wb/m}^2$. ¿Qué desviación será producida cuando una corriente de $10 \mu\text{A}$ atraviesa la bobina?

Las placas de un condensador de $1 \mu\text{F}$ se cargan a una diferencia potencial de 1 V y después se descargan a través de la bobina del galvanómetro, la desviación resultante que es $0,1 \text{ rad}$. ¿Cuál es el momento de la inercia de la bobina?

Solución.

La magnitud del torque que actúa en las 150 vueltas de la bobina debido al campo magnético es, $\tau = 150AIB$, el campo es radial. La bobina gira hasta que este torsión es balanceado por el torque restaurador de la suspensión $\kappa\theta$. Así en la posición del equilibrio $\kappa\theta = 150AIB$ o

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{150AIB}{\kappa} = \frac{150(10^{-4})(10^{-5})(0,2)}{10^{-6}} \\ &= 0,03 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Cuando se descarga el condensador, la carga que atraviesa la bobina del galvanómetro es

$$Q = CV = (10^{-6})(1) = 10^{-6} \text{ V}$$

Pero la carga y la desviación máxima resultante del galvanómetro están relacionadas por la

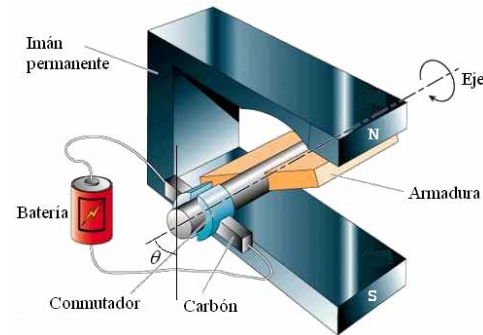
$$\text{ecuación } Q = \left(\frac{\sqrt{\kappa I'}}{nAB} \right) \theta_{\max}, \text{ donde } I' \text{ es el}$$

momento de inercia de la bobina. Así

$$\begin{aligned} I' &= \frac{n^2 A^2 B^2 Q^2}{\kappa \theta_{\max}^2} = \\ &= \frac{(150)^2 (10^{-4})^2 (0,2)^2 (10^{-6})^2}{(10^{-6})(10^{-1})^2} \\ &= 9 \times 10^{-10} \text{ kg.m}^2 \end{aligned}$$

Aplicación 2: Motor de corriente Continua.

Consideremos un motor a corriente continua muy simple como el motor en la figura siguiente.



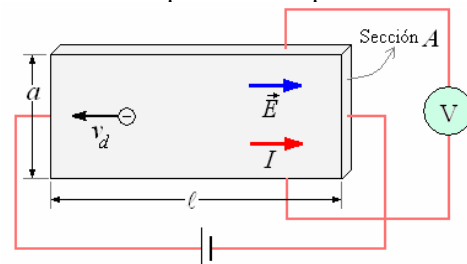
El motor a corriente continua consiste en una armadura formada por varias vueltas de alambre, la cual se encuentra en un campo magnético B uniforme, los motores pequeños utilizan imanes para producir este campo y los grandes tienen electroimanes para este fin. La armadura esta conectada al conmutador el cual es un anillo dividido. La finalidad del conmutador es invertir la corriente en la apropiada fase de rotación, tal que el torque sobre la armadura actúa en la misma dirección. La corriente es proporcionada por la batería a través de un par de resortes o escobillas que están en contacto con el conmutador. El torque del motor está dado por $\tau = NIAB \sin \theta$.

Cuando $\theta = 0$, no fluye corriente por la armadura y es el instante justo en que se invierte la corriente, en el proceso momentáneamente no interviene la batería. Pero como el motor ya esta funcionando, la inercia rotacional hace pasar la armadura a través de la región de torque cero.

EFEECTO HALL

Un caso de efecto que produce un campo magnético sobre una corriente es el fenómeno descubierto por E.H. Hall en 1879, conocido como **Efecto Hall**. Este efecto nos permite determinar el signo de la carga situada en el portador y el número de portadores de carga por unidad de volumen (n) del conductor. Para describir este fenómeno consideremos una lámina delgada de material conductor con sección A , ancho a y largo ℓ .

Conectamos una fuente de voltaje como se muestra en la figura a continuación, aparece un campo \vec{E} y una cierta corriente I asociada a él, los electrones se desplazan con su velocidad v_d en una dirección opuesta al campo.

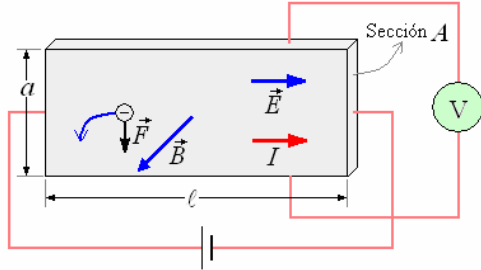


Si se conecta un voltímetro transversalmente a la lámina, dará una lectura cero, ya que el campo eléctrico no tiene componente a lo largo de la dirección vertical.

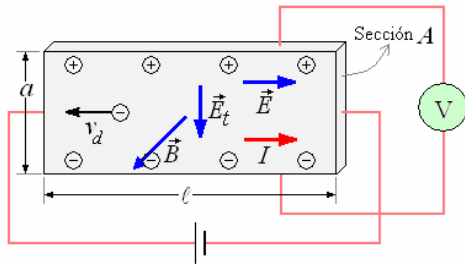
Ahora pongamos un campo magnético dirigido perpendicularmente fuera de la lámina como se muestra en la figura siguiente, la fuerza magnética sobre estas partículas estará en la dirección

$$\vec{q} \vec{v}_d \times \vec{B} \text{ (hacia abajo en la figura).}$$

Los electrones se moverán hacia abajo con trayectoria curva.



Como consecuencia de este movimiento las cargas negativas se apilan en el fondo y en compensación aparecen cargas positivas en la parte superior. Como se muestra en la figura siguiente.



La apilación de cargas continuará hasta que la fuerza producida por el campo eléctrico transversal cancele la fuerza magnética, es decir

$$\vec{q} \vec{E}_t + \vec{q} \vec{v}_d \times \vec{B} = 0$$

Tomando en cuenta los sentidos y cancelando q , obtenemos

$$E_t = v_d B$$

La existencia de E_t queda evidente con el hecho

de que ante la presencia de \vec{B} ($\vec{B} \neq 0$), el

voltímetro en la figura marca una lectura V .

El valor de E_t está dado por

$$E_t = \frac{V}{a}$$

Como la corriente está dada por la expresión

$$I = nqAv_d, \text{ obtenemos: } v_d = \frac{I}{nqA}$$

Reemplazando esta expresión de v_d en E_t :

$$E_t = \left(\frac{1}{nq} \right) \frac{IB}{A}$$

Ejemplo 47. Una cinta de metal de 2 cm. de ancho y 0,1 cm. de espesor lleva una corriente de 20A y está situada en un campo magnético perpendicular al plano de la cinta de 2,0 T. La fuerza electromotriz Hall se mide y resulta 4,27 μV . Calcular:

- La velocidad de desplazamiento de los electrones en la cinta.
- El número de portadores de carga por unidad de volumen de la cinta.

Solución.

a) Como $E_t = v_d B$

$$\text{tenemos que, } v_d = \frac{E_t}{B} = \frac{V/a}{B}$$

Siendo $V = 4,27 \times 10^{-6} V$, $a = 2 \times 10^{-2} m$, $B = 2,0 T$.

Reemplazando valores

$$v_d = \frac{4,27 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-2} \times 2} = 1,06 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

b) Como

$$v_d = \frac{I}{nqA}$$

$$\text{Tenemos que } n = \frac{I}{qAv_d}$$

Siendo $I = 20A$, $q = 1,602 \times 10^{-19} C$,

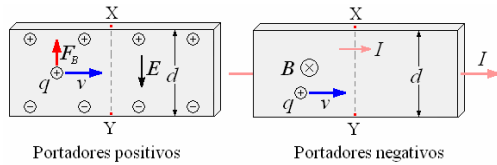
$$v_d = 1,06 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$A = (2 \times 10^{-2})(0,1 \times 10^{-2}) = 0,2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Reemplazando valores

$$n = \frac{20}{(1,602 \times 10^{-19})(0,2 \times 10^{-4})(1,06 \times 10^{-4})} = 58,8 \times 10^{28} \text{ portadores / m}^3$$

Ejemplo 48. Los semiconductores tales como el silicio se pueden dopar con impurezas de modo que los portadores de la carga sean negativos (los electrones) o positivos (agujeros). Esta es una característica importante en la construcción de dispositivos como los transistores. En la figura se bosqueja una disposición para medir el efecto Hall. Tal medida puede determinar el signo y la densidad de los portadores y, cuando está calibrado, se puede utilizar para medir la fuerza de un campo magnético.



Determine una expresión en términos de los parámetros dados para el voltaje Hall medido entre los puntos X e Y en el arreglo mostrado.
Solución.
 La fuerza magnética desvía a los portadores hacia arriba de la muestra hasta que un campo eléctrico E aumenta lo suficiente hasta cancelarse por la fuerza magnética. Cuando sucede esto $qE = qvB$ y el voltaje entre X e Y es $V_H = Ed = v_d B d$.

La corriente es $I = nAqv$, donde $A = ad$ y n es la densidad de los portadores. Luego:

$$\frac{V_H}{d} = \frac{I}{nAq} B \Rightarrow V_H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{a}$$

$1/nq$ es el coeficiente de Hall. Si los portadores son negativos, y la corriente es hacia la derecha, como en el dibujo, la velocidad del portador se dirige a la izquierda, y la fuerza magnética empuja otra vez los portadores hacia arriba. En este caso V_H es negativo, mientras que V_H es positivo para los portadores positivos. Así la medida del coeficiente de Hall determina el signo de los portadores y su densidad ya que casi siempre $q = e$.

Ejemplo 49. En un experimento de efecto Hall una muestra de 12 mm de espesor se utiliza con un campo magnético de 1,6 T. Cuando pasa una corriente de 10 A a través de la muestra, se observa un voltaje Hall de 0,080 V. ¿Cuál es la densidad del portador, asumiendo $q = e$?

Solución.

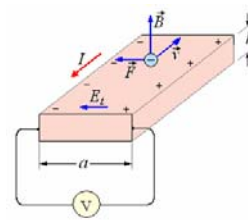
$$V_H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{a} \Rightarrow n = \frac{IB}{eV_H a}$$

Reemplazando valores:

$$n = \frac{(10)(1,6)}{(1,6 \times 10^{-19})(0,08 \times 10^{-6})(12 \times 10^{-3})} = 1,04 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

Ejemplo 50. Determinar la fuerza electromotriz Hall que se produce en una cinta de cobre (suponiendo para éste metal un electrón libre por átomo) de 0,2 cm de espesor, por la que circula una intensidad de corriente de 5 A, cuando se aplica un campo magnético uniforme de 1,5 T, perpendicular a la cinta. Densidad del cobre 8,95 g/cm³, masa atómica 63,5 g.

Solución.



El número de electrones libres por unidad de

volumen del cobre será.
$$N = \frac{N_a \rho}{M_m}$$

La fuerza electromotriz Hall es: $\varepsilon = Ed = vBa$

Además $J = \frac{I}{A} = Nqv \Rightarrow v = \frac{I}{NqA}$

De lo anterior: $\varepsilon = \frac{IaB}{NqA}$

$$\varepsilon = \frac{IBM_m}{N_a \rho e h} =$$

$$\frac{(5)(1,5)(63,5 \times 10^{-3})}{(6,02 \times 10^{23})(8,985 \times 10^3)(1,6 \times 10^{-19})(2 \times 10^{-3})} = 0,3 \times 10^{-6} \text{ V}$$

LEY DE AMPERE, LEY DE BIOT Y SAVART

Después de los experimentos de Oersted en 1820 que describen el movimiento de las agujas de una brújula por la acción de un alambre por el que circula corriente eléctrica, muchos científicos trabajaron sobre este fenómeno. Jean Baptiste Biot y Félix Savart anunciaron los resultados de las mediciones de la fuerza que actúa la aguja magnética en la cercanía del alambre con corriente. André Marie Ampere amplió estos experimentos y demostró que los propios elementos de corriente experimentan una fuerza en presencia de un campo magnético, demostró que dos corrientes ejercen fuerzas entre sí.

LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO

Como vimos en nuestros estudios de la electrostática, la ley de Gauss y la existencia de una función de potencial determinan, en gran parte, todas las características esenciales del campo electrostático. Hay dos leyes análogas, denominadas ley de Gauss para el magnetismo y ley de Ampere que desempeñan el mismo papel para el campo B . La finalidad de esta sección y la que sigue es analizar esas dos descripciones muy importantes del campo de inducción magnética. Como se verá en el capítulo que sigue, la importancia de estas dos leyes se debe, en general, al hecho de que son básicas para las ecuaciones de Maxwell. De hecho, la ley de Gauss para el magnetismo es una de las cuatro relaciones básicas. Además, para cualquier distribución dada de corrientes, las leyes de Ampere y Gauss,

cuando se toman juntas, constituyen una especificación completa del campo B en todas partes. Por tanto constituyen la generalización necesaria de la ley más restringida de Biot Savart, que se aplica sólo a los flujos de corriente en alambres delgados.

Por analogía con la definición del flujo eléctrico, definimos el flujo magnético a través de una superficie S mediante

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

en donde dS es un elemento de área normal a S ,

\vec{B} es el valor del campo magnético en ese punto y la integral es sobre la superficie de S . En función de esta cantidad, la ley de Gauss para el magnetismo establece que el flujo magnético de todas las superficies cerradas desaparece. Por ende

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0, \text{ en donde } dS \text{ es un elemento}$$

vectorial de área dirigido hacia el exterior a partir de la superficie cerrada S . La comparación con la

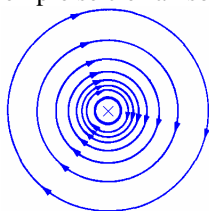
$$\text{ley de Gauss para el campo } E, \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

nos lleva a la conclusión de que no hay análogo magnético para la carga eléctrica. Con frecuencia describimos esto, diciendo que no hay monopolos magnéticos. La validez de (25-11) se estableció mediante un gran número de experimentos y a pesar de las investigaciones continuas, nadie ha detectado todavía la presencia de un monopolo magnético

Una de las consecuencias más importantes de la

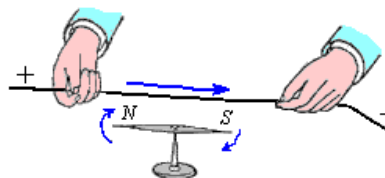
$$\text{ecuación } \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \text{ es la de que todas las}$$

líneas de campo B tienen que ser continuas. Por lo tanto, en general, es cierta la propiedad de las líneas de campo B , como se ilustra en la figura abajo, de que siempre se cierran sobre sí mismas.

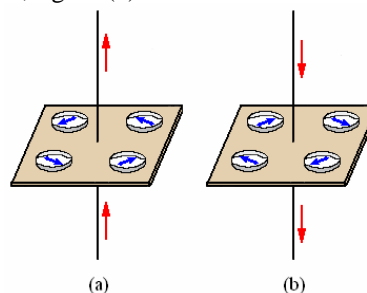


LEY DE AMPERE.

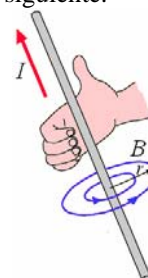
Hans Oersted en 1820 descubrió experimentalmente que una corriente que circula en un alambre produce efectos magnéticos sobre una brújula situada a su alrededor.



Al colocar varias brújulas en los alrededores del alambre estas se orientan tangencialmente a la circunferencia formada por la distancia radial al alambre, figura (a). Al invertir la corriente se orientan tangencialmente pero en sentido contrario, figura (b).



En la práctica se adopta la regla de la mano derecha orientando el pulgar con la corriente y la punta de los dedos con el campo magnético como muestra la figura siguiente.



Se observó experimentalmente que al alejarse del alambre el campo disminuía y al acercarse aumentaba. Asimismo, el campo aumentaba con el aumento de la intensidad de la corriente, es

$$\text{decir } B \propto \frac{I}{r} \text{ o } B = K \frac{I}{r}, \text{ donde } K \text{ es una}$$

$$\text{constante igual a } 2 \times 10^{-7} \frac{\text{Tesla.m}}{\text{Ampere}} \text{ en el sistema}$$

MKSC.

$$\text{También } K = \frac{\mu_0}{2\pi}, \text{ donde } \mu_0 \text{ es la constante de}$$

permeabilidad en el vacío tiene un valor de

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Tesla.m}}{\text{Ampere}}$$

$$\text{Finalmente } B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

Esta expresión es conocida como **la ley de Ampere.**

Debido a la dependencia radial de B y a que r es constante en la circunferencia, podemos expresarla en la siguiente forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Esta expresión es válida en general para cualquier arreglo de conductores con corriente, para cualquier trayectoria cerrada de integración y para cualquier campo B , siempre y cuando éste no varíe con el tiempo. La corriente I es la corriente encerrada por la integral de línea. Se puede escribir en función de la densidad de corriente.

$$\text{Como } \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Donde la integral de superficie de la densidad de corriente corresponde al área encerrada por la integral de línea cerrada.

La ley de Ampere tiene aplicación muy limitada ya que solo puede evaluar problemas que tienen simetría.

Ejemplo 51. Se tiene un conductor cilíndrico largo y recto de radio R que lleva una corriente I uniformemente distribuida. Calcular el campo magnético para puntos dentro y fuera del alambre.

Solución.

a) Campo magnético para $r > R$.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

b) Campo magnético: para $r < R$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Como la corriente I es uniforme

$$J = \frac{I}{\pi R^2}; \vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{n}$$

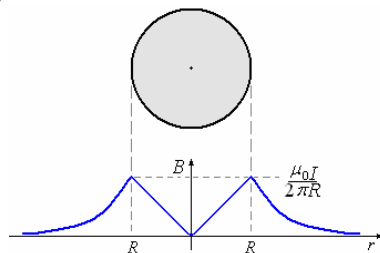
$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

c) Para $r = R$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

d) El gráfico de B versus r es



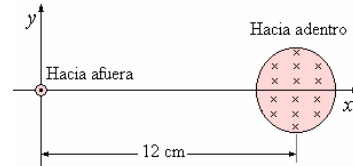
Ejemplo 52. Un hilo rectilíneo conduce una corriente de 4 A, un cable cilíndrico de 3 cm de

radio conduce la misma corriente, uniformemente distribuida, pero en sentido contrario.

a) Determinarse, aplicando la ley de Ampere, la expresión de campo magnético producido por cada una de las corrientes rectilíneas infinitas a una distancia r , de forma separada.

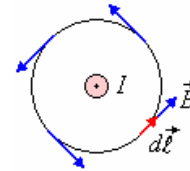
b) Hallar el campo magnético (módulo, dirección y sentido), en los puntos (13 cm, 0), y en el punto (0 cm, 4 cm) producido por las dos corrientes.

c) Por último, hallar la fuerza, (módulo, dirección y sentido) que ejerce el cable sobre la unidad de longitud del hilo rectilíneo.



Solución.

a) El campo magnético producido por el hilo rectilíneo



El campo es perpendicular al plano formado por la corriente y el punto, su sentido está dado por la regla de la mano derecha.

Se toma como camino cerrado una circunferencia concéntrica de radio r . Aplicando la ley de Ampere:

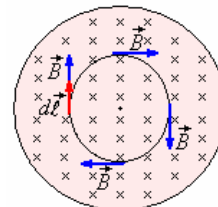
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I,$$

B es constante en todos los puntos de la circunferencia

$$\oint B d\ell \cos \theta = B \oint d\ell = B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{2\mu_0}{\pi r}$$

El campo magnético producido por el cable cilíndrico.



Para $r < 0,03$ m y la corriente está

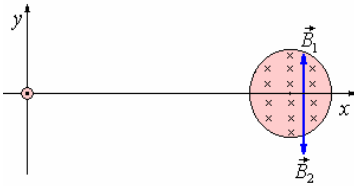
$$\text{uniformemente distribuida } I = 4 \frac{\pi r^2}{\pi (0,03)^2}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 4 \frac{r^2}{0,03^2} \Rightarrow B = \frac{2\mu_0 r}{0,03^2 \pi}$$

Para $r > 0,03$ m $I = 4$ A

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{2\mu_0}{\pi r}$$

b) Campo magnético resultante en el punto (13 cm, 0)



$$B_1 = \frac{2\mu_0}{\pi 0,13} = 0,62 \times 10^{-5} \text{ T},$$

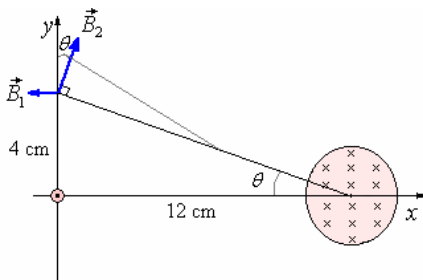
$$\vec{B}_1 = 0,62 \times 10^{-5} \hat{j}$$

$$B_2 = \frac{2\mu_0(0,01)}{\pi(0,03)^2} = 0,89 \times 10^{-5} \text{ T},$$

$$\vec{B}_2 = -0,89 \times 10^{-5} \hat{j}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -0,27 \times 10^{-5} \hat{j} \text{ T}$$

Campo magnético en el punto (0 cm, 4 cm).



$$B_1 = \frac{2\mu_0}{\pi 0,04} = 2 \times 10^{-5} \text{ T}, \quad \vec{B}_1 = -2 \times 10^{-5} \hat{i}$$

$$B_2 = \frac{2\mu_0}{\pi \sqrt{0,12^2 + 0,04^2}} = 6,32 \times 10^{-6} \text{ T},$$

$$\vec{B}_2 = B_2 \sin \theta \hat{i} + B_2 \cos \theta \hat{j} =$$

$$2 \times 10^{-6} \hat{i} + 6 \times 10^{-6} \hat{j}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -1,8 \times 10^{-5} \hat{i} + 6 \times 10^{-6} \hat{j} \text{ T}$$

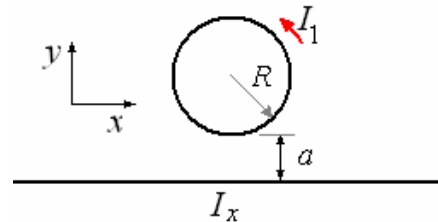
c) La fuerza, que ejerce el cable sobre la unidad de longitud del hilo rectilíneo.



$$B_2 = \frac{2\mu_0}{\pi 0,12} = 0,67 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$\vec{F}_B = I \vec{L} \times \vec{B}_2, \quad F_B = (4)(1)B_2 \sin 90^\circ = 2,7 \times 10^{-5} \text{ N en cada metro de hilo.}$$

Ejemplo 53. La figura muestra dos alambres llevando corriente. La corriente en el anillo tiene un valor y dirección conocidos I_1 . Halle el valor y dirección de la corriente I_x en el alambre recto e infinito de manera que el campo en el centro del anillo sea nulo.



Solución.

El campo producido por el anillo es:

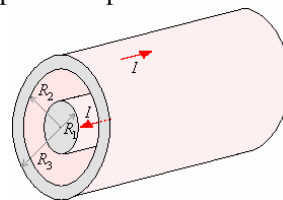
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2R} \hat{k}$$

Para que el campo en el centro del anillo sea nulo, el alambre debe producir un campo igual y de sentido opuesto

$$\vec{B}_a = -\frac{\mu_0 I_1}{2R} \hat{k} = -\frac{\mu_0 I_x}{2\pi(R+a)} \hat{k}$$

Para esto el valor de $I_x = I_1 \frac{\pi(R+a)}{R}$, con sentido negativo de x .

Ejemplo 54. Se tiene un cable coaxial, tal como se muestra en la figura. Calcular el campo magnético para todo punto.



Solución.

a) Para $r < R_1$

Resuelto en el problema anterior

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

b) Para $r = R_1$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

c) Para $R_2 > r > R_1$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

c) Para $r = R_2$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

d) Para $R_3 > r > R_2$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left(I - \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \right) \Rightarrow$$

$$B 2\pi r = \mu_0 \left[I - \frac{\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} I \right] \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[1 - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \right]$$

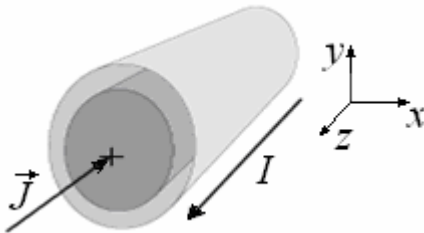
e) Para $r > R_3$

$$B = 0$$

Ejemplo 55. La figura muestra una sección de un alambre coaxial muy largo. Esta formado por un alambre interior de radio a y con densidad de corriente $\vec{J} = -\frac{I}{2\pi a} \hat{k}$, y además por un

cascarón muy delgado de radio b llevando una corriente I en su superficie. Hallar

- La corriente neta en el alambre interior macizo.
- El campo magnético en el espacio entre a y b .



Solución.

$$a) I' = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{r=0}^{r=a} \left(-\frac{I}{2\pi a} \hat{k} \right) \cdot (2\pi r dr \hat{k})$$

$$= -\frac{I}{a} \int_0^a dr = -I$$

$$b) \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right)$$

$$\Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \Rightarrow$$

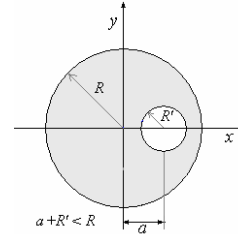
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right), \text{ en el sentido}$$

horario.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \frac{r}{a} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r}{a} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \text{ en el sentido horario.}$$

Ejemplo 56. En el conductor cilíndrico hueco mostrado en la figura circula una corriente I uniforme hacia afuera. Calcular el campo magnético en la parte hueca.

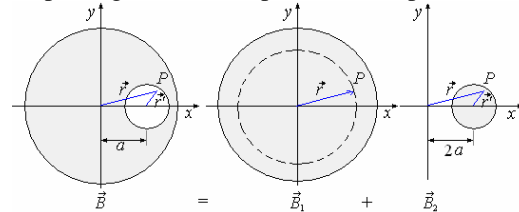


Solución.

Estando la corriente distribuida uniformemente, la densidad de corriente es

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi(R^2 - R'^2)} \hat{k}$$

En la figura siguiente se muestra gráficamente el campo magnético en un punto P en la parte hueca.



Cálculo de \vec{B}_1

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow$$

$$B_1 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 J}{2\pi} r$$

La dirección del vector \vec{B}_1 está en la dirección del vector $\vec{r} \times \vec{J}$ como \vec{r} y \vec{J} son perpendiculares podemos escribir.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \vec{r} \times \vec{J}$$

Cálculo de \vec{B}_2

Procediendo de igual manera

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \vec{r}' \times \vec{J}$$

Finalmente \vec{B} es

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_1 - \vec{B}_2 \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \vec{r} \times \vec{J} - \frac{\mu_0}{2\pi} \vec{r}' \times \vec{J} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} (\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{J} = \frac{\mu_0}{2\pi} a \hat{i} \times \vec{J} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} a \hat{i} \times J \hat{k} = \frac{\mu_0}{2\pi} a J \hat{j} \end{aligned}$$

Ejemplo 57. Un estudiante en un lugar donde la componente horizontal del campo magnético de la tierra es $1,7 \times 10^{-7} \text{ Wb/m}^2$, está realizando un experimento usando una brújula en un laboratorio que también tiene un experimento con un alambre vertical largo que lleva una corriente de 50 A. ¿Qué distancia los experimentos deben estar separados para que la aguja de la brújula sea afectada insignificante por el campo del alambre?

Solución.

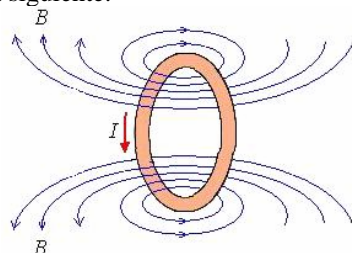
La componente horizontal del campo magnético de la tierra es $1,7 \times 10^{-5} \text{ Wb/m}^2$. El efecto magnético debido al alambre vertical debe ser menor que 1/100 que esto para que su efecto sea insignificante a la exactitud de una aguja de brújula. Así si r es la distancia mínima por la cual los dos experimentos deben estar separados,

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 1,7 \times 10^{-7} \text{ Wb/m}^2 \\ \Rightarrow r &= \frac{(2 \times 10^{-7})(50)}{1,7 \times 10^{-7}} = 58,8 \text{ m} \end{aligned}$$

Ejemplo 58. Encontrar el campo magnético de un solenoide. Solenoide es un conductor enrollado en forma de hélice y se utiliza para producir un campo magnético interno y uniforme en una pequeña región. -

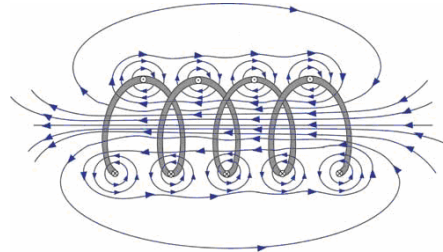
Solución.

Si hacemos pasar corriente por una espira, ésta nos da un campo magnético como el mostrado en la figura siguiente.

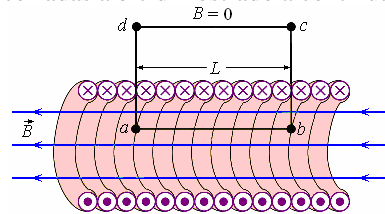


Si juntamos varias espiras de un mismo radio, conectadas entre si, colocadas una a continuación de otras formando una bobina que tiene una longitud grande comparada con el radio de las espiras.

Cuando circula corriente por el solenoide se produce la suma de los campos magnéticos de las espiras, tal como se muestra en la figura.



El campo magnético se refuerza en el interior del solenoide y se anula en la parte exterior. Así que podemos aplicar la ley de Ampere a lo largo de líneas cerradas a b c d mostrado a continuación.



Parte central del Solenoide

Aplicando la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (NI)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

La única parte que tiene valor es $\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B\ell$

N es el número de espiras por unidad de longitud. La corriente total encerrada por la superficie es (NI) .

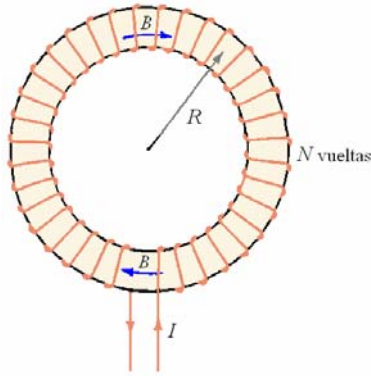
De esta manera

$$B\ell = \mu_0 (NI)$$

Finalmente

$$B = \mu_0 NI$$

Ejemplo 59. El toroide. Determine el campo dentro de un toroide de N vueltas que llevan la corriente I . Un toroide es como un solenoide doblado en una forma de circunferencia.



Solución.

Aplique la ley del amperio a una trayectoria circular dentro del toroide. Por simetría, B es tangencial a esta trayectoria y constante en magnitud a lo largo de la trayectoria, tal que

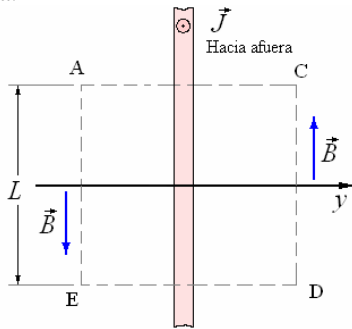
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \oint d\ell = 2\pi R B = \mu_0 N I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$$

Si la trayectoria integral está fuera del toroide, la corriente que atraviesa el plano encerrado por la trayectoria es cero, así el campo fuera de un toroide ideal es cero.

Ejemplo 60. Una hoja conductora infinita en el plano del xz lleva una densidad de corriente

uniforme (por unidad de ancho) \vec{J}_ℓ en la dirección x . Determine el campo magnético fuera de la hoja.



Solución.

Por medio de la regla de la mano derecha se ve que \vec{B} está dirigido según se muestra en la figura.

Por simetría, \vec{B} es constante en magnitud. \vec{B} y $d\vec{\ell}$ son perpendiculares a lo largo de la CA y de DE, tal que $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ allí. Aplicando la ley del Ampere

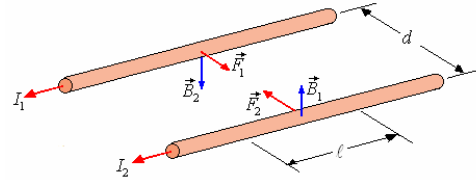
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2BL = \mu_0 J_\ell L \Rightarrow B = \mu_0 \frac{J}{2}$$

FUERZA ENTRE DOS CONDUCTORES PARALELOS

Anteriormente vimos que cuando un alambre de longitud ℓ por el cual circula una corriente I se encuentra en un campo magnético sufre la acción

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$$

Si tenemos dos alambres rectos paralelos por los cuales circulan corrientes I_1 e I_2 respectivamente como se muestra en la figura, separados una distancia d .



Debido a la corriente I_1 a la distancia d se forma

$$\text{un campo magnético } B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \text{ produciendo}$$

sobre el alambre por el que circula una fuerza $F_2 = I_2 \ell B_1$ (dirigida hacia el alambre 1).

Reemplazando el valor de B_1

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d}$$

De igual modo encontramos el valor de F_1 .

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d} \text{ (dirigida hacia el alambre 2)}$$

Por supuesto se cumple el principio de acción y reacción.

$$\vec{F}_1 = -F_2 \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Si las corrientes son en sentidos opuestos la fuerza entre los alambres es de repulsión.

Ejemplo 61. Sean dos alambres rectos, muy largos, y paralelos entre sí, por los que pasa una corriente I_1 e I_2 en el mismo sentido. Suponga que el alambre I_1 coincide con el eje z , el

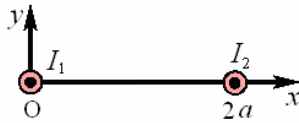
alambre I_2 pasa por el punto $x = 2a$, y que las corrientes tienen el sentido positivo de z . La figura anexa muestra un corte transversal de los alambres.

a) Halle el vector de campo magnético en el punto $P_1 = (x; y; 0)$ debido a los dos alambres.

b) Se coloca un alambre recto de longitud L , paralelo a los alambres anteriores, cuyo centro coincide con el punto $P_2 = (a; a; 0)$, y por el que pasa una corriente I_3 en el mismo sentido de I_1 .

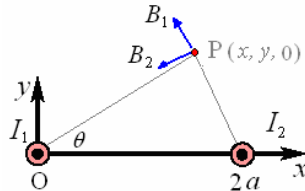
Suponga que $I_1 = I_2 = I$. Halle el vector de fuerza sobre el alambre I_3 .

c) Suponga que cambia el sentido de I_2 ; es decir, $I_2 = -I$. ¿Cómo cambia el vector de fuerza sobre el alambre I_3 ? Justifique su respuesta.



Solución,

a) Halle el vector de campo magnético en el punto $P_1 = (x; y; 0)$ debido a los dos alambres.



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x^2 + y^2)^{3/2}} [-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}]$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi[(x-2a)^2 + y^2]^{3/2}} [-\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j}]$$

$$\sin\theta = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \cos\theta = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 =$$

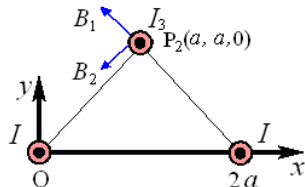
$$\frac{\mu_0}{2\pi[x^2 + y^2]^{3/2}} \left[\frac{I_1(-y\hat{i} + x\hat{j})}{[x^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{I_2(-x\hat{i} + y\hat{j})}{[(x-2a)^2 + y^2]^{1/2}} \right] =$$

$$\frac{\mu_0}{2\pi[x^2 + y^2]^{3/2}} \left\{ \left[\frac{-yI_1}{[x^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{-xI_2}{[(x-2a)^2 + y^2]^{1/2}} \right] \hat{i} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{xI_1}{[x^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{yI_2}{[(x-2a)^2 + y^2]^{1/2}} \right] \hat{j} \right\}$$

b) Se coloca un alambre recto de longitud L , paralelo a los alambres anteriores, cuyo centro coincide con el punto $P_2 = (a; a; 0)$, y por el que pasa una corriente I_3 en el mismo sentido de I_1 .

Suponga que $I_1 = I_2 = I$. Halle el vector de fuerza sobre el alambre I_3 .



$$\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a} [-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [-\hat{i} + \hat{j}]$$

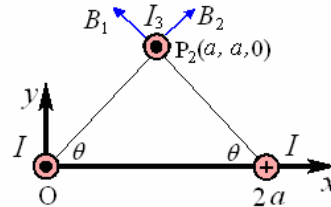
$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a} [-\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j}]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [-\hat{i} - \hat{j}]$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{i}$$

$$\vec{F} = I_3 \hat{k} \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{i} \right) = -\frac{\mu_0 I I_3}{2\pi a} \hat{j}$$

c) Suponga que cambia el sentido de I_2 ; es decir, $I_2 = -I$. ¿Cómo cambia el vector de fuerza sobre el alambre I_3 ? Justifique su respuesta.



$$\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a} [-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}] =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi a} [-\hat{i} + \hat{j}]$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a} [\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}] =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\hat{i} + \hat{j}]$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{j}$$

$$\vec{F} = I_3 \hat{k} \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{j} \right) = \frac{\mu_0 I I_3}{2\pi a} \hat{i}$$

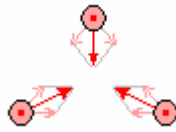
Ejemplo 62. Tres alambres paralelos e infinitos se colocan de manera que pasan por los vértices de un triángulo equilátero. ¿Es posible que los tres se repelan o los tres se atraigan simultáneamente? ¿Por qué?



Solución.

Corrientes en la misma dirección atraen y corrientes en direcciones opuestas repelen. Si los

tres alambres llevan corrientes en la misma dirección ellos se atraen uno a otro.



No hay forma de tener todos los pares con corrientes opuestas, de tal manera no es posible tener a los tres alambres repeliéndose uno a otro.

DEFINICIÓN DE LA UNIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA (AMPERE)

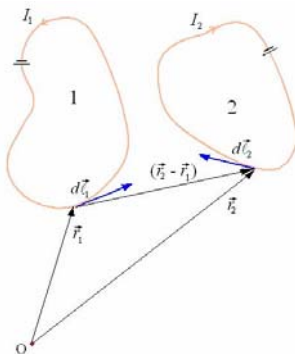
Anteriormente dejamos pendiente la definición de Ampere, la cual podemos hacerla ya en esta parte: Si por dos conductores paralelos muy largos situados a la distancia de 1 metro entre sí, se hacen circular corrientes iguales que causen una fuerza por unidad de longitud sobre cada conductor de 2×10^{-7} N/m. La corriente en cada uno de ellos es igual a un Ampere.

En la práctica se escogen separaciones muy próximas y no es necesario que los conductores sean tan largos, la fuerza resultante es lo suficientemente grande como para medirse con exactitud.

LEY DE BIOT Y SAVART

Hasta aquí solo hemos tratado con casos simétricos. Pero en general no es así y se presenta el problema de los casos carentes de simetría y esto lo veremos a continuación.

En la figura siguiente se muestran dos circuitos completos



Ampere encontró experimentalmente la relación que nos da la fuerza \vec{F}_2 ejercida sobre el circuito 2 debido a la influencia del circuito 1, esta relación expresada en un lenguaje de matemática moderna es

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_1 \int_2 \frac{d\vec{\ell}_2 \times \left[d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right) \right]}{\left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|^3}$$

A pesar de la aparente falta de simetría se puede demostrar por medio del análisis vectorial que

esta ecuación es simétrica, esto es $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, cumpliéndose así la tercera ley de Newton.

Sabemos que

$$d\vec{F} = Id \vec{\ell} \times \vec{B}, \vec{F} = \oint_c Id \vec{\ell} \times \vec{B}$$

Esto implica que

$$\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right)}{\left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|^3}$$

y su forma diferencial

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right)}{\left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|^3}$$

Expresión conocida como ley de Biot y Savart, análoga a la ley de Coulomb. La causa del campo magnético es el elemento de corriente $d\ell$, del mismo modo que la carga q es la causa del campo eléctrico, el campo magnético al igual que el campo eléctrico disminuye proporcionalmente a la inversa del cuadrado de la distancia.

Mientras el campo electrostático señala en dirección radial el campo magnético es perpendicular tanto a la dirección radial como a la dirección del elemento de corriente $d\ell$.

Otra demostración. Considere una corriente I que fluye en un alambre. Rompa el alambre en pequeños pedazos de la longitud ds. El campo magnético debido a este pequeño pedazo de corriente se encuentra experimentalmente que es.

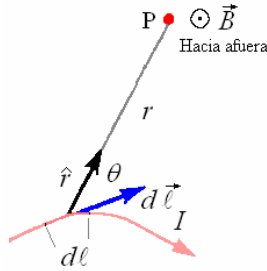
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id \vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \text{ o } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id \ell \text{sen } \theta}{r^2}$$

Ésta es la ley de Biot y Savart. Aquí r es la distancia del elemento actual I ds en el punto P del campo donde deseamos encontrar el campo magnético B. \hat{r} es un vector unitario apuntando a

lo largo de \vec{r} . μ_0 es una constante de la naturaleza, es la permeabilidad del espacio libre.

Recuerde para determinar la dirección de $d\vec{\ell} \times \hat{r}$ usar la regla de la mano derecha, señale sus dedos

a lo largo de $d\vec{\ell}$, y gírelos hacia \hat{r} . EL pulgar derecho apuntará a lo largo de $d\vec{B}$.

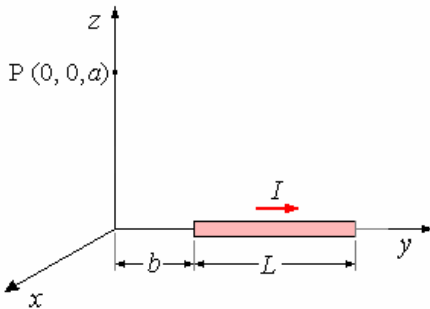


Para encontrar el campo magnético total debido a un conductor, sumamos las contribuciones de cada elemento de corriente integrando sobre el conductor entero. Así

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

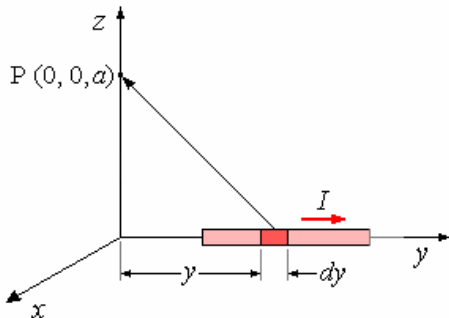
La ley de Biot y Savart fue descubierta experimentalmente, pero puede ser derivada de la ley de Coulomb usando la teoría de la relatividad especial.

Ejemplo 63. Campo magnético producido por un segmento de recta.



Solución.

Se quiere encontrar el campo magnético con el punto P, producido por el segmento mostrado en la figura siguiente.



En este caso

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_b^{b+L} \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Aquí: $I_1 = I$, $d\vec{\ell}_1 = dy\hat{j}$, $\vec{r}_1 = y\hat{j}$,

$$\vec{r}_2 = a\hat{k}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = a\hat{k} - y\hat{j}$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = (a^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_b^{b+L} \frac{dy\hat{j} \times (a\hat{k} - y\hat{j})}{(a^2 + y^2)^{3/2}} =$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_b^{b+L} \frac{ady}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \hat{i}$$

Integrando

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left[\frac{y}{a^2 \sqrt{a^2 + y^2}} \right]_b^{b+L} \hat{i}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{b+L}{\sqrt{a^2 + (b+L)^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \hat{i}$$

En el caso de tratarse de una recta infinita los límites serían de $-\infty$ a ∞ .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left[\frac{y}{a^2 \sqrt{a^2 + y^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{i}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right]_0^{\infty} \hat{i}$$

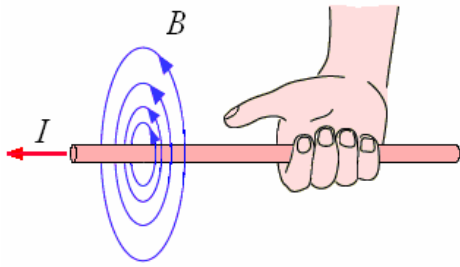
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{y^2} + 1}} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{i}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{i}$$

CONDUCTOR RECTILÍNEO INFINITO.

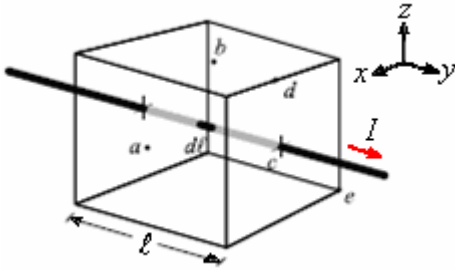
El campo magnético debido a un conductor rectilíneo muy largo es tangente a una circunferencia concéntrica con él mismo. El

sentido de \vec{B} esta relacionado con el sentido de la corriente I por la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura a continuación.



Ejemplo 64. La figura muestra un alambre recto de corriente I que atraviesa un material no magnético en forma de un cubo de lado ℓ . Una sección $d\vec{\ell}$ situada en el centro del cubo

produce un campo $d\vec{B}$. Hallar $d\vec{B}$ cuando lo calculamos en los puntos a, b, c, d y e . Los puntos a, b y c están en el centro de las caras que forma el cubo, el punto d en el punto medio de una arista y el punto e en el vértice.



Solución.

En a : cero

En b :

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$d\vec{\ell}_1 = d\ell \hat{j}, \vec{r}_2 = \frac{\ell}{2} \hat{k}, \vec{r}_1 = 0$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{\ell}{2} \hat{k}, |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \frac{\ell}{2}$$

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\ell \hat{j} \times \frac{\ell}{2} \hat{k}}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^3} = \frac{\mu_0}{\pi} I_1 \frac{d\ell}{\ell^2} \hat{i}$$

En c : cero

En d :

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$d\vec{\ell}_1 = d\ell \hat{j}, \vec{r}_2 = \frac{\ell}{2} \hat{j} + \frac{\ell}{2} \hat{k}, \vec{r}_1 = 0$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{\ell}{2} \hat{j} + \frac{\ell}{2} \hat{k}, |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\ell \hat{j} \times \left(\frac{\ell}{2} \hat{j} + \frac{\ell}{2} \hat{k}\right)}{\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{\mu_0}{2\sqrt{2}\pi} I_1 \frac{d\ell}{\ell} \hat{i}$$

En e :

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$d\vec{\ell}_1 = d\ell \hat{j}, \vec{r}_2 = \frac{\ell}{2} \hat{i} + \frac{\ell}{2} \hat{j} + \frac{\ell}{2} \hat{k}, \vec{r}_1 = 0$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{\ell}{2} \hat{i} + \frac{\ell}{2} \hat{j} + \frac{\ell}{2} \hat{k},$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\ell \hat{j} \times \left(\frac{\ell}{2} \hat{i} + \frac{\ell}{2} \hat{j} + \frac{\ell}{2} \hat{k}\right)}{\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{\mu_0}{3\sqrt{3}\pi} I_1 \frac{d\ell}{\ell} (-\hat{k} + \hat{i})$$

Ejemplo 65. Se dispone de alambres conductores delgados, infinitamente largos y revestidos de material aislante, los cuales se ubican uno al costado del otro para formar una lámina infinita de corriente, con n conductores por unidad de longitud, y cada conductor portando una corriente I .

a) Calcule el campo magnético \vec{B} producido por este arreglo de conductores en puntos situados a una distancia h , a ambos lados de la lámina.

Ahora, suponga que se ubican dos de estas láminas infinitas de corriente en forma paralela, separadas una distancia d , como lo muestra el dibujo siguiente. Cada conductor de la lámina de

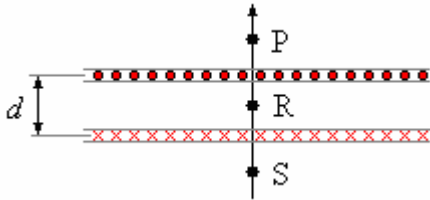
arriba lleva una corriente I saliendo del plano del dibujo y cada conductor de la lámina de abajo también lleva una corriente I , pero entrando al plano del dibujo.

El número de conductores por unidad de longitud de la lámina de arriba es n_1 y el número de conductores por unidad de longitud de la de abajo es n_2 . Suponga que $n_1 > n_2$ el eje de coordenadas x es horizontal.

Calcule la magnitud y dirección del campo

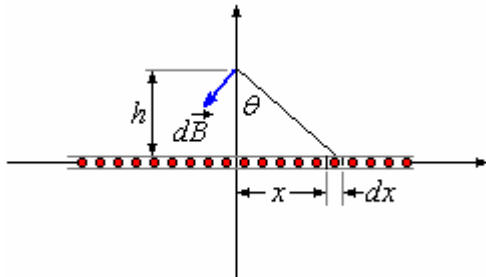
magnético \vec{B} , producido por las dos láminas:

- b) En el punto P, situado arriba de la lámina superior.
- c) En el punto S, situado debajo de la lámina inferior.
- d) En el punto R, equidistante de las láminas.
- e)Cuál sería el campo en los mismos puntos P, R y S si $n_1 = n_2$.



Solución.

a)



$$dB = \frac{\mu_0 I n dx}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Al integrar desde $-\infty$ a $+\infty$ las componentes verticales se anulan, de tal modo que vamos a trabajar con la componente

horizontal de $d\vec{B}$.

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I n dx}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}} \cos\theta \hat{i} =$$

$$-\frac{\mu_0 I n dx}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}} \frac{h}{(x^2 + h^2)^{1/2}} \hat{i} =$$

$$-\frac{\mu_0 I n h dx}{2\pi(x^2 + h^2)^2} \hat{i}$$

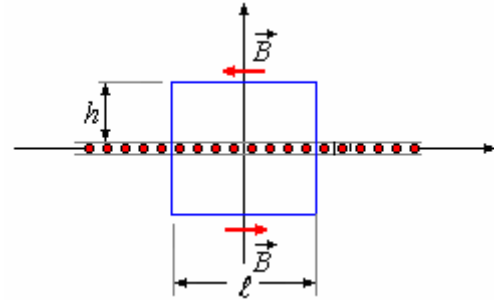
$$\vec{B} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I n h dx}{2\pi(x^2 + h^2)^2} \hat{i}$$

$$= -\frac{\mu_0 I n h}{\pi} \hat{i} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + h^2)} = -\frac{\mu_0 I n}{\pi} \hat{i} \tan^{-1} \frac{x}{h} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{\mu_0 I n}{2} \hat{i}$$

Otra manera de calcular es mediante la ley de Ampere, como en el ejemplo 60.

Debido a que el campo magnético producido por los infinitos alambres produce un campo uniforme, en la parte superior dirigido hacia la derecha y en la parte inferior hacia la izquierda es factible utilizar la ley de Ampere.

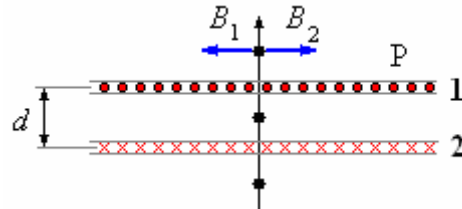


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 n \ell I \Rightarrow B\ell + B\ell = \mu_0 n \ell I \Rightarrow$$

$$2B\ell = \mu_0 n \ell I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 n I}{2}$$

A la distancia h : $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I n}{2} \hat{i}$

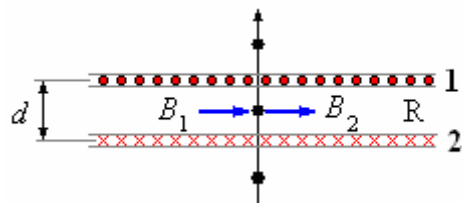
b) En el punto P:



$$\vec{B}_P = -\frac{\mu_0 I n_1}{2} \hat{i} + \frac{\mu_0 I n_2}{2} \hat{i} = -\frac{\mu_0 I}{2} (n_1 - n_2) \hat{i}$$

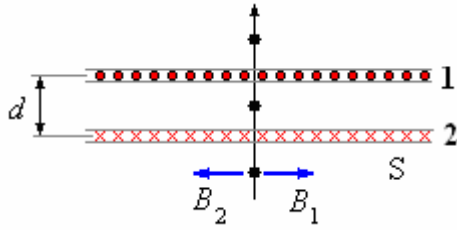
c) En el punto R:

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0 I n_1}{2} \hat{i} + \frac{\mu_0 I n_2}{2} \hat{i} = \frac{\mu_0 I}{2} (n_1 + n_2) \hat{i}$$



d) En el punto S:

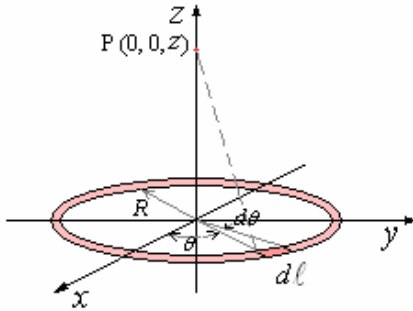
$$\vec{B}_S = \frac{\mu_0 I n_1}{2} \hat{i} - \frac{\mu_0 I n_2}{2} \hat{i} = \frac{\mu_0 I}{2} (n_1 - n_2) \hat{i}$$



e) Si $n_1 = n_2$:

$$\vec{B}_P = 0, \vec{B}_R = \mu_0 I n \hat{i}, \vec{B}_S = 0$$

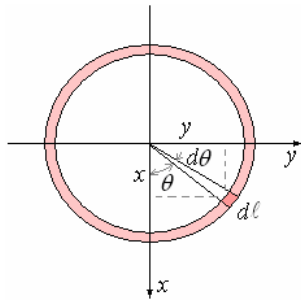
Ejemplo 66. Encontrar el campo magnético en el punto P en el eje de una espira circular de corriente.



Solución.

En este caso

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$



$$I_1 = I, d\vec{\ell}_1 = R d\theta (-\text{sen}\theta \hat{i} + \text{cos}\theta \hat{j}),$$

$$\vec{r}_1 = R(\text{cos}\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j}), \vec{r}_2 = z\hat{k}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = z\hat{k} - R(\text{cos}\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j}),$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

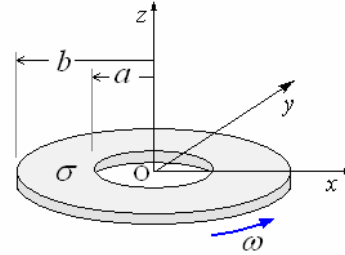
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta (-\text{sen}\theta \hat{i} + \text{cos}\theta \hat{j}) \times (-R \text{cos}\theta \hat{i} - R \text{sen}\theta \hat{j} + z\hat{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{(zR \text{cos}\theta \hat{i} + zR \text{sen}\theta \hat{j} + R^2 \hat{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\theta$$

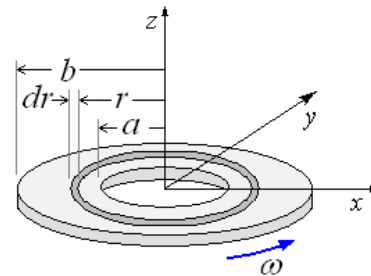
La integral de los términos en \hat{i} y \hat{j} da cero, finalmente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Ejemplo 67. Una arandela delgada (o un disco con hueco concéntrico) de radio interno a y de radio externo b , tiene una densidad de carga superficial σ . Suponga que la arandela gira en torno a su eje con velocidad angular ω . Calcule el campo magnético en el centro de la arandela.



Solución.



$$i = \frac{2\pi dr \sigma}{T} = \frac{2\pi dr \sigma \omega}{2\pi} = \sigma \omega r dr$$

Esta corriente produce un campo magnético en el centro:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2r} \hat{k} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr \hat{k}$$

El campo debido a toda la arandela lo encontramos integrando de $r = a$ a $r = b$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \hat{k} \int_a^b dr = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega (b - a) \hat{k}$$

Otra manera, como la arandela tiene poco ancho ($b \approx a$)

$$R_m = \frac{b + a}{2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R_m} \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2 \left(\frac{b + a}{2} \right)} \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{(b + a)} \hat{k}$$

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\sigma \pi (b^2 - a^2) \omega}{2\pi} = \frac{\sigma \omega (b^2 - a^2)}{2}$$

Finalmente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega (b^2 - a^2)}{2(b+a)} \hat{k} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega (b-a) \hat{k}$$

Ejemplo 68. Determine el campo magnético en el centro de un cuadrado de lado $2a$ que lleva una corriente I .

Solución.

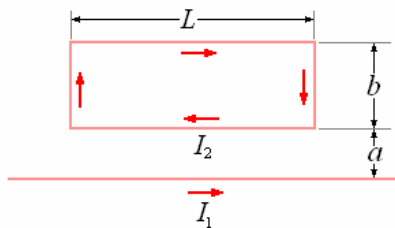
El campo opuesto al punto medio de un segmento recto de longitud $2a$ con corriente está dado por

$$la\ integral\ B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dx \sin \theta}{r^2}.$$

Hay cuatro de tales segmentos en un cuadrado, tal que:

$$B = 4 \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left(\frac{2a}{a^2 \sqrt{a^2 + a^2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\mu_0 I}{a}$$

Ejemplo 69. Un alambre recto largo que lleva una corriente I_1 se coloca en el plano de un lazo rectangular que lleva una corriente I_2 , ¿cuál es la fuerza neta en el lazo? ¿Es atraída o rechazada por el alambre?



Solución.

Las fuerzas en los extremos del rectángulo se cancelan, tal que:

$$F = B_1 I_2 L - B_2 I_2 L = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right)$$

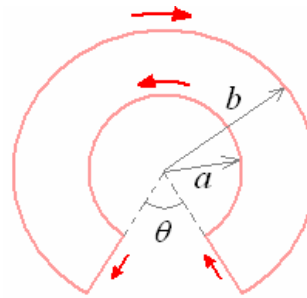
Ejemplo 70. Un solenoide largo de radio R y vueltas de N por el metro lleva una corriente I_0 . En el eje del solenoide hay un alambre recto largo con una corriente I . ¿Qué valor de I dará lugar a un campo magnético en el punto $r = 1/2 R$ que esté en 45° del eje del solenoide?

Solución.

Si el campo resultante está a 45° del eje, el campo del alambre debe tener la misma magnitud que el campo del solenoide, puesto que son perpendiculares. Así

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 N I_0, \quad r = \frac{R}{2}, \quad I = \pi R N I_0$$

Ejemplo 71. Encontrar B en el punto central del dispositivo de la figura.



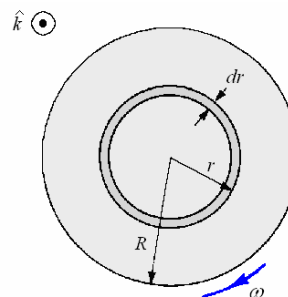
Solución.

Los segmentos rectos no hacen ninguna contribución al campo en el centro; los segmentos curvos dan, por la Ley de Biot y Savart,

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{a(2\pi - \theta)}{a^2} - \frac{b(2\pi - \theta)}{b^2} \right] = \frac{\mu_0 I (b-a)(2\pi - \theta)}{4\pi ab}$$

Ejemplo 72. Un disco fonográfico de radio R , con una carga uniformemente distribuida Q , está rotando con velocidad angular ω . Demostrar que el campo magnético en el centro del disco está

$$dado\ por\ B = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}.$$



Solución.

En la figura, se muestra el disco en rotación en sentido horario (visto de arriba) con una frecuencia f_c estándar de disco fonográfico. El anillo de carga dq entre los radios r y $r + dr$

constituye una corriente $di = \frac{dq}{T}$, donde

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ es el período de rotación del disco.}$$

$$\frac{dq}{Q} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}, \text{ de modo que } dq = \frac{2Q r dr}{R^2}$$

Usar el resultado del campo magnético en el

centro de un anillo, $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, en este caso

$I = di$, $R = r$, luego la contribución del anillo diferencial es:

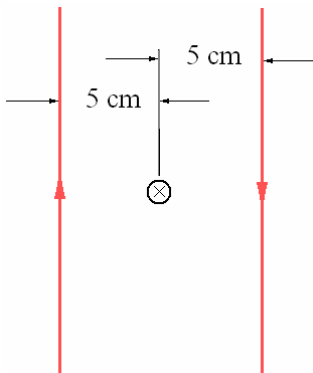
$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{di}{r} = \frac{\mu_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \frac{2Qrdr}{rR^2} = \frac{\mu_0\omega Q}{2\pi R^2} dr$$

El campo magnético en el centro en el centro del disco lo hallamos por integración desde $r = 0$ a $r = R$.

$$B = \frac{\mu_0\omega Q}{2\pi R^2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0\omega Q}{2\pi R}$$

Para $Q > 0$, el campo tiene la dirección $-\hat{k}$.

Ejemplo 73. La corriente de una fuente de corriente continua es conducida a un instrumento por medio de dos alambres paralelos largos, separados 10 cm. ¿Cuál es el campo magnético entre los alambres cuando la corriente es 100 A?



Solución.

El campo magnético debido a cada alambre en el diagrama en el punto situado entre ellos son perpendiculares e ingresando al papel. Los efectos debido a los alambres por lo tanto se suman en ese punto y el efecto total es dos veces el efecto de cualquiera de ellos. Por lo tanto, en el punto medio entre los alambres,

$$B = 2 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} = 2(2 \times 10^{-7}) \frac{100}{0,05} = 8 \times 10^{-4} \text{Wb/m}^2.$$

Ejemplo 74. Determine el campo magnético una distancia R de un alambre recto largo que lleva una corriente I .

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

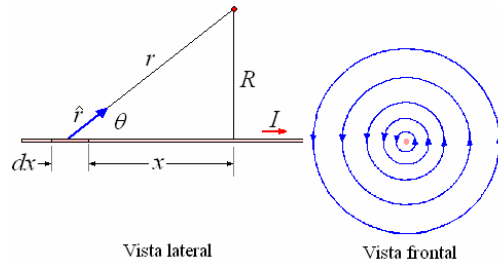
Solución.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \sin \theta}{r^2}$$

Donde $\sin \theta = \frac{R}{r}$ y $r = \sqrt{x^2 + R^2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \right)_{-\infty}^{\infty}$$



En el dibujo de la tapa de la derecha B sale del papel. Las líneas de B son círculos concéntricos, con su espaciado aumentando a medida que se aleja del alambre.

Ejemplo 75. Determine el campo magnético en el centro de un lazo circular de radio R que lleva la corriente I .

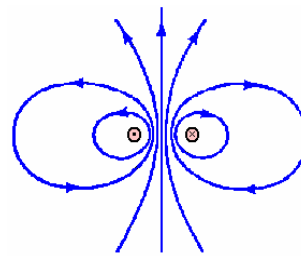
Solución.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dx \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (2\pi)$$

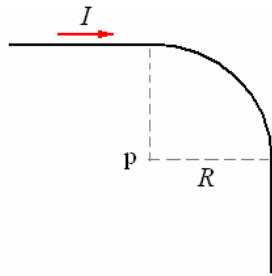
Donde $d\ell = R d\theta$ y $\theta = 90^\circ$, luego

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

El campo magnético de un lazo pequeño con corriente es como el de un imán de barra pequeño, con las líneas de B que brotan fuera de un Polo Norte imaginario y que van al otro extremo a un polo sur imaginario. Así el campo de un lazo pequeño con corriente es el de un dipolo magnético, con el mismo aspecto que el campo de un dipolo eléctrico.



Ejemplo 76. ¿Un alambre recto largo que lleva una corriente I está doblad 90° en un arco circular del radio R . ¿Cuál es el campo magnético en el centro del arco?



Solución.

Cada sección recta es como una mitad de un alambre recto infinitamente largo, así que la contribución de estas dos secciones es

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$. La contribución de la sección curvada es el de un cuarto de un círculo completo, $B = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 I}{2R}$. Luego en el centro

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{8R} = 0,28 \frac{\mu_0 I}{R}$$

Ejemplo 77. ¿Un alambre largo, horizontal, rígido apoyado lleva una corriente de 50 A.

Directamente sobre él y paralelo hay un alambre fino, cuyo peso es 0,075 N por metro, que llevar uno corriente de 25 A. ¿A qué distancia sobre el primer alambre debe estar el segundo alambre para ser sostenido por la repulsión magnética?

Solución.

Si el alambre superior va a ser soportado por la repulsión magnética, la fuerza magnética por longitud de unidad debe igualar el peso de una longitud de unidad del alambre. Además, las corrientes en los dos alambres deben estar en direcciones opuestas para que la fuerza entre los alambres sea de repulsión. Por lo tanto

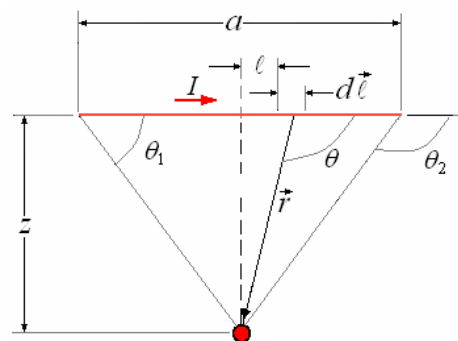
$$\frac{mg}{\ell} = \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \Rightarrow r = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi mg / \ell} =$$

$$2 \times 10^{-7} \frac{(50)(25)}{0,075} = 0,33 \times 10^{-2} \text{m} = 0,33 \text{ cm}$$

Por lo tanto los alambres deben ser muy finos para permitir que sus centros estén muy cercanos.

Ejemplo 78. Determine el valor del campo magnético en el centro de una bobina rectangular de largo a y ancho b , que lleva una corriente I .

Solución.



Considere el alambre de longitud a en la figura arriba. Cualquier elemento $d\vec{\ell}$ tiene la

dirección del flujo de la corriente y $d\vec{\ell} \times \vec{r}$ da un vector, para todo $d\vec{\ell}$, dirigido hacia el papel.

Así la contribución de todos los $d\vec{\ell}$ está en la misma dirección y las magnitudes son sumadas directamente. Para el di elemento $d\vec{\ell}$ mostrado,

la magnitud del campo magnético producido en O una distancia z del alambre es

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \text{sen} \theta .$$

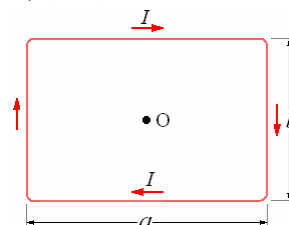
Pero $\frac{z}{r} = \text{sen} \theta$, $\frac{r}{\ell} = -\text{tan} \theta$, por consiguiente

$$d\ell = r \text{cosec}^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore dB &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z \text{cosec}^2 \theta d\theta \cdot \text{sen} \theta}{z^2 / \text{sen}^2 \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \text{sen} \theta d\theta \end{aligned}$$

Para todo el alambre,

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen} \theta d\theta \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi z} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + z^2}} . \end{aligned}$$



Del dibujo arriba, es obvio que, puesto que las corrientes entran en direcciones opuestas en los dos alambres de la longitud a , el campo debido a cada alambre en O es el mismo y z tiene el valor $b/2$. Es también obvio que es el valor de B'

debido a cada uno de los otros alambres de la longitud b es

$$B' = \frac{\mu_0 I}{4\pi(a/2)} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}}$$

El valor total del campo magnético en O es:

$$\begin{aligned} B_{Total} &= 2(B + B') \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}} + \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi \sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi ab} \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 79. ¿Dado un alambre que lleva una corriente, ¿Cuándo el campo magnético producido en el centro será mayor, doblando el alambre en un círculo o en un cuadrado?

Solución.

El campo en el centro de una espira rectangular de

lados a y b es $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi ab} \sqrt{a^2 + b^2}$, Luego en

el centro de una espira cuadrada de lado a será:

$$B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$

Aquí la longitud del alambre con corriente es $4L$, luego $a = L$ y así

$$B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi L}$$

El campo magnético en el centro de una bobina del radio r es

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2 r}$$

Aquí $2\pi r = 4L$, $\Rightarrow r = \frac{2L}{\pi}$ o

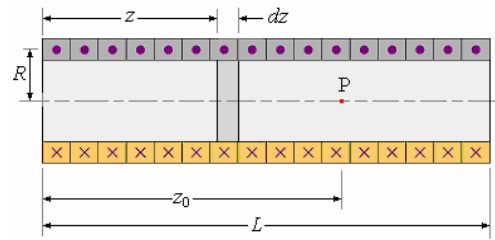
$$B_2 = \frac{\mu_0 \pi I}{4L}. \text{ Finalmente:}$$

$$\begin{aligned} B_2 - B_1 &= \frac{\mu_0 I}{L} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{L} (0,785 - 0,900) < 0 \end{aligned}$$

Así el campo debido a una bobina cuadrada es mayor que el de una bobina circular.

Ejemplo 80. Campo magnético en el eje de un solenoide.

Solución.



Sea el solenoide de N vueltas por unidad de longitud, longitud L y radio R .

El número de espiras del elemento dz es

$$\frac{NLdz}{L} = Ndz.$$

El campo magnético en un punto P debido a este elemento es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 NdzI}{2} \frac{R^2}{[R^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} \hat{k}$$

El campo magnético del solenoide es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NIR}{2} \hat{k} \int_0^L \frac{Rdz}{[R^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}}$$

Cambiando la variable

$$z_0 - z = Z, dz = -dZ$$

Cuando $z = 0 \Rightarrow Z = z_0$

y $z = L \Rightarrow Z = z_0 - L$

$$\text{de aquí } \vec{B} = -\frac{\mu_0 NIR^2}{2} \hat{k} \int_{z_0}^{z_0-L} \frac{dZ}{[R^2 + Z^2]^{3/2}}$$

Integrando

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{\mu_0 NIR^2}{2} \hat{k} \left[\frac{Z}{R^2(R^2 + Z^2)^{1/2}} \right]_{z_0}^{z_0-L} \\ \vec{B} &= -\frac{\mu_0 NIR^2}{2} \hat{k} \left[\frac{Z}{R^2(R^2 + Z^2)^{1/2}} \right]_{z_0}^{z_0-L} = \\ &= -\frac{\mu_0 NI}{2} \hat{k} \left\{ \frac{(z_0 - L)}{R^2 + [(z_0 - L)]^{1/2}} - \frac{z_0}{(R^2 + z_0^2)^{1/2}} \right\} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2} \left\{ \frac{z_0}{(R^2 + z_0^2)^{1/2}} + \frac{(z_0 - L)}{R^2 + [(z_0 - L)]^{1/2}} \right\} \hat{k}$$

En el caso de $L \gg R$, la expresión entre llaves es igual a 2 y

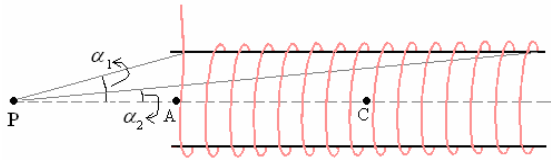
$$\vec{B} = \mu_0 NI \hat{k}$$

Ejemplo 81. Otra forma de solución.

Demuestre que el campo magnético en el punto P en el eje de un solenoide de la longitud finita y N

vueltas por unidad de longitud y radio R que lleva una corriente I es

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 NI (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \text{ donde } \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \text{ se muestran en el dibujo}$$



Solución.

Considere el solenoide como una serie de lazos circulares de radio R y ancho dx , cada uno con corriente $di = NdxI$.

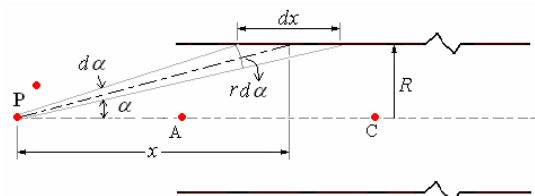
El campo magnético a una distancia z en el eje de un lazo circular es $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$.

El campo magnético producido por un lazo circular de ancho diferencial es:

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 di}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NIR^2 dx}{2r^3} \text{ para}$$

encontrar el campo resultante integramos desde $x = x_1$ a $x = x_2$.

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{R^2 dx}{r^3}$$



De la figura anterior: $r = (R^2 + x^2)^{1/2}$,

$$\text{sen } \alpha = \frac{R}{r}, \text{ cos } \alpha = \frac{x}{r} \text{ y } dx \approx \frac{r}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{cos } \alpha \, d\alpha = -\frac{R}{r^2} dr = -\frac{R}{r^3} dx$$

$$dr = \frac{xdx}{(x^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{x}{r} dx$$

Con $r = (R^2 + x^2)^{1/2}$ y $dx \approx \frac{r}{\text{sen } \alpha}$:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{R^2 dx}{r^3} = \frac{\mu_0 NI}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{R^2 r d\alpha}{r^3 \text{sen } \alpha}$$

Con $\text{sen } \alpha = \frac{R}{r}$:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\text{sen}^2 \alpha \, d\alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{\mu_0 NI}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{sen } \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 NI}{2} (-\text{cos } \alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\text{Finalmente } B = \frac{\mu_0 NI}{2} (\text{cos } \alpha_1 - \text{cos } \alpha_2)$$

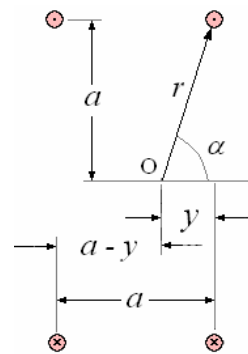
Ejemplo 82. Dos bobinas circulares de Helmholtz de 250 vueltas son paralelas una a otra y separadas por una distancia igual a su radio común. Encuentre el valor del campo magnético en un punto en el eje entre ellas cuando la corriente atraviesa ambas bobinas en el mismo sentido, y demuestre que el campo es casi uniforme sobre el punto medio.

Solución.

El campo magnético debido a una sola bobina en un punto a lo largo del eje una distancia y del plano de la bobina es

$$B_1 = \frac{\mu_0 I a \text{sen } \alpha}{2 r^2} =$$

$$\frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + y^2)^{3/2}}$$



Similarmente, en el mismo punto el campo magnético debido a una sola vuelta de la segunda bobina es

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2 [a^2 + (a - y)^2]^{3/2}}$$

Éstos actúan en la misma dirección, y el efecto total en O debido a las vueltas de n de ambas bobinas es

$$B = n(B_1 + B_2) = \frac{250 \mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(a^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (a - y)^2]^{3/2}} \right\}$$

= 0

Si $y = \frac{a}{2}$, entonces $B = \frac{8(250\mu_0 I)}{5^{3/2} a}$, mas adelante,

$$\frac{dB}{dy} = \frac{250\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{-3y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3(a-y)}{[a^2 + (a-y)^2]^{3/2}} \right\}$$

, si $y = \frac{a}{2}$,

También

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B}{dy^2} &= \frac{250\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{-3}{(a^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3}{[a^2 + (a-y)^2]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{15y^2}{(a^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{15(a-y)^2}{[a^2 + (a-y)^2]^{5/2}} \right\} \\ &= \frac{250\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{15y^2 - 3(a^2 + y^2)}{(a^2 + y^2)^{5/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{15(a-y)^2 - 3[a^2 + (a-y)^2]}{[a^2 + (a-y)^2]^{5/2}} \right\} = 0, \end{aligned}$$

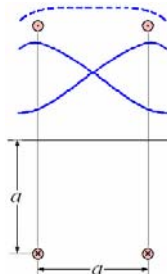
si $y = \frac{a}{2}$,

Así $\frac{dB}{dy}$ y $\frac{d^2 B}{dy^2}$ son cada uno igual a cero en el

punto $y = \frac{a}{2}$, en el punto medio entre las

bobinas. Por lo tanto de B difícilmente es cero alrededor de ese punto, dando una región grande de campo uniforme en la región central entre las bobinas.

Con este espaciado particular de las bobinas, al bajar el valor de B debido a una bobina cuando nos alejamos de ella es compensado por el aumento de B debido a la otra bobina para buena parte de la región entre ellas.



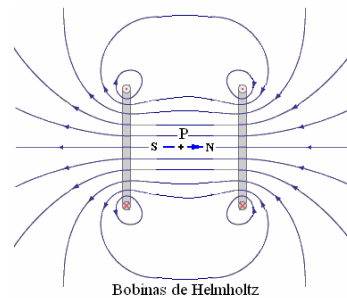
La situación se ilustra en el diagrama. Las líneas llenas dan la magnitud de B debido a cada bobina por separado a lo largo del eje. La línea discontinua muestra el efecto combinado de las dos bobinas, y la región del campo uniforme alrededor del punto medio del sistema se ve claramente.

Ejemplo 83. En un laboratorio de Física se requiere eliminar los efectos del campo magnético terrestre en un determinado punto P del mismo. Para ello, se produce un campo magnético contrario al campo magnético terrestre B_{tierra} por medio de un par de espiras circulares que comparten el mismo eje, ambas de radio R y separadas una distancia $2R$ entre sus centros, Las corrientes de ambas espiras circulan en el mismo sentido y el punto P esta ubicado en el punto medio del mencionado eje.

- Suponga que el campo magnético de la tierra es paralelo a su superficie y se dirige hacia el norte, ¿Cuál es la posición en que tendrían que ponerse las espiras para lograr el efecto deseado en el punto P?
- ¿Cuál es la magnitud de la corriente en las espiras que anulará el campo magnético terrestre en el punto P?
- Obtenga la expresión de la magnitud del campo magnético resultante de las espiras $B_{espiras}$ en cualquier punto sobre el eje que comparten, tomando como origen el punto P.
- A partir de su resultado en la parte anterior esboce un gráfico del campo $B_{espiras}$ a lo largo de dicho eje. Indique los valores críticos [máximo(s) o mínimo(s)] en su gráfico.

Solución.

a)



Las bobinas deben estar orientadas de norte a sur, con las corrientes como se indican en el dibujo de tal manera que el campo producido por éstas esté en el mismo eje y opuesto al campo magnético terrestre.

b) El campo magnético debido a una sola bobina en un punto P en su eje a una distancia R del centro de la bobina es

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + R^2)^{3/2}} \hat{i} = -\frac{\mu_0 I}{2(2^{1.5})R} \hat{i}$$

Lo mismo para segunda bobina

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + R^2)^{3/2}} \hat{i} = -\frac{\mu_0 I}{2(2^{1.5})R} \hat{i}$$

El campo total producido por las dos bobinas es:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{(2^{1.5})R} \hat{i}$$

El campo magnético terrestre es de la Tierra es del orden de $0,5 \times 10^{-4}$ T.

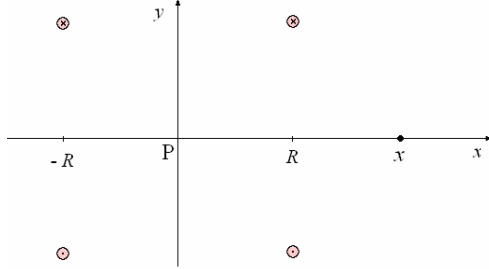
Para equiparar este campo debe circular una corriente:

$$0,5 \times 10^{-4} = \frac{4\pi \times 10^{-7} I}{2,83R} \Rightarrow$$

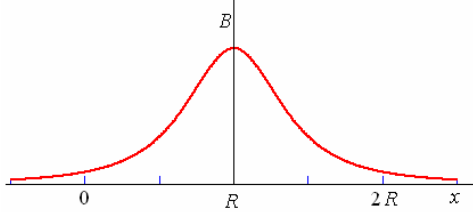
$$I = \frac{(0,5 \times 10^{-4})(2,83R)}{(4\pi \times 10^{-7})} = 112,60 R$$

(Amperes)

c) El campo magnético resultante de las espiras $B_{espiras}$ en cualquier punto sobre el eje que comparten, tomando como origen el punto P.

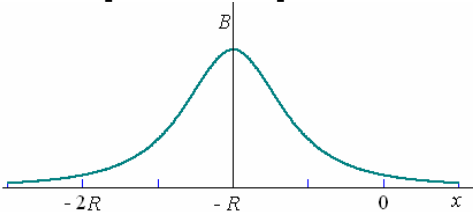


$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{[R^2 + (x+R)^2]^{3/2}} \hat{i}$$



Lo mismo para segunda bobina

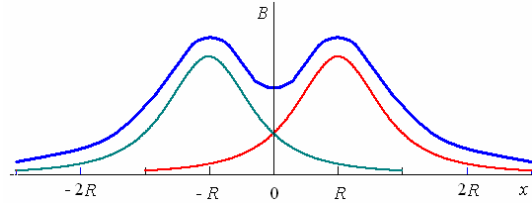
$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{[R^2 + (x-R)^2]^{3/2}} \hat{i}$$



El campo total producido por las dos bobinas es:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 =$$

$$-\frac{\mu_0 IR^2}{2} \left\{ \frac{1}{[R^2 + (x+R)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (x-R)^2]^{3/2}} \right\}$$



d) En el gráfico puede verse que los máximos están en $x = \pm R$ y el mínimo entre las espiras en el centro $x = 0$.

El máximo en $x = \pm R$ es:

$$B_{m\acute{a}x} = \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left\{ \frac{1}{[R^2 + (R+R)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (R-R)^2]^{3/2}} \right\}$$

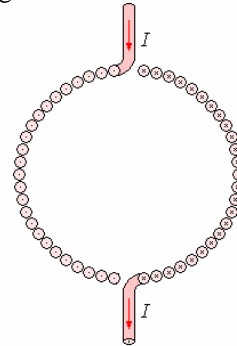
$$B_{m\acute{a}x} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{5^{3/2}} + 1 \right) = 0,54 \frac{\mu_0 I}{R}$$

El mínimo en $x = 0$ es:

$$B_{m\acute{i}n} = \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left\{ \frac{1}{[R^2 + (0+R)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (0-R)^2]^{3/2}} \right\}$$

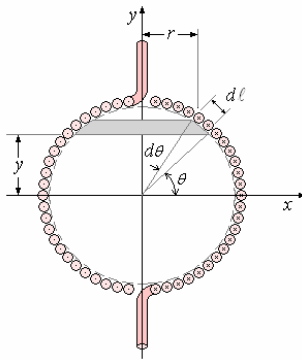
$$B_{m\acute{i}n} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{2^{3/2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{2^{3/2} R} = 0,35 \frac{\mu_0 I}{R}$$

Ejemplo 84. Sobre la superficie de una esfera de madera de radio R se enrolla en una sola capa un número N de vueltas muy próximas entre si con un alambre muy fino, cubriendo completamente la superficie de la esfera. Como se muestra en la figura. Si se hace circular una corriente I , cuál es el campo magnético en el centro de la esfera?



Solución.

El campo magnético formado en el centro de la esfera es la suma de los campos magnéticos de todas las espiras, como no es posible calcular una por una y sumar, encontraremos un elemento diferencial e integraremos.



La espira formada por el ángulo $d\theta$ y determinada por θ produce un campo en el centro de la esfera igual a

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 r^2 di}{2(r^2 + y^2)^{3/2}} \hat{j}$$

Donde

$$r = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta,$$

$$dI = \frac{NI d\ell}{\ell} = \frac{NIR d\theta}{\pi R} = \frac{NI}{\pi} d\theta$$

Reemplazando

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 NIR^2 \cos^2 \theta d\theta}{2\pi R^3} \hat{j} \Rightarrow$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \hat{j} \cos^2 \theta d\theta$$

El campo magnético total es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \hat{j} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta =$$

$$\frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \hat{j} \left[\frac{1}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \right]_0^\pi$$

$$\text{Finalmente } \vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{4R} \hat{j}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Estudiar el movimiento en el vacío de una partícula de masa m , carga q , que se encuentra en un campo magnético uniforme que forma un ángulo θ con la velocidad inicial de la partícula. No se considerará la influencia del peso.

2. Una partícula de masa m y carga q en el vacío está sometida a un campo eléctrico uniforme E vertical a un campo magnético B uniforme horizontal. La partícula con una velocidad inicial en el punto 0.

- Estudiar el movimiento no tomando en cuenta la acción del peso. Considerar B paralelo al eje y .
- ¿Cómo se manifestaría la acción del peso? ¿Es despreciable?

3. La armadura de un motor de corriente continua, porta 24 bobinas espaciadas por igual, cada una con 10 vueltas, conectada en serie con sus puntos de conexión en los 24 segmentos del conmutador rotatorio. Unas “escobillas” de carbón hacen contacto con el conmutador para poder admitir corriente en las bobinas; la disposición de las escobillas y la geometría del campo magnético en que gira la armadura son tales que cada alambre paralelo el eje gira en un campo de 8500 Gauss en promedio y los paras son todos del mismo sentido. Si, en cualquier instante, todas las bobinas están conectadas a las escobillas de tal manera que haya

dos trayectorias iguales y paralelas a través de la combinación, y se entrega a las escobillas una corriente de 12 amperes, encontrar el par promedio desarrollado en la armadura. Tómese cada bobina como un cuadrado de 8 cm. de lado, con los alambres paralelos al eje del motor a una distancia de 5 cm. del eje.

4. Un protón de 2MeV se desplaza en una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme de una intensidad 10 V/m y un campo magnético uniforme en ángulo recto con él. Si la dirección tanto del campo eléctrico como del campo magnético y el protón no se acelere, calcular la intensidad y el sentido del campo

5. Un electrón describe una trayectoria circular de 0,2m de radio en un campo magnético de 0,002 Tesla. Calcular:

- Su velocidad
- Su periodo de revolución
- Su energía cinética en MeV

6. Una barra conductora de masa 50g en reposo, y a ángulos rectos, dos carriles horizontales separados 10 cm. Una corriente de 20 A pasa a través de la barra a partir de un carril al otro. El coeficiente de la fricción estática entre la barra y los carriles es 0,30. ¿Cuál es el menor campo magnético perpendicular al plano de la barra y de

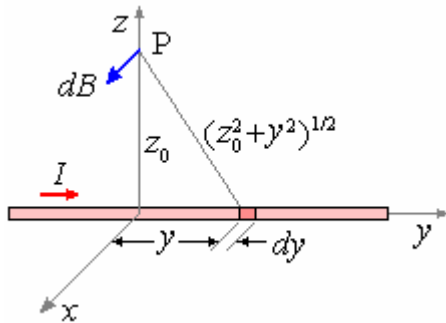
los carriles que moverá a la barra sobre los carriles?

Respuesta. 0,0735 Wb/m²

7. El alambre de la figura tiene una longitud total de 2ℓ y el punto P está en la bisectriz perpendicular con las coordenadas (0, 0, z).

Demuestren que \vec{B} se dirige en el sentido del eje x en la figura y tiene la magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi z} \frac{\ell}{(z^2 + \ell^2)^{3/2}}$$



8. Una corriente de 10 amperios fluye por un lazo de alambre con la forma de un triángulo equilátero de 50cm de lado. Utilicen el resultado del problema anterior y calculen B en el centro del lazo.

Respuesta. $3,6 \times 10^5 T$

9. Un alambre de 2ℓ de longitud lleva una corriente I y reposa en el eje z de cierto sistema de coordenadas con su centro en el origen.

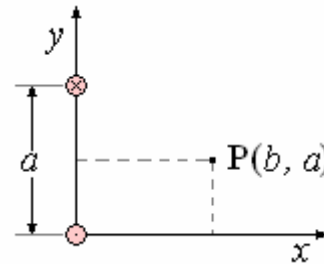
Demuestren que el campo \vec{B} en un punto con las coordenadas (x, 0, z), tiene la magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left\{ \frac{\ell - z}{[(\ell - z)^2 + x^2]^{3/2}} + \frac{\ell + z}{[(\ell + z)^2 + x^2]^{3/2}} \right\}$$

y determinen su dirección.

10. Dos alambres paralelos e infinitos están separados por una distancia $2a$ y llevan corrientes I, en direcciones opuestas, como se muestra en la figura.

a) Calculen \vec{B} en un punto P que se encuentra a una distancia b a lo largo de la bisectriz perpendicular, de tal modo que, en función del sistema de coordenadas que se muestra, las coordenadas de P son (b, a). ¿Cuál será su respuesta cuando $b = 0$?



b) Repitan el problema, calculando el campo en un punto general con las coordenadas (x, y). ¿Es una restricción esencial la de que no introduzcamos la coordenada z del punto de campo?

c) Repitan el problema, suponiendo esta vez que las corrientes en los dos alambres se dirigen perpendicularmente hacia abajo.

Respuesta. b)

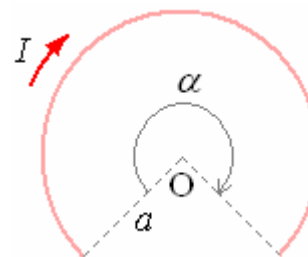
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \left[\frac{y - 2a}{x^2 + (y - 2a)^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right] \hat{i} + \left[\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + (y - 2a)^2} \right] \hat{j} \right\}$$

11. ¿Qué corriente debe circular por un lazo circular de alambre de radio de 50 cm para que el campo en el centro sea de 5×10^{-3} tesla? ¿Qué corriente debe de fluir para que el campo tenga una intensidad de dos. teslas?

Respuesta. 40A; $1,6 \times 10^6 A$

12. Una corriente I fluye en un segmento de un lazo circular de radio a y un ángulo α como se muestra en la figura.

Calcular \vec{B} en el centro O del lazo, desdénando los alambres de alimentación de la corriente.

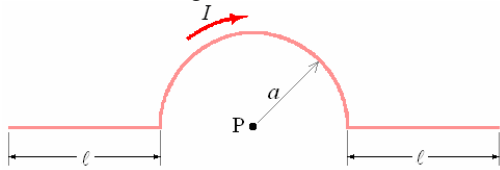


Respuesta.

$$\frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi a} \text{ (abajo)}$$

13. Supongan que hubiera una corriente circular en torno a la Tierra, en el ecuador. ¿Cuál sería la intensidad de esta corriente para producir el campo observado en los polos de aproximadamente $7,5 \times 10^{-5}$ tesla? ¿Iría la corriente de este a oeste o en dirección opuesta?

14. Calculen en el punto P la intensidad del campo magnético debido a la corriente I a través del alambre de la figura. (Indicación:

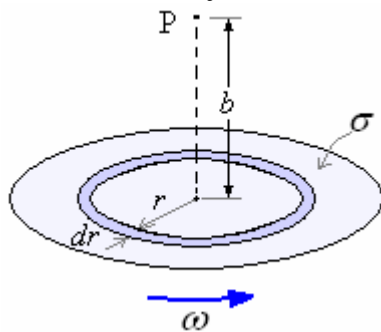


15. Una línea de carga circular de radio a y carga por unidad de longitud λ , gira a una velocidad angular ω en torno a su eje.

a) Demuestren que este movimiento corresponde a una corriente I que fluye en un lazo circular de radio a y está dada por $I = \lambda a \omega$.

b) Calculen \vec{B} en un punto sobre el eje de la línea de carga y a una distancia b de su centro.

16. Un disco de radio a lleva una carga uniforme por unidad de área σ . y gira con una velocidad angular ω en torno a su eje.



a) Demuestren que el campo magnético dB en el punto P sobre el eje, debida a un anillo de radio r y espesor dr es

$$dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^2 dr}{2(r^2 + b^2)^{3/2}}$$

b) Demuestren que el campo total B en el punto P es

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{a^2 + 2b^2}{(a^2 + b^2)^{1/2}} - 2b \right]$$

17. Un solenoide de 0,5 cm de radio y 20 cm de longitud lleva una corriente de 10 A y tiene 1000 vueltas. Calculen el campo magnético sobre el eje de la bobina en los puntos siguientes: a) el centro de la bobina, b) el borde de la bobina, y c) a una distancia de 100 cm al centro de la bobina, d) tracen una gráfica de B en función de la posición sobre el eje de la bobina.

18. ¿Qué cantidad de vueltas por unidad de longitud se requieren para que un solenoide largo

que lleva una corriente de 2,0 A tenga un campo magnético sobre su eje de $1,5 \times 10^{-2}$ T?

19. Una corriente de 0,5 A fluye en torno a un solenoide de radio de 1,0cm y 40 cm de longitud. Si el campo magnético uniforme cerca del centro del solenoide es de 10^{-3} T, ¿qué cantidad de vueltas por unidad de longitud tendrá el solenoide?

Respuesta. $1,6 \times 10^3$ vueltas/m

20. Supongan que el campo sobre el eje de un solenoide muy largo con 1000 vueltas por metro es de 50×10^{-3} T.

a) Cuál es la corriente?

b) Si se pone ahora un alambre que lleva una corriente de 10 A con N vueltas por unidad de longitud en torno al solenoide original, de tal modo que el campo sobre el eje se reduzca a $2,5 \times 10^{-3}$ T, calculen N . ¿Son los flujos de corriente paralelos en las dos bobinas?

21. Un protón se desplaza a una velocidad de $5,0 \times 10^5$ m/s a lo largo del eje de un solenoide, que tiene 1000 vueltas por metro y lleva una corriente de 2,0 A. Calculen la aceleración del protón. ¿De qué modo diferiría su respuesta, si se desplazan en paralelo, pero no a lo largo del eje?

Respuesta. Cero

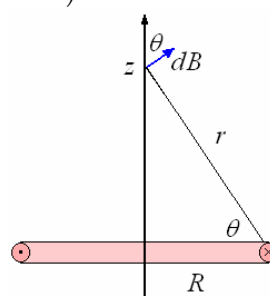
22. Un hombre camina hacia el norte por debajo y en sentido paralelo a una línea de potencia en la que fluye una corriente directa de 100 A. Si está a 10 m por debajo de la línea, ¿qué campo magnético más allá del que se debe a la Tierra, medirá? ¿Tendrá esto una interferencia grave con una lectura de la brújula en este punto?

23. ¿Cuál es el campo magnético en el eje de un lazo circular de radio R con una corriente I a una distancia z del centro del lazo?

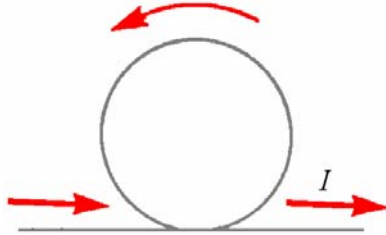
Respuesta.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\phi}{r^2} \cos \theta \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



24. ¿Un alambre recto muy largo con una corriente I tiene un lazo circular de radio R . ¿Cuál es el campo magnético en el centro del lazo?



Respuesta. Sobreponga el campo de un alambre recto,

recto, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, con el campo de un lazo,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{2R}$$

25. Tres alambres largos, rectos, paralelos, cada uno con corriente I en la misma dirección. Son equidistantes uno de otro con la misma separación a . ¿Qué fuerza por unidad de longitud un alambre experimenta debido a los otros dos?

Respuesta.

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cos 30^\circ, \quad F = BIL = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \mu_0 I^2$$

26. ¿Un disco del radio R lleva una densidad uniforme σ de carga superficial. Rota sobre su eje con velocidad angular ω . ¿Cuál es el campo magnético en el centro del disco?

Respuesta.

Considere los anillos anulares de ancho dr . Cada uno es como un lazo con corriente $\sigma dA f$,

donde $dA = 2\pi r dr$ y $f = \omega/2\pi$. Luego el campo en el centro de un lazo es:

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0 (\sigma \omega r dr)}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

27. ¿Qué campo magnético es producido por un solenoide muy largo con 150 vueltas por metro que lleva una corriente de 20 A?

Respuesta. $B = \mu_0 NI = (4\pi \times 10^{-7})(150)(20) = 3,77 \times 10^{-3} \text{T}$.

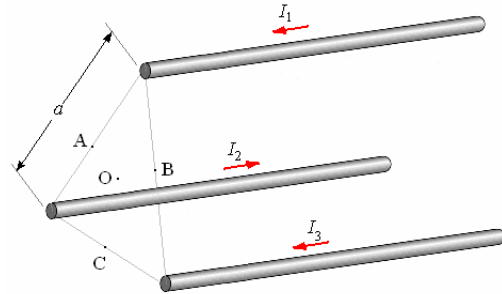
28. Un conductor recto, largo y de radio a , lleva una corriente I_0 , se ha diseñado de tal manera que la densidad de corriente dentro del conductor varía de acuerdo a la expresión

$$J = \frac{3}{2} I_0 \frac{r}{\pi a^3}$$

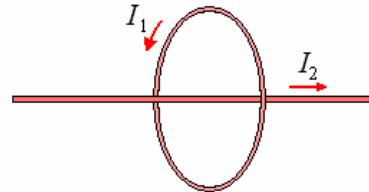
Determinar el campo magnético para todo punto.

29. Se tiene tres conductores paralelos como se muestra en la figura. Calcular el campo magnético en los puntos A, B, C y O.

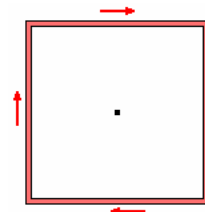
$$I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = 2 \text{ A}, \quad I_3 = 3 \text{ A}.$$



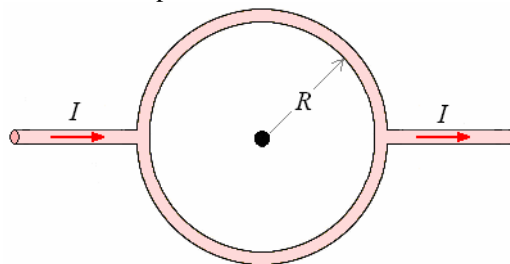
30. Una espira lleva una corriente de 4 A y tiene un radio de 10 cm. Si colocamos un alambre recto y largo en el eje de la espira con una corriente de 1 A, determinar la fuerza que ejerce la espira sobre el alambre por unidad de longitud.



31. Una espira cuadrada de alambre de lado a lleva una corriente I , determinar el valor de B en el centro de la espira.



32. Calcular el campo magnético en el eje de la espira radio R que está conectada en ambos lados como se muestra en la figura y pasa una corriente I por ella. ¿Cuál es el valor del campo en el centro de la espira?

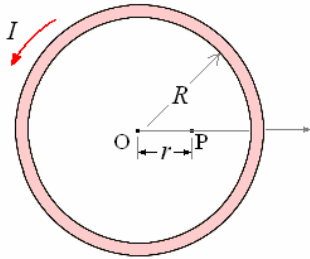


33. Un disco de plástico de radio a tiene una carga uniformemente distribuida en su superficie ($\sigma \text{ C/m}^2$). Si el disco gira con velocidad angular

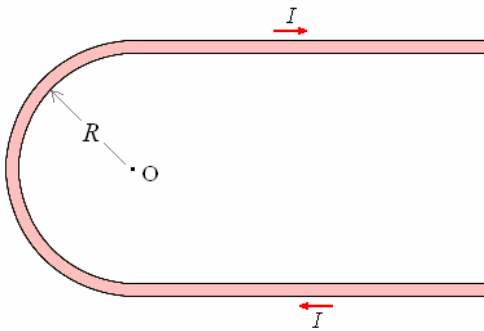
ω , encontrar el campo magnético en el centro del disco.

34. Dada una tira delgada de metal de ancho a y muy larga. La corriente es longitudinal y vale I . Encontrar el campo magnético en el plano de la tira a una distancia b del borde más cercano.

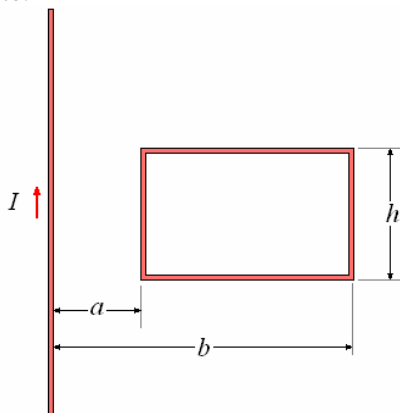
35. calcular es Campo magnético B creado por una espira circular de radio R por la que circula una corriente I , en un punto P sobre el plano de la espira. Realizar un desarrollo en potencia de limitarse el segundo orden.



36. Determinar el campo magnético en el punto O en la figura. Los alambres rectos se consideran muy largos.

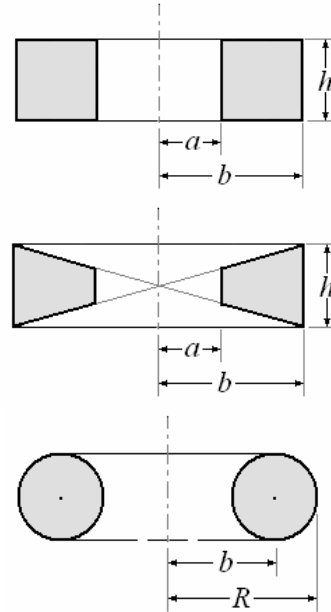


37. Determinar el flujo magnético a través del contorno rectangular mostrado en la figura creado por la corriente I que pasa por el alambre recto infinito.



38. Determinar el flujo magnético a través de las secciones de los toroides mostrados en la figura.

Las bobinas están arrolladas densamente con N vueltas y pasa una corriente I .



39. Una bobina cuadrada de 1 cm de lado, con 15 vueltas, está colgada en el centro de un solenoide largo de 200 vueltas por metro y conduce 300 mA. Si el plano de la bobina forma un ángulo de 20° con el eje del solenoide y la bobina conduce 1 mA, encontrar el par sobre ella.

40. ¿Cual es el trabajo necesario para voltear la bobina cuadrada del problema anterior de una posición en que la normal positiva a la bobina sea paralela a la dirección \vec{B} en el solenoide a una posición invertida en 180° ?

41. Las bobinas de Helmholtz son dos bobinas circulares planas (asimilarlo a dos espiras circulares de radio R), idénticas, con eje común, por las que pasa una misma corriente I en el mismo sentido. La distancia entre las bobinas es $2d$.

Calcular el campo magnético \vec{B} en un punto P Situado en el ejes la distancia x del centro O da las dos bobinas

42. Dos placas delgadas infinitas, paralelas de ancho a y la distancia entre ellas es b , llevan corrientes igual a I pero opuestas. Encontrar la fuerza por unidad de longitud de cada placa.

43. Determinar el campo magnético debido a dos planos paralelos con iguales densidades de corriente superficial i constante. Considere los dos casos cuando las corrientes fluyen en el mismo sentido y en sentidos opuestos.

44. Una esfera de radio a tiene carga uniforme sobre su superficie con una carga total q , rota alrededor de un diámetro con velocidad angular constante ω . Encontrar el campo magnético dentro y fuera de la esfera.

45. Un protón en la capa superior de la atmósfera se desplaza a una velocidad de 10 m/s en ángulo recto con el campo de la Tierra, que tiene una intensidad de $5,0 \times 10^{-5}$ T en este punto.

- a) ¿Cuál es el radio de la órbita del protón?
- b) ¿Cuánto tiempo necesita el protón para completar una órbita?
- c) ¿Cuál es su frecuencia de ciclotrón?

Respuesta. a) 210 m; b) $1,3 \times 10^{-3}$ s; c) $4,8 \times 10^3$ rad/s

46. Un electrón se desplaza en ángulo recto con un campo magnético uniforme de una intensidad de $3,0 \times 10^{-2}$ T. Si su energía es de 50 keV (1 keV = 10^{-3} MeV), calculen:

- a) su velocidad, b) el radio de su órbita y c) la frecuencia del ciclotrón.

47. Un protón y una partícula alfa se desplazan en direcciones paralelas a la misma velocidad, cuando entran a una región del espacio en la que

hay un campo magnético uniforme \vec{B} . Supongan que se desplazan en ángulo recto con el campo.

- a) ¿Cuál es la razón de los radios de sus órbitas?
- b) ¿Cuál es la razón de sus frecuencias de ciclotrón?
- c) ¿Cuál es la razón de sus energías?

Respuesta.

a) $\frac{R_\alpha}{R_p} = 2$, b) $\frac{\omega_\alpha}{\omega_p} = \frac{1}{2}$, c) $\frac{K_\alpha}{K_p} = 4$

48. Un protón de 2 MeV se desplaza en una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme de una intensidad de 10^5 V/m y un

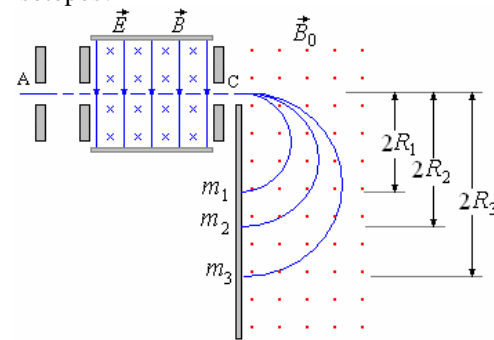
campo magnético uniforme \vec{B} en ángulo recto con él. Si la dirección de movimiento del protón es perpendicular a la dirección tanto del campo eléctrico como del campo magnético y el protón no se acelera, calculen la intensidad y el sentido

de dirección del campo \vec{B} .

49. Un haz que contiene una mezcla de los isótopos Li y 7Li entra en la región de campo

magnético uniforme \vec{B}_0 por la ranura C del espectrómetro de masas. Si los iones Li^6 se detectan a una distancia de 10 cm por debajo de la ranura C, ¿dónde aparecerán los iones Li^7 ? ¿Cuál

es la razón de las energías cinéticas de esos dos isótopos?



Respuesta.

5, 12 cm bajo la ranura; $\frac{K(\text{Li}^7)}{K(\text{Li}^6)} = \frac{7}{6}$

50. Un ciclotrón que se utiliza para acelerar protones tiene un radio de 0,5 m y un campo magnético de 0,75 T.

- a) ¿Cuál es la energía de los protones que salen? Exprese su respuesta en Joules y en Mev.
- b) ¿Cuál es la velocidad final de los protones expulsados?
- c) ¿Cuáles serían las energías de partículas alfa si se vieran aceleradas por este ciclotrón?

51. Con el ciclotrón del problema anterior.

- a) ¿Cuál es la frecuencia del oscilador ω para este ciclotrón, cuando acelera protones?
- b) Si los protones recogen 100 keV cada vez que cruzan el espacio entre las Des, ¿cuántas órbitas semicirculares completarán los protones antes de verse expulsados?
- c) Calculen el tiempo necesario para acelerar los protones hasta sus velocidades finales.

Respuesta.

a) $7,2 \times 10^7$ rad/s; b) 69 órbitas; c) $3,0 \times 10^{-6}$ s

52. Si se utilizara el mismo el ciclotrón para acelerar electrones, entonces, desdénando los efectos relativistas, ¿cuáles serían las energías finales de los electrones? ¿Tenemos razones para suponer que los efectos relativistas son desdeñables?

Respuesta. $9,12 \times 10^4$ MeV; no.

53. Un ciclotrón con un campo magnético de 2,0 T se usa para acelerar protones.

- a) ¿Cuál debe ser la frecuencia (en Hz) del campo oscilador entre las Des?
- b) Si se utiliza este ciclotrón para acelerar deuterones, ¿a qué frecuencia se deberá ajustar la frecuencia de este campo oscilador?

54. Si E_0 es la energía de un ciclotrón, cuando acelera protones, demuestren que puede acelerar

iones, de masas atómicas A y con Z unidades de carga, a la energía

$$E = \left(\frac{Z^2}{A} \right) E_0$$

55. Si existiera un monopolo magnético de intensidad ε , entonces, el campo magnético asociado a él sería de $\vec{B} = \left(\frac{\varepsilon}{r^3} \right) \vec{r}$, en donde r

es la posición en el espacio, medida a partir del monopolo.

a) Escriban la ecuación del movimiento para una partícula de carga q y masa m que se desplace en el campo de un monopolo.

b) Demuestren que la energía cinética de la partícula es una constante de movimiento.

Respuesta. a) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\varepsilon \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$

56. Para el sistema físico del problema anterior, demuestren que:

a) La cantidad de movimiento angular $m \vec{r} \times \vec{v}$ (en relación al monopolo) de la partícula no es constante en general.

b) La cantidad $\frac{d(m \vec{r} \cdot \vec{v})}{dt}$ es constante y

determinen su valor en función de la velocidad inicial \vec{v}_0 .

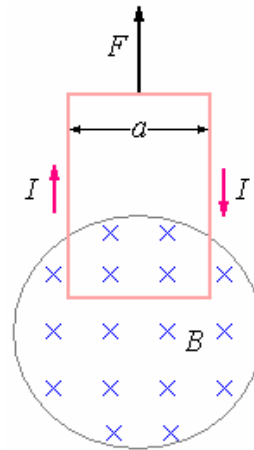
57. Se ha estimado que en la superficie de una estrella de neutrones, el campo B puede ser de hasta 10^9 T. Para un protón de 10 MeV que se desplace en ese campo, determinen:

a) su frecuencia de ciclotrón y b) el radio de su órbita.

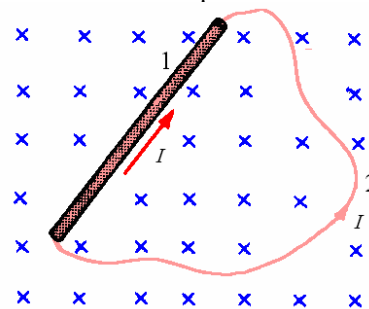
Respuesta. a) $9,6 \times 10^{16}$ rad/s b) $4,6 \times 10^{-10}$ m

58. Una bobina rectangular de alambre lleva una corriente I y tiene una anchura a . Si el extremo inferior de la bobina se mantiene entre los polos de un electroimán con un campo magnético B y dirigido como se muestra en la figura, calculen la

magnitud de la fuerza \vec{F} necesaria para sostener la bobina, por encima de la gravedad.



59. Demuestren que la fuerza sobre una porción de alambre que lleva una corriente en un campo magnético uniforme es la misma para todos los alambres que tengan los mismos puntos extremos. O sea, demuestren que la fuerza sobre los alambres 1 y 2 en la figura es la misma que si pasara la misma corriente por cada uno de ellos.



60. Una corriente de $5,0$ A fluye en un lazo cuadrado de lado de 10 cm. Calculen la fuerza total en dos de sus lados adyacentes, producida por una inducción magnética externa perpendicular al plano del lazo y una intensidad de $0,1$ T.

61. Una corriente de una intensidad I fluye en una bobina que tiene la forma de un pentágono regular de lado a . Supongan que hay un campo magnético uniforme B perpendicular al plano de la bobina.

a) Calculen la fuerza producida por el campo externo en cada segmento.

b) Al utilizar los resultados de (a) demuestren explícitamente que la fuerza total sobre el lazo es cero.

Respuesta. a) IaB dirigido perpendicularmente al alambre en el plano de la bobina

62. Sean dos alambres paralelos, cada uno de ellos con una longitud ℓ , que tienen las mismas corrientes I y están separados por una distancia a , como en la figura.

a) Demuestren que el campo magnético B en el punto (x, a) del alambre superior, debido a la corriente en el interior, tiene la magnitud

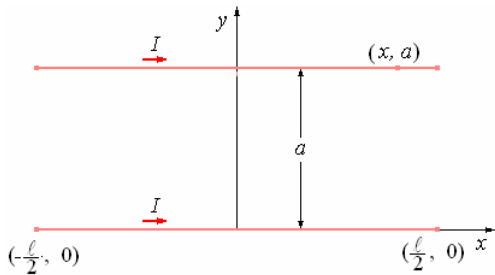
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \frac{(\ell/2) - x}{\left[(x - \ell/2)^2 + a^2 \right]} + \frac{(\ell/2) + x}{\left[(x + \ell/2)^2 + a^2 \right]} \right\}$$

¿Cuál es la dirección de B ?

b) Calculen la fuerza dF sobre el elemento de longitud dr , situado en el punto (x, a) del alambre superior.

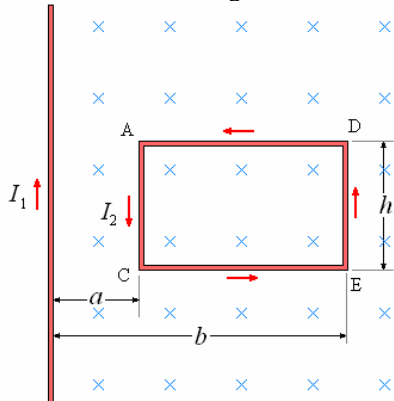
c) Demuestren por integración que la fuerza total F sobre el alambre superior es descendente y tiene

la intensidad $F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\frac{1}{a} \right) \left[(\ell^2 + a^2)^{1/2} - a \right]$



63. En la figura, si $a = 3,0$ cm, $b = 5,0$ cm, $c = 3,0$ cm, $I_1 = 5,0$ A e $I_2 = 2,0$ amperios, calculen:

- a) la fuerza en el segmento AC que se debe a la corriente en el alambre largo, y
- b) la fuerza en el segmento AE que se debe a la corriente en el alambre largo.



64. Sea nuevamente el sistema del problema anterior. Esta vez, calculen la fuerza sobre el alambre recto y largo debida a la medición magnética producida por el lazo rectangular.

Respuesta.

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \text{ (izquierda)}$$

65. Un lazo rectangular de alambre de lados de 10 y 30 cm lleva una corriente de 15 A. Calcular las fuerzas mutuas de repulsión entre los dos pares de alambres opuestos.

Respuesta. $9,7 \times 10^{-5}$ N entre alambres más largos;
 $2,4 \times 10^{-6}$ N entre alambres más cortos

66. Sean dos alambres de longitudes ℓ y L en ángulo recto entre sí, de la figura. Supongan que las corrientes I_1 e I_2 se dirigen como se muestra.

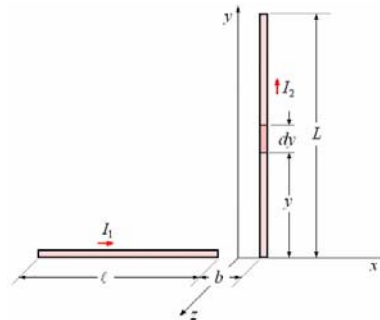
a) Demuestren que el campo magnético \vec{B} en la posición del elemento de longitud dy situado en el punto $(0, y, 0)$ es

$$\vec{B} = \hat{k} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi y} \left\{ \frac{-b}{(b^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{b + \ell}{[(b + \ell)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}$$

b) Demuestren que la fuerza magnética dF sobre el elemento dy es

$$d\vec{F} = \hat{i} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi y} dy \left\{ \frac{-b}{(b^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{b + \ell}{[(b + \ell)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}$$

c) Calculen la fuerza total \vec{F} sobre alambre de longitud L .



67. Dos elementos de corrientes $I_1 d\vec{\ell}_1$ e

$I_2 d\vec{\ell}_2$ se colocan uno en relación al otro, como se muestra en la figura.

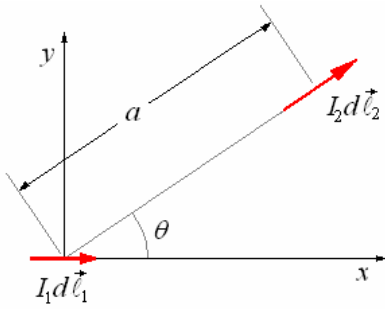
a) Calculen la fuerza que ejerce el elemento

$I_1 d\vec{\ell}_1$ sobre el otro.

b) Calculen la fuerza que ejerce el elemento

$I_2 d\vec{\ell}_2$ sobre el otro.

c) Expliquen la razón por la que, cuando los resultados en (a) y (b) no sean iguales y opuestos, no haya contradicción esencial con la ley de Newton de la acción y la reacción.



68. En cierto sistema de coordenadas fluye una corriente I_2 a lo largo de un alambre infinitamente largo que se encuentra a lo largo del eje x . Demuestren que la fuerza magnética sobre el segundo alambre de longitud ℓ y que lleva una corriente I_1 cuyos puntos extremos están en los puntos $(0, 0, a)$ y $(0, \ell, a)$ es

$$\vec{F} = \hat{i} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln \left(1 + \frac{\ell^2}{a^2} \right)$$

69. Sea la misma situación que en el problema anterior, suponiendo esta vez que los puntos extremos del segmento más corto están en los puntos $(0, -\ell/2, a)$ y $(0, \ell/2, a)$.

- a) Demuestren que esta vez no hay fuerza sobre el segmento más corto.
- b) Calculen el torque en torno al punto $(0,0, a)$ sobre el segmento más corto.

70. Calculen los momentos dipolares magnéticos asociados a cada uno de los lazos planos siguientes (suponiendo que en cada caso, la corriente es de 2,0 A y que hay 10 vueltas en cada lazo):

- a) Un lazo circular de radio de 10 cm.
- b) Un lazo rectangular de lados de 2 y 10 cm.
- c) Un lazo de forma elíptica de eje semi mayor de 10cm y semi menor de 5cm.

Respuesta.

- a) $0,63 \text{ A}\cdot\text{m}^2$, b) $4,0 \times 10^{-2} \text{ A}\cdot\text{m}^2$, c) $0,31 \text{ A}\cdot\text{m}^2$

71. Al calcular el trabajo que se requiere para hacer girar un lazo de corriente de momento

dipolar en un campo magnético \vec{B} , demuestren que la energía U asociada con él es

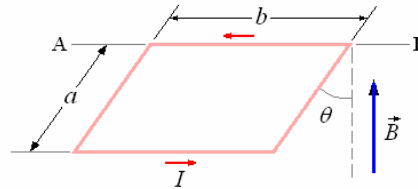
$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

(Indicación: El trabajo dW que se requiere para hacer girar un dipolo en un pequeño ángulo $d\alpha$ es $\tau d\alpha$, donde τ es el torque que se tiene que aplicar.)

72. Una bobina circular de alambre de radio de 10cm y 150 vueltas lleva una corriente de 10^{-2} A. Cuál es el torque máximo que se puede ejercer sobre esta bobina mediante un campo magnético uniforme de una intensidad de 0,2 T.

Respuesta. $9,4 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$

73. Se suspende un lazo rectangular de lados a y b de tal modo que tenga libertad para girar en torno al eje horizontal AB. Si tiene una masa m y si la corriente en torno es I , calculen el ángulo θ al que estará en equilibrio en presencia de un campo magnético vertical uniforme \vec{B} .



74. Sea un lazo plano de alambre que lleva una corriente I en presencia de un campo magnético uniforme \vec{B} .

a) Demuestren que el torque τ en torno a un punto P dentro del lazo se puede expresar,

utilizando, en la forma $\vec{\tau} = \hat{i} \int \vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})$,

en donde \vec{r} es el vector del punto P al elemento $I d\vec{\ell}$.

b) Utilizando el hecho de que la integral se debe llevar en torno a un lazo cerrado, demuestren que otra fórmula equivalente para τ es

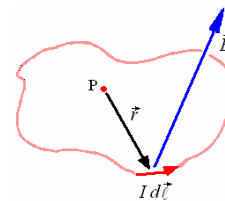
$$\vec{\tau} = \frac{1}{2} \hat{i} \left(\oint \vec{r} \times d\vec{\ell} \right) \times \vec{B}$$

c) Finalmente, demuestren que la integral

$\frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{\ell}$ es el área vectorial del lazo y, en esa

forma, establezcan la validez general de

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$



75. Demuestren que $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ es válido para un lazo de forma arbitraria, reemplazando el lazo dado de corriente por un conjunto de lazos rectangulares contiguos y muy delgados, cada uno de los cuales tenga la misma corriente I .

76 Sea un alambre de longitud fija ℓ y que lleve una corriente I . Este alambre se puede formar en varios lazos, tales como el cuadrado del lado $\ell/4$, n lazos circulares cada uno de ellos de

radio $1/2\pi n$, etc. Demuestren que el torque máximo en cualquiera de ellos en un campo magnético uniforme \vec{B} se logra cuando el alambre forma un círculo de radio $1/2\pi$ y calculen la torque en este caso.

Respuesta.

$$\frac{I\ell^2 B}{4\pi}$$

77. Un lazo circular de alambre de masa m y radio a lleva una corriente I y tiene libertad para girar en torno a un diámetro horizontal AC en presencia de un campo \vec{B} uniforme, dirigido verticalmente hacia arriba. Si está distribuido en una cantidad ligera a partir de su posición de equilibrio, demuestren que oscilará en torno a AC con un movimiento armónico simple de periodo

$$T = \left(\frac{2\pi m}{IB} \right)^{1/2}$$

(Nota: El momento de inercia de este lazo en torno a un diámetro es de $I_{inercia} = \frac{1}{2}ma^2$.)

78. En un experimento para medir el efecto de Hall en el sodio, supongan que se utiliza un campo magnético de una intensidad de 0,8 T y se mide una corriente de 10 A. Suponiendo que el

área de corte transversal de la lámina metálica sea de 2 cm^2 y que $E_t = 10 \text{ V/m}$, calculen:

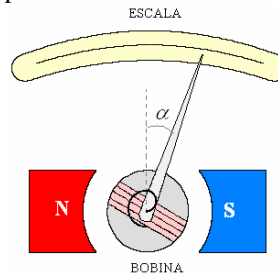
- a) La velocidad de deriva de los electrones.
- b) El valor del coeficiente de Hall.
- c) El número de portadores de carga por unidad de volumen, comparando esto con el número de átomos de sodio por unidad de volumen. La masa atómica del sodio es de 23 y su densidad de 10 kg/m^3 .

Respuesta.

- a) $1.3 \times 10^{-5} \text{ m/s}$, b) $2,5 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{C}$, c) $2,5 \times 10^{28} \text{ portadores de carga/m}^3$

79. Supongan que el galvanómetro de bobina

pivotante de la figura tiene un campo radial \vec{B} de una intensidad de 0,3 T, y que la bobina misma tenga 200 vueltas y un área de $3,0 \text{ cm}^2$. Calculen la constante de resorte (torsión/desplazamiento angular), suponiendo que una corriente de 1,0 mA produzca una deflexión angular de 15° .



CAPÍTULO 4. Ley de Faraday e inductancia

INTRODUCCION

Si tenemos una carga q , ésta ocasiona un campo eléctrico \vec{E} y si esta carga está moviéndose con una velocidad \vec{v} ocasionará también un campo magnético. Es decir, tenemos asociados tanto un campo eléctrico en movimiento con un campo magnético. En 1839 fue Michael Faraday quien presentó un informe de sus observaciones de un campo eléctrico asociado con un campo magnético en movimiento. A partir de estos experimentos se han desarrollado los generadores modernos, los transformadores, etc.

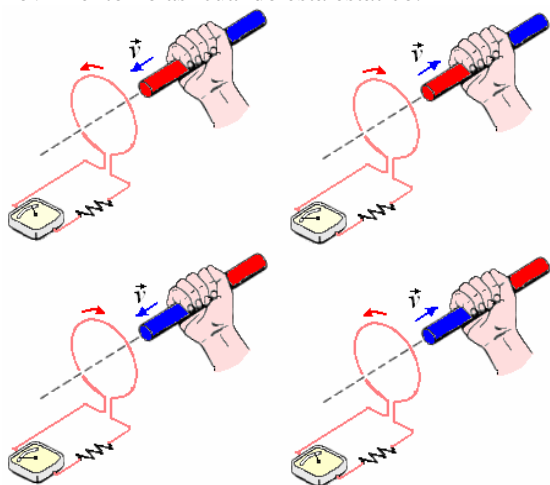
En este Capítulo trataremos de la formulación de las leyes de la inducción y su aplicación en casos simples.

LEY DE FARADAY

Faraday observó experimentalmente la asociación de un campo magnético variable en el tiempo \vec{B} con un campo eléctrico.

En la figura siguiente se muestra un imán en movimiento y el efecto que hace sobre una espira de alambre conectada a un galvanómetro.

Se ve efecto solamente cuando el imán está en movimiento no así cuando está estático.



El resultado de un gran número de experimentos puede resumirse asociando a una fuerza electromotriz con un cambio de flujo magnético.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Esto se conoce como la **Ley de Faraday**.

$$\text{Como } \varepsilon = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

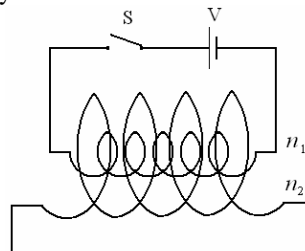
$$\text{y } \Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Podemos escribir que

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

LEY DE LENZ. Hasta este momento no hemos explicado el signo menos, esto nos indica que la fuerza electromotriz aparece en oposición al cambio que se produce sobre él. Es decir, si incrementamos el flujo magnético a través del circuito, la fuerza electromotriz indicada tiende a causar corriente en tal dirección que el flujo decrezca, si tratamos de introducir un imán en una bobina, la corriente inducida tendrá un sentido tal que forma un campo magnético que tiende a repeler el polo magnético. Quien estableció el sentido de las corrientes Inducidas fue H.F. Lenz, contemporáneo de Faraday con el siguiente enunciado conocido como **Ley de Lenz**: “La corriente que es inducida tendrá una dirección de tal forma que se oponga a la causa que la produce”; que es una consecuencia de la conservación de la energía, de no ser así la corriente inducida podría seguir induciendo corriente y a la vez aumentándola, lo que no es cierto.

Ejemplo 1. Un solenoide de longitud ℓ y n_2 vueltas, diámetro D_2 y resistencia R en su interior hay un solenoide de igual longitud y n_1 vueltas, diámetro D_1 conectado a una pila por medio de una llave S. Determinar la corriente que circula en el solenoide exterior al momento de cerrar la llave S en función de la corriente y en el solenoide Interior.



Solución.

El campo magnético producido por el solenoide interior es

$$B = \mu_0 N_1 I_1 = \mu_0 \frac{n_1}{\ell} I_1$$

El flujo magnético es

$$\Phi = BA = \mu_0 \frac{n_1}{\ell} I_1 \left(\frac{\pi D_1^2}{4} \right)$$

Es fuerza electromotriz inducida en el solenoide exterior es:

$$\varepsilon = -n_2 \frac{d}{dt} \Phi = -n_2 \frac{d}{dt} \frac{\mu_0 n_1 \pi D_1^2}{4} I_1$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 n_1 n_2 \pi D_1^2}{4\ell} \frac{dI_1}{dt}$$

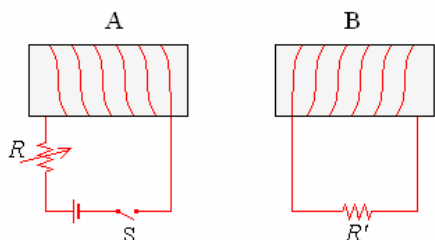
La corriente es:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 n_1 n_2 \pi D_1^2}{4R\ell} \frac{dI_1}{dt}$$

De este resultado deducimos que tendremos corriente I_2 mientras la corriente I_1 este variando, o sea, mientras sube de su valor cero hasta que toma su valor máximo.

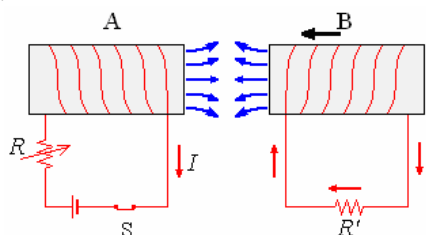
Ejemplo 2. Tenemos dos circuitos como los mostrados en la figura. Usar la ley de Lenz para determinar la dirección de la corriente inducida en la resistencia R' , cuando.

- La bobina A se acerca a la bobina B.
- Se disminuye la resistencia R.
- Se abre la llave S.

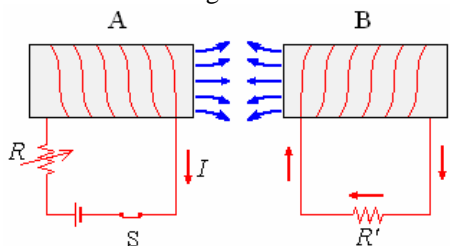


Solución.

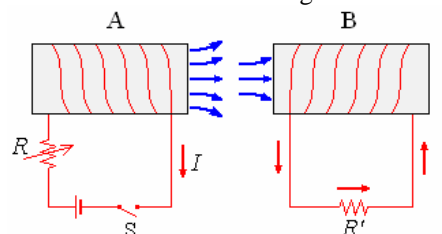
a) Al acercarse B hacia A el flujo magnético aumenta en B, para contrarrestar esto debe aparecer un campo magnético en oposición. Este campo magnético sería originado por una corriente como la indicada en la figura.



b) Al disminuir la resistencia R aumenta la corriente y al aumentar la corriente el flujo magnético se incrementa. En oposición a este cambio debe aparecer un campo magnético originado por una corriente como la indicada en la figura.

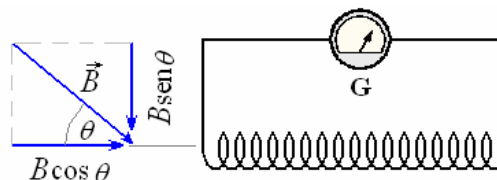


c) Al abrir la llave la corriente empieza a disminuir su valor hasta cero, esto ocasiona una disminución de flujo magnético. En oposición a este cambio debe aparecer un campo magnético originado por una corriente como la indicada en la figura.



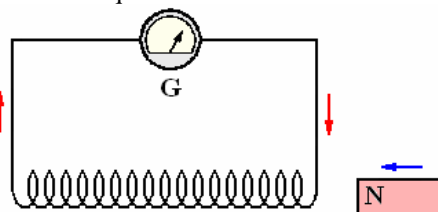
Ejemplo 3. El eje de una bobina de 250 vueltas y del área $0,002 \text{ m}^2$ se alinea a 40° con un campo magnético uniforme. ¿El campo magnético disminuye a partir de $0,08$ a $0,02 \text{ T}$ en $0,020 \text{ s}$. cuál es la fuerza electromotriz media generada en la bobina?

Solución.



$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{nA\Delta B}{\Delta t} \cos \theta \\ &= \frac{(250)(0,002)(0,06)(\cos 40^\circ)}{0,02} \\ &= 1,15 \text{ V} \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Acercando un imán a una bobina de 2000 espiras se incrementa el flujo magnético que corta a la bobina de 0 a $1,5 \times 10^{-5} \text{ Wb}$ en $1/10$ de segundo. Si la resistencia de la bobina es de 20Ω , determine la corriente media que se induce en la misma.



Solución.

$$\begin{aligned} I &= \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{20} \\ \varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -2000 \frac{1,5 \times 10^{-5}}{10^{-1}} \\ &= -0,3 \text{ V} \\ I &= \frac{0,3}{20} = 0,015 \text{ V} \end{aligned}$$

Ejemplo 5. A través de un solenoide de 1000 vueltas pasa un flujo magnético de 10^{-3} Wb . Si el flujo se reduce en 10^{-3} s a 10^{-4} Wb . ¿Cuál será en voltios la fuerza electromotriz que se induce?

Solución.

La variación de flujo magnético es $\Delta\Phi = 10^{-3} - 10^{-4} = 9 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ y, por tanto, la fuerza electromotriz inducida es:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left| n \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = 1000 \frac{9 \times 10^{-4}}{10^{-3}} \\ &= 900 \text{ V.} \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Un solenoide alargado transporta una corriente que produce un campo magnético B en su centro. Se introduce el solenoide dentro de una bobina estrecha de 20 espiras y área 2 cm^2 que tiene

una resistencia total de 1Ω . Al conectar los extremos de la bobina e invertir la corriente que circula el solenoide se produce en la bobina una corriente inducida de $10 \mu A$ durante $0,1$ s. Calcule el campo B .

Solución.

Al invertir la corriente la variación del flujo es:

$$\Delta\Phi = nBA - (-nBA) = 2nBA$$

De aquí

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{2nBA}{\Delta t} \\ &= \frac{2 \times 20B(2 \times 10^{-4})}{0,1} = 8 \times 10^{-2} B\end{aligned}$$

La corriente inducida es:

$$I = 10 \times 10^{-6} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{8 \times 10^{-2} B}{1}$$

De donde resulta:

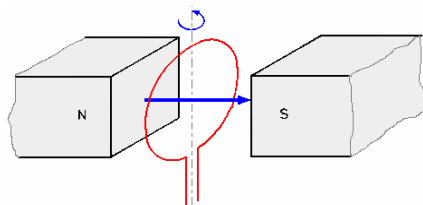
$$B = 1,25 \times 10 \text{ T.}$$

Ejemplo 7. Un campo magnético se puede medir de la manera siguiente: Una bobina de 250 vueltas y de área $1,80 \text{ cm}^2$ se coloca en un imán permanente de modo que el flujo magnético máximo pase a través de la bobina. Se conecta con un galvanómetro que mide el flujo total de la carga. Cuando la bobina se mueve de un tirón rápidamente fuera del imán, se observa que fluye una carga de $0,25 \text{ mC}$. El circuito del galvanómetro de bobina tiene una resistencia de 4Ω . ¿Cuál es el campo magnético?

Solución.

$$\begin{aligned}I &= \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\Delta\Phi_B}{R\Delta t} = \frac{nAB}{R\Delta t} \\ \Rightarrow B &= \frac{R\Delta q}{nA} = \frac{(4)(0,25 \times 10^{-3})}{(250)(1,8 \times 10^{-4})} \\ &= 0,022 \text{ T}\end{aligned}$$

Ejemplo 8. Una espira circular de radio 10 cm está situada perpendicularmente al campo magnético de $0,5 \text{ T}$ de un electroimán. ¿Cuál es la fuerza electromotriz que se induce en la espira cuando gira alrededor de su diámetro con una velocidad de 1200 rpm ?

**Solución.**

$$\omega = 1200 \text{ rpm} = \frac{1200}{60} = 20 \text{ rps}$$

En $1/4$ de vuelta (equivalente a $1/80$ segundos) la espira pasa de una posición de máximo número de líneas de flujo cortadas a otra posición de mínimo (cero). Por tanto,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= n \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = n \frac{BA}{\Delta t} \\ &= 1 \times \frac{0,5\pi(0,1)^2}{1/80} = \frac{40\pi}{100} = 0,4\pi \\ &= 1,26 \text{ V.}\end{aligned}$$

Ejemplo 9. Una bobina de n vueltas y de área A se coloca en un campo magnético B y se la hace rotar con velocidad angular constante ω sobre un diámetro perpendicular al campo magnético. Derive una expresión para la fuerza electromotriz inducida en la bobina.

Solución.

$$\Phi_B = nAB \cos \theta = nAB \cos \omega t,$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = nAB \omega \sin \omega t$$

Ésta es la base para un generador de corriente alterna. Por medio de los contactos convenientes, puede generarse corriente continua.

Ejemplo 10. Una bobina de 1000 espiras y radio 5 cm conectada a un galvanómetro, y situada perpendicularmente al campo de un electroimán se extrae bruscamente del mismo. El galvanómetro, cuya resistencia es de 1000Ω , acusa en este proceso una carga total inducida de 10 C . Determine la inducción magnética del electroimán, sabiendo que la bobina tiene una resistencia de 20Ω .

Solución.

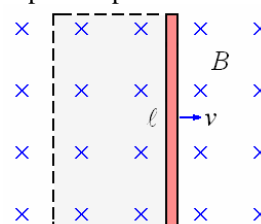
$$\varepsilon = n \frac{\Phi}{t} = IR,$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{\Phi}{A} = \frac{ItR}{nA} = \frac{(10^{-3})(1020)}{(1000)(\pi(0,05)^2)} \\ &= 0,13 \text{ T}\end{aligned}$$

FUERZA ELECTROMOTRIZ DEL MOVIMIENTO

Un ejemplo interesante de una fuerza electromotriz inducida ocurre cuando un conductor se mueve a través de un campo magnético. En la figura a continuación una barra del metal de longitud ℓ orientada perpendicularmente a un campo magnético uniforme y movido con velocidad constante perpendicular a su longitud y al campo. Un portador

positivo de carga experimentará una fuerza $q \vec{v} \times \vec{B}$ dirigida hacia la parte superior de la barra.



La carga positiva se acumulará en el extremo superior de la barra y formará un campo eléctrico \vec{E} , tal que en el $qE = qvB$ en la situación constante. Esto significa que se desarrollará una fuerza electromotriz entre los extremos de la barra,

$$\varepsilon = \int E dy = E \ell = B \ell v .$$

Podríamos también llegar este resultado usando la ley de Faraday.

Considere un lazo rectangular imaginario, indicado por la línea discontinua. La barra forma un lado del lazo. En el tiempo dt la barra se mueve una distancia vdt hacia la derecha, aumentando el área del lazo $vdt\ell$. Esto aumenta el flujo a través del

$$\text{lazo en } d\Phi_B = Bv\ell dt, \text{ tal que } \varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = Bv\ell .$$

Esta clase de fuerza electromotriz es conocida como fuerza electromotriz de movimiento.

$$\varepsilon = Bv\ell$$

Ejemplo 11. Se ha sugerido que Las aves podrían utilizar la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de sus alas por el campo magnético de la tierra como un medio para ayudarles en su navegación durante la migración. Qué fuerza electromotriz sería inducida para que un ganso de Canadá con una extensión de alas de 1,5 m que vuela con una velocidad de 10 m/s en una región donde la componente vertical del campo de la tierra es 2×10^{-5} T.

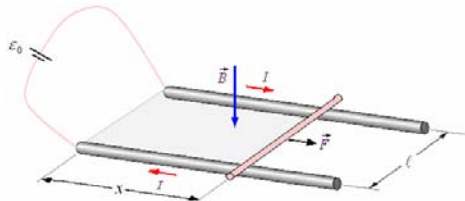
Solución.

$$\varepsilon = B\ell v = (2 \times 10^{-5})(1,5)(10) = 3 \times 10^{-4} \text{ V} = 0,3 \text{ mV} .$$

Esto probablemente es demasiado pequeño para ser detectado por las aves, puesto que los voltajes celulares son típicamente 70 mV. Sin embargo, para los jets 747 con una extensión de alas de 60 m y una velocidad de 900 km/h, el efecto es apreciable.

Fuerza electromotriz producida por un alambre que se desliza en un campo magnético.

Supongamos dos rieles horizontales paralelos separados una distancia ℓ , como se muestra en la figura.



Sea un campo magnético perpendicular al plano. Debido a la corriente I , el conductor sufre una fuerza de magnitud $F = \ell IB$ hacia la derecha. Esta fuerza lo acelera hacia la derecha, de tal manera que en un determinado lapso de tiempo se mueve con una velocidad v .

El flujo magnético a través de la espira es:

$$\Phi = BA = B\ell x$$

Al moverse el conductor con velocidad v se produce un cambio en este flujo

$$\frac{d\Phi}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

Por la ley de Faraday esto produce una fuerza electromotriz.

$$\varepsilon' = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v$$

Haciendo circular una corriente I' en oposición a I (por la Ley de Lenz)

$$I' = \frac{\varepsilon'}{R} = -\frac{B\ell v}{R}$$

Siendo R la resistencia del circuito.

Otra manera de encontrar esta fuerza electromotriz inducida es mediante la fuerza de Lorentz y la conservación de la energía.

La potencia suministrada es $\varepsilon_0 I$, se consume

$I^2 R$ en la resistencia y Fv en mover al alambre con una velocidad v .

$$\text{De tal modo que: } \varepsilon_0 I = I^2 R + Fv$$

El valor de I es menor que $\frac{\varepsilon_0}{R}$, el valor en caso

estático.

Para evitar esta dificultad sumamos una variable adicional con el fin de mantener a I constante.

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon')I = I^2 R + Fv$$

Aquí corresponde $\varepsilon_0 I = I^2 R$

$$\text{Dejando } \varepsilon' I = Fv = (I\ell B)v \Rightarrow \varepsilon' = B\ell v$$

ε' no es la fuerza electromotriz inducida, es el negativo de ella, cuyo fin es mantener la corriente constante

$$\varepsilon' = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ejemplo 12. Una barra horizontal de 5 m de longitud orientada en la dirección Este-Oeste cae desde lo alto de un precipicio formando un ángulo recto con la componente horizontal del campo magnético de valor $2,4 \times 10^{-5}$ T. ¿el valor instantáneo de la fuerza electromotriz inducida en la barra a los 5 s y a los 10 s de caída?

Solución.

La velocidad de la barra a los 5 s y 10 s de caída será, respectivamente,

$$v_5 = gt_5 = 9,81 \times 5 = 49,05 \text{ m/s},$$

$$v_{10} = gt_{10} = 9,81 \times 10 = 98,10 \text{ m/s}.$$

La fem inducida en la barra en cada caso será:

$$\varepsilon_5 = B\ell v_5 = 49,05 \times 2,4 \times 10^{-5} = 58,86 \times 10^{-4} \text{ V}$$

$$\varepsilon_{10} = B\ell v_{10} = 98,10 \times 2,4 \times 10^{-5}$$

$$= 117,72 \times 10^{-4} \text{ V}$$

Ejemplo 13. ¿Qué fuerza electromotriz se induce en el eje frontal de un automóvil que se dirige hacia el Norte a la velocidad uniforme de 100 km/h si el eje tiene 1,5 m de longitud y la componente vertical del campo magnético terrestre es de $5 \times 10^{-5} \text{ T}$? ¿Qué extremo del eje estará a mayor potencial?

Solución.

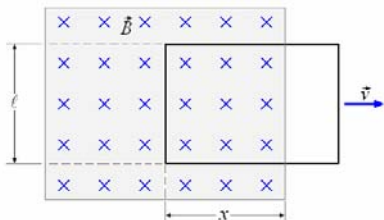
El eje se desplaza con una velocidad de: 100 km/h = 27,78 m/s.

Por tanto, la fuerza electromotriz inducida en un campo de $5 \times 10^{-5} \text{ T}$ será:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= B\ell v = 27,78 \times 5 \times 10^{-5} \times 1,5 \\ &= 2,08 \times 10^{-3} \text{ V.} \end{aligned}$$

Las cargas positivas (regla de la mano derecha) se desplazan en estas condiciones de E a O. Por tanto, estará a mayor potencial el extremo izquierdo (oeste) del eje.

Ejemplo 14. Espira rectangular en presencia de un campo magnético.



Demostrar que la potencia entregada es igual a la potencia disipada.

Solución.

Supongamos una espira como la mostrada en la figura de resistencia R y que sale con velocidad v de la acción del campo B .

El flujo magnético encerrado por la espira en un momento dado es

$$\Phi = B\ell x$$

Como x está variando

$$\frac{d\Phi}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

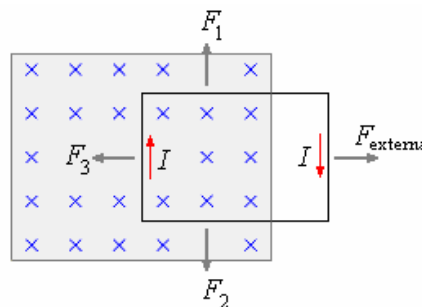
La fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v$$

La corriente producida es

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

El sentido en oposición a la disminución de líneas de flujo sería el indicado en la figura siguiente.



Al inducirse corriente aparecen fuerzas sobre la espira, F_1 y F_2 son iguales en magnitud y opuestas en sentido, $F_3 = I\ell B$ en el sentido indicado, como la espira se desliza a velocidad constante la fuerza externa $F_{externa}$ es igual a F_3 .

$$F_{externa} = I\ell B$$

La potencia desarrollada por el agente externo

$$P = (F_{externa})v = I\ell Bv$$

Como $I = \frac{B\ell v}{R}$, tenemos

$$P = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

La potencia disipada en el circuito es

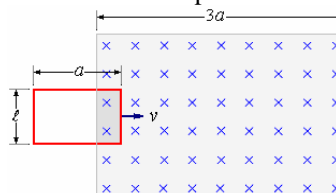
$$P = I^2 R, \text{ con } I = \frac{B\ell v}{R} :$$

$$P = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

Con lo que demostramos que la potencia entregada es igual a la potencia disipada.

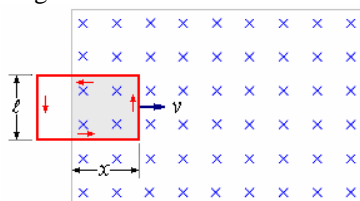
Ejemplo 15. Una espira rectangular de dimensiones ℓ y a con resistencia R se mueve con velocidad constante v hacia la derecha como se muestra en la figura, penetra en una región donde hay un campo magnético uniforme perpendicular al plano del papel y hacia dentro de módulo B . Calcular y hacer un gráfico de:

- El flujo, la fuerza electromotriz y la fuerza sobre la espira, en función de la posición de la espira, es decir, cuando la espira se está introduciendo, está introducida, y está saliendo de la región que contiene el campo magnético.
- Explíquese el mecanismo (fuerza sobre los portadores de carga) de establecimiento de la corriente inducida en los tres casos citados.
- Grafique el flujo, la fuerza electromotriz y la fuerza neta en función de la posición x .



Solución.

a) El flujo, la fuerza electromotriz y la fuerza sobre la espira, en función de la posición de la espira, es decir, cuando la espira se está introduciendo, está introducida, y está saliendo de la región que contiene el campo magnético.



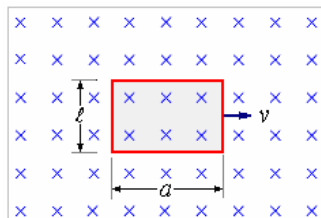
$$\Phi = B(\ell x)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{B\ell v}{R}$$

El sentido de la corriente es antihorario.

Cuando la espira se encuentra dentro del campo magnético.

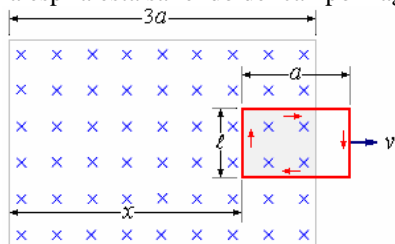


$$\Phi = B\ell a$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

No hay corriente inducida, $I = 0$

Cuando la espira esta saliendo del campo magnético.



$$\Phi = B[a - (3a - x)]\ell = B(x - 2a)\ell$$

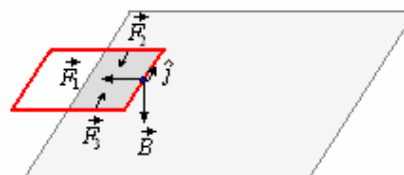
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

El sentido de la corriente es horario.

Fuerza sobre las corrientes.

Ingresando la espira.



$$\vec{F}_1 = I(\ell \hat{j}) \times \vec{B} \quad (\ell \text{ lleva el sentido de la corriente } I)$$

$$F_1 = I\ell B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)\ell B = \frac{B^2 \ell^2 v}{R}$$

Fuerza neta de F_1 hacia la izquierda ($-\hat{i}$).

$$\vec{F}_2 = I(-\hat{i}x) \times \vec{B} \quad (x \text{ lleva el sentido de la corriente } I)$$

$$F_2 = IxB = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)x B = \frac{B^2 \ell x}{R}$$

Fuerza neta de F_2 hacia abajo (\hat{j}).

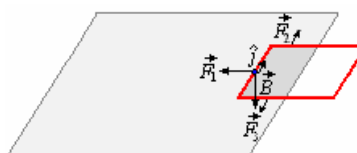
$$\vec{F}_3 = I(\hat{i}x) \times \vec{B} \quad (x \text{ lleva el sentido de la corriente } I)$$

$$F_3 = IxB = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)x B = \frac{B^2 \ell x}{R}$$

Fuerza neta de F_3 hacia arriba ($-\hat{j}$).

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

Saliendo la espira.



$$\vec{F}_1 = I(x - 2a)(-\hat{i}) \times \vec{B} \quad [(x - 2a) \text{ lleva el sentido de la corriente } I]$$

$$F_1 = I\ell B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)\ell B = \frac{B^2 \ell^2 v}{R}$$

Fuerza neta de F_1 hacia la izquierda ($-\hat{i}$).

$$\vec{F}_2 = I(x - 2a)\hat{i} \times \vec{B} \quad [(x - 2a) \text{ lleva el sentido de la corriente } I].$$

$$F_2 = I(x - 2a)B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)(x - 2a)B = \frac{B^2 \ell (x - 2a)}{R}$$

Fuerza neta de F_2 hacia arriba ($-\hat{j}$).

$$\vec{F}_3 = I(x - 2a)(-\hat{i}) \times \vec{B} \quad [(x - 2a) \text{ lleva el sentido de la corriente } I].$$

$$F_3 = I(x - 2a)B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)(x - 2a)B$$

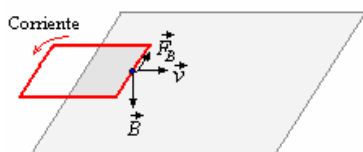
$$= \frac{B^2 \ell (x - 2a)}{R}$$

Fuerza neta de F_3 hacia abajo (\hat{j}).

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

b) El mecanismo (fuerza sobre los portadores de carga) de establecimiento de la corriente inducida en los tres casos citados.

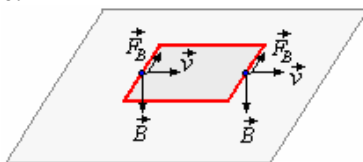
Cuando se introduce la espira rectangular.



$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Fuerza neta \vec{F}_1 hacia la izquierda ($-\hat{i}$)

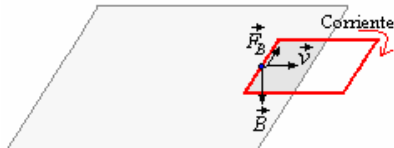
Con toda la espira rectangular en el campo magnético.



$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$$

No hay corriente, se compensan.

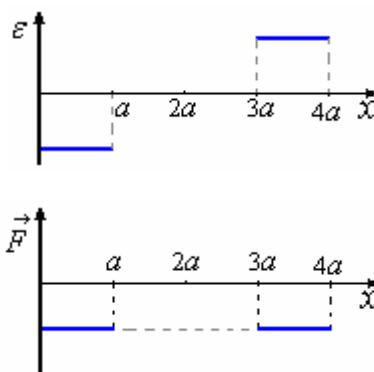
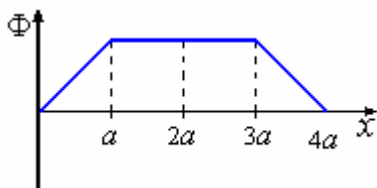
Cuando se saca la espira rectangular.



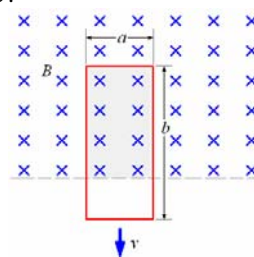
$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Fuerza neta \vec{F}_1 hacia la izquierda ($-\hat{i}$)

c) Gráficos del flujo, la fuerza electromotriz y la fuerza neta en función de la posición x .



Ejemplo 16. Un lazo rectangular de dimensiones $a \times b$, resistencia R , y masa m está orientado perpendicularmente a un campo magnético uniforme horizontal. Se suelta del reposo y baja de modo que parte del lazo esté fuera del campo, como se muestra en la figura. ¿Qué velocidad terminal máxima alcanza el lazo?



Solución.

Cuando la fuerza magnética en la corriente inducida es igual al peso del lazo, la fuerza actuante será cero y el lazo tendrá aceleración cero.

$$F_B = mg$$

Las fuerzas exteriores en las dos ramas laterales se cancelan. La fuerza ascendente en la porción superior es $F_B = IaB$, donde

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{B a dx}{R dt} = \frac{B a v}{R}$$

Así

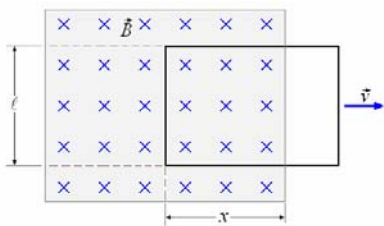
$$mg = B \left(\frac{B a v}{R}\right) a = \frac{B^2 a^2 v}{R} \text{ y } v = \frac{mgR}{B^2 a^2}$$

Observe que la corriente inducida fluye a la derecha en un intento de mantener el flujo dentro del lazo constante.

Ejemplo 17. Supongamos una espira como la mostrada en la figura de resistencia R y que sale con

velocidad $\vec{v} = v_0 \hat{i}$ de la acción del campo

$$\vec{B} = B_0 \hat{j}$$



- Calcule el flujo magnético y la corriente inducida (valor y dirección) cuando un segmento x aún no sale la región con campo. Justifique.
- Calcule en es mismo instante las fuerzas magnéticas sobre cada lado de la espira.
- Si la velocidad de la espira y el campo magnético tienen valores constantes, calcule la fuerza externa necesaria para que este movimiento se realice.
- Calcule el trabajo por unidad de tiempo realizado por la fuerza externa y la potencia disipada por la corriente inducida. Comente los resultados.

Solución.

a) El flujo magnético encerrado por la espira en un momento dado es

$$\Phi = B\ell x$$

Como x está variando

$$\frac{d\Phi}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

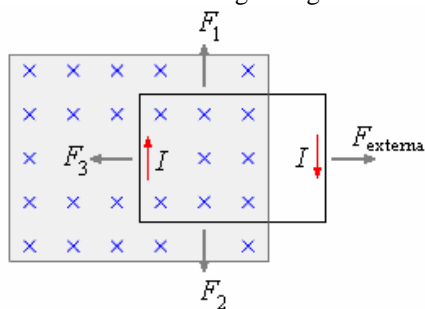
La fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v$$

La corriente producida es

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

El sentido en oposición a la disminución de líneas de flujo sería el indicado en la figura siguiente.



- Al inducirse corriente aparecen fuerzas sobre la espira, F_1 y F_2 son iguales en magnitud y opuestas en sentido, $F_3 = I\ell B$ en el sentido indicado.

$$F_1 = F_2 = I\ell B$$

- Como la espira se desliza a velocidad constante la fuerza externa $F_{externa}$ es igual a F_3 .

$$F_{externa} = I\ell B$$

- La potencia desarrollada por el agente externo

$$P = (F_{externa})v = I\ell Bv$$

Como $I = \frac{B\ell v}{R}$, tenemos

$$P = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

La potencia disipada en el circuito es

$$P = I^2 R, \text{ con } I = \frac{B\ell v}{R}:$$

$$P = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

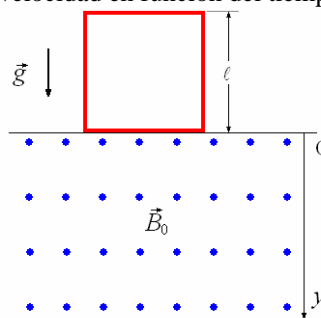
Con lo que demostramos que la potencia entregada es igual a la potencia disipada.

Ejemplo 18. Una espira cuadrada de lado ℓ , masa m , y resistencia R , se encuentra en la frontera de una

zona donde actúa un campo magnético uniforme \vec{B}_0 , perpendicular al plano del papel y saliendo de él, como lo muestra la figura.

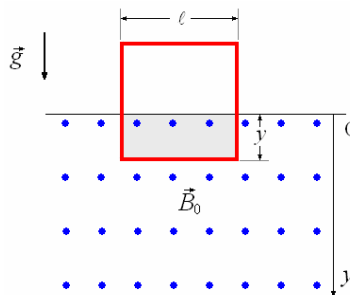
En $t = 0$, se deja caer la espira la cual se introduce progresivamente en el campo magnético \vec{B}_0 . Se pide:

- Hallar el flujo magnético en la espira en función de la distancia vertical y .
- Encontrar la fem y la corriente inducida en la espira. ¿Cuál es el sentido de dicha corriente?
- Mostrar en un diagrama de cuerpo libre las diferentes fuerzas que actúan sobre la espira, e indicar los valores respectivos.
- Plantear la ecuación diferencial del movimiento vertical en función de la velocidad de la espira.
- Resolver la ecuación diferencial planteada en (d), y obtener la velocidad en función del tiempo.



Solución.

a)



El flujo magnético en la espira en función de la distancia vertical y :

$$\Phi_B = B_0 A = B_0 \ell y$$

- La fem:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

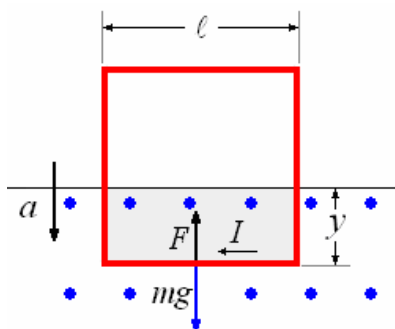
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B_0\ell \frac{dy}{dt} = -B_0\ell v$$

La corriente inducida en la espira

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B_0\ell v}{R}$$

Como el campo durante la caída esta aumentando hacia el papel, por la ley de lenz en oposición a ese aumento debe aparecer un campo magnético opuesto, este se debería a una corriente en la espira en sentido horario.

c)



$$F = IlB_0 = \frac{B_0^2\ell^2 v}{R}$$

$$\sum F = ma$$

$$mg - F = ma \Rightarrow mg - IlB_0 = ma \Rightarrow$$

$$mg - \frac{B_0^2\ell^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

La ecuación diferencial del movimiento vertical en función de la velocidad de la espira. Es:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B_0^2\ell^2 v}{mR} - g = 0$$

d)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2\ell^2 v}{mR} + g \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2\ell^2}{mR} \left(v - \frac{mRg}{B_0^2\ell^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{\left(v - \frac{mRg}{B_0^2\ell^2} \right)} = -\frac{B_0^2\ell^2}{mR} dt$$

Integrando:

$$\ln \left(v - \frac{mRg}{B_0^2\ell^2} \right) \Big|_0^v = -\frac{B_0^2\ell^2}{mR} t \Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\ln \frac{v - \frac{mRg}{B_0^2\ell^2}}{-\frac{mRg}{B_0^2\ell^2}} = -\frac{B_0^2\ell^2}{mR} t \Rightarrow$$

$$\frac{v - \frac{mRg}{B_0^2\ell^2}}{-\frac{mRg}{B_0^2\ell^2}} = e^{-\frac{B_0^2\ell^2}{mR} t} \Rightarrow$$

$$v - \frac{mRg}{B_0^2\ell^2} = -\frac{mRg}{B_0^2\ell^2} e^{-\frac{B_0^2\ell^2}{mR} t} \Rightarrow$$

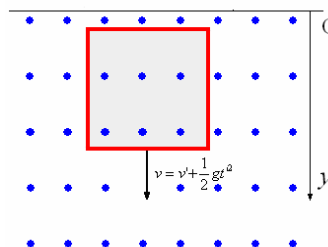
$$v = \frac{mRg}{B_0^2\ell^2} \left(1 - e^{-\frac{B_0^2\ell^2}{mR} t} \right)$$

Esta velocidad es mientras la espira está ingresando en el campo, después de haber ingresado completamente la velocidad llega a un valor v' .

$$v' < v_{\text{limite}} = \frac{mRg}{B_0^2\ell^2} \text{ (Cuando } a = 0 \text{)}.$$

Desde este instante en adelante la velocidad estará dada por:

$$v = v' + \frac{1}{2}gt'^2.$$

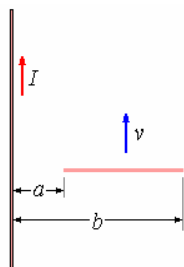


Ejemplo 19. Sabiendo que el módulo del campo magnético producido por una corriente rectilínea indefinida de intensidad I a una distancia r vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

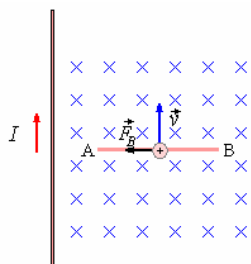
a) Calcular la diferencia de potencial entre los extremos A y B de una varilla que se mueve paralelamente a la corriente rectilínea con velocidad v .

b) ¿Cuál es el potencial más alto de los dos?. Razonar las respuestas

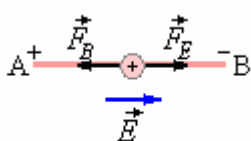


Solución.

a) Un portador de carga positiva de la varilla, al moverse con velocidad v , en el campo magnético producido por la corriente rectilínea indefinida experimenta una fuerza $F_B = qvB\text{sen}90^\circ$, dirigida a lo largo de la varilla hacia A.



Las cargas positivas se acumulan en A y las negativas en B.



Surge un campo eléctrico \vec{E} entre A y B, que se opone a que se siga acumulando carga. En el equilibrio

$$F_B = F_E \Rightarrow qvB = qE \Rightarrow E = vB = v \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$V_A - V_B = \int_a^b E dr = \int_a^b v \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = v \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

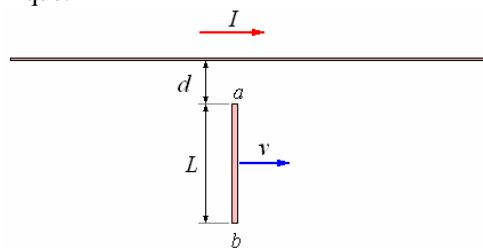
$$= v \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

b) El potencial más alto está en a (+), es un punto más cercano al alambre con corriente.

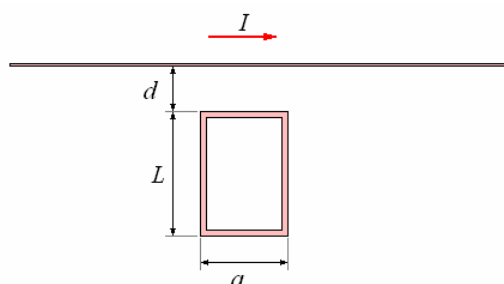


Ejemplo 20. El alambre recto y largo conduce una corriente constante I . Una barra metálica de longitud L se desplaza a velocidad constante v , como se muestra en la figura. El punto a está a una distancia d del alambre. Calcule la fem inducida en la barra.

¿Cuál punto a o b es el de mayor potencial? Justifique.



b) Suponga que se sustituye la barra por una espira rectangular de alambre de resistencia R . Calcule el flujo magnético y la corriente inducida en la espira. ¿Cuál es el sentido de la corriente inducida?



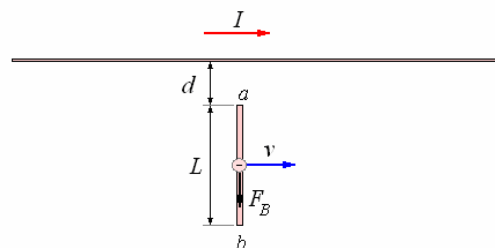
c) Lo mismo que la parte anterior, pero para una corriente variable en el tiempo en el alambre igual a $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$, donde α es una constante positiva de unidad s^{-1} .

d) Para la situación de la parte c). ¿Cuál es la fuerza magnética resultante sobre la espira? El resultado puede ser expresado en función de la corriente inducida I_{ind} de la espira.

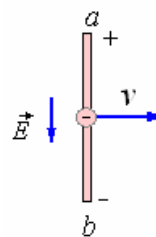
Solución.

a) Un portador de carga de la varilla, al moverse con velocidad v , en el campo magnético producido por la corriente rectilínea experimenta una fuerza

$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$, dirigida a lo largo de la varilla hacia b.



Las cargas positivas se acumulan en a y las negativas en b .



Surge un campo eléctrico \vec{E} entre a y b , que se opone a que se siga acumulando carga.

En el equilibrio $F_B = F_E \Rightarrow qvB = qE$

$$\Rightarrow E = vB = v \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

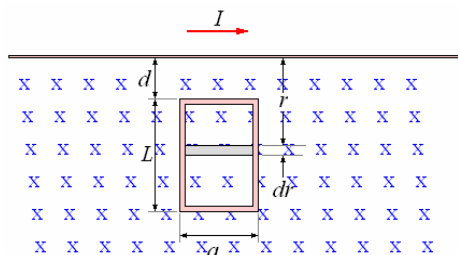
La fem inducida en la barra.

$$\begin{aligned} V_a - V_b &= \int_d^{d+L} E dr \\ &= \int_d^{d+L} v \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = v \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_d^{d+L} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d} \end{aligned}$$

El punto de mayor potenciales es a .



b) Suponga que se sustituye la barra por una espira rectangular de alambre de resistencia R . Calcule el flujo magnético y la corriente inducida en la espira. ¿Cuál es el sentido de la corriente inducida?



$$\Phi_B = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(\frac{d+L}{d} \right)$$

Como el flujo es constante no hay fem inducida, por lo tanto tampoco corriente inducida.

No hay corriente inducida, puesto que el flujo magnético es constante en el tiempo.

c) Si la corriente en el alambre igual a $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \Phi_B = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(\frac{d+L}{d} \right)$$

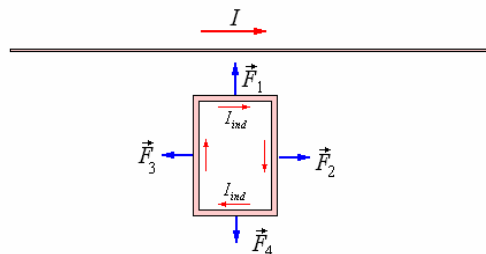
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 a I_0}{2\pi} \ln \left(\frac{d+L}{d} \right) e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{\mu_0 a I_0 \alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{d+L}{d} \right) e^{-\alpha t}$$

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 a I_0 \alpha}{2\pi R} \ln \left(\frac{d+L}{d} \right) e^{-\alpha t}$$

El sentido de la corriente inducida de acuerdo con la ley de Lenz, como la corriente va disminuyendo, el campo magnético también, luego para que aparezca un campo en oposición la disminución del campo debe circular una corriente inducida en sentido horario.

d) Para la situación de la parte c). ¿Cuál es la fuerza magnética resultante sobre la espira? El resultado puede ser expresado en función de la corriente inducida I_{ind} de la espira.



$$\vec{F}_1 = I_{ind} a \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{j}$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

$$\vec{F}_4 = -I_{ind} a \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+L)} \hat{j}$$

La fuerza magnética resultante sobre la espira

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_4 = I_{ind} a \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{j} - I_{ind} a \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+L)} \hat{j}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I I_{ind} a}{2\pi} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{(d+L)} \right] \hat{j}$$

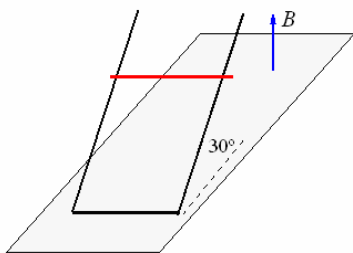
En oposición al ingreso.

Ejemplo 21. Una varilla conductora de masa 10 g desliza sobre carriles paralelos distantes 20 cm y que forman un ángulo de 30° con el plano horizontal. Los carriles se cierran por la parte inferior, tal como se indica en la figura. En la región existe un campo magnético uniforme y perpendicular al plano horizontal de intensidad 1 T.

a) Calcular la fuerza electromotriz en función de la velocidad constante de la varilla. La intensidad de la corriente inducida si la resistencia del circuito es de 10Ω . La(s) fuerza(s) sobre la varilla.

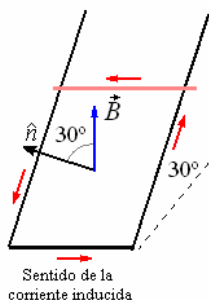
b) ¿Cuánto valdrá la velocidad de la varilla cuando desliza con movimiento uniforme? (se desprecia el rozamiento).

Razonar las respuestas dibujando los esquemas



Solución.

a)



El sentido de la corriente inducida es en oposición a la disminución del flujo magnético.

El flujo es

$$\Phi = \vec{B} \cdot \hat{n}A = BA \cos 30^\circ$$

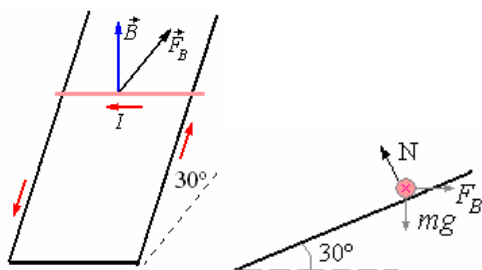
$$= (1) \left(0,2x \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0,1\sqrt{3} \text{ x Wb}$$

b) La fuerza electromotriz es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -0,1\sqrt{3} \frac{dx}{dt} = 0,1\sqrt{3} \text{ v V}$$

Y la corriente $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0,1\sqrt{3}}{10} \text{ v}$

Fuerzas sobre la varilla



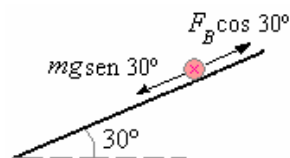
$$\vec{F}_B = I \vec{\ell} \times \vec{B},$$

($\vec{\ell}$ lleva el sentido de la corriente I)

$$F_B = I(0,2)(1) \sin 90^\circ = 0,02 \frac{0,1\sqrt{3}}{10} \text{ v}$$

$$= 0,02\sqrt{3} \text{ v N}$$

Para que vaya a velocidad constante ambas fuerzas deben ser iguales.

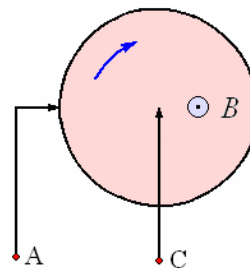


$$mg \sin 30^\circ = F_B \cos 30^\circ$$

$$(0,01)(9,8)(0,5) = 0,002\sqrt{3}v \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{50 \text{ m}}{3 \text{ s}}$$

Ejemplo 22. Faraday inventó un dispositivo ingenioso llamado generador homopolar, o disco de Faraday. Un disco de cobre del radio r se monta con su eje paralelo a un campo magnético uniforme B . El disco rota en la frecuencia angular ω . el contacto eléctrico con las escobillas que conducen se hace en los puntos A y C, en el perímetro y el eje del disco. ¿Qué fuerza electromotriz se genera entre los terminales A y C?



Solución.

Imagine un lazo cerrado consistente en de las conexiones mostradas, más un segmento que conecta A y C, más un pedazo radial del disco del centro a un punto en la circunferencia, más un arco a lo largo de la circunferencia.

En el tiempo dt este pedazo radio barre un triángulo

pequeño de área $\frac{1}{2} r(rd\theta) = \frac{1}{2} r^2 \omega dt$. Esto

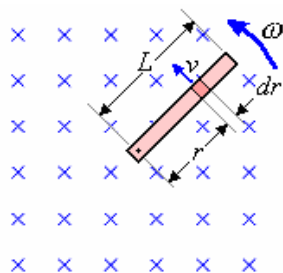
aumenta el flujo a través del lazo en

$$d\Phi_B = BdA = \frac{1}{2} Br^2 \omega dt. \text{ Así la fuerza}$$

electromotriz inducida entre A y C es:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2} Br^2 \omega$$

Ejemplo 23. Determinar la diferencia de potencial entre los extremos de una barra metálica que gira con velocidad angular uniforme ω dentro de un campo magnético B como el mostrado en la figura.



Solución.

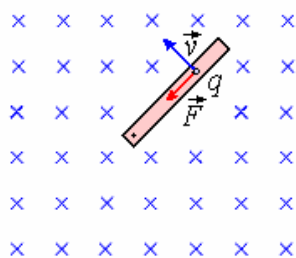
Escogemos un elemento diferencial dr a una distancia r del centro, tendrá una velocidad tangencial $v = \omega r$. El elemento de longitud dr se mueve con una velocidad v en un campo B perpendicular el. De allí que la fuerza electromotriz entre sus extremos es:

$$d\varepsilon = B(dr)v = B(dr)(\omega r) = B\omega r dr$$

La fuerza electromotriz entre los extremos del alambre es:

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^L B\omega r dr = B\omega \frac{r^2}{2} \Big|_0^L = \frac{1}{2} B\omega L^2$$

Calculo por medio de la Fuerza de Lorentz. Otra forma de llegar al mismo resultado es mediante la Fuerza de Lorentz



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}, F = qvB$$

El trabajo realizado por la fuerza en la distancia dr es:

$$dW = Fdr = qvBdr = qB\omega r dr$$

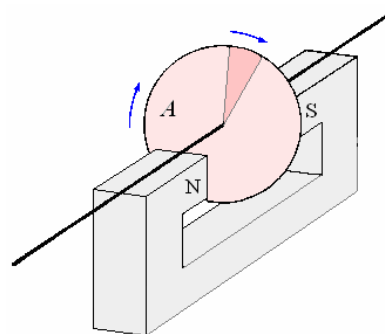
el trabajo total es

$$W = \int dW = \int_0^L qB\omega r dr = qB\omega \frac{r^2}{2} \Big|_0^L = \frac{1}{2} qB\omega L^2$$

El trabajo total por unidad de carga es

$$\frac{W}{q} = \Delta V = \varepsilon = \frac{1}{2} B\omega L^2$$

Ejemplo 24. Un disco de cobre de 25 cm gira con una velocidad angular de 400 rpm alrededor de su eje y perpendicularmente a un campo magnético de 1 T. ¿Qué diferencia de potencial se induce entre el borde del disco y su centro?



Solución.

Consideremos una banda radial del disco. Como

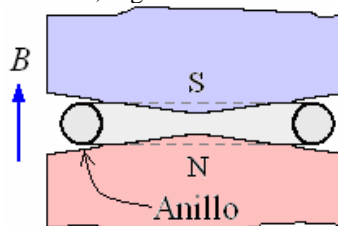
$$\omega = 2400 \text{ rpm} = \frac{2400}{60} = 40 \text{ rps}, \text{ en una vuelta,}$$

o sea en 1/40 segundos cada banda radial del disco cortará todas las líneas de flujo que cubre su área A. Por tanto,

$$\Phi = BA = 1 \times \pi(0,25)^2 = 0,196 \text{ Wb},$$

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{0,196}{1/40} = 7,85 \text{ V}.$$

EL BETATRÓN. Un campo magnético que cambiante en el espacio crea un torbellino como campos eléctricos, y esto es verdad sin o con un conductor presente. Tales campos se utilizan en el betatrón para acelerar electrones a alta velocidad. Un “anillo” evacuado se coloca en el campo de un electroimán grande, y los electrones viajan en órbitas circulares. El campo magnético se varía sinusoidalmente, y por un cuarto del ciclo los electrones son acelerados por el campo eléctrico inducido. Así el campo magnético sirve para hacer girar a los electrones en órbitas circulares y acelerarlos. Para lograr esto, el campo magnético debe ser más débil en la órbita que en el interior de la trayectoria circular, según lo indicado en la figura.



Ejemplo 25. Demuestre que el campo magnético en la órbita en un betatrón debe ser la mitad del campo magnético promedio sobre el área encerrada por la órbita.

Solución.

La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta

$$\text{necesaria, tal que } qvB = \frac{mv^2}{r}. \text{ La fuerza}$$

electromotriz inducida es

$$\varepsilon = \int \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 2\pi rE = \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Por la segunda ley de Newton, la fuerza sobre el electrón es

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = qE = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi_B}{dt}$$

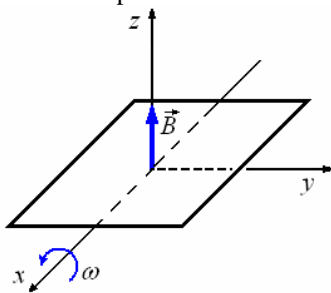
Desde que $v = 0$ en $t = 0$,

$$mv = \frac{1}{2\pi r} \Phi_B = qrB$$

Pero $\Phi_B = \pi r_2 B_m$, tal que $B = \frac{1}{2} B_m$.

Ejemplo 26. La espira conductora cuadrada en el plano xy de la siguiente figura de lado ℓ y resistencia R gira con velocidad angular ω uniforme alrededor del eje x . La espira se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme B que tiene la dirección del eje z .

- Si el movimiento empieza cuando el flujo es máximo, calcule el valor de flujo magnético inicial y el sentido de la corriente inducida por el movimiento.
- ¿Cuál es la corriente inducida en función del tiempo?
- Calcule el momento o torque necesario para mantener la espira girando a velocidad angular constante.
- Explique si en este proceso se conserva la energía.

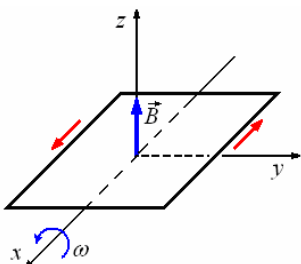


Solución.

a) $\Phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n}A$

El flujo magnético inicial $\Phi_B = B\hat{k} \cdot \hat{k}\ell^2 = B\ell^2$

Si consideramos que el movimiento se inicia en la posición mostrada en el dibujo ($\theta = 0$), para $\theta = \pi/2$, el flujo es cero, para $\theta = \pi$, el flujo es máximo nuevamente pero en sentido contrario, como la fuerza electromotriz inducida es alterna, la corriente también es alterna. Como al inicio el flujo es máximo y va disminuyendo, la fuerza electromotriz es en oposición a ese cambio, la corriente inicial será en el sentido indicado en el dibujo.

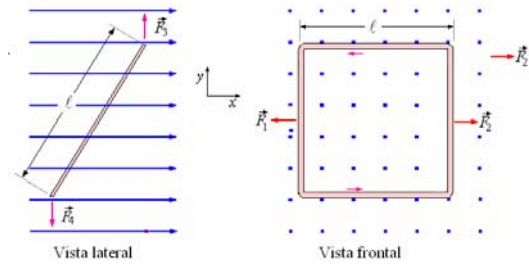


b) $i = \frac{\mathcal{E}}{R}$, $\Phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n}A = B\ell^2 \cos \omega t$

Luego $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} B\ell^2 \cos \omega t$
 $= B\ell^2 \omega \sin \omega t$

Finalmente $i = \frac{B\ell^2 \omega}{R} \sin \omega t$

c) La figura muestra la vista lateral y la vista frontal sobre el plano xy .



Actúan las fuerzas \vec{F}_3 y \vec{F}_4 , tal que

$$F_3 = F_4 = I\ell B.$$

Estas fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en sentido, formando así un par de fuerzas de valor $\tau = F_3 \ell \sin \theta = I\ell B \ell \sin \theta$

con $\ell^2 = A$ (área de la espira) podemos escribir $\tau = IAB \sin \theta$

Este par puede escribirse como producto vectorial de

\hat{n}_s (normal a la superficie A) y \vec{B} .

$$\vec{\tau} = IA\hat{n} \times \vec{B}.$$

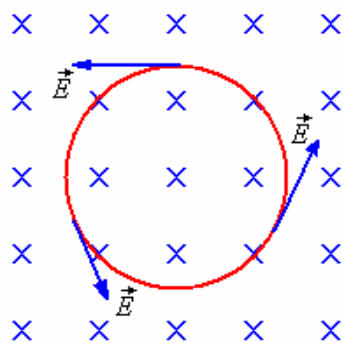
d) No se conserva la energía, se disipa en forma de calor por la resistencia de la espira debido al efecto Joule.

CAMPOS ELECTRICOS INDUCIDOS POR CAMPOS MAGNETICOS VARIABLES CON EL TIEMPO.

Tenemos que

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \text{ y } \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

es decir un campo magnético que varía con el tiempo nos induce un campo eléctrico. El sentido del campo eléctrico lo obtenemos mediante la ley de Lenz, consideremos una espira circular en presencia de un campo magnético tal como se muestra en la figura a continuación, si el campo magnético se está incrementando, se produce un campo eléctrico tangente a la trayectoria circular con una dirección contraria al sentido de las agujas del reloj



si el campo va en disminución el sentido del campo eléctrico será en el sentido horario.
La diferencia entre el campo eléctrico producido por carga eléctrica y los inducidos es que los primeros son conservativos.

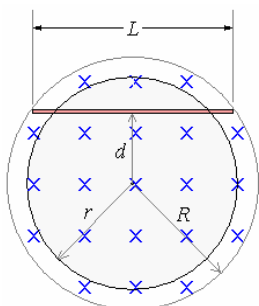
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Los segundos no lo son

Los segundos no lo son

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ejemplo 27. Encontrar el campo eléctrico inducido en una barra metálica de longitud L que se encuentra en una región cilíndrica de radio R en el espacio donde el campo magnético cambia con una razón $\frac{dB}{dt}$.



Solución.

Para cualquier punto dentro de la región cilíndrica con respecto al centro, el campo eléctrico se puede obtener a partir de:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Como $\Phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow$

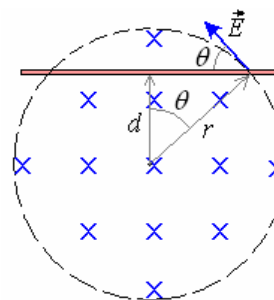
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS \text{ y } \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

A lo largo de la circunferencia de radio r

$$E 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

En la figura siguiente mostramos el detalle de la región de radio r



El campo en la barra es

$$E_{barra} = E \cos \theta$$

Como $\cos \theta = \frac{d}{r}$

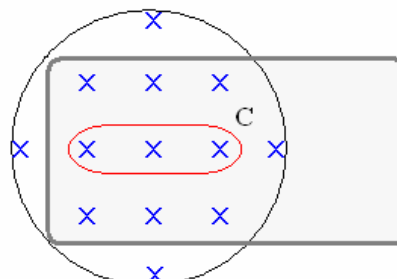
$$E_{barra} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \left(\frac{d}{r} \right) = -\frac{d}{2} \frac{dB}{dt}$$

En esta expresión observamos que el campo eléctrico en la barra es constante en cualquier punto.

CORRIENTES DE FOUCAULT

Acabamos de ver que por un flujo magnético variable se establecen circuitos definidos.

Frecuentemente se establecen corrientes circulares denominadas **Corrientes de Foucault** o de **Eddy** en un trozo de metal como en el núcleo de un transformador. Por ejemplo, consideremos un bloque conductor situado entre los polos de un electroimán, si el campo magnético varía con el tiempo se induce una fuerza electromotriz en cualquier trayectoria cerrada en el interior del metal, tal como la curva C.



La fuerza electromotriz inducida produce una corriente en el circuito. Las corrientes de Foucault pueden reducirse construyendo el bloque mediante láminas o tiras la resistencia del trayecto aumente debido al pegamento que se utiliza entre láminas, de esta manera se rompen los grandes circuitos y se reduce en gran manera la pérdida de potencia, una aplicación de esta corriente es el freno magnético debido a esta corriente y al campo magnético aparece una fuerza magnética en oposición al movimiento del bloque metálico.

Ejemplo 28. Un disco de resistividad η , de radio a , y de espesor b se coloca con su plano perpendicular a un campo magnético variable, $B = B_0 \sin \omega t$. Se inducen corrientes circulares llamadas las corrientes de Foucault, y la energía se disipa en el disco. Calcule el índice de la disipación de la energía. Esta pérdida de energía térmica presenta un problema en

dispositivos tales como transformadores. Este efecto tiene aplicación en los detectores de metales usados en los aeropuertos, para encontrar monedas enterradas y en hornos de inducción.

Solución.

Considere un anillo de ancho dr y radio r . el flujo a través de este anillo es $\Phi = \pi r^2 B_0 \sin \omega t$,

La fuerza electromotriz inducida en el anillo es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \omega B_0 \cos \omega t .$$

La resistencia del anillo es

$$R = \eta \left(\frac{L}{A} \right) = \eta \left(\frac{2\pi r}{bdr} \right),$$

La energía total disipada en el disco es

$$P = \int \frac{\varepsilon^2}{R} = \int_0^a \frac{(\pi r^2 \omega B_0 \cos \omega t)^2 bdr}{2\pi r \eta}$$

$$= \frac{1}{8\eta} \pi ba^4 \omega^2 B_0^2 \cos^2 \omega t$$

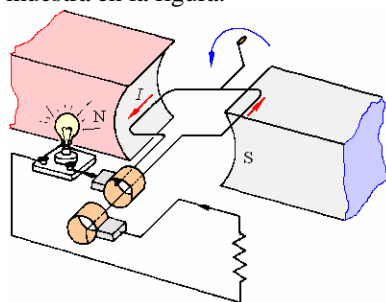
La disipación de energía depende de la cuarta potencia del radio del disco, y esta dependencia se encuentra para otras formas también, así que los núcleos de los transformadores con hojas laminadas finas de metal ayudan a reducir las pérdidas perceptiblemente. El promedio de $\cos^2 \omega t$ en un período es $1/2$, tal que:

$$P_m = \frac{1}{16\eta} \pi ba^4 \omega^2 B_0^2$$

GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA

La aplicación principal de la Ley de Faraday es el generador de corriente alterna.

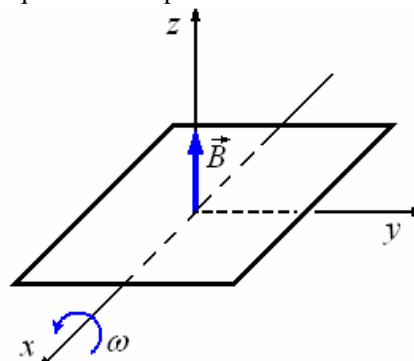
Un generador de corriente alterna básicamente consiste una bobina cuadrada con n vueltas que gira con cierta frecuencia f (velocidad angular $\omega = 2\pi f$) en un campo magnético B uniforme, tal como se muestra en la figura.



De acuerdo a la Ley de Faraday al venir el flujo magnético se induce una diferencia de potencial en los terminales de la bobina. El potencial que se obtiene es una función senoidal, habrá un voltaje máximo cuando \vec{B} y la sección $A = ab$ de la bobina (el vector \hat{n}) están en la misma dirección y mínima cuando están en direcciones opuestas.

Ejemplo 29. La espira conductora cuadrada en el plano xy de la siguiente figura de lado ℓ y resistencia R gira con velocidad angular ω uniforme alrededor del eje x . La espira se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme B que tiene la dirección del eje z .

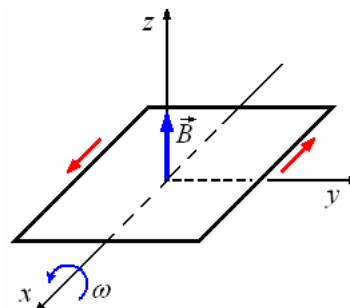
- a) Si el movimiento empieza cuando el flujo es máximo, calcule el valor de flujo magnético inicial y el sentido de la corriente inducida por el movimiento.
- b) ¿Cuál es la corriente inducida en función del tiempo?
- c) Calcule el momento o torque necesario para mantener la espira girando a velocidad angular constante.
- d) Explique si en este proceso se conserva la energía.



Solución.

a) $\Phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n}A$

El flujo magnético inicial $\Phi_B = B\hat{k} \cdot \hat{k}\ell^2 = B\ell^2$
 Si consideramos que el movimiento se inicia en la posición mostrada en el dibujo ($\theta = 0$), para $\theta = \pi/2$, el flujo es cero, para $\theta = \pi$, el flujo es máximo nuevamente pero en sentido contrario, como la fuerza electromotriz inducida es alterna, la corriente también es alterna. Como al inicio el flujo es máximo y va disminuyendo, la fuerza electromotriz es en oposición a ese cambio, la corriente inicial será en el sentido indicado en el dibujo.

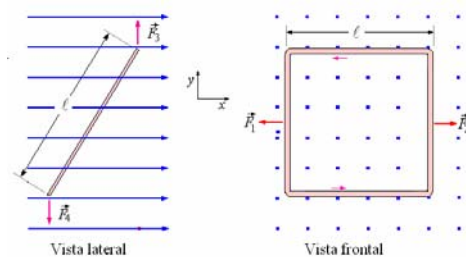


b) $I = \frac{\varepsilon}{R}, \Phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n}A = B\ell^2 \cos \omega t$

Luego $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} B\ell^2 \cos \omega t = B\ell^2 \omega \sin \omega t$

Finalmente $I = \frac{B\ell^2\omega}{R} \text{sen}\omega t$

c) La figura muestra la vista lateral y la vista frontal sobre el plano xy .



Actúan las fuerzas \vec{F}_3 y \vec{F}_4 , tal que

$$F_3 = F_4 = I\ell B.$$

Estas fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en sentido, formando así un par de fuerzas de valor

$$\tau = F_3 \ell \text{sen}\theta = I\ell B \text{sen}\theta$$

con $\ell^2 = A$ (área de la espira) podemos escribir

$$\tau = IAB \text{sen}\theta$$

Este par puede escribirse como producto vectorial de

$$\hat{n} \text{ (normal a la superficie } A) \text{ y } \vec{B}.$$

$$\vec{\tau} = IA\hat{n} \times \vec{B}.$$

d) No se conserva la energía, se disipa en forma de calor por la resistencia de la espira debido al efecto Joule.

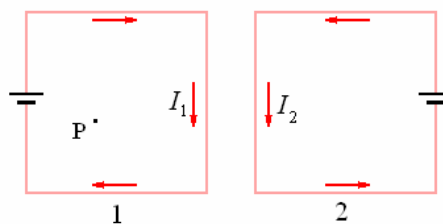
INDUCTANCIA

Hemos estudiado dos elementos constituyentes de un circuito, resistencia y condensador. Mientras la resistencia solo disipa energía, los condensadores y la capacidad están relacionados con los campos eléctricos, similarmente tenemos para con los campos magnéticos un elemento que almacena la energía magnética, este elemento es la inductancia.



DEFINICIÓN DE INDUCTANCIA

Consideremos que tenemos dos circuitos como los mostrados en la figura y que en las cercanías no hay ninguna fuente de campo magnético y todo el flujo magnético será debido a las dos espiras.



El campo magnético en un punto P en el interior espira 1 puede calcularse con la ley de Biot y Savart y es la suma de los campos producidos por la espira 1 (corriente I_1) y por la espira 2 (corriente I_2). Por lo tanto podemos escribir que el flujo a través de la espira 1 es proporcional a I_1 y a I_2 , es decir, es función de I_1 y de I_2 .

$$\Phi_1 = \Phi_1(I_1, I_2)$$

La fuerza electromotriz inducida de la espira 1 es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}\Phi_1(I_1, I_2) = \\ &= -\frac{d\Phi_1}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_1}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{21} \frac{dI_2}{dt} \end{aligned}$$

Definimos

AUTOINDUCTANCIA de la espira 1

$$L_1 = -\frac{d\Phi_1}{dI_1}$$

INDUCTANCIA MUTUA

(efecto de la espira 2 sobre 1)

$$M_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dI_2}$$

L_1 solo depende de la geometría del circuito 1 mientras que M_{21} depende de la disposición de ambos circuitos.

Es fácil demostrar que

$$M_{21} = M_{12}$$

Asimismo, si en lugar de tener 2 circuitos tenemos n circuitos la inductancia mutua de cualquiera de ellos será

$$M_{ij} = -\frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \quad i \neq j$$

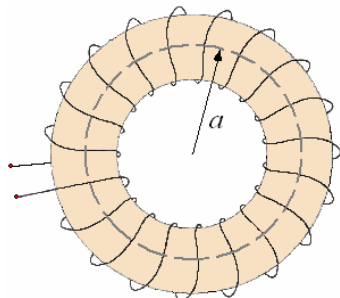
La unidad de inductancia es el HENRY (H) en honor de Joseph Henry, científico norteamericano que descubrió la ley de inducción electromagnética en la misma época que Faraday.

Comumente se usan los submúltiplos
milihenry (mH) 10^{-3}H
microhenry $\mu\text{H} = 10^{-6}\text{H}$

Aplicación. El toroide
Autoinductancia de un toroide.



Consideremos un toroide (bobina larga a la que se da forma circular) mostrado en la figura siguiente, con n_1 vueltas y corriente I_1 ,



El campo magnético en su interior se encuentra aplicando la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B_1 2\pi a = \mu_0 n_1 I_1 \Rightarrow$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 n_1 I_1}{2\pi a}$$

El flujo magnético a través de A debido a las n_1 vueltas

$$\Phi_1 = (B_1 A) n_1 = \left(\frac{\mu_0 n_1 I_1 A}{2\pi a} \right) n_1 = \frac{\mu_0 n_1^2 A I_1}{2\pi a}$$

La autoinductancia

$$L_1 = \frac{d\Phi_1}{dI_1} = \frac{\mu_0 n_1^2 A}{2\pi a}$$

La inductancia mutua. En el mismo ejemplo consideremos que tenemos un segundo arrollamiento toroidal añadido al anterior, esta vez n_2 vueltas y con corriente I_2 .

El flujo

$$\Phi_{21} = (B_2 A) n_1 = \left(\frac{\mu_0 n_2 I_2}{2\pi a} A \right) n_1 =$$

$$\frac{\mu_0 n_1 n_2 A}{2\pi a} I_2$$

La inductancia mutua

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_2} = \frac{\mu_0 n_1 n_2 A}{2\pi a}$$

De igual manera podemos encontrar la autoinductancia del segundo arrollamiento

$$L_2 = \frac{d\Phi_2}{dI_2} = \frac{\mu_0 n_2^2 A}{2\pi a}$$

Y la inductancia mutua

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_1} = \frac{\mu_0 n_1 n_2 A}{2\pi a}$$

Observando los valores hallados, encontramos

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$$

En general

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

donde k es el coeficiente de acople

$$|k| \leq 1$$

Ejemplo 30. Determine la autoinductancia de un toroide con n vueltas de sección transversal cuadrada $a \times a$ y radio interno R .

Solución.

De la ley de Ampere $2\pi rB = \mu_0 nI$:

$$\Phi_B = n \int B dS = n \int_R^{R+a} \left(\frac{\mu_0 n I}{2\pi r} \right) (a dr)$$

$$= \frac{\mu_0 n^2 I a}{2\pi} \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+a)^2} \right]$$

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 n^2 a}{2\pi} \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+a)^2} \right]$$

Ejemplo 31. Determine la autoinductancia por unidad de longitud de un cable coaxial recto largo de radio interno a y de radio externo b .

Solución.

De la ley de Ampere $2\pi rB = \mu_0 I$.

Para la unidad de longitud.

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{1}{I} \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Ejemplo 32. ¿Cuál es la autoinductancia de un solenoide largo del radio a con N vueltas por metro?

Solución.

El campo dentro de un solenoide es $\mu_0 NI$, así que el flujo con una vuelta es

$$\pi a^2 B = \pi a^2 \mu_0 NI.$$

En 1 m hay N vueltas, así que el flujo con estas N vueltas es

$$\Phi_B = N(\pi a^2 \mu_0 NI) \text{ y}$$

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \pi \mu_0 N^2 a^2$$

Ejemplo 33. Encontrar la inductancia de un solenoide de gran longitud ℓ , n vueltas muy juntas y sección A .

Solución.

Aplicando la ley de ampere encontramos el campo magnético en el interior del solenoide.

$$B = \frac{\mu_0 n I}{\ell}$$

Cuando nos piden encontrar la inductancia en realidad están pidiendo la autoinductancia.

El flujo magnético es

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 n I A}{\ell}$$

La inductancia

$$L = n \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 n^2 A}{\ell}$$

Ejemplo 34. Dos bobinas circulares de los radios a y b ($a \gg b$) concéntricas y coplanares. La bobina más grande tiene n_1 vueltas, y la más pequeña tiene n_2 vueltas. ¿Cuál es su inductancia mutua?

Solución.

El campo magnético en el centro de la bobina grande

$$\text{es } B_1 = \frac{\mu_0 n_1 I_1}{2a}.$$

Así el flujo a través de la bobina pequeña es aproximadamente $\Phi_{B21} = n_2 \pi b^2 B_1$,

$$\text{tal que } M = \frac{\Phi_{B21}}{I} = \mu_0 n_1 n_2 \pi \left(\frac{b^2}{2a} \right)$$

Ejemplo 35. Determiné las dimensiones del cociente L/R . ¿Cuánto vale 1 henrio/ohmio?

Solución.

Recordando las expresiones

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \text{ y } V = IR$$

Resulta

$$1V = 1H \frac{1A}{1s} \Rightarrow H = \frac{(1V)(1s)}{1A}$$

$$1V = (1A)(1\Omega) \Rightarrow (1\Omega) = \frac{(1V)}{(1A)}$$

Por tanto,

$$\frac{1H}{\Omega} = \frac{(1V)(1s)}{1A} = 1s$$

$$\text{Dimensiones } \left| \frac{L}{R} \right| = |\text{tiempo}|$$

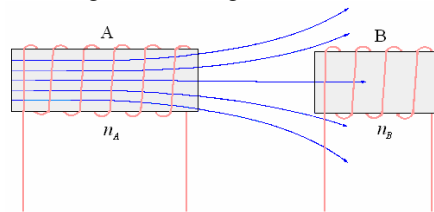
$$\frac{1H}{\Omega} = 1s$$

Por esta razón el cociente L/R suele llamarse constante de tiempo.

Ejemplo 36. Dos bobinas A y B situadas una junto a la otra poseen 1000 y 2000 espiras respectivamente. Cuando por A circula una corriente de 3 A se produce en A un flujo de 3×10^{-3} Wb, y en B un flujo de $1,3 \times 10^{-3}$ Wb.

a) Calcule la autoinducción de A y la inductancia mutua de las bobinas A y B.

b) Calcúlese la fuerza electromotriz inducida en la bobina B del ejercicio anterior si corriente que circula por A se extingue en 0,1 segundos.



Solución.

$$a) L_A = \frac{n_A \Phi_A}{I_A} = \frac{(1000)(3 \times 10^{-3})}{5} = 0,60 \text{ H.}$$

$$M_{AB} = \frac{n_B \Phi_B}{I_A} = \frac{(2000)(1,3 \times 10^{-3})}{5} = 0,52 \text{ H.}$$

$$b) \varepsilon_B = M_{AB} \frac{\Delta I_A}{\Delta t} = 0,52 \frac{5-0}{0,1} = 26,0 \text{ V.}$$

o también

$$\varepsilon_B = n_B \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = 2000 \frac{1,3 \times 10^{-3}}{0,1} = 26,0 \text{ V.}$$

Ejemplo 37. Una corriente continua de 5 A en una bobina de 1000 vueltas da lugar a un flujo de 10^{-3} Wb en el interior de la misma. Calcúlese:

a) La fuerza electromotriz de autoinducción inducida en la bobina si la corriente se interrumpe en 0,1 s.
b) la autoinducción de la bobina.

Solución.

$$a) \varepsilon = n \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 1000 \left(\frac{10^{-3} - 0}{0,1} \right) = 10 \text{ V}$$

$$b) \varepsilon = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$10 = L \frac{(5-0)}{0,1} = 50L \Rightarrow L = \frac{10}{50} = 0,20 \text{ H.}$$

$$\text{o también } L = \frac{n\Phi}{I} = \frac{1000 \times 10^{-3}}{5} = 0,20 \text{ H.}$$

Ejemplo 38. Una bobina de autoinducción $L = 1$

henrio se conecta a una batería de 24 V. Calcule $\frac{dI}{dt}$:

a) en el instante de conectar la bobina a la batería;
b) en el momento en que la corriente alcanza el 90 por 100 del valor correspondiente a la ley de Ohm.

Solución.

a) En el instante inicial, $I = 0$ y, por tanto, $IR = 0$

$$V - L \frac{dI}{dt} = IR = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} = \frac{24}{1} = 24 \text{ A/s.}$$

b) Valor máximo de la corriente (ley de Ohm):

$$I_{\max} = \frac{V}{R} = \frac{24}{R}, \quad V - L \frac{dI}{dt} = IR,$$

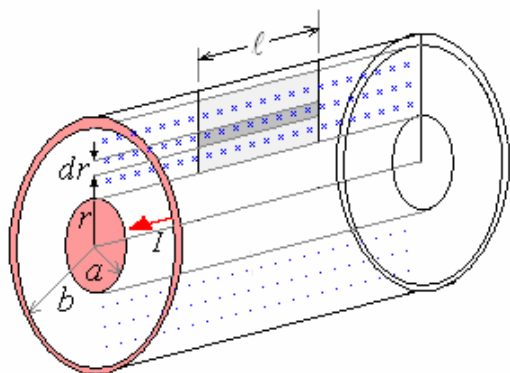
$$24 - 1 \frac{dI}{dt} = \left(0,90 \frac{24}{R}\right) R = 21,6$$

$$\frac{dI}{dt} = 24 - 21,6 = 2,4 \text{ A/s.}$$

Ejemplo 39. Un cable coaxial está formado por un conductor cilíndrico interno de radio a , y un cascarón cilíndrico exterior (coaxial al cilindro interno) de radio b . Demuestre que su auto-inductancia por

unidad de longitud es igual a $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Solución.



El campo magnético de un conductor cilíndrico está dado por:

Para $r < a$ $B = 0$

Para $a < r < b$ $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Para $r > b$ $B = 0$

El flujo magnético a través de la sección diferencial $dS = l dr$ es:

$$d\Phi_B = B dS = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) (l dr) = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

Integrando:

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La autoinductancia:

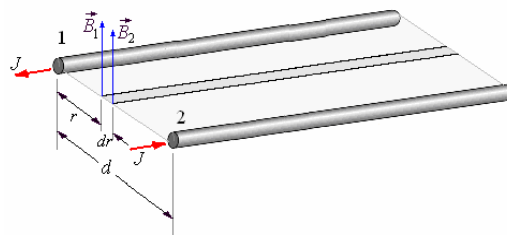
$$L = \frac{d\Phi_B}{dI} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La auto-inductancia por unidad de longitud es igual a

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo 40. Determinar la autoinductancia por unidad de longitud de una línea de dos alambres paralelos. El radio de los alambres es a y la separación entre ellos d ($d \gg a$).

Solución.



La figura muestra una sección de la línea. El campo magnético en la sección diferencial es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-r)}$$

El flujo magnético por unidad de longitud a través del área diferencial es

$$d\Phi_B = B dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right] dr$$

El flujo por unidad de Longitud es

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right] dr =$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} [\ln r - \ln(d-r)]_a^{d-a} =$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{(d-a)}{a} - \ln \frac{d-(d-a)}{(d-a)} \right] =$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{(d-a)}{a} - \ln \frac{a}{(d-a)} \right] =$$

$$\frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{(d-a)}{a}$$

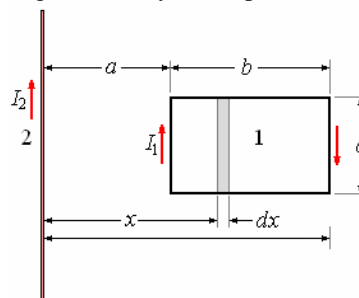
Como $d \gg a$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d}{a}$$

La inductancia por unidad de longitud es

$$L = \frac{d\Phi_B}{dI} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d}{a}$$

Ejemplo 41. Encontrar la inductancia mutua entre un alambre delgado finito y una espira cuadrada.



Solución.

Vamos a calcular la inductancia mutua entre 1 (el alambre) y 2 (la espira).

Tomemos un elemento diferencial tal como el mostrado en la figura.

El flujo a través del área diferencial es

$$d\Phi_{21} = B_2 dA_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} c dx$$

El flujo total es

$$\Phi_{21} = \int d\Phi_{21} = \frac{\mu_0 c I_2}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 c I_2}{2\pi} \ln x \Big|_a^{a+b} = \frac{\mu_0 c I_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

La inductancia mutua es

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

Como $M_{21} = M_{12} = M$

La inductancia mutua M es

$$M = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

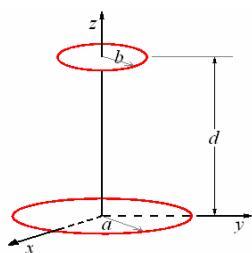
Ejemplo 42. Una bobina de 10 vueltas se envuelve apretadamente alrededor de un solenoide largo del 2 cm de radio y 200 vueltas por metro. ¿Cuál es la inductancia mutua del sistema?

Solución.

$$M = \frac{\Phi_B}{I_1} = \frac{n\mu_0 N I_1 \pi r^2}{I_1} = (10)(4\pi \times 10^{-7})(200)\pi(0,02)^2 = 3,2 \times 10^{-6} \text{ H.}$$

Ejemplo 43. Encontrar la inductancia mutua de dos espiras, de radios a y b , dispuestas de manera que sus centros están en el mismo eje (eje z), sus planos son perpendiculares al eje z , y sus centros están a una distancia d . Si una de las espiras es muy pequeña, $d \gg a$.

Solución.



El campo magnético, en el eje de la espira mayor (de radio a) es

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Como la espira menor es muy pequeña, el campo en cualquier punto de ella debe ser constante, de valor

$$B_{z(z=d)} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}}$$

Luego el flujo enlazado por la espira de radio b , debido a la otra espira es

$$\Phi_{ab} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I}{2(a^2 + d^2)^{3/2}}$$

Con esto, el coeficiente de inducción mutua es

$$M = \frac{\Phi_{ab}}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}}$$

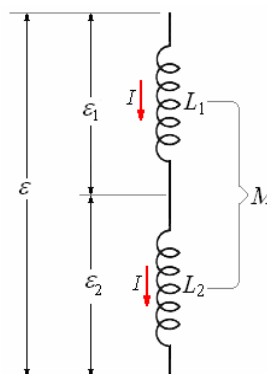
INDUCTANCIAS EN SERIE Y EN PARALELO

En los esquemas de circuitos las inductancias aparecen bajo el símbolo indicado en las figuras siguientes.



Inductancias en serie

Consideremos dos elementos en serie con autoinductancias L_1 y L_2 respectivamente e inductancia mutua M .



Con la corriente I común

$$\epsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}$$

$$\epsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}$$

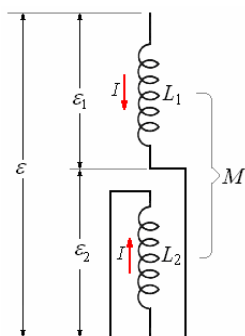
$$\text{y } \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\text{Tenemos: } \epsilon = -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt}$$

El valor efectivo de la inductancia es

$$L_{ef} = L_1 + L_2 + 2M$$

En el caso que las inductancias estuvieran en oposición, como se muestra en la figura a continuación, las inductancias mutuas hacen un efecto en sentido contrario.



$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

y $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Tenemos: $\varepsilon = -(L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt}$

El valor efectivo de la inductancia es

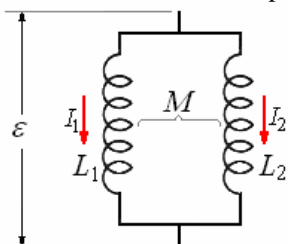
$$L_{ef} = L_1 + L_2 - 2M$$

Si las inductancias están muy alejadas, de tal manera que la inductancia mutua sea despreciable

$$L_{ef} = L_1 + L_2$$

Inductancias en paralelo

Conectemos ahora las inductancias en paralelo



Tenemos que

$$\varepsilon = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad (1)$$

$$\varepsilon = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \quad (2)$$

Tenemos que obtener dos ecuaciones una dependiente de I_1 solamente y otra dependiente de I_2 solamente.

Para eliminar I_2 .

$$(1) \times L_2 \rightarrow \varepsilon L_2 = -L_1 L_2 \frac{dI_1}{dt} - M L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

$$(2) \times M \rightarrow \varepsilon M = -M L_2 \frac{dI_2}{dt} - M^2 \frac{dI_1}{dt}$$

Restando estas dos últimas obtenemos:

$$\varepsilon(L_2 - M) = -(L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_1}{dt} \quad (1) a$$

Para eliminar I_1 .

$$(1) \times M \rightarrow \varepsilon M = -M L_1 \frac{dI_1}{dt} - M^2 \frac{dI_2}{dt}$$

$$(2) \times L_1 \rightarrow \varepsilon L_1 = -L_1 L_2 \frac{dI_2}{dt} - M L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

Restando estas dos últimas obtenemos:

$$\varepsilon(L_1 - M) = -(L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_2}{dt} \quad (2) a$$

Sumando (1)a y (2)a

$$\varepsilon(L_1 L_2 - 2M) = -(L_1 L_2 - M^2) \frac{d}{dt} (I_1 + I_2)$$

Con $I = I_1 + I_2$

$$\varepsilon = -\frac{(L_1 L_2 - M^2)}{(L_1 + L_2 - 2M)} \frac{dI}{dt}$$

La inductancia efectiva es

$$L_{ef} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{(L_1 + L_2 - 2M)}$$

Si están alejados de tal manera que la inductancia mutua sea despreciable

$$L_{ef} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \text{ o } \frac{1}{L_{ef}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Es decir, la inductancia, inversa equivalente es igual a la suma de las inversas de las inductancias componentes en paralelo.

ENERGÍA ALMACENADA POR UNA INDUCTANCIA

Cuando conectamos una bobina a una fuerza electromotriz. ε_0 (por ejemplo una batería) se produce un flujo magnético cambiante en aumento hasta que se estabiliza la corriente. Durante ese intervalo se induce una fuerza electromotriz ε .

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

Para producir esta fuerza electromotriz tiene que realizarse un trabajo, que es desarrollado por la fuente que produce la corriente.

La potencia instantánea que nos proporciona la fuente es

$$\text{Potencia} = \frac{dW}{dt} = \varepsilon I$$

Sustituyendo la magnitud de ε

$$\frac{dW}{dt} = IL \frac{dI}{dt}$$

Como los diferenciales de tiempo son iguales

$$dW = ILdI = LI dI$$

El trabajo realizado en llevar la corriente de $I = 0$ a su valor constante estacionario I

$$W = \int dW = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$

Este trabajo es realizado por la batería y equivale a la energía almacenada en forma de campo magnético por la bobina, esto es

Energía magnética, U_B .

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2$$

Esta energía almacenada se puede recuperar como lo veremos en la sección siguiente, esta ecuación vale para cualquier inductancia y es similar a la de la energía eléctrica almacenada en un condensador que tiene una diferencia de potencial V .

$$U_E = \frac{1}{2} CV^2$$

De igual manera a como hicimos para los condensadores podemos para la inductancia encontrar una expresión de la energía almacenada en función del campo magnético. Consideremos una bobina larga de longitud ℓ , sección A y N vueltas por unidad de longitud ($n = N\ell$), su inductancia es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = \mu_0 n^2 \ell A$$

La energía almacenada

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \ell AI^2$$

Su volumen $Vol = A\ell$

Considerando que la energía almacenada esta distribuida uniformemente, definimos

Densidad de energía u_B :

$$u_B = \frac{U_B}{Vol} = \frac{\frac{1}{2} \mu_0 n^2 \ell AI^2}{A\ell} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2$$

Recordando que para una bobina

$$B = \mu_0 nI$$

Reemplazando

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Esta expresión es aplicable para cualquier caso, similar al caso de los condensadores en que

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Ejemplo 44. ¿Determine la energía almacenada por unidad de longitud y la energía almacenada por unidad de volumen en un solenoide muy largo del radio a con N vueltas por metro y que lleva una corriente I ?

Solución.

Tenemos que la inductancia de un solenoide muy largo de radio a con N vueltas por metro es

$$L = \pi \mu_0 N^2 a^2.$$

La energía es:

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} (\pi \mu_0 N^2 a^2) I^2$$

El volumen por unidad de longitud es πa^2 , así que la densidad de energía magnética es

$$u_B = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 I^2 \text{ (en J/m}^3\text{)}.$$

En términos del campo magnético $B = \mu_0 NI$, esto puede ser escrito:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Ejemplo 45. ¿Cuánta energía se almacena en un solenoide de longitud 10 cm y diámetro 1,2 cm si tiene 200 vueltas y lleva 1,2 A?

Solución.

Con las aproximaciones de un solenoide muy largo, tenemos $L = \mu_0 \pi N^2 a^2$.

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{1}{2} \mu_0 \pi N^2 a^2 I^2 \\ &= (0,5)(4\pi \times 10^{-7})(\pi) \left(\frac{200}{0,10}\right)^2 (0,006)^2 (1,2)^2 \\ &= 4,1 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$

Ejemplo 46. Determinar la energía almacenada por un toroide de n vueltas, longitud media ℓ , sección transversal A , la corriente que circula es I .

Solución.

La inductancia del toroide es

$$L = \frac{\mu_0 n^2 A}{\ell}$$

La energía almacenada es

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 n^2 A}{\ell}\right) I^2$$

Ejemplo 47. Se propone el uso de grandes inductores como dispositivos para almacenar energía. ¿Cuál es la inductancia que necesitamos para que al circular una corriente de 60 A, la energía sea la suficiente para encender un foco de 100 vatios por una hora?

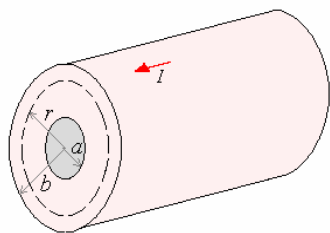
Solución.

$$U = P\Delta t = (100)(3600) = 3,6 \times 10^5 \text{ J}$$

$$U = \frac{1}{2} LI_{ef}^2 \Rightarrow L = \frac{2U}{I^2} = \frac{2(3,6 \times 10^5)}{60^2} = 2 \text{ H}$$

Ejemplo 48. Calcular para todo punto la densidad de energía magnética para un conductor largo, cilíndrico de radio b con una cavidad cilíndrica concéntrica de radio a y lleva una corriente I .

Solución.



Para $r < a$

No hay corriente encerrada, no hay campo magnético por consiguiente no hay energía almacenada.

Para $a < r < b$

Aplicando la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

donde $J = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$

$$B2\pi r = \frac{\mu_0 I}{\pi(b^2 - a^2)} \pi(r^2 - a^2) \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$

La densidad de energía es

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 (r^2 - a^2)^2}{8\pi^2 r^2 (b^2 - a^2)^2}$$

Para $r > b$

Aplicando la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

La densidad de energía es

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

La energía almacenada podemos evaluarla por integración

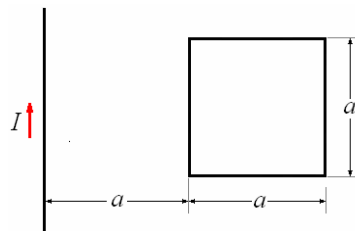
$$U = \int_{Vol} \mu_B dVol$$

$$dVol = 2\pi r \ell dr$$

$$U = \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \right) 2\pi r \ell dr = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \ln r \Big|_a^b = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ejemplo 49. Un alambre recto largo se coloca en el plano de una espira conductora cuadrada de lado a y resistencia R . el alambre es paralelo al lado más cercano del cuadrado y a una distancia a de él. ¿Cuál es la energía media disipada en la espira cuando la corriente en el alambre es $I = I_0 \sin \omega t$?



Solución.

El campo magnético del alambre es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

El flujo en el lazo es

$$\Phi_B = \int_a^{2a} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$$

La fuerza electromotriz en el lazo es

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 2 \frac{dI}{dt}$$

La potencia en la espira es:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 a \ln 2}{2\pi} \right)^2 (I_0 \omega \cos \omega t)^2$$

Tenemos que:

$$(\cos^2 \omega t)_m = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ y } \cos^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$$

$$\text{De aquí } (\cos^2 \omega t)_m = \frac{1}{2}$$

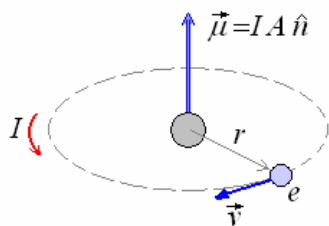
Finalmente:

$$P_m = \frac{\mu_0 a \ln 2 (I_0^2 \omega^2)}{8\pi^2 R} = \frac{1}{2R} \left[\frac{(\mu_0 a \ln 2)(I_0 \omega)}{2\pi} \right]^2$$

MATERIALES MAGNETICOS

Hasta esta parte hemos estudiado los campos magnéticos producidos por distribuciones de corrientes eléctricas específicas. Por ejemplo, podemos calcular el campo magnético en el vacío producido por un alambre con la ayuda de la ley de Biot y Savart, pero si rodeamos el alambre por un medio material, el campo magnético se altera, ya que la materia esté constituida por átomos, y cada átomo consiste de electrones en movimiento, estos circuitos de electrones, cada uno de los cuales confinado en un átomo, son llamadas corrientes atómicas las cuales producen campos magnéticos que se suman al efecto del campo magnético producido por la corriente circulante por el alambre.

EL ÁTOMO COMO UN IMÁN.



Hemos visto anteriormente que el campo magnético en el eje de una espira con corriente I es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Cuando $z = 0$ es el campo en el centro del anillo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \hat{k}$$

Si ponemos en función del área $A = \pi r^2$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IA}{2r(\pi r^2)} \hat{k} = \frac{\mu_0 IA}{2\pi r^3} \hat{k}$$

El campo magnético es proporcional al producto IA y con sentido perpendicular al área A .

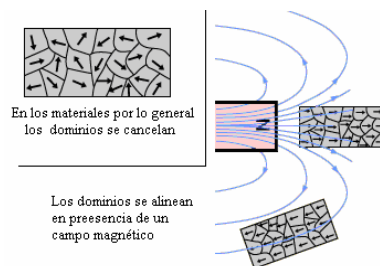
Para pequeños círculos de corriente definimos

momento magnético $\vec{\mu} = IA\hat{n}$, tal que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r^3} \vec{\mu}$$

EL FERROMAGNETISMO Y EL PARAMAGNETISMO.

En algunos materiales, tales como hierro, los átomos se comportan como pequeños lazos de corriente o dipolos magnéticos, actúan como imanes de barra pequeños, y obran recíprocamente de modo que se alinean espontáneamente y dan lugar algunas veces a un material “magnetizado”. Tales sustancias son las **ferromagnéticas**, y se utilizan para hacer los imanes permanentes con los cuales estamos familiarizados. Si un elemento ferromagnético se calienta sobre cierta temperatura crítica (la temperatura de Curie), la agitación termal hace que los pequeños imanes se desordenen, y el material pierde su ferromagnetismo. Cuando los imanes no se alinean espontáneamente, son los **paramagnéticos**. El paramagnetismo, así como el ferromagnetismo, son de gran importancia práctica. Por ejemplo, el campo en un solenoide de base de aire debido a la corriente en las bobinas es típicamente muy débil. Sin embargo, cuando un solenoide se llena con hierro paramagnético, el campo débil debido a la corriente es suficiente para hacer que los dipolos del hierro se alineen, y produzcan un campo magnético muy grande.



Por lo tanto, en dispositivos tales como electroimanes o inductores, el hierro o algún otro material “permeable” se inserta para realzar los efectos magnéticos. Una medida del grado de magnetización obtenido es la **permeabilidad relativa** μ_r .

En cálculos de los efectos magnéticos, por ejemplo, de la inductancia o el campo magnético resultante generalmente es suficiente sustituir μ_0 en nuestras ecuaciones anteriores por $\mu = \mu_r \mu_0$. μ_r , no tiene dimensiones.

Ejemplo 50. Sobre un núcleo de hierro de 1 m de longitud y 2 cm de radio se arrollan dos solenoides. Uno de ellos, que actúa de primario, posee 1000 espiras y por él circula una corriente de 5 A. ¿Qué fuerza electromotriz se inducirá en el secundario, que posee 5000 espiras, cuando la corriente del primario se extingue en 1/10 de segundo? Para el hierro, $\mu' = 50$.

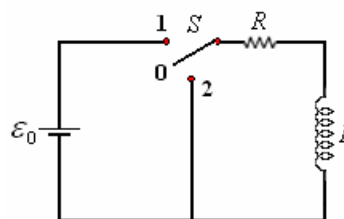
Solución.

Flujo inicial

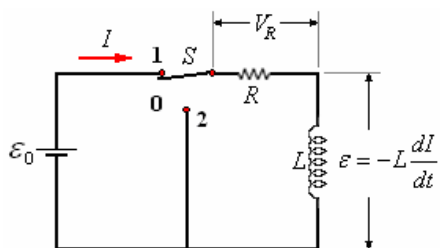
$$\begin{aligned} \Phi &= BA = \mu' \mu_0 \frac{n_1 I}{\ell} A \\ &= (50)(4\pi \times 10^{-7}) \frac{(1000)(5)}{1} (\pi 0,02^2) \\ &= 3,94 \times 10^{-4} \text{ Wb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(\text{secundario})} &= n_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 5000 \frac{3,94 \times 10^{-4}}{1/10} \\ &= 19,7 \text{ V.} \end{aligned}$$

CIRCUITOS RL, LC y RLC CIRCUITO RL.



La figura muestra una inductancia L , una resistencia R que se conectan a una fuerza electromotriz ϵ_0 por medio de una llave S de tres posiciones, la corriente en el circuito inicialmente es cero, en el momento $t = 0$ se pone la llave en posición 1.



Al ir aumentando la corriente existe una fuerza electromotriz inducida ε en oposición, en la resistencia R existe una caída de potencial IR . Aplicando la segunda regla de Kirchoff, tenemos:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon - IR = 0$$

$$\varepsilon_0 - L \frac{dI}{dt} - IR = 0$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I - \frac{\varepsilon_0}{L} = 0$$

Resolviendo la ecuación para las condiciones iniciales, para $t = 0$, y para un tiempo t genérico.

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \left(I - \frac{\varepsilon_0}{R} \right)$$

$$\frac{dI}{\left(I - \frac{\varepsilon_0}{R} \right)} = -\frac{R}{L} dt$$

Integrando

$$\int_0^I \frac{dI}{\left(I - \frac{\varepsilon_0}{R} \right)} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

$$= \ln \left(I - \frac{\varepsilon_0}{R} \right) \Big|_0^I = -\frac{R}{L} t \Big|_0^t$$

$$= \ln \frac{I - \frac{\varepsilon_0}{R}}{-\frac{\varepsilon_0}{R}} = -\frac{R}{L} t$$

De aquí:

$$\frac{I - \frac{\varepsilon_0}{R}}{-\frac{\varepsilon_0}{R}} = e^{-\frac{R}{L} t}$$

Finalmente

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

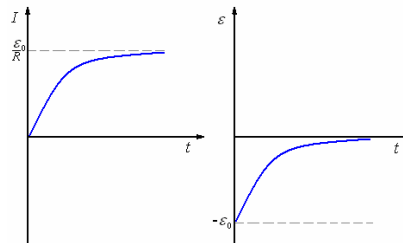
Para $t = 0 \rightarrow I = 0$, para $t = \infty \rightarrow I = \frac{\varepsilon_0}{R}$,

Como $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$

$$\varepsilon = L \frac{d}{dt} \frac{\varepsilon_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = -\varepsilon_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

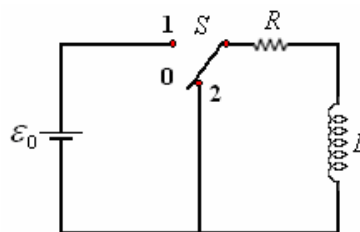
Para $t = 0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$, para $t = \infty \rightarrow \varepsilon = 0$,

La figura siguiente muestra los gráficos $I - t$ y $\varepsilon - t$.



Después de pasado un tiempo en el que consideramos que la corriente ha alcanzado su valor estacionario

$I = \frac{\varepsilon_0}{R}$ pasamos la llave S a la posición 2.



En este circuito la inductancia actúa como fuente de voltaje hasta que se disipa en la resistencia la energía que tenía almacenada.

Aplicando la segunda ley de Kirchoff al circuito.

$$\varepsilon = -IR = 0 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} - IR = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0$$

Las condiciones son para $t = 0 \rightarrow I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$ y

para un t genérico tenemos una I genérica.

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \Rightarrow \ln I \Big|_{I_0}^I = -\frac{R}{L} t \Big|_0^t \Rightarrow$$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$$

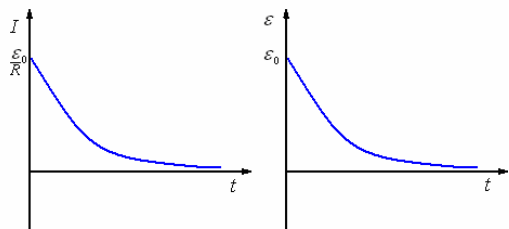
Como $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$

$$\varepsilon = -L \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{R}{L} t} \right) = \varepsilon_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

Para $t = 0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$.

Para $t = \infty \rightarrow \varepsilon = 0$.

La figura siguiente muestra los gráficos $I - t$ y $\varepsilon - t$.



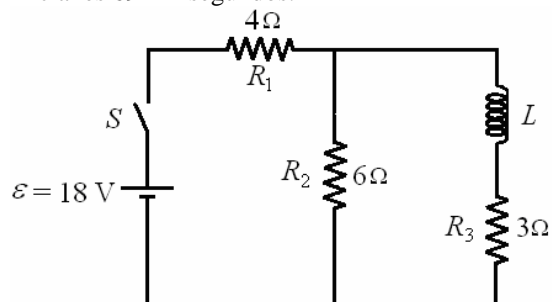
Ejemplo 51. En la figura suponga que el interruptor S se cierra en $t = 0$. Determine:

- a) La corriente que pasa por cada resistencia a $t = 0$.
- b) La corriente que pasa por cada resistencia para un tiempo muy largo.

Luego de un tiempo muy largo, el interruptor S se abre (suponga ahora este instante $t = 0$. Considere la corriente inicial I_0 como la corriente que pasaba por L en la parte b).

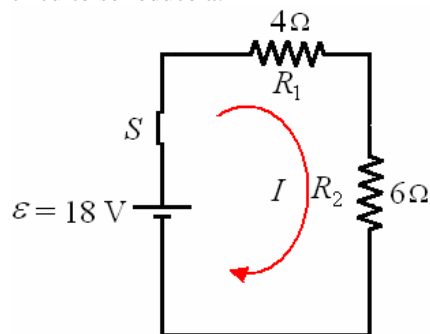
c) Plantee y resuelva la ecuación diferencial, para encontrar la ecuación de la corriente en la inductancia L , como una función del tiempo.

d) Calcule el valor de L , sabiendo que el tiempo que tarda la corriente en disminuir la mitad de su valor inicial es 69 milisegundos.



Solución.

a) Para $t = 0$, La corriente por la inductancia L es cero y la corriente por R_3 también es cero. Luego el circuito se reduce a:

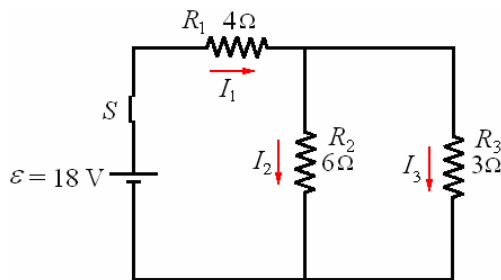


La corriente que pasa R_1 y R_2 es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{18}{4 + 6} = 1,8 \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 = 1,8 \text{ A}, I_3 = 0$$

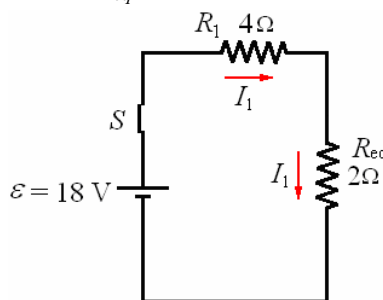
b) Para un tiempo muy largo la corriente en la Inductancia tiene su valor máximo, el circuito es equivalente al siguiente:



R_2 y R_3 están en paralelo, la resistencia equivalente es:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = 2\Omega$$



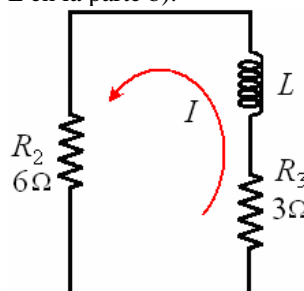
$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_{eq}} = \frac{18}{4 + 2} = 3 \text{ A}$$

También tenemos: $I_2 + I_3 = I_1 = 3$ y

$$I_2 R_2 = I_3 R_3 \Rightarrow \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Luego $I_2 = 1 \text{ A}$ e $I_3 = 2 \text{ A}$

Luego de un tiempo muy largo, el interruptor S se abre (suponga ahora este instante $t = 0$). Considere la corriente inicial I_0 como la corriente que pasaba por L en la parte b).



c) Aplicando la segunda regla de Kirchhoff.

$$IR_2 + L \frac{dI}{dt} + IR_3 = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{(R_2 + R_3)}{L} I = -\frac{9}{L} I$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{9}{L} dt$$

Integrando de $t = 0$ a $t = t$:

$$\ln I|_{I_0}^I = -\frac{9}{L}t|_0^t \Rightarrow \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{9}{L}t \Rightarrow$$

$$I = I_0 e^{-\frac{9}{L}t}$$

d) Para $t = 0,069$ s $I = I_0/2$

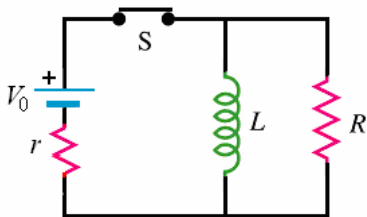
$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\frac{9}{L}(0,069)} \Rightarrow \frac{9(0,069)}{L} = \ln 2$$

$$\Rightarrow L = \frac{9(0,069)}{\ln 2} = \frac{9(0,069)}{0,693} = 0,9 \text{ H}$$

Ejemplo 52. Una bobina tiene un valor de auto-inductancia L , y se conecta en paralelo a una resistencia R . Los dos elementos se conectan en $t = 0$ a una fuente electromotriz “real” que esta formada por una fuente ideal de potencial V_0 constante; una resistencia interna en serie r . Calcule los siguientes acápite, justificando físicamente los valores que encuentre:

- El valor de la corriente en la fuente en $t \rightarrow 0$.
- El valor de la corriente en la fuente a un tiempo muy largo.
- Un esbozo del gráfico de la magnitud de la corriente en la resistencia R en función de t .
- Las ecuaciones de Kirchhoff que permitan encontrar los valores de todas las corrientes del circuito.
- Plantee la ecuación diferencial que permita obtener la corriente instantánea $I(t)$ en la resistencia interna r de la fuente electromotriz. No resuelva la ecuación diferencial.

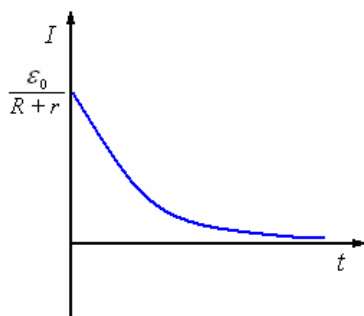
Solución.



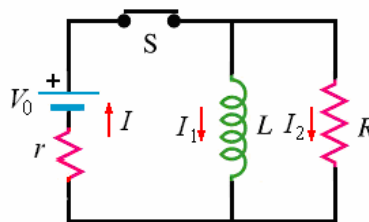
a) Para $t = 0$: $I = \frac{V_0}{R + r}$

b) Para $t = \infty$: $I = \frac{V_0}{r}$

c) Esbozo del gráfico de la magnitud de la corriente en la resistencia R en función de t .



d) Las ecuaciones de Kirchhoff que permitan encontrar los valores de todas las corrientes del circuito.



Por la primera ley de Kirchhoff

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

Por la segunda ley de Kirchhoff

$$-Ir + V_0 - L \frac{dI_1}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$-Ir + V_0 - I_2 R = 0 \quad (3)$$

e) La ecuación diferencial que permite obtener la corriente instantánea $I(t)$ en la resistencia interna r de la fuente electromotriz.

Derivando (3) y multiplicando por L :

$$-rL \frac{dI}{dt} - RL \frac{dI_2}{dt} = 0 \quad (3a)$$

Multiplicando (2) por R :

$$-IRr + V_0 R - RL \frac{dI_1}{dt} = 0 \quad (2a)$$

Sumando (2a) y (3a):

$$-IRr - rL \frac{dI}{dt} + V_0 R - RL \frac{d(I_1 + I_2)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow -IRr - rL \frac{dI}{dt} + V_0 R - RL \frac{dI}{dt} = 0$$

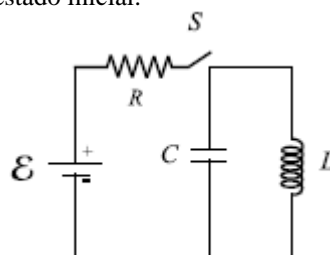
$$\Rightarrow -IRr + V_0 R - (R + r)L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow (R + r)L \frac{dI}{dt} + R(V_0 - Ir) = 0$$

Finalmente:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R(V_0 - Ir)}{L(R + r)} = 0$$

Ejemplo 53. En el circuito mostrado, se conecta el interruptor S y después de un tiempo muy largo se desconecta. Ese instante lo consideramos como el estado inicial.



a) Establezca la ecuación diferencial para hallar la corriente.

b) Resuelva la ecuación, teniendo en cuenta que una función $f(t)$ que cumple que $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 f(t)$, tiene solución $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. Halle A , ω y ϕ .

Solución.

$$a) \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} I + L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0$$

$$b) I = I_0 \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\text{Para } t = 0, I = I_0 = \frac{\varepsilon}{R}, \quad \phi = 0$$

Ejemplo 54. Un solenoide tiene una inductancia de 30 H y una resistencia de 20 Ω . Si se conecta a una batería de 12 V, ¿cuánto tiempo tarda la corriente en alcanzar la tercera parte de su valor de equilibrio?

Solución.

El valor de equilibrio $I = V/R = 12/20 = 0,6$ A se alcanza para $t \rightarrow \infty$.

La tercera parte de este valor se alcanza cuando se cumple:

$$\frac{1}{3} \frac{V}{R} = \frac{V}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

es decir,

$$\frac{2}{3} = e^{-t/\tau}, \quad \ln \frac{2}{3} = -\frac{t}{\tau}$$

y como $\tau = \frac{L}{R}$ resulta:

$$t = \frac{L}{R} \ln \frac{2}{3} = \frac{30}{20} \ln \frac{2}{3} = 0,61 \text{ s.}$$

Ejemplo 55. Un instrumento sensible de detección en un vehículo espacial tiene una resistencia de 180 Ω y se diseña para funcionar con una corriente de 42 mA. Sin embargo, es necesario que la subida de corriente sea no más del 10 por ciento de este valor de funcionamiento dentro de los primeros 50 ms después de aplicar el voltaje. Para alcanzar esto, se conecta una inductancia en serie con el dispositivo.

a) ¿Qué voltaje se requiere?

b) ¿Cuál es la mínima inductancia requerida?

c) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito?

Solución.

$$a) \varepsilon = IR = (42 \times 10^{-3})(180) = 7,56 \text{ V}$$

$$b) I = I_0(1 - e^{-t/\tau}) = 0,1I_0 \Rightarrow e^{-t/\tau} = 0,9$$

$$\Rightarrow \ln\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \ln 0,9 \Rightarrow \tau = 2,46t$$

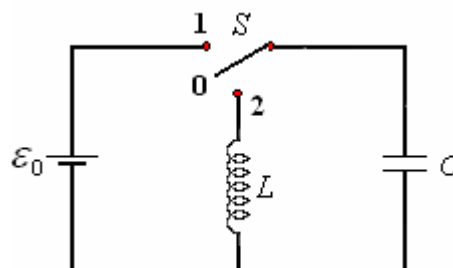
$$\text{Como } \tau = \frac{L}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{R} = 2,46t = 2,46(50 \times 10^{-6}) = 1,23 \times 10^{-4}$$

$$\text{Finalmente } L = 1,23 \times 10^{-4} R = 1,23 \times 10^{-4}(180) = 0,022 \text{ H}$$

$$c) \tau = \frac{L}{R} = \frac{0,022}{180} = 0,122 \text{ ms}$$

CIRCUITO LC.



La figura arriba muestra un circuito LC, que vamos a considerar ideal (sin resistencias propias). Si ponemos la llave S en la posición 1 se carga al condensador hasta tener un voltaje igual a la fuerza electromotriz y almacena una energía igual a

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Donde $Q = V_0 C$

Si pasamos el interruptor a la posición 2, el condensador se descarga a través de la inductancia, a medida que el condensador se descarga la energía pasa a la inductancia, una vez que el condensador queda descargado, la corriente alcanza su valor máximo, como no hay fuente que siga manteniendo esta corriente comienza a decrecer llevando carga al condensador hasta que la corriente es cero y el condensador queda cargado, pero esta vez con polaridad invertida, como el circuito es ideal no hay resistencia, se repite el proceso y así siguen intercambiando energía de tal manera que la energía total del circuito es constante.

$$U_B + U_E = U = \text{constante}$$

$$\text{o } \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = U$$

Derivando respecto al tiempo

$$LI \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\text{Como } I = \frac{dq}{dt} \text{ y } \frac{dI}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

Tenemos

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

La solución de esta ecuación es el caso de movimiento armónico simple.

$$q = A \cos(\omega t + \delta)$$

Donde $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, A es el valor máximo de q y

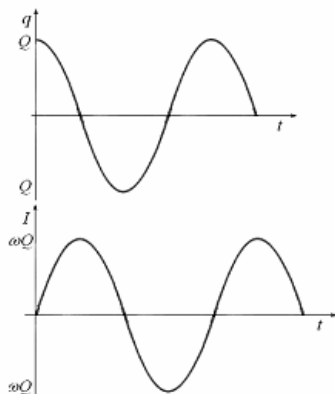
depende de las condiciones iniciales, en nuestro caso $A = Q$ y debe ser cero porque la carga es máxima para $t = 0$, de aquí:

$$q = Q \cos(\omega t + \delta)$$

y la corriente es

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega Q \sin \omega t$$

La figura a continuación muestra los gráficos de $q-t$ e $I-t$.



Podemos ver es un circuito oscilante, con frecuencias.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ periodo}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{LC}$$

Con los valores de Q e I podemos demostrar que la energía total es constante para cualquier tiempo t .

$$U_B + U_E = U$$

$$\frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = U$$

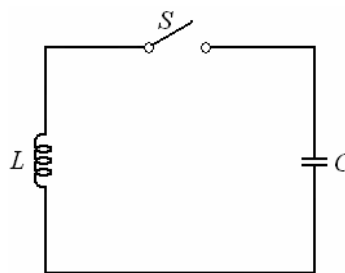
$$\frac{1}{2} L \omega^2 Q^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \cos^2 \omega t = U$$

Como $\omega^2 = \frac{1}{LC}$

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = U$$

Tal como esperábamos.

Ejemplo 56. ¿Cuál es la frecuencia resonante del circuito de la figura si $L = 260 \text{ mH}$ y $C = 8,0 \text{ pF}$?



Solución.

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(2,6 \times 10^{-3})(8 \times 10^{-2})}} = 1,1 \text{ MHz.}$$

Ejemplo 57. Un receptor de radio de amplitud modulada (AM) utiliza un circuito resonante LC cuya frecuencia empareja la frecuencia de las ondas de radio entrantes. ¿Si una inductancia de $16 \mu\text{H}$ se utiliza, qué rango de capacidad variable se requiere para sintonizar sobre la banda AM a partir de 500 a 1700 kHz ?

Solución.

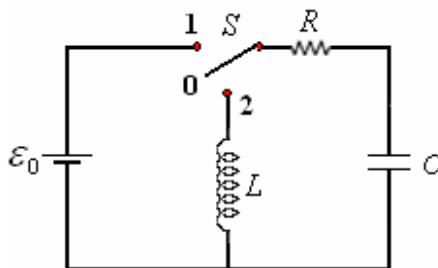
$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{L(2\pi f)^2}$$

Con $500 \text{ kHz} \rightarrow 6,3 \times 10^{-9} \text{ F}$

Con $1700 \text{ kHz} \rightarrow 5,5 \times 10^{-10} \text{ F}$

De tal modo que C varía de $5,5 \times 10^{-10}$ a $6,3 \times 10^{-9} \text{ F}$.

CIRCUITO RLC.



La figura arriba muestra un circuito RLC , en la posición 1 el condensador se carga. Al pasar a la posición 2, la energía almacenada en el condensador se descarga, parte se disipa en la resistencia y parte se almacena en la inductancia, entonces la inductancia repite el proceso, parte se disipa en la resistencia y parte se almacena en el condensador y así periódicamente hasta que la energía que tenía inicialmente el condensador se disipa totalmente en la resistencia.

Aplicando la segunda Ley de Kirchoff

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} + IR = 0$$

Como $I = \frac{dq}{dt}$ y $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

Nos queda la ecuación

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Ecuación que corresponde a la de las oscilaciones amortiguadas, cuya solución es

$$q = e^{-\beta t} \left(B e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + D e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

Donde $\beta = \frac{1}{2} \frac{R}{L}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

B y D dependen de las condiciones iniciales. La forma de la solución depende de los valores de R , L y C , los cuales determinan si $\beta^2 - \omega_0^2$ es menor, igual o mayor que cero siendo para cada caso una oscilación subamortiguada, críticamente amortiguada o sobreamortiguada respectivamente.

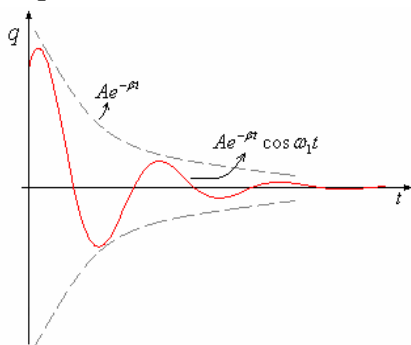
En el caso de oscilación subamortiguada,

$$\beta^2 - \omega_0^2 < 0.$$

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i \omega_1$$

$$q = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \delta) \quad q = A e^{-\beta t} \cos \omega_1 t$$

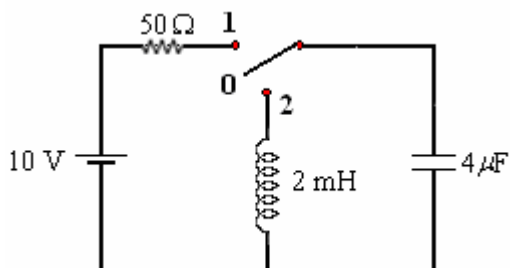
La figura a continuación muestra el gráfico $q - t$ para el caso en que $\delta = 0$.



Ejemplo 58. En la figura tenemos un circuito RC cuando pone la llave en la posición 1 y un circuito LC en la posición 2. Después de tener un tiempo largo en la posición 1 se pasa la llave a la posición 2.

Calcular:

- a) La frecuencia de oscilación del circuito LC .
- b) La energía máxima almacenada por la inductancia.



Solución.

Al estar en posición 1 la corriente circula hasta que se carga el condensador completamente.

La expresión de la carga del condensador vimos que es:

$$q = \varepsilon C \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

Cuando pasa un tiempo largo t

$$Q = \varepsilon C$$

Cuando pasa a la posición 2 tenemos un circuito LC con el condensador con carga inicial

$$Q = (10)(4 \times 10^{-6}) = 40 \times 10^{-6} \text{ C.}$$

a) La frecuencia de oscilación del circuito LC depende solamente de los valores de L y C .

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(2 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-6})}} =$$

$$\sqrt{\frac{10}{8}} \times 10^8 = 1,12 \times 10^4 \text{ rad/s.}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1,78 \times 10^3 \text{ Hz.}$$

b) La energía almacenada en el condensador es

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(40 \times 10^{-6})^2}{4 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^{-4} \text{ J.}$$

Como la energía pasa del condensador a la inductancia y así sucesivamente, la energía máxima almacenada por la inductancia es

$$U_B = 2 \times 10^{-4} \text{ J.}$$

Ejemplo 59. Se ha sugerido que la energía sobrante de una planta de generación se podría almacenar en el campo magnético de un toroide gigante. ¿Si el campo magnético en el toroide fuera de 12 T (muy grande), qué volumen sería necesario para almacenar 10^6 kWh de energía? ¿Si el toroide fuera en forma de anillo, con el radio interno R y el radio externo $2R$, cuán grande tendría que ser R ?

Solución.

$$U = \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) (\text{volumen})$$

$$\approx \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) (2\pi) \left(\frac{3}{2} R \right) \left(\frac{\pi R^2}{4} \right)$$

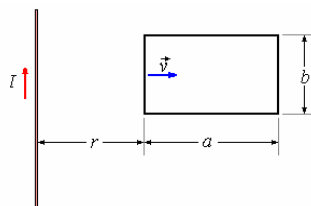
$$U \approx \frac{3}{8} \pi^2 R^2 B^2$$

$$R = \left(\frac{8U}{3\pi^2 B^2} \right)^{1/3} \approx \left[\frac{8(10^6 \times 3,6 \times 10^6)}{3\pi^2 (12)^2} \right]^{1/3}$$

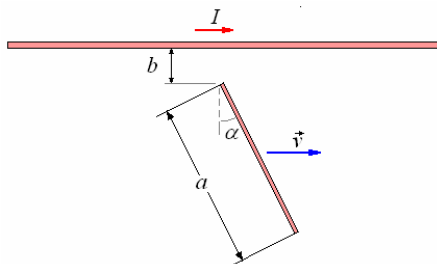
$$= 1890 \text{ m ;demasiado grande!}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

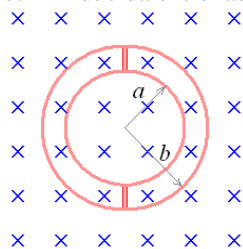
1. Si una espira rectangular conductora de lados a y b se aleja con una velocidad constante \vec{v} de un alambre largo recto con una corriente I . Determinar la corriente inducida en la espira como función del tiempo, para $t = 0$, $r = r_0$.



2. Una barra metálica de longitud a e inclinación α , separada b de un alambre recto y largo con corriente I . La barra se desplaza una velocidad constante paralela al alambre. Calcular la fuerza electromotriz inducida en la barra.



3. Dos espiras circulares metálicas de radios a y b están conectadas por dos barras metálicas, como se muestra en la figura. Si este conjunto rota con velocidad angular ω perpendicular a \vec{B} . ¿Cuál es la fuerza electromotriz inducida entre las espiras?

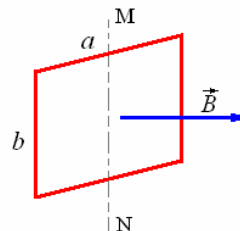


4. Un circuito plano de resistencia R , compuesto de n espiras, con una superficie A , se coloca perpendicular a un campo magnético alterno uniforme tal que $B = B_0 \cos \omega t$.

Encontrar la expresión de la intensidad eficaz de corriente I_{ef} inducida en el circuito.

5. Un conductor rectangular de lados a y b se coloca en un campo magnético \vec{B} uniforme y horizontal,

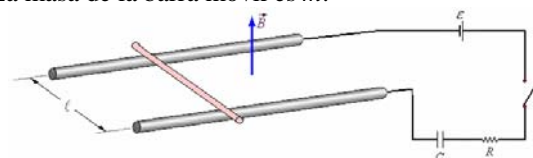
rota alrededor del eje vertical MN perpendicular a la velocidad angular ω . En el instante $t = 0$, es normal al plano del conductor. Calcular en función del tiempo, el flujo del campo magnético a través del cuadro. Deducir la fuerza electromotriz de inducción \mathcal{E} .



6.- Una bobine de 100 vueltas y sección circular esté arrollada compactamente de tal modo que las espiras están en un mismo plano. El radio promedio de la bobine es 3 cm. La bobina rota alrededor de un diámetro a 900 rpm. Cuando el eje de rotación está vertical, la fuerza electromotriz promedio inducida es 0,50 mV. ¿Qué se puede decir del campo magnético terrestre en ese lugar?

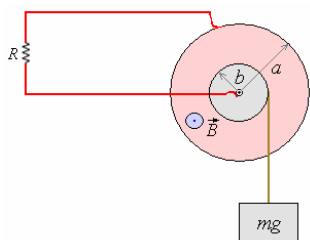
7.- Un disco rota alrededor de su eje con velocidad angular ω . El disco está hecho con metal de conductividad g , y su espesor es t . El disco se coloca entre los polos de un imán que produce un campo magnético uniforme B sobre una pequeña área cuadrada de tamaño a^2 a la distancia promedio r del eje, B es perpendicular al disco. Calcular el torque aproximado sobre el disco.

8. Sea el circuito en serie constituido por una fuerza electromotriz \mathcal{E} , un interruptor S , un condensador de capacidad C , un sistema consistente en una barra que desliza sin fricción sobre dos rieles horizontales y paralelos separados una distancia ℓ en presencia de un campo magnético \vec{B} uniforme y vertical. La resistencia total del circuito es R . La masa de la barra móvil es m .

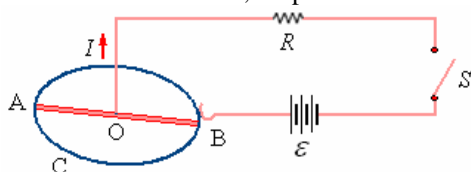


En $t = 0$ se cierra el interruptor, inicialmente la barra está en reposo y el condensador descargado. Escribir las expresiones de la velocidad y la carga del condensador.

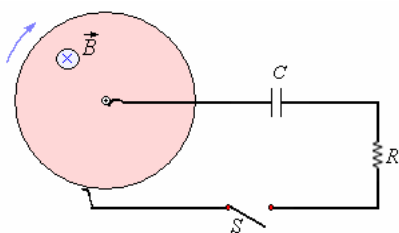
9. Una rueda de Barlow de radio a rota sin fricción en un campo magnético \vec{B} uniforme y normal al plano de la rueda. Sobre su eje horizontal se fija un cilindro de radio b sobre el que se enrolla una cuerda que soporta un peso mg . El conjunto, rueda, eje, cilindro tiene un momento de inercia I_{rB} . El circuito eléctrico de la rueda de Barlow está conectado a una resistencia total R . Estudiar el movimiento a partir del reposo, no tomar en cuenta las corrientes de Foucault.



10. Un conductor rectilíneo AOB puede rotar alrededor de un eje vertical que pasa por O. Está en contacto con un conductor C circular horizontal de radio a . El conjunto está colocado en un campo magnético uniforme \vec{B} , vertical dirigido hacia arriba. Se hace pasar una corriente por medio de una fuerza electromotriz \mathcal{E} . La resistencia de C es despreciable y la del circuito es constante e igual a R . Determinar la ley de la variación de la velocidad después de cerrar la llave S, despreciar la fricción.

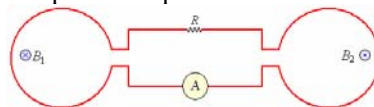


11. Una rueda de Barlow de radio a rota sin fricción en un campo magnético \vec{B} normal el plano de la rueda, el circuito de la rueda está en serie con un condensador C inicialmente descargado, una llave S y la resistencia total del circuito es R . La rueda rota con una velocidad angular ω_0 . Se cierra la llave S, estudiar el movimiento de la rueda a partir de este instante. El momento de inercia de la rueda es I_{rB} . Despreciar las corrientes de Foucault.



12. En el circuito mostrado en la figura tenemos dos espiras circulares iguales de sección $A = 1 \text{ m}^2$ cada una, pero con diferentes campos magnéticos que varían con el tiempo $B_1 = 2t^2 + 4t$ y $B_2 = -5t^2$.

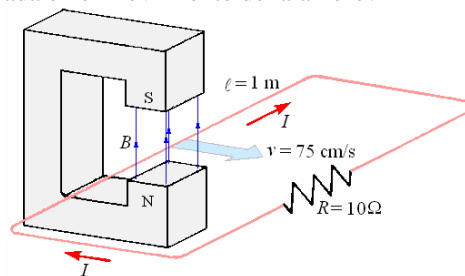
Determine la magnitud y dirección de la corriente que registra el amperímetro para $t = 4 \text{ s}$ si $R = 10 \Omega$.



13. Dos solenoides (S_1) y (S_2) indeformables y coaxiales, de secciones A_1 y A_2 , ($A_2 < A_1$) tienen respectivamente N_1 y N_2 espiras por unidad de longitud, son recorridos por corrientes iguales y del mismo sentido, I_1 e I_2 constantes. El solenoide S_2 penetra una longitud x en el interior de S_1 donde el campo magnético se supone uniforme.

a) Si consideramos que el flujo que atraviesa las espiras de S_2 exterior a S_1 se escribe $\Phi_0 = KI$, donde K es una constante, calcular el flujo total que atraviesa S_2 debido a S_1 .
b) ¿Cuál es la fuerza magnética actuante sobre el solenoide S_2 ? ¿Cuál es la acción que origina esta fuerza?

14. Un alambre de cobre de 1 m de longitud se mueve con velocidad de 75 cm/s perpendicularmente a un campo magnético de 1 T . ¿Qué fuerza electromotriz se induce en la barra? Si sus extremos se conectan a una resistencia de 10Ω . ¿Cuál es la potencia disipada en el movimiento del alambre?



Respuesta.
 $\mathcal{E} = B\ell v = 1 \times 1 \times 0,75 = 0,75 \text{ V}$,
 $P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{0,75^2}{10} = 0,056 \text{ W}$.

15. La hélice de un aeroplano mide $2,0 \text{ m}$ de un extremo al otro extremo, gira a 18000 RPM . ¿Si el aeroplano está volando dirigido al norte debido a un punto donde la componente horizontal del campo magnético de la tierra es $1,2 \times 10^{-5} \text{ T}$, qué voltaje se genera entre las extremos de la hélice?

Respuesta.
 Cada mitad del propulsor barre un área πr^2 en cada revolución, tal que $\mathcal{E} = 2B\pi r^2 f$.
 $\mathcal{E} = 2(1,2 \times 10^{-5})\pi(1,0)^2\left(\frac{18000}{2\pi 60}\right) = 0,0036 \text{ V}$

16. Dos rieles conductores paralelos largos están separados una distancia d . En un extremo están unidos por medio de una resistencia R . Una barra conductora de longitud d se hace resbalar con

velocidad constante v a lo largo de los rieles. La barra y los carriles tienen resistencia insignificante.

- ¿Qué corriente fluye en el circuito?
- ¿Qué potencia se requiere para mover la barra?
- ¿Cuál es la potencia disipada en la resistencia compararla con la potencia requerida para mover la barra?

Respuesta.

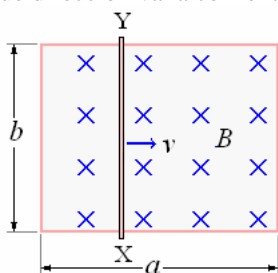
$$\varepsilon = Bdv,$$

$$a) I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bdv}{R}.$$

$$b) P_1 = Fv = (IdB)v = \frac{B^2 d^2 v^2}{R}, \text{ y}$$

$$c) P_2 = I^2 R = \left(\frac{Bdv}{R}\right)^2 = P_1$$

17. Un alambre de resistencia insignificante se dobla formando un rectángulo de lados a y b . Hay un campo magnético uniforme perpendicular al plano del lazo. ¿Una barra de resistencia R se coloca entre los puntos X e Y sobre el lazo y se mueve a la derecha con velocidad constante v . ¿Qué corriente fluye en la barra? ¿En qué dirección va la corriente?



Respuesta.

La corriente fluye hacia abajo en la barra. Ambos lazos contribuyen a la fuerza electromotriz inducida, tal que:

$$I = \frac{2Bbv}{R}$$

18. Un solenoide largo, delgado tiene 750 vueltas por el metro, y su corriente se aumenta con una razón de 60 A/s. ¿Cuál es el campo eléctrico inducido dentro del solenoide en un punto a 5 mm del eje y a mitad de la distancia entre los extremos?

Respuesta.

Considere el flujo a través de un círculo de radio r .

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 N \frac{dI}{dt} = 2\pi rE$$

$$E = \frac{1}{2} \mu_0 r N \frac{dI}{dt} \\ = (0,5)(4\pi \times 10^{-7})(5 \times 10^{-3})(750)(60) \\ = 1,4 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

19. Un tren se desplaza de Norte a Sur con una velocidad uniforme de 120 km/h. Si la componente vertical del campo magnético terrestre es de 0,54

gauss, ¿cuál es la diferencia de potencial inducida que se genera entre los extremos de un eje de las ruedas del tren si su longitud es de 1,25 m?

Respuesta. $22,4 \times 10^{-4} \text{ V}$.

20. Una barra metálica de 1 m de longitud se deja caer desde una altura de 20 m permaneciendo horizontal con sus extremos apuntando en la dirección Este-Oeste. ¿Qué diferencia de potencial se induce entre sus extremos en el instante justo antes de llegar al suelo? (Componente horizontal del campo magnético terrestre: $B_H = 0,17 \text{ gauss}$.)

Respuesta. $3,37 \times 10^{-4} \text{ V}$.

21. Una bobina de 100 espiras es extraída en una décima de segundo de su posición entre los polos de un imán donde existe un flujo de $50 \times 10^{-5} \text{ Wb}$. ¿Cuál es la fuerza electromotriz media inducida en la bobina?

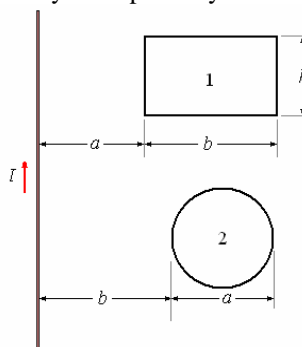
Respuesta. 0,5 V.

22. Una espira cuadrada de área 500 cm^2 se sitúa perpendicularmente a un campo de intensidad 1 T. La espira se voltea hasta que su plano es paralelo al campo en un tiempo de 0,1 s. ¿Cuál es la fuerza electromotriz media inducida?

Respuesta. 0,5 V.

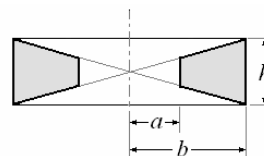
23. Encontrar la autoinductancia de un solenoide de longitud finita h y radio a ($h \gg a$) en términos de las potencias de a/h .

24. ¿Cuál es la inductancia mutua entre un alambre delgado infinito y las espiras 1 y 2.



25. ¿Cuál es la inductancia mutua entre la bobina toroidal con n vueltas densamente enrolladas y una espira cerrada encerrando el toroide

26. ¿Cuál es la autoinductancia del toroide mostrado en la figura?



27. Encontrar la autoinductancia de un toroide de radio b , n vueltas, y sección circular de radio a .

28. Determinar aproximadamente la inductancia mutua entre dos anillos delgados, coaxiales, de radios a y b , si la distancia d entre sus planos es mucho mayor que a y b .

29. Determinar la inductancia mutua de dos cuadrados idénticos de lado a colocados a una distancia ℓ y coincidentes con las caras opuestas de un paralelepípedo. Encontrar la fuerza entre ellos.

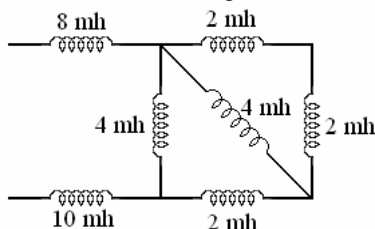
30. Determinar la autoinductancia de un cuadrado de lado b hecho de un alambre de radio a ($a \ll b$).

31. Mostrar que cuando dos bobinas se conectan en serie la autoinductancia de la combinación es

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Explicar para que conexión es + y para cual es -.

32. Encuentre la inductancia equivalente en el circuito que se muestra en la figura.



33. Un alambre largo y recto de radio a lleva una corriente I . ¿Cuál es la densidad de energía magnética en la superficie del alambre?

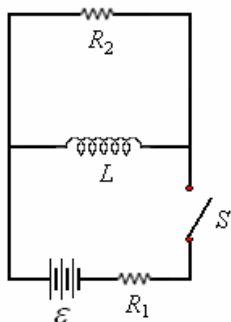
Calcular la energía magnética almacenada por unidad de longitud en el interior del alambre.

34. La máxima energía almacenada por un circuito LC es 10^{-4} Joules y la capacidad es $4 \mu f$. Si la corriente máxima que circula por el circuito es 2A, calcular:

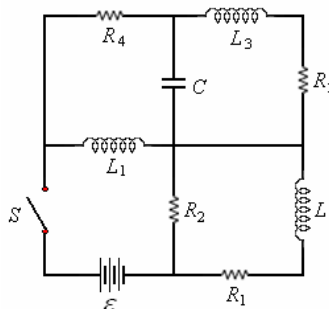
- a) La inductancia del circuito.
- b) La frecuencia de oscilación.

35. Sea el circuito da la figura y supongan que el interruptor S está cerrado en $t = 0$,

- a) Describir la trayectoria seguida por la corriente inmediatamente después de que se cierra el interruptor.
- b) ¿Cuál es la trayectoria de la corriente después de mucho tiempo?



36. Para el Circuito de la figura. Encontrar;
- a) El valor inicial de la corriente a través de la batería.
 - b) La corriente final por R_2 .
 - c) La corriente final por R_1 .
 - d) La corriente final por la batería.



37. A una batería de 2,73 V se conecta una resistencia de $1,73 \Omega$ y dos autoinducciones en serie de 10 mh cada una. Calcúlese la inductancia mutua entre ellas, sabiendo que, a los 0,01 s de conectar, la corriente que circula es de 1 A.

Respuesta. $M = 1,35$ mH.

38. Una bobina tiene una inductancia de 10 h y una resistencia de 40Ω . Si se aplica una fuerza electromotriz de 200 V, ¿Cuál es la energía almacenada en el campo magnético una vez que la corriente alcanza su valor máximo?

Respuesta. 126 J...

39. Calcúlese la autoinducción de una bobina de n espiras, sección A y radio medio R .

Respuesta.

$$L = \frac{\mu_0 A n^2}{2\pi R}$$

40. Determinése la energía por unidad de volumen almacenada en la Inductancia formada por un solenoide toroidal de longitud ℓ y sección A que el paso de una corriente crea en su interior un campo magnético B .

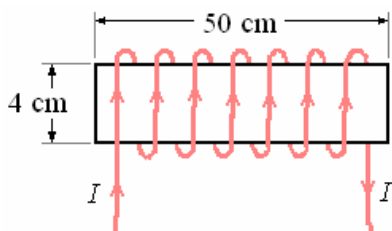
Respuesta.

$$\frac{W}{A\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

41. Por un solenoide recto de 500 espiras, longitud 1 m y sección 10 cm^2 circula una corriente de 10 A. Sobre este solenoide se enrolla una pequeña bobina de 50 espiras colocadas en su centro. ¿Cuál es la inductancia mutua?

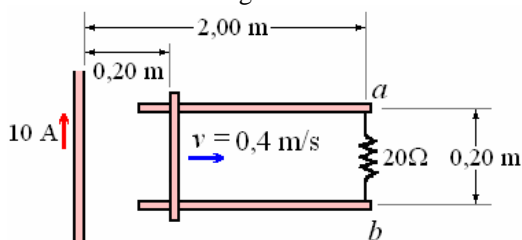
Respuesta. $3,14 \times 10^{-4}$ h.

42. Un solenoide con 400 vueltas, 4 cm de diámetro y 50 cm de largo. Lleva una corriente en el sentido mostrado en la figura. La corriente produce un campo magnético, de magnitud 1,5 mT, en el centro del solenoide.



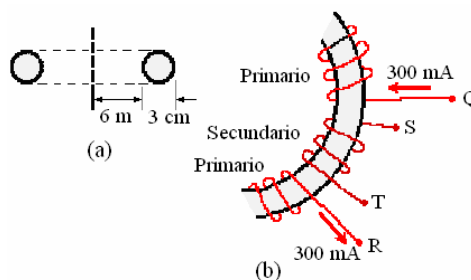
- a) ¿Cuál es la corriente?
 A) 1,1 A B) 1,3 A C) 1,5 A D) 1,7 A E) 1,9 A
 b) ¿Cuál es el flujo magnético en el solenoide?
 A) 1×10^6 Wb B) 2×10^6 Wb C) 4×10^6 Wb D) 6×10^6 Wb E) 8×10^6 Wb

43. Un alambre vertical largo lleva una corriente constante de 10 A. Un par de carriles horizontales y separados 0,20 m. Una resistencia de 20 ohmios conecta los puntos *a* y *b*, en el extremo de los carriles. Una barra está en contacto con los carriles, y es movida por una fuerza externa con una velocidad constante de 0,40 m/s, como se muestra. La barra y los carriles tienen resistencia insignificante. En un instante t_1 dado, la barra está a 0,20 m del alambre, como se muestra en la figura.



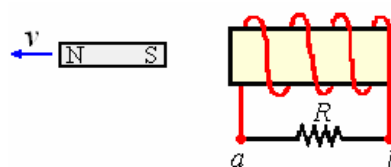
- a) En el instante t_1 , la corriente inducida y su dirección a través de la resistencia es cercanamente igual a:
 A) $0,02 \mu A$, de *a* a *b*
 B) $0,02 \mu A$, de *b* a *a*
 C) $0,04 \mu A$, de *a* a *b*
 D) $0,04 \mu A$, de *b* a *a*
 E) $0,02 \mu A$, de *b* a *a*
 b) En el instante t_2 , inmediato posterior, la diferencia potencial a través de la resistencia es $0,30 \mu V$. El intervalo del tiempo, $\Delta t = t_2 - t_1$ es cercanamente igual a:
 A) 0,5 s B) 1,0 s C) 1,5 s D) 2,0 s E) 2,5 s

44. La figura (a) muestra la sección transversal de un toroide. Una bobina primaria tiene 400 vueltas, que se arrollan totalmente alrededor de la forma toroidal. Los terminales de la bobina primaria son Q y R. Una bobina circular secundaria de 3 vueltas se arrolla firmemente alrededor de la forma toroidal, con los terminales S y T. Las bobinas primarias y secundarias se muestran en la figura (b). Se provee una corriente constante de 300 mA a la bobina primaria por medio de una batería que no se muestra. Un interruptor (no mostrado) se abre, que desconecta los terminales Q y R de la batería. La corriente en la bobina primaria baja a cero en un intervalo del tiempo de 0,20 S.

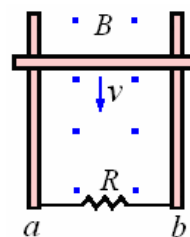


- a) La fuerza electromotriz media en la bobina primaria, en el intervalo de los 0.20 s, es cercanamente igual a:
 A) cero B) $0,25 \mu V$ C) $0,45 \mu V$ D) $0,65 \mu V$ E) $0,85 \mu V$
 b) La fuerza electromotriz media en la bobina secundaria, en el intervalo de los 0.20 s, es cercanamente igual a:
 A) $3 \mu V$ B) $4 \mu V$ C) $5 \mu V$ D) $6 \mu V$ E) $7 \mu V$
 c) Las polaridades de la fuerza electromotriz inducidas en las bobinas primaria y secundaria son:
 A) Q y R están al mismo potencial; S es positivo y T es negativo
 B) Q es positivo y R es negativo; S es positivo y T es negativo
 C) Q es positivo y R es negativo; T es positivo y S es negativo
 D) R es positivo y Q es negativo; S es positivo y T es negativo
 E) R es positivo y Q es negativo; T es positivo y S es negativo

45. En la figura, un imán de barra se aleja del solenoide. La corriente inducida a través de la resistencia R es:

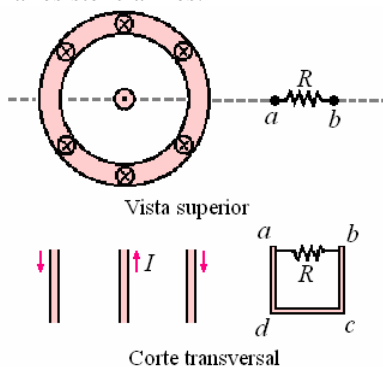


- A) cero
 B) de *a* a *b*
 C) de *b* a *a*
 46. En la figura, una barra está en contacto con un par de carriles paralelos. Un campo magnético constante, uniforme, perpendicular al plano de los carriles, está presente. La barra está en el movimiento con la velocidad *v*. La corriente inducida a través de la resistencia R es:



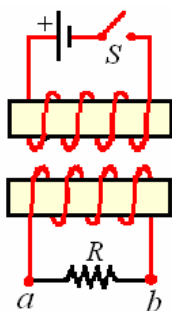
- A) Cero B) de *a* a *b* C) de *b* a *a*

47. En la figura se muestra, un alambre recto largo que lleva una corriente constante I , y un cilindro coaxial largo por el que vuelve la misma corriente. Un lazo rectangular $abcd$ está fuera del cilindro. Se puede observar una vista superior, y una vista de la sección transversal, a través de la línea punteada. La corriente I está aumentando. La corriente inducida a través de la resistencia R es:



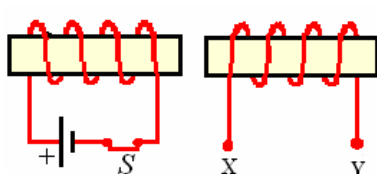
- A) Cero
- B) de a a b
- C) de b a a

48. En la figura, dos solenoides están frente a frente. El interruptor S , inicialmente abierto, es cerrado. La corriente inducida a través de la resistencia R es:



- A) cero
- B) de a a b
- C) de b a a

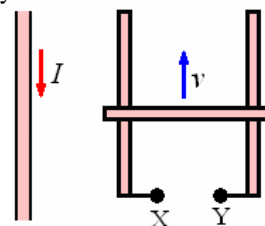
49. En la figura los dos solenoides están alineados. El interruptor S , cerrado inicialmente, se abre. La polaridad de los terminales inducidos de la fuerza electromotriz en X e Y es:



- A) X e Y están al mismo potencial.
- B) X es positivo e Y es negativo
- C) Y es positivo y X es negativo

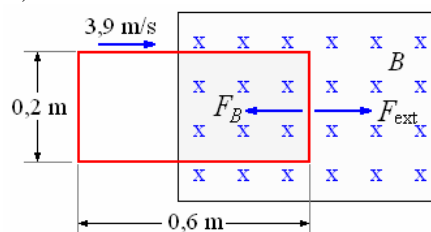
50. En la figura, un alambre recto lleva una corriente constante I . Una barra está en contacto con un par de carriles y está en el movimiento con velocidad v . La

polaridad de la fuerza electromotriz inducida entre los terminales X y Y es:



- A) X e Y están al mismo potencial.
- B) X es positivo e Y es negativo
- C) Y es positivo y X es negativo

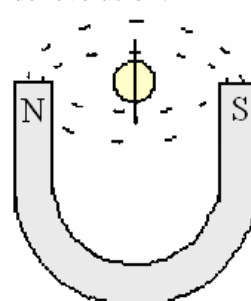
51. En la figura, hay un campo magnético uniforme de la magnitud $B = 1,5$ T y dirigido hacia el plano del papel en la región mostrada. Fuera de esta región el campo magnético es cero. Un lazo rectangular de $0,20$ m por $0,60$ m y de resistencia 3Ω está siendo jalado hacia el campo magnético por una fuerza externa, como se muestra.



- a) ¿Cuál es la dirección (horario u antihorario) de la corriente inducida en el lazo?
- b) Calcular la magnitud de la fuerza externa F_{ext} requerida para mover el lazo con un de velocidad constante de $v = 3,9$ m/s. La masa del lazo es $0,008$ kilogramos.

Respuesta. a) antihorario, b) 1×10^{-1} N

52. En la figura, un lazo circular del área $0,050$ m² con 50 vueltas y resistencia $7,0 \Omega$ se pone entre los polos de un imán de herradura en forma de "U" grande, donde el campo magnético es $0,11$ T. El lazo rota sobre un diámetro. ¿Cuánta carga atraviesa el alambre en $1/4$ de revolución?

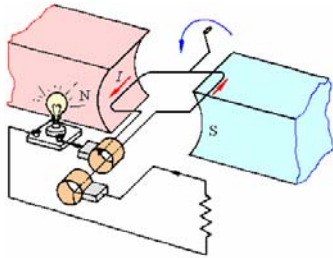


Respuesta. $0,039$ C

CAPÍTULO 5. Corriente alterna

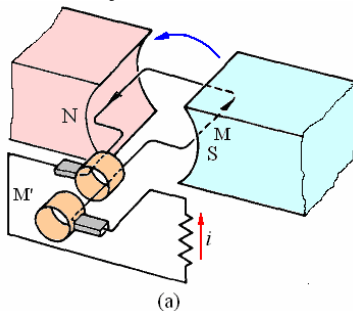
GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA.

Un generador eléctrico transforma energía mecánica en energía eléctrica. Se ha visto que se induce una fem en un conductor cuando éste experimenta un cambio en el flujo que lo eslabona. Cuando el conductor forma un circuito cerrado, puede detectarse una corriente inducida. En un generador, una bobina de alambre gira en un campo magnético, y la corriente inducida se trasmite por alambres a gran distancia de su origen.



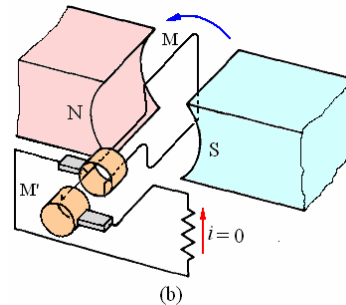
En la figura anterior se muestra la construcción de un generador simple. Básicamente hay tres componentes: un inductor, una armadura y un conmutador de anillos colectores de deslizamiento con escobillas. El inductor puede ser un imán permanente o un electroimán. La armadura del generador de la figura consiste en una sola espira de alambre (inducido) suspendida entre los polos del inductor. Un par de anillos colectores de deslizamiento se conectan a cada de la espira y giran junto con ella en el campo magnético. La corriente inducida se obtiene del sistema mediante escobillas de grafito, las cuales están montadas sobre cada anillo de deslizamiento. Se suministra energía mecánica al generador al girar la armadura en el campo magnético y se genera energía eléctrica en corriente inducida.

Producción de una corriente alterna. A fin de comprender la operación de un generador de corriente alterna, es conveniente seguir los pasos de la espira a través de una rotación completa, y observación de la corriente en el proceso de rotación. Supóngase que se hace girar la espira mecánicamente en sentido contrario a las manecillas del reloj.

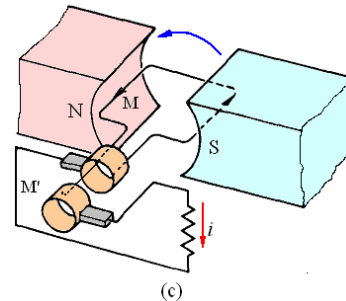


En la figura (a) la espira está en posición horizontal, con el lado M encarando al polo sur

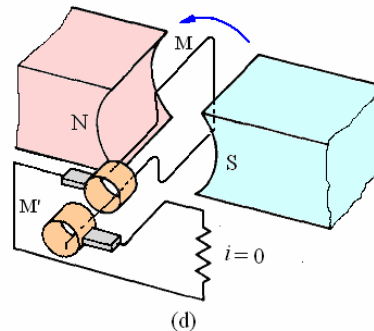
del imán en este punto, se entrega una corriente máxima en la dirección mostrada.



En la figura (b) la espira está en posición vertical con el lado M en la parte superior, en el punto no se cortan las líneas de flujo y la corriente inducida decae a 0.



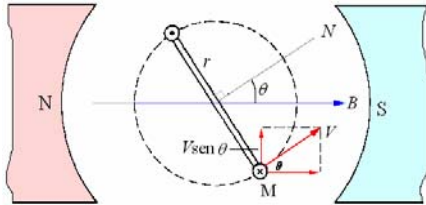
Cuando la espira se encuentra otra vez horizontal como en la figura (c), el lado M está ahora frente al polo norte del imán. Por consiguiente, la corriente suministrada al anillo colector M' ha cambiado de dirección. Una corriente fluye a través de la resistencia externa en una dirección opuesta a la que se experimentó anteriormente.



En la figura (d) la espira está en posición vertical nuevamente, pero ahora el lado M está en la parte inferior; no se cortan líneas del flujo, y otra vez la corriente inducida decae a cero. A continuación la espira regresa a su posición horizontal, como se muestra en la figura (a), y el ciclo se vuelve a repetir. Así pues, la corriente suministrada por tal generador alterna en forma periódica, y la dirección cambia dos veces en cada rotación. La fem generada en cada segmento de la espira en rotación debe cumplir la relación

$\varepsilon = B\ell v \sin\theta$, donde v es la velocidad de un segmento de alambre en movimiento de longitud ℓ en un campo magnético B . La dirección de la velocidad v con respecto al campo B en cualquier instante se denota por medio del ángulo θ .

Cálculo de la fem inducida. Considérese el segmento M de la espira giratoria cuando alcanza la posición indicada en la figura a continuación.



La fem instantánea en esa posición queda expresada por la ecuación $\varepsilon = B\ell v \sin\theta$. Si la espira gira en un círculo de radio r , la velocidad instantánea v puede encontrarse de $v = \omega r$, donde ω es la velocidad angular en radianes por segundo. La fuerza electromotriz instantánea se encuentra al sustituir la velocidad instantánea en la ecuación $\varepsilon = B\ell v \sin\theta$

$$\varepsilon = B\ell\omega r \sin\theta$$

En el segmento de alambre opuesto a M se induce una fuerza electromotriz idéntica y no se genera una fuerza electromotriz neta en los otros segmentos. De aquí que la fem instantánea total sea el doble del valor expresado por la ecuación $\varepsilon = B\ell\omega r \sin\theta$, o

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = 2B\ell\omega r \sin\theta$$

Pero el área A de la espira es

$$A = \ell \times 2r$$

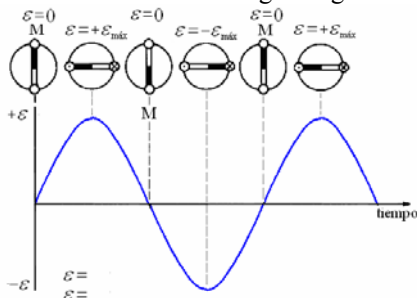
Y la ecuación $\varepsilon_{m\acute{a}x} = 2B\ell\omega r \sin\theta$ puede escribirse como:

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = nBA\omega \sin\theta, \text{ donde } n \text{ es el número de vueltas de alambre.}$$

Esta ecuación expresa un principio muy importante que está relacionado con el estudio de las corrientes alternas:

Si la armadura gira con una velocidad angular constante en un campo magnético constante, la magnitud de la fuerza electromotriz inducida varía sinusoidalmente en función del tiempo.

Este hecho se muestra en la figura siguiente.



La fuerza electromotriz varía desde un valor máximo cuando $\theta = 90^\circ$ a un valor de cero cuando $\theta = 0^\circ$. La fuerza electromotriz instantánea máxima es, por consiguiente,

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = nBA\omega, \text{ ya que } \sin 90^\circ = 1. \text{ Si se}$$

establece la ecuación $\varepsilon_{m\acute{a}x} = nBA\omega \sin\theta$ en términos de la fuerza electromotriz máxima, entonces

$$\varepsilon = \varepsilon_{m\acute{a}x} \sin\theta$$

Para ver la variación explícita de la fem generada en función del tiempo necesario recordar que $\theta = \omega t = 2\pi f t$

Donde f conocida como frecuencia es el número de revoluciones por segundo que realiza la espira.

La unidad en el SI para la frecuencia es el hertz (Hz), que se define como 1 ciclo por segundo.

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s}$$

Por lo tanto, una corriente alterna de 60 ciclos por segundo tiene una frecuencia de 60 Hz.

De este modo la ecuación $\varepsilon = \varepsilon_{m\acute{a}x} \sin\theta$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \varepsilon_{m\acute{a}x} \sin\omega t = \varepsilon_{m\acute{a}x} \sin 2\pi f t$$

La unidad en el SI para la frecuencia es el hertz (Hz), que se define como 1 ciclo por segundo.

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s}$$

Por lo tanto, una corriente alterna de 60 ciclos por segundo tiene una frecuencia de 60 Hz.

Puesto que la corriente inducida es proporcional a la fuerza electromotriz inducida, de acuerdo con la ley de Ohm la corriente inducida también variaría sinusoidalmente según la expresión

$$i = i_{m\acute{a}x} \sin 2\pi f t$$

La corriente máxima ocurre cuando la fuerza electromotriz inducida es máxima. La variación sinusoidal es análoga a la representada gráficamente en la figura anterior.

Ejemplo 1. La armadura de un generador simple de ca consta de 100 vueltas de alambre, cada una de ellas con un área de $0,2 \text{ m}^2$. La armadura gira con una frecuencia de 60 rev/s en un campo magnético constante de densidad de flujo 10^{-3} T . ¿Cuál es la fem máxima que se genera?

Solución.

Primero es necesario calcular la velocidad angular de la bobina.

$$\omega = 2\pi(60) = 377 \text{ rad/s.}$$

Si este valor se sustituye y también los otros parámetros conocidos en la ecuación

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = nBA\omega, \text{ se obtiene}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m\acute{a}x} &= nBA\omega = (100)(10^{-3})(0,2)(377) \\ &= 7,54 \text{ V} \end{aligned}$$

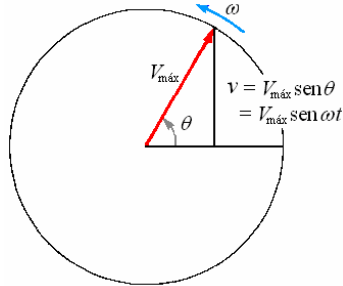
ANGULO DE FASE. FASORES.

Una manera conveniente de representar una cantidad que varía sinusoidalmente (es decir, $\text{sen } \theta$ como varía con θ) con el tiempo está en términos de un vector que rota llamado **fasor**.

En el caso de un voltaje de corriente alterna, la longitud del fasor $\vec{V}_{m\acute{a}x}$ corresponde a $V_{m\acute{a}x}$, y lo imaginamos que rota f veces por segundo en sentido antihorario.

La componente vertical del fasor en todo momento corresponde al voltaje instantáneo v desde que la componente vertical de $\vec{V}_{m\acute{a}x}$, es $v = V_{m\acute{a}x} \text{sen } \theta = V_{m\acute{a}x} \text{sen } 2\pi f t = V_{m\acute{a}x} \text{sen } \omega t$

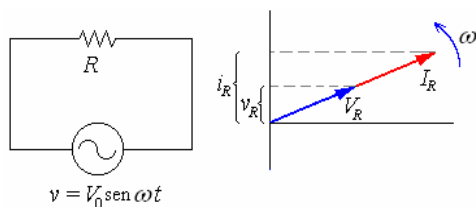
El resultado es mostrado en la figura siguiente.



En una manera similar un fasor $I_{m\acute{a}x}$ se puede utilizar para representar una corriente alterna I . Los fasores son útiles porque el voltaje y la corriente en una corriente alterna en un circuito de corriente alterna o en un elemento del circuito tiene siempre la misma frecuencia f pero los picos en V e I pueden ocurrir en diferentes tiempos.

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA CON RESISTENCIA, INDUCTANCIA Y CONDENSADOR.

Una resistencia conectada a un generador de corriente alterna



La ecuación de este circuito simple es:

(Intensidad por resistencia igual a la fem)

$$i_R R = V_0 \text{sen } \omega t$$

$$\Rightarrow i_R = \frac{V_0}{R} \text{sen } \omega t$$

La diferencia de potencial en la resistencia es

$$v_R = V_0 \text{sen } \omega t$$

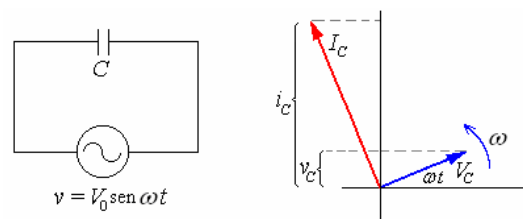
En una resistencia, la **intensidad** i_R y la diferencia de potencial v_R **están en fase**. La relación entre sus amplitudes es

$$I_R = \frac{V_R}{R}$$

Con $V_R = V_0$, la amplitud de la fuerza electromotriz alterna

Como vemos en la representación vectorial de la figura, al cabo de un cierto tiempo t , los vectores rotatorios que representan a la intensidad en la resistencia y a la diferencia de potencial entre sus extremos, ha girado un ángulo ωt . Sus proyecciones sobre el eje vertical son, los valores en el instante t de la intensidad que circula por la resistencia y de la diferencia de potencial entre sus extremos.

Un condensador conectado a un generador de corriente alterna



$$v_C = V_0 \text{sen } \omega t$$

En un condensador la carga q , la capacidad C y diferencia de potencial v entre sus placas están relacionadas entre sí

$$q = Cv$$

Si se conecta las placas del condensador a un generador de corriente alterna

$$q = CV_0 \sin \omega t$$

La intensidad se obtiene derivando la carga respecto del tiempo, $i = \frac{dq}{dt}$

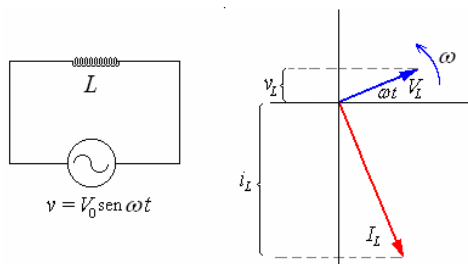
$$i_C = C\omega V_0 \cos \omega t = C\omega V_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Para un condensador, la **intensidad i_C está adelantada 90°** respecto a la diferencia de potencial v_C . La relación ente sus amplitudes es

$$I_C = C\omega V_C$$

Con $V_C = V_0$, la amplitud de la fuerza electromotriz alterna

Una inductancia conectada a un generador de corriente alterna



$$v_L = V_0 \sin \omega t$$

Ya hemos estudiado la autoinducción y las corrientes autoinducidas que se producen en una bobina cuando circula por ella una corriente i variable con el tiempo.

La ecuación del circuito es (suma de fuerzas electromotrices es igual a la intensidad por la resistencia), como la resistencia es nula:

$$-L \frac{di}{dt} + V_0 \sin \omega t = 0$$

Integrando esta ecuación obtenemos i_L en función del tiempo

$$i_L = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

La **intensidad i_L** de la en la bobina **está retrasada 90°** respecto de la diferencia de potencial entre sus extremos v_L . La relación entre sus amplitudes es

$$I_L = \frac{V_L}{\omega L}$$

Con $V_L = V_0$, la amplitud de la fuerza electromotriz alterna

REACTANCIA.

La reactancia inductiva de una inductancia es una medida de su eficacia en resistir el flujo de una corriente alterna en virtud de la de la fuerza electromotriz autoinducida por el cambio de la corriente en ella. A diferencia con el caso de una resistencia, no hay energía disipada en una inductancia pura. La reactancia inductiva X_L del cualquier inductor cuya inductancia es L (en henrios) cuando la frecuencia de la corriente es f (en hertzios) la reactancia inductiva es

$$X_L = 2\pi f L = \omega L .$$

Cuando una diferencia potencial V de frecuencia f se aplica a través de una inductancia cuya reactancia es X_L con la frecuencia f , fluirá la

$$\text{corriente } I = \frac{V}{X_L} .$$

La unidad de X_L es el ohmio.

La reactancia capacitiva de un condensador es una medida de su eficacia en resistir el flujo de una corriente alterna en virtud de la diferencia potencial inversa a través del debido a la acumulación de carga en sus placas. No hay pérdida de energía asociada a un condensador en un circuito de corriente alterna. La reactancia capacitiva X_C de un condensador cuya capacitancia es C (en faradios) cuando la frecuencia de la corriente es f (en hertzios) es

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\omega C} .$$

Cuando una diferencia potencial V de frecuencia f se aplica a través de un condensador cuya reactancia es X_C con la frecuencia f , fluirá la

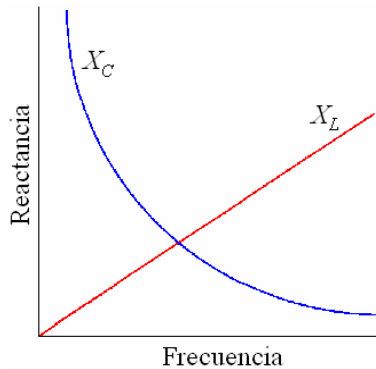
corriente $I = \frac{V}{X_C}$. La unidad de X_C es el ohmio.

Ejemplo 2. a) Muestre gráficamente cómo X_C y X_L varían con la frecuencia.

- b) ¿Qué sucede a X_C y X_L en el límite $f=0$?
 c) ¿Cuál es el significado físico de la respuesta a (b)?

Solución.

a)



- b) Cuando $f=0$, $X_L = 2\pi fL = 0$ y $X_C = 1/2\pi fC = \infty$.

- c) Una corriente con $f=0$ es una corriente continua.

Cuando una corriente constante fluye en una inductancia, no hay una fuerza electromotriz inducida para obstaculizar la corriente, y la reactancia inductiva es por consiguiente cero. Una corriente directa no puede pasar a través de un condensador porque sus placas se aíslan una de la otra, así que la reactancia capacitiva es infinita e $I = V/X_C = 0$ cuando $f=0$.

Una corriente alterna no pasa realmente a través de un condensador sino son oleadas hacia adelante y hacia atrás en el circuito en ambos lados de él.

Ejemplo 3. Un condensador de $10 \mu F$ se conecta a una fuerza electromotriz de 15 V, 5 kHz.

Encontrar

- a) La reactancia del condensador.
 b) El flujo de corriente.

Solución.

$$a) X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(5 \times 10^3)(10 \times 10^{-6})} = 3,18 \Omega$$

$$b) I = \frac{V}{X_C} = \frac{15}{3,18} = 4,72 \text{ A}$$

Ejemplo 4. La reactancia de una inductancia es 80Ω a 500 Hz. Encontrar la inductancia.

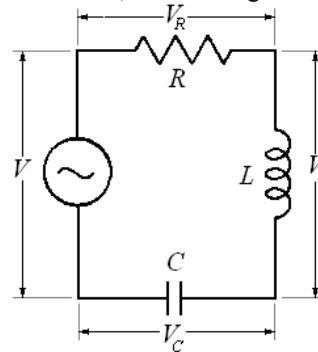
Solución.

Como $X_L = \omega L = 2\pi fL$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{80}{2\pi(500)} = 0,0255 \text{ H} = 25,5 \text{ mH}$$

CIRCUITO RLC EN SERIE

Ahora consideramos un circuito de corriente alterna que contenga resistencia, inductancia, y capacitancia en serie, como en figura siguiente.



La corriente es igual para todos los elementos:

$$i = i \text{sen} \omega t$$

$$i = I_R \text{sen} \omega t = I_L \text{sen} \omega t = I_C \text{sen} \omega t$$

En todo momento el voltaje aplicado v es igual a la suma de las caídas de voltaje v_R , v_L , y v_C :

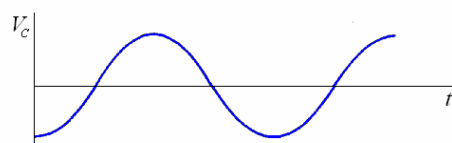
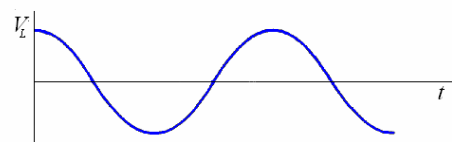
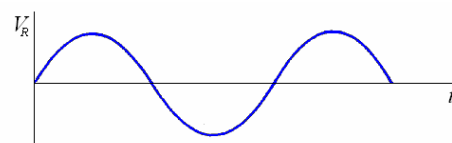
$$v = v_R + v_L + v_C$$

$$v = V_R \text{sen} \omega t + V_L \text{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$+ V_C \text{sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Los voltajes instantáneos a través de los elementos de circuito son

$$V_R = IR \quad V_L = IX_L \quad V_C = IX_C$$



Porque v_R , v_L , y v_C están fuera de fase el uno con el otro, esta fórmula es solamente para los voltajes instantáneos, no para los voltajes efectivos.

Puesto que deseamos trabajar con voltajes y corrientes efectivos, no los instantáneos, debemos considerar las diferencias de fase.

Para hacer esto, podemos utilizar los fasores para representar las diferentes cantidades efectivas.

Esto se hace en las figuras a continuación para los voltajes. Para encontrar la magnitud V de la suma \vec{V} de los diferentes voltajes efectivos, procedemos de esta manera:

1. Encuentre la diferencia $\vec{V}_L - \vec{V}_C$. Si

$V_L > V_C$, $\vec{V}_L - \vec{V}_C$ será positivo y señalará

hacia arriba, si $V_L < V_C$, $\vec{V}_L - \vec{V}_C$ será negativo y señalará hacia abajo.

2. Sume $\vec{V}_L - \vec{V}_C$ a \vec{V}_R para obtener \vec{V} .

Como $\vec{V}_L - \vec{V}_C$ es perpendicular a \vec{V}_R , utilice el teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud V :

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

Porque $V_R = IR$ $V_L = IX_L$ $V_C = IX_C$

Podemos escribir la expresión para V en la forma

$$V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Impedancia de un circuito en serie

La cantidad $Z = \frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

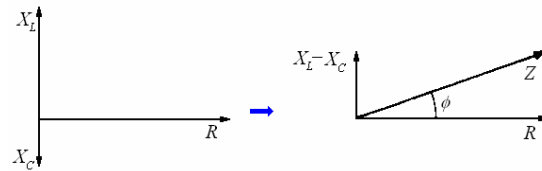
Es conocida como la impedancia del circuito y corresponde a la resistencia de la corriente continua. La unidad de Z es el ohm. Cuando un voltaje de corriente alterna cuya frecuencia es f se aplica a un circuito cuya impedancia es Z a tal frecuencia, el resultado es la corriente

$$I = \frac{V}{Z}$$

La figura siguiente muestra los diagramas de fasores de la impedancia. El ángulo de fase puede ser calculado por cualquiera de las dos fórmulas siguientes.

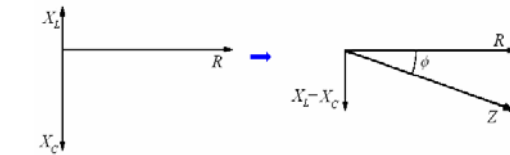
$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{o} \quad \cos \phi = \frac{R}{Z}$$

Cuando $X_L > X_C$:



$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Cuando $X_L < X_C$:



$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Ejemplo 5. Una resistencia, un condensador y una inductancia están conectados en serie a una fuente de corriente alterna. Los voltajes efectivos a través de los componentes del circuito son:

$V_R = 5V$, $V_C = 10V$, y $V_L = 7V$. Encontrar:

- El voltaje efectivo de la fuente y
- El ángulo de fase en el circuito.

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } V &= \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (7 - 10)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5,8 \text{ V} \end{aligned}$$

Se puede notar que los voltajes efectivos a través de C y R son mayores que el voltaje

$$\begin{aligned} \text{b) } \tan \phi &= \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{7 - 10}{5} = -\frac{3}{5} \\ &= -0,6 \\ \Rightarrow \phi &= -31^\circ \end{aligned}$$

El ángulo de fase negativo significa que el voltaje a través de la resistencia está adelantado al voltaje aplicado. Equivalentemente podemos decir que la corriente en el circuito se adelanta al voltaje, (Los **fasores** rotan en el sentido antihorario).

Ejemplo 6. Una fuerza electromotriz alterna de tensión eficaz, 110 V y frecuencia 10 Hz está aplicada a un circuito formado por una resistencia de 7Ω en serie con un condensador.

Determinese la capacidad de éste, si la intensidad que circula es de 5 A.

Solución.

Aplicando la fórmula de la ley de Ohm de las corrientes alternas, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{110}{\sqrt{7^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ &= 5 \text{ A.} \end{aligned}$$

De donde:

$$\frac{1}{\omega C} = 20,85\Omega,$$

$$C = \frac{1}{20,85\omega} = \frac{1}{20,85(2\pi 60)} = 127 \times 10^{-6} \text{ F}$$

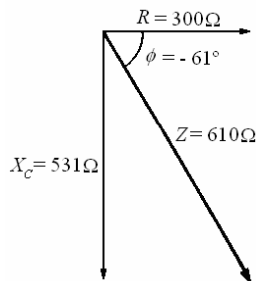
Ejemplo 7. Un condensador de $5 \mu\text{F}$ está en serie con una resistencia de 300Ω , y a la combinación se aplica un voltaje de 120 V y 60 Hz . Encuentre

- la corriente en el circuito y
- el ángulo de la fase.

Solución.

- La reactancia del condensador a 60 hertzios es

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(60)(5 \times 10^{-6})} = 531\Omega$$



Como $X_L = 0$, la impedancia del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (-X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{300^2 + 531^2} = 610\Omega$$

Luego la corriente es

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120}{610} = 0,197 \text{ A}$$

-

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{0 - 531}{300} = -1,77 \Rightarrow \phi = -61^\circ$$

El ángulo negativo de la fase significa que la corriente en el circuito adelanta al voltaje.

Ejemplo 8. Una inductancia de 5 mH , 20Ω está conectado a una fuente de energía de 28 V , 400 Hz . Encuentre

- La corriente en la inductancia y
- el ángulo de la fase.

Solución.

- La reactancia de la inductancia es:

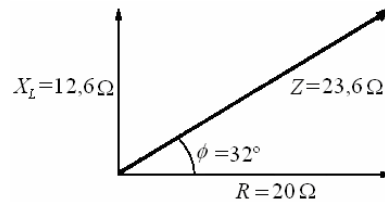
$$X_L = 2\pi f L = 2\pi(400)(5 \times 10^{-3}) = 12,6\Omega$$

Y su impedancia es;

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{20^2 + 12,6^2} = 23,6\Omega$$

Por lo tanto la corriente es

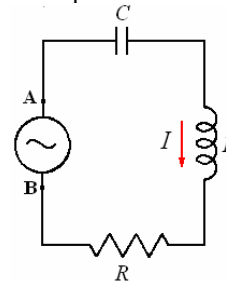
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{28}{23,6} = 1,18 \text{ A}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } \tan \phi &= \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{12,6 - 0}{20} \\ &= 0,63 \\ \Rightarrow \phi &= 32^\circ \end{aligned}$$

El ángulo positivo de la fase significa que el voltaje en el circuito adelanta a la corriente.

Ejemplo 9. Si al circuito anterior le conectamos un generador que suministre tensión v alterna dada por $v = v_A - v_B = V_0 \sin \omega t$, hallar la intensidad I que circula y la diferencia de potencial entre los dos extremos izquierdo y derecho de cada elemento cuando los transitorios hayan desaparecido prácticamente.



Solución.

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

$$\text{Con } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Entre los extremos de R :

$$v = IR$$

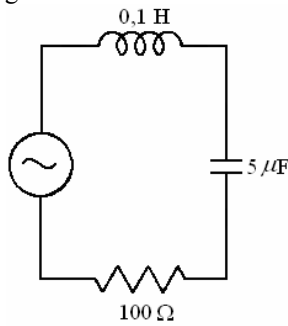
Entre los extremos de L :

$$v = \frac{V_0 \omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

Entre los extremos de C:

$$v = \frac{V_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi - \pi)$$

Ejemplo 10. Un circuito está formado por una autoinducción de 0,1 H, un condensador de 5 μ F y una resistencia de 100 Ω en serie. Calcúlese el valor del potencial instantáneo cuando la corriente es nula, si la intensidad eficaz del circuito es de 2,12 A y el generador es de 50 ciclos.



Solución.

La impedancia del circuito vale

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ &= \sqrt{100^2 + \left(100\pi \cdot 0,1 - \frac{1}{100\pi \cdot 5 \times 10^{-6}}\right)^2} \\ &= 615\Omega \end{aligned}$$

Con ello la fuerza electromotriz es:

$$V = IZ = (2,12)(615) = 1303 \text{ V.}$$

El ángulo de fase es:

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} = \frac{(31,4 - 637)}{100} \\ &= -6,056, \\ \Rightarrow \phi &= -80^\circ 37' \end{aligned}$$

La intensidad instantánea resulta nula cuando se cumple:

$$I_m \sin(\omega t - \phi) = 0$$

Es decir, cuando $(\omega t - \phi) = 0$,

$$\Rightarrow \omega t = \phi = -80^\circ 37'$$

Con ello la fuerza electromotriz instantánea es:

$$\begin{aligned} v &= V_m \sin \omega t = 1303\sqrt{2} \sin(-80^\circ 37') \\ &= 1843(-0,9866) \\ &= -1818 \text{ V.} \end{aligned}$$

RESONANCIA EN SERIE

La impedancia en un circuito de corriente en serie es un mínimo cuando $X_L = X_C$; bajo estas

circunstancias $Z = R$ e $I = \frac{V}{R}$.

La frecuencia de la resonancia f_R de un circuito es aquella frecuencia en la cual $X_L = X_C$:

$$2\pi f_R L = \frac{1}{2\pi f_R C} \Rightarrow f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Cuando la diferencia potencial aplicada a un circuito tiene la frecuencia f_R , la corriente en el circuito es un máximo. Esta condición se conoce como resonancia. En la resonancia el ángulo de la fase es cero ya que $X_L = X_C$.

Ejemplo 11. Un condensador de 10 μ F, una inductancia de 0,10 H, y una resistencia de 60 Ω se conectan en serie a través de una fuente de poder de 120 V, 60Hz. Encontrar.

- La corriente en el circuito y
- El ángulo de fase.

Solución.

a) Las reactivas son.

$$\begin{aligned} X_L &= 2\pi f L = 2\pi(60)(0,1) \\ &= 38\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(60)(10 \times 10^{-6})} \\ &= 265\Omega \end{aligned}$$

Luego la impedancia es

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{60^2 + (38 - 265)^2} \\ &= 235\Omega \end{aligned}$$

De aquí la corriente del circuito es.

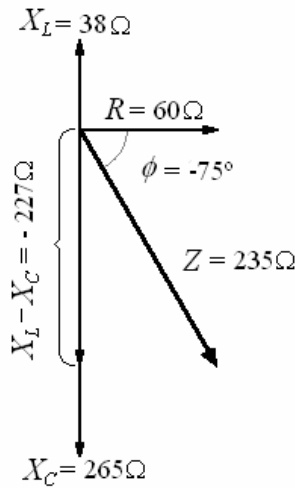
$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{Z} = \frac{120}{235} \\ &= 0,51 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$= \frac{38 - 265}{60} = \frac{-227}{60} = -3,78$$

$$\Rightarrow \phi = -75^\circ$$

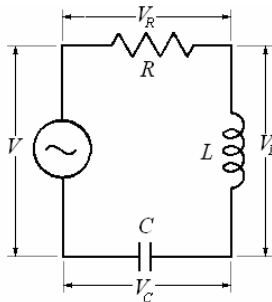
El ángulo negativo de la fase significa que la corriente en el circuito adelanta al voltaje.



Ejemplo 12. Corriente alterna. El voltaje instantáneo del generador de un circuito RLC en serie está dado por la relación: $v(t) = 200 \cos(100t)$ en voltios. Los valores de la resistencia, la inductancia; el condensador son: 80Ω ; $0,40 \text{ H}$ y $100 \mu\text{F}$, respectivamente. Calcule:

- i) La corriente instantánea del circuito.
- ii) La amplitud (o valor máximo) del voltaje en la resistencia, en la inductancia y en el condensador. Dibuje el diagrama de fasores de la corriente y voltajes del circuito, indicando sus valores respectivos.

Solución.



- i) La corriente instantánea del circuito. La corriente es igual para todos los elementos:

$$i(t) = I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$R = 80 \Omega, X_L = \omega L = 100(0,40) = 40 \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100(100 \times 10^{-6})} = 100 \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{80^2 + (40 - 100)^2} = 100 \Omega$$

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}}{Z} = \frac{200}{100} = 2 \text{ A.}$$

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{40 - 100}{80} = -0,75 \Rightarrow \phi = -36,87^\circ$$

Luego: $i(t) = 2 \cos(100t - 36,87^\circ)$

- ii) La amplitud (o valor máximo) del voltaje en la resistencia, en la inductancia y en el condensador.

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}}{Z} = \frac{200}{100} = 2 \text{ A.}$$

Como La corriente es igual para todos los elementos:

$$i(t) = I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = I_R \cos(\omega t + \phi) = I_L \cos(\omega t + \phi) = I_C \cos(\omega t + \phi)$$

$$I_R = I_L = I_C = I_{\text{máx}} = 2 \text{ A.}$$

El diagrama de fasores de la corriente y voltajes del circuito,

$$i(t) = 2 \cos(100t - 36,87^\circ)$$

$$v(t) = 200 \cos 100t$$

$$v(t) = V_R \cos 100t + V_L \cos\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) + V_C \cos\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Con.

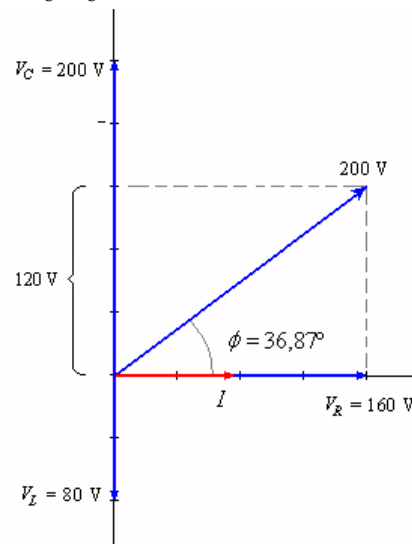
$$R = 80 \Omega, X_L = \omega L = 100(0,40) = 40 \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100(100 \times 10^{-6})} = 100 \Omega$$

$$V_R = I_R R = 2(80) = 160 \text{ V.}$$

$$V_L = I_L X_L = 2(40) = 80 \text{ V.}$$

$$V_C = I_C X_C = 2(100) = 200 \text{ V.}$$



Ejemplo 13. En el circuito de la antena de un receptor de radio sintonizado en una determinada estación, $R = 5 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$, y $C = 5 \text{ pF}$.

- a) Encontrar la frecuencia de la estación.

b) Si la diferencia de potencial aplicada al circuito es 5×10^{-4} V, encontrar la corriente que fluye.

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } f_R &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(5 \times 10^{-3})(5 \times 10^{-12})}} \\ &= 1006 \text{ kHz} \end{aligned}$$

b) En resonancia, $X_L = X_C$ y
 $Z = R$.

Luego

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{R} = \frac{5 \times 10^{-4}}{5} \\ &= 0,1 \text{ mA.} \end{aligned}$$

Ejemplo 14. En el circuito de la antena del problema anterior, la inductancia es fija pero la capacidad del condensador es variable.. ¿Cuál debe ser la capacidad para recibir una señal de radio de 800 kHz?

Solución.

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = \frac{1}{2\pi(800 \times 10^3)(5 \times 10^{-3})} \\ &= 7,9 \times 10^{-12} \text{ F} = 7,9 \text{ pF} \end{aligned}$$

Ejemplo 14. En un circuito de corriente alterna en serie $R = 20\Omega$, $X_L = 10\Omega$, y $X_C = 25\Omega$.

Cuando la frecuencia es 400 Hz.

- Encontrar la impedancia del circuito.
- Encontrar el ángulo de fase.
- ¿Es la frecuencia de la resonancia del circuito mayor o menor de 400 Hz?
- Encuentre la frecuencia de resonancia.

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{20^2 + (10 - 25)^2} = 25\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \tan \phi &= \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{10 - 25}{20} \\ &= -0,75 \\ \Rightarrow \phi &= -37^\circ \end{aligned}$$

Un ángulo negativo de la fase significa que el voltaje se retrasa de la corriente.

c) En la resonancia $X_L = X_C$. A 400 Hz,

$X_L < X_C$, así que la frecuencia se debe cambiar de tal manera en cuanto aumente X_L , disminuya

$$X_C. \text{ Como } X_L = 2\pi fL \text{ y } X_C = \frac{1}{2\pi fC},$$

está claro que el aumento de la frecuencia tendrá este efecto. Por lo tanto la frecuencia de la resonancia debe ser mayor de 400 Hz.

d) Siendo $X_L = 10\Omega$ y $X_C = 25\Omega$,

Cuando $f = 400$ Hz,

$$\begin{aligned} L &= \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{10}{2\pi(400)} \\ &= 4 \times 10^{-3} \text{ H.} \end{aligned}$$

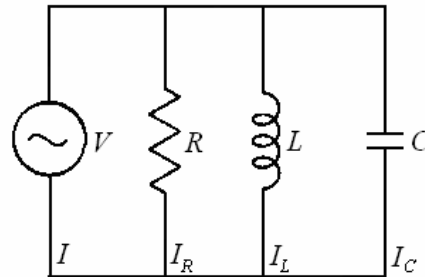
$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\pi fX_C} = \frac{1}{2\pi(400)(25)} \\ &= 1,6 \times 10^{-5} \text{ F.} \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} f_R &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(4 \times 10^{-3})(1,6 \times 10^{-5})}} \\ &= 629 \text{ Hz,} \end{aligned}$$

CIRCUITO RLC EN PARALELO.

Ahora consideramos un circuito de corriente alterna que contenga resistencia, inductancia, y condensador en paralelo, como en figura siguiente.



El voltaje es igual para todos los elementos:

$$v = V \text{sen} \omega t$$

$$v = V_R \text{sen} \omega t = V_L \text{sen} \omega t = V_C \text{sen} \omega t$$

Cuando una resistencia, una inductancia, y un condensador se conectan en paralelo a través de una fuente de corriente alterna, el voltaje es igual a través de cada elemento de circuito:

$$V = V_R = V_L = V_C$$

En todo momento la corriente aplicada i es igual a la suma de las caídas de voltaje i_R , i_L , y i_C :

$$i = i_R + i_L + i_C$$

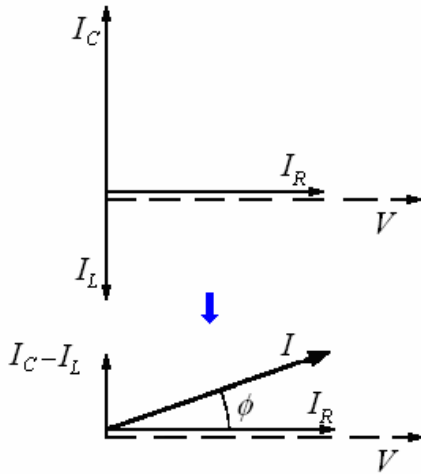
$$i = I_R \text{sen} \omega t + I_L \text{sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$+ I_C \text{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$i = I \text{sen}(\omega t + \phi)$$

La corriente instantánea total es la suma de las corrientes instantáneas en cada rama. Aunque el I_R la corriente en la resistencia está en fase con V , la corriente I_C en el condensador se adelanta a V por 90° y la corriente I_L en la inductancia se retrasa a V por 90° . Para encontrar la corriente

total I , los fasores que representan a I_R , a I_C y a I_L se deben sumar vectorialmente, como en figura siguiente.



Las corrientes de las ramas en el circuito en paralelo están dadas por:

$$I_R = \frac{V}{R}, \quad I_C = \frac{V}{X_C}, \quad I_L = \frac{V}{X_L}$$

La suma de estas corrientes vectorialmente con la ayuda del teorema de Pitágoras da:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

El ángulo de fase ϕ entre la corriente y el voltaje está especificado por:

$$\cos \phi = \frac{I_R}{I}$$

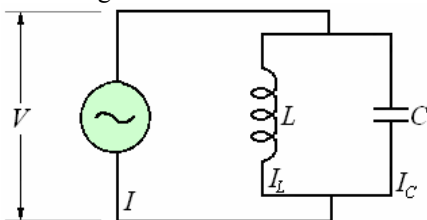
Si I_C es mayor que I_L la corriente adelanta al voltaje y el ángulo de la fase se considera positivo; si I_L es mayor que I_C , la corriente se retrasa al voltaje y el ángulo de la fase se considera negativo.

Impedancia del circuito paralelo RLC:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$$

RESONANCIA EN UN CIRCUITO EN PARALELO.

La figura muestra una inductancia y un condensador conectados en paralelo con una fuente de energía.

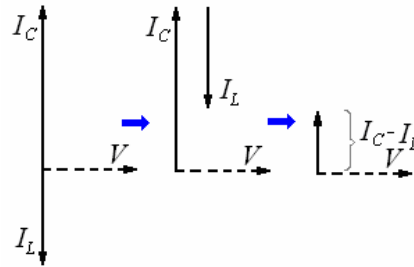


La corriente en la inductancia y en el condensador está desfasados 180° .

La corriente total I en el circuito es la diferencia entre corriente en L y en C .

$$I = I_C - I_L$$

La corriente que circula entre la inductancia y el condensador sin contribuir a I es conocida como corriente tanque y puede ser mayor de I .



En caso que $X_C = X_L$, las corrientes I_C e I_L sean también iguales. Puesto que I_C e I_L están 180° fuera de fase, la corriente total $I = 0$. Las corrientes en la inductancia y el condensador se cancelan. Esta situación se llama resonancia.

En un circuito en serie RLC, discutido anteriormente, la impedancia tiene su valor mínimo $Z = R$ cuando $X_C = X_L$, una situación llamada también resonancia. La frecuencia para la cual $X_C = X_L$ es

$$\omega_R = 2\pi f_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y se llama frecuencia de resonancia.

En un circuito paralelo RLC, la resonancia corresponde a $X_C = X_L$, pero aquí la impedancia es un máximo con f_R .

Con f_R , las corrientes en la inductancia y el condensador son iguales magnitud pero con 180° fuera de fase, así que ninguna corriente pasa con la combinación. Así $I = I_R$ y $Z = R$. A

frecuencias más altas y menores que f_R , I_C no es igual al I_L . y una cierta corriente puede pasar a través de la parte inductancia condensador del circuito, que reduce la impedancia Z a un valor menor que R . Por esto un circuito en serie puede ser utilizado como selector para favorecer una frecuencia particular, y un circuito paralelo con los mismos L y C se puede utilizar como un selector para discriminar contra la misma frecuencia.

Ejemplo 15. Las reactancias de una bobina y de un condensador conectados en paralelo y

alimentados por 15 V, 1000 Hz son, respectivamente, $X_L = 20\Omega$ y $X_C = 30\Omega$.

Encontrar

- La corriente en cada componente,
- La corriente total,
- La impedancia del circuito, y
- el ángulo de fase y la potencia total que se disipa en el circuito.

Solución.

$$a) I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{15}{20} = 0,75 \text{ A,}$$

$$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{15}{30} = 0,5 \text{ A}$$

$$b) I = I_C - I_L = 0,5 - 0,75 = -0,25 \text{ A}$$

El signo menos significa que la corriente total se retrasa 90° detrás del voltaje.

$$c) Z = \frac{V}{I} = \frac{15}{0,25} = 60\Omega$$

La impedancia no es mayor que solamente X_L o X_C , también es mayor que su suma aritmética.

d) Porque el ángulo de fase aquí es 90° , $\cos \phi = \cos 90^\circ = 0$ y

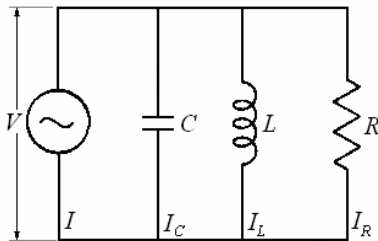
la potencia del circuito es

$$P = IV \cos \phi = 0$$

Esto es una conclusión de la ausencia de resistencia en el circuito.

Ejemplo 16. Una resistencia de 10Ω , un condensador de $8 \mu\text{F}$, y una inductancia de 2 mH están conectados en paralelo a través de una fuente de 10 V , 1000 Hz . Encuentre

- la corriente en cada componente,
- la corriente total en el circuito,
- la impedancia del circuito, y
- el ángulo de fase y la disipación de potencia total del circuito.



Solución.

$$a) X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(10^3)(8 \times 10^{-6})} = 20\Omega$$

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(10^3)(2 \times 10^{-3}) = 12,6\Omega$$

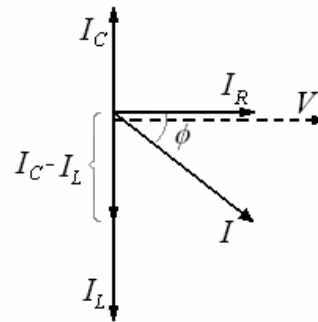
Luego:

$$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ A,}$$

$$I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{10}{12,6} = 0,8 \text{ A,}$$

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{10}{10} = 1,0 \text{ A,}$$

b)



El diagrama de fasores muestra cómo las corrientes deben ser Sumadas. Tenemos

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{1,0^2 + (0,5 - 0,8)^2} = \sqrt{1,0^2 + (-0,3)^2} = \sqrt{1,09} = 1,04 \text{ A}$$

$$c) Z = \frac{V}{I} = \frac{10}{1,04} = 9,6\Omega$$

$$d) \cos \phi = \frac{I_R}{I} = \frac{1,0}{1,04} = 0,962$$

$$\phi = -16^\circ$$

La corriente se retrasa del voltaje 16° .

$$P = IV \cos \phi = (10)(1,04)(0,962) = 10 \text{ W}$$

Podemos también encontrar P de otra manera:

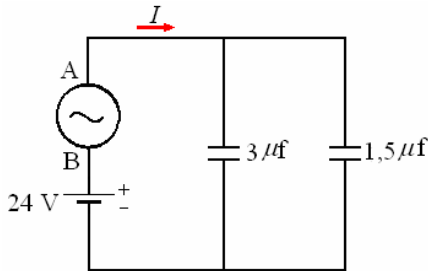
$$P = I_R^2 R = (1,0)^2 (10) = 10 \text{ W}$$

Ejemplo 17. Un circuito se compone de dos condensadores, una batería de 24 V y una tensión de corriente alterna conectados como se indica en la figura. La tensión de corriente alterna viene dada en V por $V_A - V_B = 20 \cos 120\pi t$ (t en segundos):

a) Hallar la carga en cada condensador en función del tiempo t .

b) ¿Cuál es la intensidad I de corriente en el instante t ?

- c) ¿Cuál es la máxima energía $U_{m\acute{a}x}$ almacenada en los condensadores?
 d) ¿Cuál es la energía mínima $U_{m\acute{i}n}$ almacenada en los condensadores?



Solución.

a) Condensador izquierdo

$$Q_1 = 3 \times 10^{-6} (24 + 20 \cos 120\pi t) \text{ C}$$

Condensador derecho

$$Q_2 = 1,5 \times 10^{-6} (24 + 20 \cos 120\pi t) \text{ C}$$

b) $I = -4,5 \times 10^{-6} \times 20 \times 120\pi \text{ sen} 120\pi t$

$$= 10 \times 800\pi \cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2,5 \times 10^4 \cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}$$

c) Con $\cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$U_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} 4,5 \times 10^{-6} \times 44^2$$

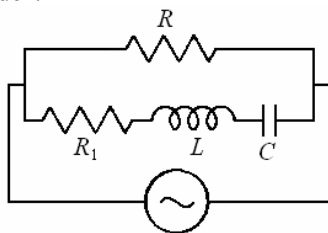
$$= 4,356 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Con $\cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -1$

$$U_{m\acute{i}n} = \frac{1}{2} 4,5 \times 10^{-6} \times 4^2$$

$$= 3,6 \times 10^{-5} \text{ J}$$

Ejemplo 18. En el circuito de la figura, el generador tiene una frecuencia tal que la corriente que atraviesa la resistencia R es mínima. ¿Qué corriente atraviesa entonces la bobina y el condensador?



Solución.

Si la intensidad que circula por R tiene que ser mínima, es porque la que circula por la impedancia de la otra rama es máxima, y para que

esto ocurra, la propia impedancia tiene que ser mínima. Como ésta viene dada por:

$$Z = \sqrt{R_1^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

El valor mínimo se obtiene para aquella frecuencia que haga nula la reactancia:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Con lo que $Z = R_1$.

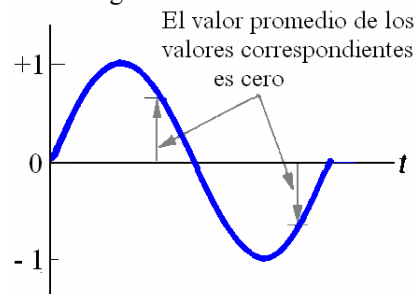
Con ello el circuito queda reducido a dos resistencias en paralelo.

Si llamamos I_1 a la que circula por la impedancia (y, por tanto, por la bobina y por el condensador), vale:

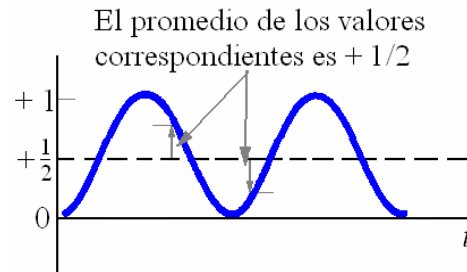
$$I_1 = \frac{V}{I_1}$$

VALORES MEDIOS Y EFICACES.

Dado que la función seno oscila simétricamente alrededor de cero, el valor promedio de una magnitud que varía sinusoidalmente, por ejemplo, la corriente o el voltaje, es cero. Esto sucede así porque para cualquier instante en que la función posee un valor positivo, existe otro instante dentro del mismo ciclo para el que la función toma el mismo valor negativo.



Sin embargo, el valor promedio del cuadrado de una magnitud que varía sinusoidalmente no es cero, puesto que el cuadrado de la función seno es siempre positivo y oscila simétricamente alrededor de $+1/2$.



Para cualquier instante en que $\text{sen}^2 \omega t$ tiene un valor mayor de $+1/2$, hay otro instante en el ciclo para el que su valor es menor que $+1/2$ en la misma cantidad, de forma que el promedio de $\text{sen}^2 \omega t$ es $+1/2$.

Valor cuadrático medio. Para cualquier señal periódica $f(t)$, la señal al cuadrado es $f^2(t)$ y la señal “media al cuadrado” es la integral de $f^2(t)$ en el período entero, dividido por el período.

Para $f(t) = V_{m\acute{a}x} \text{sen } \omega t$ es.

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_{m\acute{a}x}^2 \text{sen}^2 \omega t dt}$$

$$= V_{m\acute{a}x} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt}$$

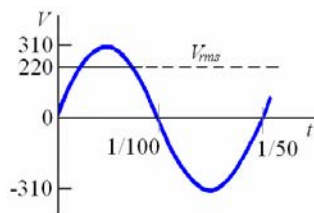
$$= V_{m\acute{a}x} \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} \right)} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}}$$

$$V_{rms} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}}$$

De igual forma para la corriente:

$$I_{rms} = \frac{I_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}}$$

Generalmente, cuando se especifica un valor de voltaje alterno o de corriente alterna, se trata del valor cuadrático medio (rms), y los voltímetros y amperímetros de corriente alterna están calibrados para indicar estos valores. Por ejemplo, el voltaje entre los dos terminales de un enchufe de su casa tiene un valor nominal de 220 V, y como se muestra en la figura abajo, este es el valor cuadrático medio del voltaje. La amplitud de este voltaje es $V_{m\acute{a}x} = 311 \text{ V}$.



POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA.

Estudiaremos ahora la rapidez con que se intercambian energía los diferentes componentes de un circuito *RLC* conectado a una fuente de corriente alterna, es decir, el ritmo con que la energía entra y sale de cada uno de los componentes del circuito. Generalmente, la frecuencia de la fuente es suficientemente alta

como para que la dependencia temporal de estos intercambios de energía sea de interés, por lo que estaremos interesados principalmente en la potencia promedio, donde este promedio se realiza sobre un gran número de ciclos. Por simplicidad continuaremos suponiendo que toda la capacidad del circuito está contenida en el condensador, toda su inductancia en la inductancia y toda su resistencia en la resistencia. Considerar los intercambios de energía entre los cuatro componentes del circuito:

1. La fuente convierte otro tipo de energía en energía electromagnética, y proporciona esta energía al circuito.
 2. La resistencia disipa la energía electromagnética en forma de calor. La energía abandona el circuito a través del calentamiento de la resistencia, con una rapidez $I^2 R$.
 3. En un instante dado, la energía puede estar entrando o saliendo del condensador, dependiendo de si en ese momento el condensador se carga o se descarga. Puesto que la corriente oscila sinusoidalmente, la energía que entra en el condensador durante la parte del ciclo correspondiente a la carga del condensador, es igual a la energía que sale de él durante la parte de ciclo correspondiente a su descarga. En consecuencia, la potencia promedio en el condensador es cero.
 4. Como ocurre con el condensador, la inductancia es un dispositivo de almacenamiento de energía. La potencia promedio en la inductancia es cero.
- Considerando el circuito completo, la energía entra por la fuente y sale por la resistencia.

Potencia instantánea. Es la potencia en función del tiempo la que nos permite obtener la potencia en determinado momento.

$$P = vi = V \text{sen } \omega t \text{ sen } (\omega t + \phi)$$

$$P = vi = V_{m\acute{a}x} \text{sen } \omega t I_{m\acute{a}x} \text{sen } (\omega t + \phi)$$

$$P = V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x} \text{sen } \omega t (\text{sen } \omega t \cos \phi + \cos \omega t \text{sen } \phi)$$

$$P = V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x} (\text{sen}^2 \omega t \cos \phi + \cos \omega t \text{sen } \omega t \text{sen } \phi)$$

Potencia media. Para obtener la potencia media realizamos la integración de la potencia instantánea en un ciclo, es decir durante un período (*T*):

$$P_m = V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x} \frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2 \omega t \cos \phi dt$$

$$+V_{m\acute{a}x}I_{m\acute{a}x}\frac{1}{T}\int_0^T \text{sen } \omega t \cos \omega t \cos \phi dt$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \text{sen}^2 \omega t \cos \phi dt = \frac{1}{2} \cos \phi$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \text{sen } \omega t \cos \omega t \cos \phi dt = 0$$

$$P_m = \frac{V_{m\acute{a}x}I_{m\acute{a}x}}{2} \cos \phi.$$

$\cos \phi$ es el **factor de potencia** del circuito.

Esto también podemos escribir como:

$$P_m = \left(\frac{V_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{I_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}}\right) \cos \phi = V_{rms}I_{rms} \cos \phi$$

También se les llama voltaje y corriente efectiva en vez de voltaje y corriente cuadrática media.

Ejemplo 19. Una corriente sinusoidal facilita 20 A eficaces bajo la tensión eficaz de 100 V a un circuito; el ángulo de fase de la corriente sobre la fuerza electromotriz es de 30° . Determinése la impedancia, la reactancia y la resistencia del circuito.

Solución.

La impedancia vale

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100}{20} = 5\Omega$$

La resistencia:

$$R = Z \cos \phi = 5 \cos 30^\circ = 4,3\Omega$$

La reactancia:

$$X = Z \text{sen } \phi = 5 \text{sen } 30^\circ = 2,5\Omega$$

Ejemplo 20. Calcúlese el ángulo de fase de una corriente alterna cuya potencia viene dada por

$$P = \frac{V^2}{4R}$$

Solución.

$$P = \frac{V^2}{4R} = VI \cos \phi, \Rightarrow \cos \phi = \frac{V}{4RI}$$

Teniendo en cuenta

$$I = \frac{V}{R}, \text{ y } \cos \phi = \frac{R}{Z}:$$

$$\Rightarrow \cos \phi = \frac{Z}{4R} = \frac{R}{Z},$$

$$\Rightarrow Z = 2R \Rightarrow \frac{R}{Z} = \frac{1}{2}$$

Por tanto

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 60^\circ$$

Ejemplo 21. Mediante la red eléctrica ordinaria de 220 V (eficaces) a 50 Hz, se alimenta un circuito RLC con una $R = 20 \Omega$, $L = 0,02$ H y $C = 20 \mu\text{F}$. Calcular:

- la potencia media disipada por el circuito
- deducir si se encuentra o no en resonancia.

Solución.

$$a) X_L = L\omega = 2\pi fL = 2\pi\Omega;$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{10^3}{2\pi}\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{20^2 + \left(2\pi - \frac{10^3}{2\pi}\right)^2} = 154,2\Omega$$

$$P = V_e I_e \cos \phi = V_e \cdot \frac{V_e}{Z} \cdot \frac{R}{Z} = \left(\frac{V_e}{Z}\right)^2 R$$

$$= \left(\frac{220}{154,2}\right)^2 20 = 40,7 \text{ W}$$

b) Si cuando $X_L = X_C$ está en resonancia.

Podemos ver que no son iguales, por lo tanto no está en resonancia

Ejemplo 22. Los cinco parámetros que describen un circuito RLC conectado a una fuente de corriente alterna son R , L , C , $V_{m\acute{a}x}$ y ω . Obtener la expresión de P_m en función de estos parámetros.

Solución.

Sustituyendo la expresión $I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z}$ en la

Ecuación $P_m = (I_{rms})^2 R$ obtenemos

$$P_m = \left(\frac{V_{rms}}{Z}\right)^2 R = \frac{V_{rms}^2 R}{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$

y sustituyendo ahora V_{rms} , X_C y X_L por sus correspondientes expresiones se obtiene

$$P_m = \frac{\frac{1}{2} V_{máx}^2 R}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2}$$

Observar que cuando la fuente tiene la frecuencia de resonancia, $\frac{1}{\omega C} = \omega L$, la potencia promedio

es $\frac{1}{2} V_{máx}^2 R$.

Ejemplo 23. Una bobina de resistencia y de inductancia desconocidas conduce 4 A cuando está conectada con una fuente de 12 V de corriente continua y 3 A cuando está conectada a una fuente de 12 V de corriente alterna, 100 Hz.

- Encuentre los valores de R y de L .
- ¿Qué potencia se disipa cuando la bobina está conectada con la fuente de corriente continua?
- ¿Cuándo está conectada con la fuente de corriente alterna?

Solución.

a) No hay reactancia inductiva cuando la corriente continua pasa a través de la bobina, así que su resistencia es

$$R = \frac{V_1}{I_1} = \frac{12}{4} = 3\Omega$$

Con $f = 100$ Hz la impedancia del circuito es

$$Z = \frac{V_2}{I_2} = \frac{12}{3} = 4\Omega$$

Y como $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ y

$X_C = 0$, tenemos:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = 2,65\Omega$$

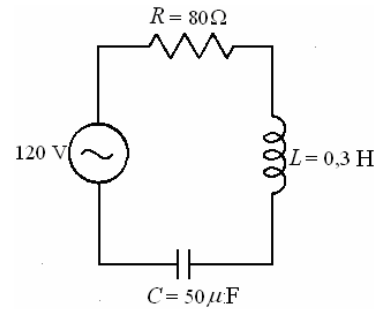
Luego la inductancia de la bobina es

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{2,65}{2\pi(100)} = 4,22 \text{ mH}$$

- $P_1 = I_1^2 R = (4)^2 (3) = 48 \text{ W}$
- $P_2 = I_2^2 R = (3)^2 (3) = 27 \text{ W}$

Ejemplo 24. Un condensador de $50 \mu\text{F}$, una inductancia de $0,3 \text{ H}$, y una resistencia de 80Ω están conectados en serie con una fuente de 120 V , 60 Hz .

- ¿Cuál es la impedancia del circuito?
- ¿Cuánta corriente fluye en él?
- ¿Cuál es el factor de potencia?
- ¿Cuánta potencia es disipada por el circuito?
- ¿Cuál debe ser la mínima potencia en voltamperios de la fuente de energía?



Solución.

$$a) X_L = 2\pi fL = 2\pi(60)(0,3) = 113\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(60)(50 \times 10^{-6})} = 53\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{80^2 + (113 - 53)^2} = 100\Omega$$

$$b) I = \frac{V}{Z} = \frac{120}{100} = 1,2 \text{ A}$$

$$c) \cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{80}{100} = 0,8 = 80\%$$

d) La potencia real

$$P = VI \cos \phi = (120)(1,2)(0,8) = 115 \text{ W}$$

Alternativamente,

$$P = I^2 R = (1,2)^2 (80) = 115 \text{ W}$$

e) La potencia aparente

$$= VI = (120)(1,2) = 144 \text{ VA}$$

Ejemplo 25. a) Encuentre las diferencias de potenciales a través de la resistencia, de la inductancia, y del condensador en el circuito anterior

b) ¿Estos valores están de acuerdo con la diferencia potencial aplicada de 120 V ?

Solución.

$$a) V_R = IR = (1,2)(80) = 96 \text{ V.}$$

$$V_L = IX_L = (1,2)(113) = 136 \text{ V.}$$

$$V_C = IX_C = (1,2)(53) = 64 \text{ V.}$$

c) La suma de estas diferencias potenciales es 296 V , más de dos veces los 120 V aplicados al circuito. Sin embargo, esto es una manera sin sentido de combinar las diferencias de potenciales puesto que no están en fase el

uno con el otro: V_L está 90° delante de V_R y V_C está 90° detrás de V_R . La manera correcta de encontrar la diferencia potencial total a través del circuito es como sigue:

d)

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \\ &= \sqrt{96^2 + (136 - 64)^2} \\ &= 120 \text{ V.} \end{aligned}$$

Este resultado está de acuerdo con la diferencia potencial aplicada de 120 V. Notamos que el voltaje a través de una inductancia o de un condensador en un circuito de corriente alterna puede ser mayor que el voltaje aplicado al circuito.

Ejemplo 26. a) Encuentre la frecuencia de la resonancia f_R del circuito anterior.

b) ¿Qué corriente fluirá en el circuito si está conectado con una fuente de 20 V y frecuencia f_R ?

c) ¿Cuál será el factor de potencia en este caso?

d) ¿Cuánta potencia será disipada por el circuito?

e) ¿Qué debe ser la potencia mínima en voltamperios de la fuente ahora?

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } f_R &= \frac{1}{2\pi f \sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{(0,3)(50 \times 10^{-6})}} \\ &= 41 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

b) Con la frecuencia de resonancia

$$X_L = X_C \text{ y } Z = R,$$

luego

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120}{80} = 1,5 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos \phi &= \frac{R}{Z} = \frac{R}{R} = 1 \\ &= 100\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) La potencia real } &= P = VI \cos \phi \\ &= (120)(1,5)(1) \\ &= 180 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) La potencia aparente } &= VI \\ &= (120)(15) \\ &= 180 \text{ VA} \end{aligned}$$

Ejemplo 27. a) Encuentre la diferencia potencial a través de la resistencia, de la inductancia, y del condensador en el circuito anterior cuando está conectado con una fuente de la corriente alterna de 120 V con frecuencia igual a la frecuencia de resonancia del circuito, 41 Hz.

b) ¿Están estos valores de acuerdo con la diferencia potencial aplicada de 120 V?

Solución.

a) A la frecuencia de la resonancia de $f_R = 41$ Hz, las reactancias inductiva y capacitiva son, respectivamente.

$$\begin{aligned} X_L &= 2\pi f_R L = 2\pi(41)(0,3) \\ &= 77\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{2\pi f_R C} = \frac{1}{2\pi(41)(50 \times 10^{-6})} \\ &= 77\Omega \end{aligned}$$

Las diferentes diferencias de potencial son:

$$V_R = IR = (1,5)(80) = 120 \text{ V.}$$

$$V_L = IX_L = (1,5)(77) = 116 \text{ V.}$$

$$V_C = IX_C = (1,5)(77) = 116 \text{ V.}$$

b) La diferencia potencial total a través del circuito es

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \\ &= \sqrt{120^2 + (116 - 116)^2} \\ &= 120 \text{ V.} \end{aligned}$$

La cuál es igual a la diferencia de potencial aplicada.

Ejemplo 28. Un motor eléctrico 5 hp tiene una eficiencia de 80 por ciento y un factor inductivo de potencia de 75 por ciento.

a) ¿Cuál es la potencia mínima en kilovoltamperes que su fuente debe tener?

b) Un condensador está conectado en serie con el motor para levantar el factor de potencia a 100 por ciento. ¿Qué potencia mínima en kilovoltamperes debe tener la fuente ahora?

Solución.

a) La potencia requerida por el motor es

$$P = \frac{(5)(0,746 \text{ kW/ hp})}{0,8}$$

$$= 4,66 \text{ kW}$$

Desde que $P = IV \cos \phi$, la fuente de energía debe tener la potencia mínima

$$\begin{aligned} IV &= \frac{P}{\cos \phi} = \frac{4,66 \text{ kW}}{0,75} \\ &= 6,22 \text{ kVA} \end{aligned}$$

b) Cuando $\cos \phi = 1$,

$$IV = P = 4,66 \text{ kVA.}$$

Ejemplo 29. ¿Una bobina conectada a 120 V, 25 Hz conduce una corriente de 0,5 A y disipa 50 W.

a) ¿Cuál es su factor de potencia?

b) ¿Qué condensador se debe conectar en serie con la bobina para aumentar el factor de potencia 100 por ciento?

c) ¿Cuál sería la corriente en el circuito entonces?

d) ¿Qué potencia disiparía el circuito?

Solución.

a) Como $P = IV \cos \phi$,

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{P}{IV} = \frac{50}{(0,5)(120)} \\ &= 0,833 = 83,3\%\end{aligned}$$

b) El factor de potencia será 100 por ciento en la resonancia, cuando $X_L = X_C$. El primer paso es encontrar X_L , que se puede hacer de

$$\tan \phi = \frac{(X_L - X_C)}{R}$$

Aquí $X_C = 0$, y como $\cos \phi = 0,833$,

$$\phi = 34^\circ \text{ y } \tan \phi = 0,663.$$

Siendo $P = I^2 R$:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{50}{0,5^2} = 200 \Omega$$

$$\begin{aligned}\text{Luego } X_L &= R \tan \phi + X_C \\ &= (200)(0,663) + 0 \\ &= 133 \Omega\end{aligned}$$

Éste también debe ser el valor de X_C cuando $f = 25$ Hz, luego

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi(25)(133)} \\ &= 4,8 \times 10^{-5} \text{ f} \\ &= 48 \mu\text{F}\end{aligned}$$

c) En la resonancia $Z = R$, luego

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120}{200} = 0,6 \text{ A}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } P &= I^2 R = (0,6)^2 (200) \\ &= 72 \text{ W}\end{aligned}$$

Ejemplo 30. Mediante la red alterna de 220 V y 50 Hz se quiere encender normalmente un foco de 50 W, 3,25 A, conectándole un condensador en serie. ¿Qué capacidad debe tener para ello?

Solución.

En las condiciones normales de funcionamiento el foco debe estar recorrido por una corriente:

$$I = \frac{W}{V} = \frac{3,25}{50} = 0,065 \text{ A}$$

Y su resistencia es:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{50}{0,065} = 769 \Omega$$

Por lo tanto, la impedancia total del circuito y su reactancia capacitiva serán:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{220}{0,065} = 3385 \Omega,$$

$$\begin{aligned}X_C &= \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{3385^2 - 769^2} \\ &= 3296 \Omega\end{aligned}$$

Luego el condensador necesario debe tener una capacidad de:

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{(100\pi)(3296)} = 0,966 \times 10^{-6} \text{ F} \\ &= 0,966 \mu\text{F}\end{aligned}$$

Ejemplo 31. Se dispone de un generador de 44,4 V y 50 Hz del que se quiere obtener una corriente de 10 A y 313,9 W. Para ello se monta sobre sus bornes una autoinductancia. Halle sus características.

Solución.

El factor de potencia es:

$$\cos \phi = \frac{P}{VI} = \frac{313,9}{(44,4)(10)} = 0,707$$

$$\Rightarrow \phi = 45^\circ,$$

Como $\tan \phi = \frac{X}{R}$, se tiene:

$$I = \frac{X}{R}, \text{ de donde resulta que la autoinducción}$$

necesaria ha de tener iguales su resistencia R y su reactancia X , es decir:

$$R = \omega L, \text{ por lo tanto}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2}R$$

De donde:

$$R = \frac{Z}{\sqrt{2}} = \frac{V/I}{\sqrt{2}} = \frac{44,4/10}{\sqrt{2}} = 3,14 \Omega$$

Por último, la autoinductancia vale:

$$L = \frac{R}{\omega} = \frac{3,14}{100\pi} = 0,01 \text{ H}$$

Ejemplo 32. Un circuito serie RLC está formado por una bobina de coeficiente de autoinducción $L = 1$ H y resistencia óhmica interna de 10Ω , un condensador de capacidad $C = 5 \mu\text{F}$, y una

resistencia de 90Ω . La frecuencia de la corriente es de 100 Hz. Si el circuito se conecta a un generador de corriente alterna de 220 V de tensión máxima, calcular:

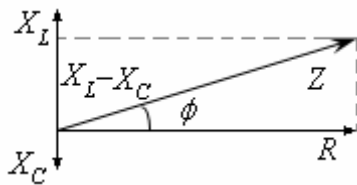
a) la potencia disipada por el circuito

b) la expresión de la intensidad instantánea

Solución.

$$\begin{aligned}
 a) \quad X_L &= L\omega = 1(2\pi 100) = 628,3\Omega \\
 X_C &= \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{5 \times 10^{-6}(2\pi 100)} = 318,3\Omega \\
 Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\
 &= \sqrt{90^2 + (628,3 - 318,3)^2} = 225,7\Omega \\
 V_e &= \frac{220}{\sqrt{2}} = 155,6 \text{ V}; \\
 P &= V_e I_e \cos \phi = V_e \frac{V_e R}{Z} = \left(\frac{V_e}{Z}\right)^2 R \\
 &= \left(\frac{155,6}{225,7}\right)^2 90 = 22,8 \text{ W}
 \end{aligned}$$

b)



$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = 3,1 ;$$

$$\phi = \arctan 3,1 = 72^\circ 12' = 1,26 \text{ rad.}$$

$$\begin{cases} V(t) = 220\text{sen}200\pi \\ I(t) = 0,68\text{sen}(200\pi - 1,26) \end{cases}$$

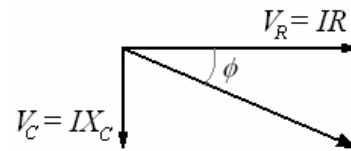
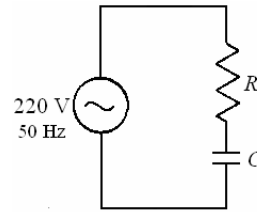
$$\text{o} \begin{cases} V(t) = 220\text{sen}(200\pi + 1,26) \\ I(t) = 220\text{sen}200\pi \end{cases}$$

Ejemplo 33. Un tubo fluorescente está instalado en una línea de 220V y 50Hz y consume 40W con un factor de potencia de 0,8. Determinar la capacidad del condensador C que tenemos que conectar:

- En serie.
- En paralelo.
- Para que el factor de potencia sea 1. ¿Cuál sería, en cada caso, la potencia media P_m que consume el nuevo circuito?.

Solución.

- En serie:



$$\cos \phi = 0,8 \Rightarrow \phi = 36,87^\circ$$

$$\tan 36,87^\circ = 0,75 = \frac{IX_C}{IR} = \frac{1}{\omega CR} = \frac{1}{100\pi CR}$$

$$\Rightarrow CR = \frac{1}{75\pi}$$

$$\text{Por otra parte } P = VI \cos \phi \Rightarrow$$

$$40 = 220I(0,8) \Rightarrow I = \frac{40}{220(0,8)} = \frac{1}{4,4}$$

$$V = I\sqrt{R^2 + X_C^2} \Rightarrow$$

$$220 = \frac{1}{4,4} \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{100\pi RC}\right)^2}$$

$$R^2 + \left(\frac{1}{100\pi RC}\right)^2 = 968^2$$

$$R^2 + \left(\frac{75}{100}\right)^2 = 968^2 \Rightarrow R = 967$$

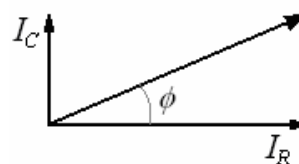
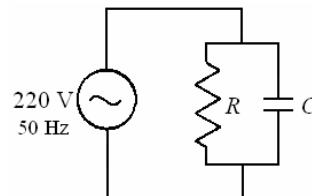
El condensador es:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{75\pi R} = \frac{1}{75\pi(967)} = 4,39 \times 10^{-6} \text{ F} \\
 &= 4,39 \mu\text{F}
 \end{aligned}$$

La potencia es:

$$P = VI \cos \phi = 220 \left(\frac{1}{4,4}\right) 0,8 = 40 \text{ W}$$

- En paralelo:



$$\cos \phi = 0,8 \Rightarrow \phi = 36,87^\circ$$

$$\begin{aligned}\tan 36,87^\circ = 0,75 &= \frac{V_C}{V_R} \\ &= \frac{I_C}{I_R \omega CR} = \frac{1}{100\pi CR} \\ \Rightarrow CR &= \frac{1}{75\pi} \Rightarrow R = \frac{1}{75\pi C} \\ I &= \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{\left(\frac{220}{R}\right)^2 + \left(\frac{220}{X_C}\right)^2} \\ &= 220\sqrt{\frac{1}{R^2} + (100\pi C)^2}\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de R

$$\begin{aligned}I &= 220\sqrt{(75\pi C)^2 + (100\pi C)^2} \\ &= 220(25\pi)\sqrt{(3C)^2 + (4C)^2} \\ &= 220(25\pi)(5C) = 86350C\end{aligned}$$

Por otra parte $P_m = VI \cos \phi$

$$\Rightarrow 40 = 220(86350C)(0,8)$$

El condensador es:

$$\begin{aligned}C &= \frac{40}{15197600} = 2,63 \times 10^{-6} \text{ F} \\ &= 2,63 \mu\text{F}\end{aligned}$$

c) Para que el factor de potencia sea 1.

En serie.

$$\cos \phi = 1 \Rightarrow \phi = 0^\circ$$

$$\tan 0^\circ = 0 = \frac{IX_C}{IR}$$

$$\Rightarrow X_C = 0 \quad CR = \frac{1}{75\pi}$$

Solamente hay resistencia

$$\begin{aligned}I &= \frac{V}{R} = \frac{220}{967} \\ &= 0,297\Omega\end{aligned}$$

Por otra parte $P_m = VI \cos \phi$

$$\Rightarrow P_m = 220(0,297) = 50,05 \text{ W}$$

En paralelo.

El resultado es igual que en el caso anterior.

Ejemplo 34. Dentro de un campo magnético de 1800 gauss gira una bobina de 1700 espiras de 25 cm^2 a razón de 600 rpm. Si la resistencia de su bobinado es de $0,7 \Omega$ y sus bornes se conectan a una autoinducción de $0,02 \text{ H}$ y $2,5 \Omega$, ¿Cuál es la potencia de la corriente que la recorre?

Solución.

$$\omega = 2\pi \left(\frac{600}{60}\right) = 20\pi \text{ rad/s.}$$

El flujo magnético que atraviesa la bobina vale:

$$\Phi = nBA \sin \omega t,$$

Y, por lo tanto, la fuerza electromotriz instantánea es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = nBA \cos \omega t$$

Con lo que la fuerza electromotriz eficaz es:

$$\begin{aligned}V &= \frac{nBA\omega}{\sqrt{2}} = \frac{1700(0,18)(25 \times 10^{-4})(20\pi)}{\sqrt{2}} \\ &= 34 \text{ V.}\end{aligned}$$

La reactancia inductiva del circuito es:

$$X_L = \omega L = 20\pi(0,02) = 1,257\Omega$$

Y como la resistencia vale

$$R = 0,7 + 2,5 = 3,2\Omega, \text{ la impedancia es:}$$

$$\begin{aligned}Z &= \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3,2^2 + 1,257^2} \\ &= 3,44\Omega\end{aligned}$$

Y la intensidad:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{34}{3,44} = 9,88 \text{ A.}$$

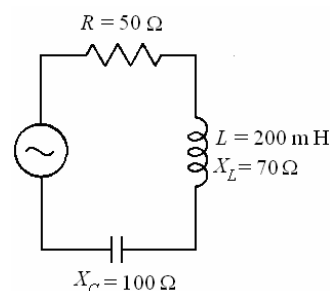
El factor de potencia es:

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{3,2}{3,44} = 0,93$$

y la potencia:

$$P = VI \cos \phi = (34)(9,88)(0,93) = 312 \text{ W.}$$

Ejemplo 35. La figura muestra un circuito CA en serie. La inductancia tiene una reactancia de 70 ohmios y una inductancia de 200 mH. Una resistencia de 50 ohmios y un condensador cuya reactancia es 100 ohmios, están también en el circuito. La corriente rms en el circuito es 1,2 A.



- ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente?
- ¿Cuál es la capacidad del condensador?
- ¿Cuál es el ángulo de fase del circuito?
- ¿Cuál es la amplitud del voltaje a través del condensador?
- ¿Cuál es la energía magnética máxima en la inductancia?

Solución.

$$a) V_{rms} = I_{rms} \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$

$$= 1,2\sqrt{50^2 + (100 - 70)^2}$$

$$= 1,2(58,31) = 69,87 \text{ V}$$

$$\text{b) } X_L = \omega L \Rightarrow \omega = \frac{X_L}{L} = \frac{70}{0,2} = 350 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{350(100)} = 28 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$\text{c) } \tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{70 - 100}{50} = \frac{-30}{50}$$

$$\Rightarrow \phi = -30,96^\circ$$

$$\text{d) } V_C = IX_C = (1,2\sqrt{2})(100) = 169,2 \text{ V}$$

$$\text{e) } U = \frac{1}{2} LI_{rms}^2 = \frac{1}{2} (200 \times 10^{-3})(1,2)^2$$

$$= 0,144 \text{ J}$$

Ejemplo 36. Cuando se suspende una masa de un resorte y se sumerge en líquido puede experimentar oscilaciones armónicas amortiguadas forzadas. El comportamiento es análogo al de un circuito RLC en serie al cual se aplica una fuerza electromotriz sinusoidal. ¿A cuál de las siguientes energías cinéticas es análoga la energía de la masa?

- A) La energía disipada como calor en la resistencia.
- B) La energía almacenada en el condensador.
- C) La energía magnética almacenada en la inductancia.
- D) La energía total proporcionada por la fuente de la fuerza electromotriz.
- E) La corriente en el circuito.

Solución.

La ecuación diferencial cuando se suspende una masa de un resorte y se sumerge en líquido puede experimentar oscilaciones armónicas amortiguadas forzadas es

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \text{sen } \omega' t$$

Para un circuito RLC en serie al cual se aplica una fuerza electromotriz sinusoidal es

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{1}{LC} I = \frac{\varepsilon_0}{L} \text{sen } \omega t$$

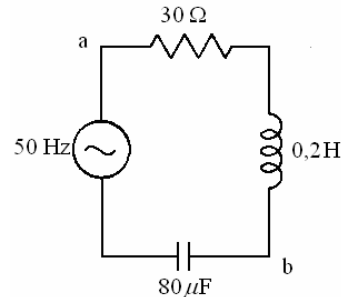
La energía almacenada en la masa es $\frac{1}{2} m v^2$

La energía almacenada en la inductancia es

$$\frac{1}{2} LI^2$$

Por observación la energía cinética de la masa es análoga a la energía magnética almacenada en la inductancia (C).

Ejemplo 37. Un circuito en serie tiene una fuente de CA de 50 hertzios, una resistencia de 30 ohmios, una inductancia de 0,20 H, y un condensador de 80 μ F, como se muestra en la figura. La corriente rms en el circuito es 2,5 A.



- a) ¿Cuál es la amplitud del voltaje de la fuente?
- b) ¿Cuál es el factor de potencia del circuito?
- c) ¿Cuál es el voltaje rms a través de los puntos a y b en el circuito?
- d) La frecuencia de la fuente se cambia de modo que la reactancia capacitiva sea igual a dos veces la reactancia inductiva. Se conservan los elementos de circuito originales. ¿Cuál es la nueva frecuencia de la fuente?
- e) Si se cambia la capacidad de modo que el circuito esté en resonancia. Se conservan la resistencia y la inductancia originales. El voltaje y la frecuencia de la fuente se mantienen en los valores originales. ¿Cuál es la nueva capacidad?

Solución.

$$\text{a) } V = I\sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$

$$I = 2,5\sqrt{2} = 3,52 \text{ A}, \quad R = 30\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(100\pi)(80 \times 10^{-6})}$$

$$= 39,8\Omega,$$

$$X_L = \omega L = (100\pi)(0,2)$$

$$= 62,8\Omega$$

$$V = 3,52\sqrt{30^2 + (39,8 - 62,8)^2}$$

$$= 133,06 \text{ V}$$

$$\text{b) } \tan \phi = \frac{X_C - X_L}{R} = \frac{39,8 - 62,8}{30}$$

$$= -0,77$$

$$\Rightarrow \phi = -37,5^\circ$$

$$\cos \phi = \cos -37,5^\circ = 0,79$$

$$\text{c) } V_{(ab)rms} = I_{rms} \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$= (2,5)\sqrt{30^2 + 62,8^2}$$

$$= 174 \text{ V}$$

$$d) X'_C = 2X'_L \Rightarrow \frac{1}{\omega' C} = 2\omega' L$$

$$\Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{1}{2LC}} = \sqrt{\frac{1}{2(0,2)(80 \times 10^{-6})}}$$

$$= 177 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

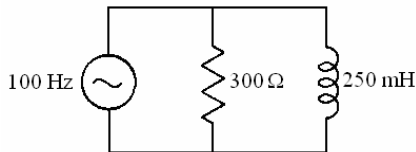
$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{177}{2\pi} = 28,15 \text{ Hz}$$

e) Para resonancia: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC'}}$

$$\Rightarrow C' = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(100\pi)^2 (0,20)}$$

$$= 50,7 \times 10^{-6} \text{ F}$$

Ejemplo 38. Una resistencia de 300 ohmios y una inductancia de 250 mH están conectadas en paralelo a través de una fuente de la CA de 100 hertzios, como se muestra en la figura. La corriente rms a través de la inductancia es 0,50A.



- a) ¿Cuál es la corriente rms a través de la resistencia?
- b) ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente?
- c) ¿Cuál es la impedancia del circuito?
- d) ¿Cuál es el ángulo por cuál el voltaje se adelanta a la corriente (negativa si se retrasa)?
- e) para que el circuito esté en resonancia, se conecta un condensador en paralelo a través de la fuente de la CA. ¿Cuál es la capacidad de este condensador?

Solución.

$$a) I_{Rrms} = \frac{V_{rms}}{R} = \frac{78,5}{300} = 0,26 \text{ A}$$

$$b) I_{Lrms} = \frac{V_{rms}}{X_L}$$

$$\Rightarrow V_{rms} = I_{Lrms} X_L = (0,5)(200\pi)(0,250)$$

$$= 78,5 \text{ V}$$

$$c) \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{300^2} + \frac{1}{[(200\pi)0,25]^2}}$$

$$= 139,12\Omega$$

$$d) \cos \phi = \frac{I_R}{I} = \frac{I_R}{\sqrt{I_R^2 + I_L^2}}$$

$$= \frac{0,26}{\sqrt{0,26^2 + 0,5^2}} = 0,46$$

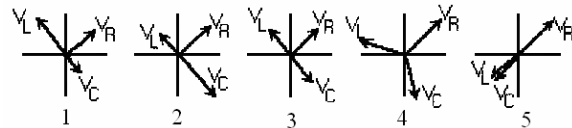
$$\Rightarrow \phi = 62^\circ$$

$$e) \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(200\pi)^2 (0,25)}$$

$$= 10,14 \times 10^{-6} \text{ F}$$

Ejemplo 39. ¿Cuál de los diagramas de fasores representa un circuito RLC en serie en resonancia?



Solución.

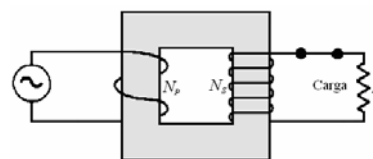
Es el diagrama 3 porque V_L y V_C tienen la misma magnitud y son opuestos.

TRANSFORMADOR IDEAL.

Con anterioridad se advirtió que al variar la corriente en una espira de alambre, induce una corriente en una espira cercana. La corriente inducida se origina en la variación del campo magnético asociado con la variación en la corriente cuando es alterna, presenta una ventaja distinta de la corriente continua debido al efecto inductivo de la corriente que en forma constante varía en magnitud y dirección. La aplicación más común de este principio la ofrece el transformador, un dispositivo que incrementa o disminuye el voltaje en un circuito de corriente alterna.



Un transformador sencillo se muestra en la figura siguiente.



Hay tres partes esenciales:

- 1) Una bobina primaria conectada a una fuente de Corriente alterna.
- 2) Una secundaria y
- 3) Un núcleo laminado de hierro dulce.

Conforme se aplica una corriente alterna en el devanado primario, las líneas del flujo magnético varían a través del núcleo de hierro de tal modo que se induce una corriente alterna en el devanado secundario.

El flujo magnético que varía constantemente se establece en todo el núcleo del transformador y pasa a través de las bobinas del primario y secundario. La fuerza electromotriz \mathcal{E}_p , inducida en la bobina del primario es

$$\mathcal{E}_p = -n_p \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

donde n_p = número de vueltas en el primario

$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ = rapidez con que cambia el flujo magnético.

En forma análoga la fuerza electromotriz \mathcal{E}_s inducida en la bobina del secundario es

$$\mathcal{E}_s = -n_s \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

donde n_s es el número de vueltas en el secundario. Puesto que el mismo cambio de flujo se produce con la misma rapidez a través de cada bobina, de las dos ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_s} = \frac{n_p}{n_s}$$

$$\frac{\text{voltaje en el primario}}{\text{voltaje en el secundario}} = \frac{\text{número de vueltas en el primario}}{\text{número de vueltas en el secundario}}$$

El voltaje inducido está en proporción directa con el número de vueltas. Si se varía la razón de las vueltas del secundario N , respecto a las vueltas del primario N , un voltaje de entrada (primario) puede suministrar cualquier voltaje de salida deseado (secundario). Por ejemplo, si hay 40 veces más vueltas en la bobina del secundario, un voltaje de entrada de 120V incrementará el voltaje de salida en la bobina del secundario a $40 \times 120 \text{ V} = 4800 \text{ V}$. El transformador que produce un voltaje de salida mayor se llama transformador elevador. Es posible construir un transformador reductor si el número de vueltas en el primario es mayor que el número de vueltas en el secundario. Si se emplea un transformador reductor el resultado que se obtiene es un voltaje de salida menor.

El rendimiento de un transformador se define como la razón de la potencia de salida respecto a la potencia de entrada. Si se recuerda que la potencia eléctrica es igual al producto del voltaje y la corriente, el rendimiento E de un transformador puede escribirse como

$$E = \frac{\text{Potencia de entrada}}{\text{Potencia de salida}} = \frac{\mathcal{E}_s I_s}{\mathcal{E}_p I_p},$$

donde I_p e I_s son las corrientes en las bobinas del primario y secundario, respectivamente. La mayor parte de los transformadores eléctricos son diseñados cuidadosamente para obtener rendimientos muy altos, generalmente por arriba 90070.

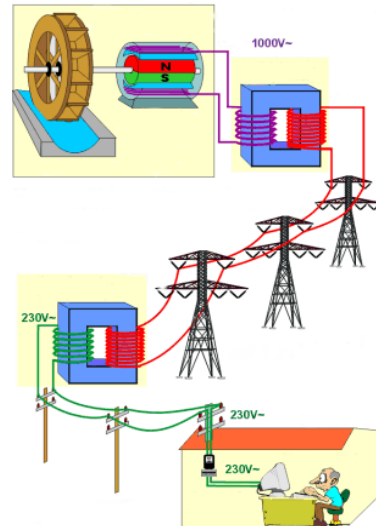
Es importante reconocer que no se obtiene una ganancia de potencia como resultado de la acción de un transformador. Cuando el voltaje se eleva, la corriente debe ser reducida para que el producto $\mathcal{E}I$ no se incremente. Para ver esto claramente supóngase que cierto transformador tiene un rendimiento del 100 %, para este transformador

ideal, la ecuación $E = \frac{\mathcal{E}_s I_s}{\mathcal{E}_p I_p}$ se reduce a

$$\mathcal{E}_s I_s = \mathcal{E}_p I_p \text{ o } \frac{I_p}{I_s} = \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p}$$

Esta ecuación demuestra claramente una relación inversa entre la corriente y el voltaje inducido.

Ejemplo 40. Un generador de corriente alterna que suministra 20 A a 6000 V se conecta a un transformador. ¿Cuál es la corriente de salida a 120000 V si el rendimiento del transformador 100%?



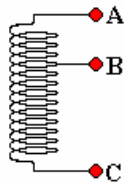
Solución.

$$\text{De } \frac{I_p}{I_s} = \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} \Rightarrow I_s = \frac{\mathcal{E}_p I_p}{\mathcal{E}_s} = \frac{(6000)(20)}{(120000)} = 1 \text{ A}$$

Nótese que en el ejemplo precedente la corriente se redujo a 1 A en tanto que el voltaje aumentó 20 veces. Ya que las pérdidas de calor en las líneas de transmisión varían directamente con el cuadrado de la corriente ($I^2 R$), esto significa que la potencia eléctrica puede transmitirse a grandes distancias sin que haya pérdidas

significativas. Cuando la potencia eléctrica llega a su destino se utilizan transformadores reductores para suministrar la corriente deseada a voltajes menores.

Ejemplo 41. En un autotransformador se utiliza una sola bobina para el primario y secundario. En la bobina mostrada aquí hay tres puntos unidos a una bobina envuelta en un núcleo de hierro. Dos puntos cualesquiera se pueden utilizar como el primario, y dos cualesquiera se pueden utilizar como el secundario. Entre A y B hay 300 vueltas, y entre B y C hay 900 vueltas. ¿Qué voltajes de salida son posibles para un voltaje de entrada primario de 120 V_{AC}?



Solución.

Los cocientes posibles de las vueltas son 300:900, 300:1200, 900:1200, y los recíprocos éstos.

Por lo tanto los cocientes posibles de las vueltas son 1:3, 1:4, 3:4, 3:1, 4:1, y 4:3. 1:1 también es posible.

Por lo tanto los voltajes secundarios posibles son 30, 40, 90, 120, 160, 360, y 480 V_{AC}.

Ejemplo 42. Derive la relación de $\frac{n_1}{n_2}$ para la

transferencia máxima de potencia.

Solución.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{y} \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

Porque $Z_1 = \frac{V_1}{I_1}$ y $Z_2 = \frac{V_2}{I_2}$, la relación de

impedancias es:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{V_1 I_2}{V_2 I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2$$

Por lo tanto la relación de las vueltas necesarias para emparejar las impedancias es

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

Ejemplo 43. Un altoparlante cuya bobina de la voz tiene una impedancia de 6 Ω debe ser utilizado con un amplificador cuya impedancia de carga sea 7350 Ω. Encuentre la relación de vueltas en un transformador que empareje estas impedancias.

Solución.

Utilicemos los subíndices 1 para el amplificador y 2 para la bobina de la voz. Para la transferencia máxima de potencia.

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{7350}{6}} = \sqrt{1225} = 35$$

Así la relación de vueltas es 35:1, y la bobina del transformador conectada con el amplificador debe tener 35 veces tantas vueltas como la bobina conectada con la bobina de la voz.

Ejemplo 44. Un transformador de baja recibe en su circuito primario una corriente alterna con una intensidad eficaz de 10 A, bajo una tensión de 500 V. La relación de transformación es 5 y además de él hay una pérdida de energía del 10%. Calcúlese la intensidad eficaz de corriente que se produce en el secundario en régimen normal.

Solución.

La tensión del secundario será:

$$V_s = \frac{500}{5} = 100 \text{ V.}$$

Teniendo en cuenta las pérdidas de potencia:

$$P_p(0,9) = P_s \Rightarrow V_p I_p(0,9) = V_s I_s$$

$$\Rightarrow I_s = \frac{V_p I_p(0,9)}{V_s}$$

$$I_s = \frac{(500)(10)(0,9)}{(100)} = 45 \text{ A.}$$

Ejemplo 45. Un transformador reductor ha de alimentar una instalación de 2500 focos de 125 V, 0,5 A, tomando la corriente de una red de alta de 12500 V. ¿Cuántas espiras han de tener las dos bobinas del transformador, si en el primario precisa, por lo menos, de una espira por cada 0,3 mA, y el rendimiento del transformador resulta ser del 93,3%?

Solución.

La potencia del secundario es:

$$P_s = n V_s I_s = 2500(125)(0,5) = 1,563 \times 10^5 \text{ W}$$

y, por tanto, la del primario debe ser:

$$P_p = \frac{P_s}{0,933} = \frac{1,563 \times 10^5}{0,933} = 1,675 \times 10^5 \text{ W}$$

Así, la corriente en el primario será:

$$I_p = \frac{P_s}{V_p} = \frac{1,675 \times 10^5}{1,25 \times 10^4} = 13,4 \text{ A.}$$

y, por tanto, el número de espiras precisas es de:

$$n_p = \frac{13,4}{0,3 \times 10^{-3}} = 44659 \text{ espiras.}$$

Las del secundario son:

$$n_s = n_p \frac{V_s}{V_p} = 44659 \frac{125}{12500} = 447 \text{ espiras.}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. La frecuencia de la fuerza electromotriz alterna aplicada a un circuito en serie que tiene resistencia, inductancia, y condensador es duplicada. ¿Qué sucede a R , a X_L , y a X_C ?

Respuesta.

R no cambia, X_L se duplica, y X_C se hace la mitad.

2. a) ¿Cuál es el valor mínimo el factor de potencia que un circuito puede tener? ¿Bajo qué circunstancias puede ocurrir esto?
b) ¿Cuál es el valor máximo el factor de potencia que puede tener? ¿Bajo qué circunstancias puede ocurrir esto?

Respuesta.

a) El valor mínimo es 0, que puede ocurrir solamente si $R = 0$ en un circuito en el cual el que X_L no sea igual a X_C .
b) El valor máximo es 1, que ocurre en la resonancia cuando $X_L = X_C$.

3. Un voltímetro a través de un circuito de corriente alterna lee 40 V, y un amperímetro en serie con el circuito lee 6 A.

a) ¿Cuál es la diferencia potencial máxima a través del circuito?
b) ¿Cuál es la corriente máxima en el circuito?
c) ¿qué otra información es necesaria para determinar la potencia en el circuito?

Respuesta.

a) 56,6, V, b) 8,5 A, c) Angulo de fase.

4. Encuentre la reactancia de una bobina de 10 mH cuando está en un circuito de 500 Hz.

Respuesta. 31,4 Ω

5. La reactancia de una inductancia es 1000 Ω a 20 Hz. Encuentre su inductancia.

Respuesta. 0,796 H

6. Una corriente de 0,20 A atraviesa pasa por una inductancia de 0,15 h de resistencia insignificante que está conectada con una fuente 80 V de corriente alterna. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente?

Respuesta. 424 Hz

7. Encuentre la reactancia de un condensador de 5 μ F a 10 Hz y a 10 kHz.

Respuesta. 3183 Ω ; 3,183 Ω .

8. Un condensador tiene una reactancia de 200 Ω a 1000 Hz. ¿Cuál es su capacidad?

Respuesta. 0,796 μ F

9. Un condensador de 5 μ F está conectado con una fuerza electromotriz alterna de 6 kHz, y fluye una corriente de 2 A. Encuentre la magnitud de la fuerza electromotriz eficaz.

Respuesta. 10,6 V

10. Un condensador de 5 pF conduce 1 A cuando está conectado con una fuente de corriente alterna de 60 V. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente?

Respuesta. 531 Hz

11. Un condensador de 25 μ f está conectado en serie con un resistencia de 50 Ω , y a una diferencia potencial de 120 V, 60 Hz. Encuentre la corriente en el circuito y la potencia disipada en ella.

Respuesta. 0,102 A; 0,524 W

12. Un condensador está conectado en serie con una resistencia de 8 Ω , y la combinación se pone a través de una fuente de energía de 24 V, 1000 Hz. Fluye una corriente de 2 A. Encuentre
a) la capacidad del condensador,
b) el ángulo de la fase, y
c) la potencia disipada por el circuito.

Respuesta.

a) 17,8 μ F, b) - 48°, c) 32 W

13. Una inductancia de 0,1 H, 30 Ω está conectada con una fuente de 50V, 100Hz. Encuentre la corriente en la inductancia y la potencia disipada en ella.

Respuesta. 0,72 A; 15,6 W

14. La corriente en un resistencia es 1 A cuando está conectada con una fuente de 50 V, 100 Hz.
a) ¿Qué reactancia inductiva se requiere para reducir la corriente a 0,5 A? ¿Qué valor de L logrará esto?

b) ¿Qué reactancia capacitiva se requiere para reducir la corriente a 0,5 A? ¿Qué valor de C logrará esto?

c) ¿Cuál será la corriente si la inductancia y el condensador antedichos se ponen en serie con la resistencia?

Respuesta.

a) 86,6 Ω ; 137,8 mH b) 86,6 Ω ; 18,4 μ F e) 1 A

15. Una resistencia pura, un condensador puro, y una inductancia pura están conectados en serie a través de una fuente de corriente alterna. ¿Un voltímetro de corriente alterna colocado a través de cada uno de estos elementos del circuito alternadamente lee 10, 20, y 30 V. ¿Cuál es la diferencia potencial de la fuente?

Respuesta. 14 V

16. Un circuito inductivo con un factor de potencia de 80 por ciento consume 750 W de energía. ¿Cuál es la mínima potencia en voltamperios de la fuente?

Respuesta. 938 VA

17. Se conectan en serie a una tensión de corriente alterna de 60Hz una resistencia R y una bobina de 1,4 H. La tensión eficaz de la resistencia es 30 V y en la bobina 40 V.

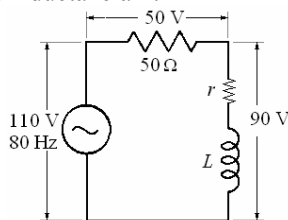
- a) ¿Cuánto vale la resistencia?
- b) ¿Cuál es la tensión eficaz V entre la entrada y la salida del montaje?

Respuesta.

a) $R = 396\Omega$, b) $V = 50$ V

18. Dado el circuito de la figura:

- a) Hallar la pérdida de potencia en la bobina.
- b) Hallar la resistencia r de la bobina.
- c) Hallar la inductancia L .



Respuesta.

a) 15 W, b) $r = 15\Omega$, c) $L = 0,235$ h

19. Una carga inductiva disipa 75 W de energía cuando conduce una corriente de 1,0 A de una línea de energía de 120 V, 60 Hz.

- a) ¿Cuál es el factor de potencia?
- b) ¿Qué condensador se debe conectar en serie en el circuito para aumentar el factor de potencia a 100 por ciento?
- c) ¿Cuál sería la corriente?
- d) ¿Qué potencia disiparía el circuito?

Respuesta. a) 0,625 b) 28,6 μ F c) 1,6 A d) 192 W

20. Un circuito que consiste en un condensador en serie con una resistencia de 50Ω conduce 4 A de una fuente de 250 V, 200 Hz.

- a) ¿Qué potencia se disipa?
- b) ¿Cuál es el factor de potencia?

c) ¿Qué inductancia se debe conectar en serie en el circuito para aumentar el factor de la potencia a 100 por ciento?

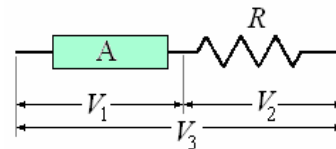
d) ¿Cuál sería la corriente?

e) ¿Qué potencia disiparía el circuito?

Respuesta.

a) 800 W b) 80 % c) 30 mH d) 5 A e) 1250 W

21. Calcular la potencia W que consume el aparato A en función de las tensiones eficaces V_1, V_2, V_3 y del valor de la resistencia R .



Respuesta.

$$W = \frac{V_3^2 + V_1^2 + V_2^2}{2R}$$

22. En un circuito en serie $R = 100 \Omega$, $X_L = 120 \Omega$, y $X_C = 60 \Omega$ cuando está conectado con una fuente de la corriente alterna de 80 V. Encuentre

- a) la corriente en el circuito,
- b) el ángulo de la fase, y
- c) la corriente si la frecuencia de la fuente de energía se cambiara a la frecuencia de resonancia del circuito.

Respuesta.

a) 0,69 A b) 31° c) 0,80 A

23. Un condensador de 10μ f, una inductancia de 10 mH, y una resistencia de 10Ω se conectan en serie con una fuente de 45 V, 400 Hz. Hallar

- a) La impedancia del circuito.
- b) La corriente,
- c) La potencia que disipa.
- d) La mínima potencia en voltamperios de la fuente.

Respuesta. a) 18Ω , b) 2,5 A, c) 62,5 W, d) 112,5 VA

24. a) Encuentre la frecuencia de resonancia f_R del circuito de problema anterior.

b) ¿Qué corriente fluirá en el circuito si está conectada con una fuente de energía 45 V y que frecuencia sea f_R ?

- c) ¿Qué potencia será disipada por el circuito?
- d) La mínima potencia en voltamperios de la fuente.

Respuesta.

a) 503 Hz b) 4,5 A. c) 202,5 W d) 202,5 VA

25. Un condensador de 60μ F, una inductancia de 0,3 H, y una resistencia de 50Ω se conectan

en serie con una fuente de 120 V, 60 Hz. Encuentre

- a) La impedancia del circuito,
- b) La corriente en ella,
- c) La potencia que se disipa, y
- d) La mínima potencia en voltamperios de la fuente.

Respuesta.

- a) 85 Ω b) 1,41 A c) 99,4 W d) 169 VA

- 26. a) Encuentre la frecuencia de resonancia f_R del circuito del problema anterior.
- b) ¿Qué corriente fluirá en el circuito si está conectada con una fuente de 20 V cuya frecuencia sea f_R ?
- c) La potencia que se disipa, y
- d) La mínima potencia en voltamperios de la fuente.

Respuesta.

- a) 37,5 Hz b) 2,4 A c) 288 W d) 288 VA

- 27. Un resistencia de 10 Ω y un condensador de 8 pF se conectan en paralelo a través de una fuente de 10 V, 1000 Hz. Encuentre
- a) la corriente en cada componente,
- b) la corriente total,
- c) la impedancia del circuito, y
- d) el ángulo de la fase y la potencia del circuito.

Respuesta. a) $I_C = 0,5$ A, $I_R = 10$ A b) 1,12

- A c) 8.9 Ω d) 27°; 10 W

- 28. Una resistencia de 10 Ω y una inductancia de 2 mH se conectan en paralelo a través de una fuente de 10 V, 1000 Hz. Encuentre
- a) la corriente en cada componente,
- b) la corriente total,
- c) la impedancia del circuito, y
- d) el ángulo de la fase y la potencia del circuito.

Respuesta.

- a) $I_L = 0,8$ A, $I_R = 1,0$ A b) 1,3 A c) 7,7 Ω
- d) - 40°; 10 W

- 29. Una resistencia 25 Ω, un condensador de 40 μF, y una bobina de 40 mH se conectan en paralelo con una fuente de 24 V, 100 Hz. Hallar.
- a) la corriente en cada componente,
- b) la corriente total en el circuito,
- c) la impedancia del circuito,
- d) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje, y
- e) la potencia total disipada por el circuito.

Respuesta. a) 0,960 A; 0,603 A; 0,955 A b) 1,022 A c) 23,48 Ω d) I se atrasa de V 20° e) 23 W

- 30. El circuito del problema anterior se conectan a una fuente de 24 V, 200 Hz. Conteste a las mismas preguntas para este caso.

Respuesta.

- a) 0,960 A; 1,206 A; 0,477 A b) 1,205 A
- c) 19,91 Ω d) I se adelanta de V 37° e) 23 W

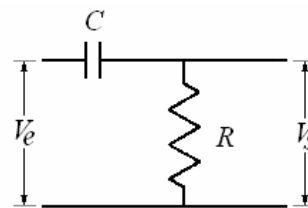
- 31. Un micrófono cuya impedancia es 20 Ω debe ser utilizado con un amplificador con impedancia de entrada 50000 Ω. Encuentre el cociente de vueltas en el transformador necesario para emparejar estas dos impedancias.

Respuesta.

El cociente de vueltas es 50:1; la bobina con el mayor número de vueltas se debe conectar con el amplificador puesto que tiene la mayor impedancia.

- 32. El circuito de la figura se denomina filtro de pasa alta, porque las frecuencias de entrada elevadas se transmiten con una amplitud mayor que las frecuencias bajas:

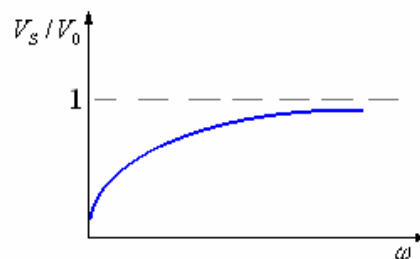
- a) Si la tensión de entrada es $V_e = V_0 \cos \omega t$, hallar el módulo de la tensión de salida V_s .
- b) ¿A qué frecuencia angular la tensión de salida es la mitad que la de entrada?
- c) Dibujar un gráfico de V_s / V_0 en función de ω .



Respuesta.

a) $V_s = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$, b) $\omega = \frac{1}{RC\omega}$,

c)



- 33. En una línea de corriente alterna de 120 V se derivan un calentador, que consume 1 kW, y un motor, que consume 2 kW, con un factor de potencia 0,5. Calcúlese la intensidad total tomada de la línea y el factor de potencia de la carga total.

Respuesta. $I = 38,2$ A; $\cos \phi = 0,65$.

34. Se conecta una impedancia Z a una línea de corriente alterna de 100 V y 60 ciclos. Al conectar un condensador de $265 \mu\text{F}$ en paralelo con Z , la corriente de la línea se reduce a la mitad de su primitivo valor, y está en fase con el voltaje de la línea. Calcúlese la potencia suministrada a la impedancia.

Respuesta. $P = 580 \text{ W}$.

35. Un circuito se compone de una resistencia de 100Ω en serie con un condensador. El circuito ha sido proyectado para tener a 100 Hz doble impedancia que a 300 Hz. ¿Cuál será la capacidad del condensador?

Respuesta. $C = 6,85 \text{ pF}$.

36. A una línea alterna de 100 V se conectan una resistencia y una autoinductancia en serie. Determinése:

a) Lo que señala un voltímetro entre los extremos de la resistencia, si marca lo mismo entre los extremos de la autoinductancia.

b) lo que indicará el voltímetro al modificar R y L de modo que marque 50 V para la autoinductancia.

Respuesta. $I_1 R_1 = 70,7 \text{ V}$; $I_2 R_2 = 86,5 \text{ V}$.

37. Un generador de corriente alterna alimenta un circuito constituido por una resistencia óhmica R , en serie con un paralelo, una de cuyas ramas es una autoinductancia pura L y la otra un condensador C . Determinése la frecuencia que haga que la intensidad que circula por el circuito sea mínima

Respuesta.

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Capítulo 6. Las Ecuaciones de Maxwell y Ondas Electromagnéticas

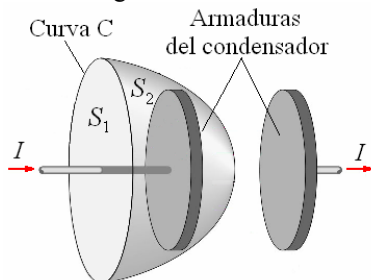
INTRODUCCIÓN

¿Qué tienen en común la luz, las ondas de radio, las microondas, y los rayos X? Todos son formas de ondas electromagnéticas. Juntos representan una gama enorme de fenómenos que son muy importantes en nuestro mundo tecnológico moderno.

La predicción de la existencia de ondas electromagnéticas y una descripción de su naturaleza primero fue publicada por James Clerk Maxwell en 1865. Maxwell era un físico teórico enormemente talentoso que hizo contribuciones importantes en muchas áreas de la física incluyendo electromagnetismo, termodinámica, la teoría cinética de gases, la visión de color, y la astronomía. Él es el más conocido, sin embargo, por su tratado sobre campos eléctricos y magnéticos, que hemos mencionado ya. Su descripción de ondas electromagnéticas, con una predicción de su velocidad, es solamente una parte de su trabajo

CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO DE MAXWELL

Cuando la corriente no es constante, la ley de Ampere no es válida. Podemos ver por qué es así considerando la carga de un condensador.



Consideremos la curva C. De acuerdo con la ley de Ampere, la integral curvilínea del campo magnético a lo largo de esta curva es igual a μ_0 multiplicado por la corriente total que atraviesa una superficie cualquiera limitada por dicha curva. Esta superficie no es necesario que sea plana. Se indican en la figura dos superficies limitadas por la curva C. La corriente a través de la superficie 1 es I . No existe ninguna corriente a través de la superficie 2 puesto que la carga está detenida en la placa del condensador. Así pues existe una ambigüedad en la frase “corriente a través de una superficie cualquiera limitada por la curva”. Sin embargo, en el caso de corrientes constantes, la carga no se almacena en ningún punto y se tiene siempre la misma corriente sin que importe la superficie que escojamos.

Maxwell se dio cuenta de esta falla de la ley de Ampere y demostró que la ley podía generalizarse para incluir todos los casos si la corriente I de la ecuación se sustituía por la suma de la verdadera corriente I y otro término I_d denominado corriente

de desplazamiento de Maxwell. La corriente de desplazamiento se define por

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \text{ en donde } \Phi_E \text{ es el flujo de campo}$$

eléctrico. La forma generalizada de la ley de Ampere es entonces

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Podemos comprender la generalización de la ley de Ampere considerando nuevamente la figura anterior.

Denominemos a la suma $I + I_d$ corriente generalizada. De acuerdo con nuestros razonamientos anteriores la misma corriente generalizada debe cruzar cualquier área limitada por la curva C. Así pues no puede existir ninguna corriente generalizada que entre o que salga del volumen cerrado. Si existe una verdadera corriente neta I que entra en el volumen, deberá existir una corriente de desplazamiento igual I_d que salga del volumen. En el volumen de la figura existe una corriente verdadera neta I que entra en el volumen la cual aumenta la carga dentro del mismo:

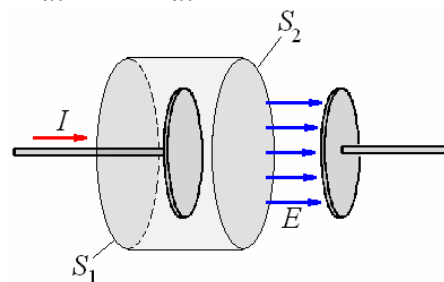
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

El flujo de campo eléctrico fuera del volumen está relacionado con la carga por la ley de Gauss:

$$\Phi_{E \text{ neto fuera}} = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

El aumento de carga por unidad de tiempo resulta ser así proporcional al aumento del flujo neto por unidad de tiempo fuera del volumen:

$$\epsilon_0 \frac{d\Phi_{E \text{ neto fuera}}}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$



La figura anterior muestra las superficies S_1 y S_2 que encierran una placa de un condensador. En este caso todo el flujo del campo eléctrico atraviesa S_2 . El campo eléctrico entre las placas está relacionado con la carga por

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Siendo A el área de las placas. El flujo a través de S_2 es

$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

La corriente de desplazamiento que atraviesa S_2 es

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Que es igual a la verdadera corriente que atraviesa S_1 . Una característica significativa de la generalización de Maxwell consiste en que un campo magnético resulta ser producido por un campo eléctrico variable lo mismo que por corrientes eléctricas verdaderas. No hay ninguna duda de que Maxwell fue inducido a obtener esta generalización por el resultado recíproco de que se produce un campo eléctrico mediante un flujo magnético variable lo mismo que por cargas eléctricas. Este último resultado, conocido como ley de Faraday, precedió a la generalización de Maxwell.

Ejemplo 1. En una región cilíndrica del espacio de radio R un campo eléctrico está variando en función del tiempo, determine la dirección y magnitud del campo magnético inducido para $r < R$.

Solución.

De la ecuación

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot \hat{n} dS$$

tenemos que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

De donde:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot \hat{n} dS$$

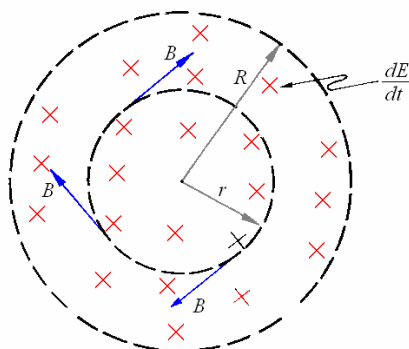
Integrando para $r < R$ ambos lados de la ecuación se tiene que:

$$B 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

Despejando el campo magnético:

$$B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{r}{2} \frac{dE}{dt}$$

La dirección del campo magnético inducido tiene la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, ya que el campo eléctrico está entrando al plano y creciendo, como se muestra en la figura siguiente.



LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Lo que para la Mecánica Clásica significan las Leyes de Newton lo son las Ecuaciones de Maxwell para los fenómenos Eléctricos y Magnéticos. Incluso, estas ecuaciones superaron la dificultad de las Leyes de Newton ya que son compatibles con la Teoría de la Relatividad Especial como lo demostraría el propio A. Einstein en 1905.

Las leyes del electromagnetismo fueron enunciadas por Gauss, Coulomb, Ampere, Faraday, etc., de tal forma que los fenómenos que describen afectan a una región del espacio de dimensiones finitas. Estas leyes fueron recopiladas por **James Clerk Maxwell** quien elaboró una completa teoría Electromagnética basándose en sus famosas ecuaciones, las que a partir de ese momento se denominaron las ecuaciones de Maxwell-

1. Ley de gauss para campo eléctrico (\vec{E})

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

donde q es la carga neta encerrada por la superficie sobre la que se integra (superficie gaussiana), esta ecuación se puede expresar en su forma diferencial de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

donde ρ es densidad volumétrica de carga eléctrica de la superficie gaussiana.

Estas ecuaciones establecen que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por la superficie dividida por ϵ_0 . Lo que implica con un análisis posterior que las líneas de campo eléctrico se originan en cargas positivas y terminan en cargas negativas (Existen fuentes y sumideros).

2. Ley de gauss para campo magnético (\vec{B})

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

lo que corresponde a:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Esto implica que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero, es decir, el número de líneas de campo magnético que entran a la superficie es igual al número de ellas que salen. Esto significa que en la naturaleza NO existen monopolos magnéticos, sólo existen dipolos magnéticos.

3. Ley de Faraday (Inducción Electromagnética)

La Ley de Faraday explica cómo un flujo campo magnético variable en el tiempo puede inducir en un circuito una corriente eléctrica cuya fuerza electromotriz viene dada por:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

En su forma integral se puede expresar como:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

y en su forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

establece que el rotacional del campo eléctrico inducido por un campo magnético variable es igual a menos la derivada parcial del campo magnético con respecto al tiempo.

4. Ley generalizada de Ampere - Maxwell

Fue Maxwell, quien modificó la Ley de Ampere introduciéndole la corriente de desplazamiento que fue una de sus mayores contribuciones a la electricidad y magnetismo, la corriente de desplazamiento se debe precisamente a la variación del campo eléctrico en función del tiempo, es decir, que la ecuación de Ampere generalizada se escribe de la siguiente forma:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 I_d, \text{ donde } I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Por lo tanto, la ecuación anterior la podemos expresar como:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \text{ que se conoce}$$

como Ley de Ampere-Maxwell.

Luego de algunas reducciones, se puede expresar esta ley en su forma diferencial:

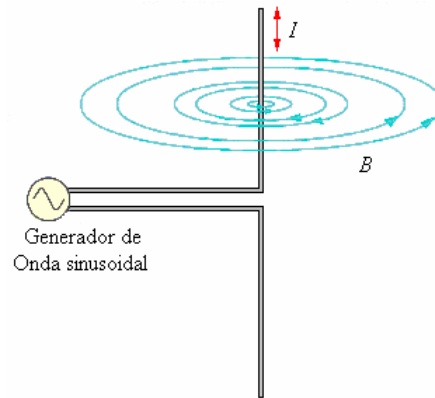
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

¿Qué es una onda electromagnética?

Para entender las ondas electromagnéticas, necesitamos repasar los conceptos de campo eléctrico y de campo magnético. Ambos campos pueden ser producidos por partículas cargadas. El movimiento de la carga genera un campo magnético, pero un campo eléctrico está presente aun sin movimiento de la carga. Estos campos son una característica del espacio alrededor de las cargas y son útiles para predecir las fuerzas en otras cargas, esto ya fue discutido anteriormente.

Suponga que la carga está fluyendo hacia arriba y hacia abajo en dos alambres conectados a una fuente de corriente alterna, como en la figura siguiente.



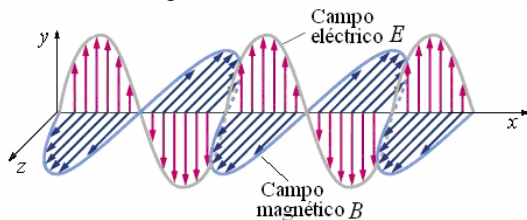
Si la dirección de la corriente cambia lo suficientemente rápido, una corriente alterna fluye en este dispositivo aun cuando parece ser un circuito abierto. La carga de un signo comenzará a acumularse en los alambres, pero antes de que la carga acumulada sea demasiado grande, la corriente se invierte, la carga regresa, y carga de signo opuesto comienza a acumularse. Tenemos así una cantidad de carga cambiante y una corriente eléctrica cambiante en los alambres.

Los campos magnéticos generados por este dispositivo se pueden representar por líneas circulares de campo con centro en los alambres. Este campo, no obstante está cambiando constantemente en magnitud y dirección como los cambios de la corriente. Por la ley de Faraday, Maxwell sabía que un campo magnético que cambia generaría un voltaje en un circuito cuyo plano es perpendicular a las líneas del campo magnético. Un voltaje implica un campo eléctrico, aun en ausencia de un circuito, un campo magnético cambiante generará un campo eléctrico en cualquier momento en el espacio en el cual el campo magnético está cambiando.

Así, esperamos que un campo eléctrico cambiante sea generado por el campo magnético cambiante, según la ley de Faraday. Maxwell consideró simetría en el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos: un campo eléctrico cambiante también genera un campo magnético. Maxwell predijo este fenómeno en sus ecuaciones que describían el comportamiento de campos eléctricos y magnéticos. Las mediciones experimentales confirmaron su existencia.

Maxwell se dio cuenta que una onda que implicaba estos campos se podría propagar a través del espacio. Un campo magnético cambiante produce un campo eléctrico cambiante, que, a su vez produce un campo magnético cambiante, y así sucesivamente. En el vacío, el proceso puede producirse indefinidamente y afectar partículas cargadas a distancias mucho mayores de la fuente que podría estar con campos estáticos generados por corrientes o cargas no cambiantes. Así es cómo se produce una onda electromagnética. Los alambres en la figura anterior sirven como antena transmisora para las ondas. Se puede utilizar una segunda antena para detectar las ondas.

Aunque Maxwell predijo la existencia de tales ondas en 1865, el primer experimento para producirlas y para detectarlas con circuitos eléctricos fue realizado por Heinrich Hertz (1857 - 1894) en 1888. Las antenas originales de Hertz eran lazos circulares del alambre en vez de los alambres rectos, pero él también utilizó alambres rectos trabajos posteriores. Él podía detectar una onda producida por el circuito fuente con otro circuito a una distancia considerable de la fuente. Hertz descubrió las ondas radiales haciendo estos experimentos.



La figura anterior muestra la naturaleza de ondas electromagnéticas simples. Si el campo magnético está en plano horizontal, como en la figura, el campo eléctrico generado por el campo magnético cambiante está en la dirección vertical. Estos dos campos son perpendiculares entre si, y son también perpendiculares a la dirección del recorrido alejados de la antena fuente. Las ondas electromagnéticas son por lo tanto ondas transversales. Las magnitudes de los campos eléctrico y magnético se representan aquí sinusoidalmente y en fase el uno con el otro, pero patrones son también posibles más complejos. Como los otros tipos de ondas que hemos estudiado el patrón sinusoidal de la onda se mueve. La figura muestra las magnitudes y las direcciones en un instante de tiempo y a lo largo de solo una línea en espacio. La misma clase de variación ocurre en todas las direcciones perpendiculares a la antena. Como el patrón sinusoidal se mueve, los valores del campo en todo momento en del espacio aumentan y la disminuyen alternativamente. Mientras los campos pasan por cero, cambian la dirección y comienzan a aumentar en la dirección opuesta. Estos cambios coordinados de los campos eléctrico y magnético componen la onda electromagnética. Maxwell demostró que las ondas electromagnéticas (propagándose a lo largo de una dirección x) en el espacio libre se describirían por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Ecuación de onda para E_y

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = +\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación de la onda $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$, vemos que E_y obedece a una ecuación de onda para unas ondas con velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Tomando los valores más acertados de μ_0 y de ϵ_0 se encuentra que esta es precisamente la velocidad de la luz en el espacio libre.

Así pues, hemos demostrado que tanto el campo eléctrico E como el magnético B obedecen a una ecuación de onda para las ondas que se mueven con velocidad que es la velocidad de la luz.

En cualquier caso, el campo eléctrico y el campo magnético son perpendiculares al eje x, dirección de propagación. Como hemos visto, las ondas electromagnéticas son transversales. Para mayor sencillez, hemos supuesto que el campo eléctrico tiene dirección y. Esto equivale a seleccionar una polarización particular para la onda transversal. Una vez hecha esta selección ya no podemos escoger libremente la dirección del campo magnético.

Ejemplo 2. a) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en viajar de la Luna a la Tierra, una distancia de 384000 km? b) La luz de la estrella Sirio tarda 8,61 años luz en llegar a la Tierra. ¿Cuál es la distancia a Sirio?

Solución.

a) $t = \frac{d}{c} = \frac{3,84 \times 10^8}{3,00 \times 10^8} = 1,28 \text{ s}$

b) El tiempo de viaje de la luz:
8,61 años

$$= (8,61 \text{ años}) \frac{(365 \text{ días})}{(1 \text{ año})} \frac{(24 \text{ horas})}{(1 \text{ día})} \frac{(3600 \text{ s})}{(1 \text{ hora})}$$

$$= 2,72 \times 10^8 \text{ s}$$

$$d = ct = (3,0 \times 10^8) (2,72 \times 10^8)$$

$$= 8,16 \times 10^{16} \text{ m} = 8,16 \times 10^{13} \text{ km}$$

Ejemplo 3. ¿Cuál del siguiente es una afirmación verdadera?

- A) Todas las ondas electromagnéticas viajan a la misma velocidad en vacío.
- B) La luz aumenta su velocidad cuando se mueve desde el aire al agua.
- C) Algunas ondas electromagnéticas tienen carga eléctrica.
- D) En el vacío las ondas electromagnéticas de alta frecuencia viajan a una velocidad más alta que las ondas electromagnéticas de baja frecuencia.
- E) Los electrones son una clase de onda electromagnética.

Solución.

(A) Todas las ondas electromagnéticas viajan a la misma velocidad en vacío.

$$c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \lambda f$$

Ejemplo 4. Fantasmas en el televisor. En una imagen de televisión, se ven imágenes fantasma cuando la señal de la transmisora viaja el receptor tanto directa como indirectamente, luego de reflejarse en un edificio o alguna otra masa metálica grande. En

un televisor de 25 pulgadas, el fantasma aparece aproximadamente 1,0 cm a la derecha de la imagen principal si la señal reflejada llega 0.60 s después de la señal principal. En este caso, ¿cuál es la diferencia de longitud entre las trayectorias de las dos señales?

Solución.

$$d = c\Delta t = (3,0 \times 10^8)(6,0 \times 10^{-7}) = 180 \text{ m}$$

Ejemplo 5. Una onda electromagnética sinusoidal con una frecuencia de $6,10 \times 10^{14}$ Hz viaja en un vacío

en la dirección +z. El campo \vec{B} es paralelo al eje de las y y tiene una amplitud de $5,80 \times 10^{-4}$ T. Escriba las

ecuaciones vectoriales de $\vec{E}(z,t)$ y $\vec{B}(z,t)$.

Solución.

$$\begin{aligned} \vec{B}(z,t) &= B_{\text{máx}} \cos(kz - \omega t) \hat{j} \\ &= B_{\text{máx}} \cos\left(2\pi f\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) \hat{j} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(z,t) &= \\ (5,80 \times 10^{-4}) \cos 2\pi(6,10 \times 10^{14}) \left(\frac{z}{(3,00 \times 10^8)} - t\right) \hat{j} \end{aligned}$$

$$\vec{E}(z,t) = B_y(z,t) \hat{j} \times (c\hat{k}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \\ (1,74 \times 10^5) \cos(1,28 \times 10^7 z - 3,83 \times 10^{15} t) \hat{i} \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Una onda electromagnética con una frecuencia de 38,0 MHz y una longitud de onda de 6,15 m viaja en un material aislante con k_m muy cercana a la unidad.

- ¿Cuál es la rapidez de propagación de la onda?
- ¿Cuál es la constante dieléctrica del material aislante a esta frecuencia?

Solución.

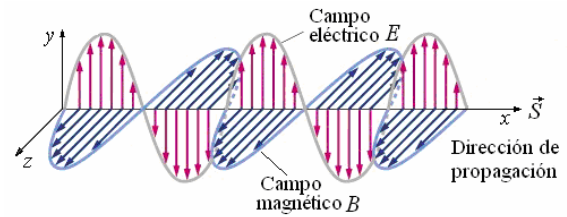
$$\begin{aligned} \text{a) } v &= f\lambda = (3,80 \times 10^7)(6,15 \text{ m}) \\ &= 2,34 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\text{b) } k_E = \frac{c^2}{v^2} = \frac{(3,0 \times 10^8)^2}{(2,34 \times 10^8)^2} = 1,64$$

VECTOR POYNTING.

El vector que nos da la dirección y la magnitud de la rapidez del flujo de energía electromagnética por unidad de área en un punto del espacio, es llamado vector Poynting y se define por la siguiente ecuación:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$



A partir de esta figura puede observarse que la

dirección de es paralela al vector $\vec{E} \times \vec{B}$ propagación

en dirección x en este caso. El vector $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ se

conoce como **vector Poynting** (en honor de John H. Poynting):

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

El vector Poynting en el sistema MKS, está dado en unidades de W/m^2 .

INTENSIDAD DE LA ONDA.

A continuación demostraremos que su valor medio es igual a la intensidad de la onda electromagnética. En nuestro estudio del transporte de energía por ondas cualquier tipo, veíamos que la intensidad (energía media por unidad de área y unidad de tiempo) era, en general, igual al producto de la densidad de energía (energía por unidad de volumen) por la velocidad de la onda. La energía por unidad de volumen asociada con un campo eléctrico E es

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

En el caso de la onda armónica dada por la ecuación

$$E_y = E_{y0} \text{sen}(kx - \omega t) \text{ tenemos}$$

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \text{sen}^2(kx - \omega t)$$

Por sencillez en la notación se han suprimido los subíndices de las componentes y y z

La energía por unidad de volumen asociada con un campo magnético B es

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\text{Según las ecuaciones } B_z = \frac{k}{\omega} E_{z0} \text{sen}(kx - \omega t) =$$

$$B_{z0} \text{sen}(kx - \omega t) \text{ tenemos}$$

$$u_B = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \text{sen}^2(kx - \omega t) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \text{sen}^2(kx - \omega t)$$

$$\text{Pero como } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \text{sen}^2(kx - \omega t)$$

y vemos que son iguales las densidades de energía eléctrica y magnética. La energía electromagnética total por unidad de volumen es

$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 E_0^2 \text{sen}^2(kx - \omega t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \text{sen}^2(kx - \omega t)$$

La energía por unidad de tiempo y por unidad de área es el producto de esta energía por la velocidad c :

$$\begin{aligned} uc &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \text{sen}^2(kx - \omega t) \\ &= \left[E_0 \text{sen}(kx - \omega t) \right] \left[\frac{E_0}{\mu_0 c} \text{sen}(kx - \omega t) \right] \\ &= \frac{EB}{\mu_0} = S \end{aligned}$$

La intensidad en un punto cualquiera x es el valor medio temporal de la energía por unidad de tiempo y por unidad de área. A partir de la ecuación

$$u = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \text{sen}^2(kx - \omega t) \text{ vemos que la densidad}$$

de energía es proporcional a $\text{sen}^2(kx - \omega t)$. El valor medio de esta cantidad en uno o más ciclos es $1/2$. Luego, la densidad de energía media vale

$$u_B = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}, \text{ y la intensidad es}$$

$$\begin{aligned} I = cu_B &= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{B_0}{\mu_0 \sqrt{2}} = \frac{E_{rms} B_{rms}}{\sqrt{2}} \\ &= S_B \end{aligned}$$

Donde

$$E_{rms} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \text{ es el valor medio cuadrático de } E \text{ y}$$

$$B_{rms} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} \text{ es el valor medio cuadrático de } B.$$

POTENCIA INSTANTÁNEA.

El módulo o valor del vector Poynting es la potencia instantánea por unidad de área. La velocidad con la cual fluye energía electromagnética a través de una superficie cualquiera es el flujo del vector de Poynting a través de la misma:

$$P = \int \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \int \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot \hat{n} dA$$

En donde P es la potencia que atraviesa el área y

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \text{ es el vector Poynting. La potencia neta}$$

radiada por cualquier volumen es el flujo neto del vector de Poynting a través de la superficie que encierra dicho volumen.

ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA

La densidad de energía eléctrica dada por la ecuación:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}$$

La densidad de energía magnética que está expresada por:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}$$

Para una región del espacio libre donde existe campo eléctrico y campo magnético la ecuación de la energía electromagnética es expresada por:

$$\begin{aligned} U &= \int_V (u_E + u_B) dV = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B} \right) dV \end{aligned}$$

En esta ecuación hemos combinado campos eléctricos y magnéticos.

PRESIÓN DE RADIACIÓN.

A partir de la observación de que se requiere energía para establecer campos eléctricos y magnéticos, hemos demostrado que las ondas electromagnéticas transportan energía. Además se puede demostrar que las ondas electromagnéticas transportan L cantidad de movimiento p , con una densidad de cantidad de movimiento correspondiente (cantidad de movimiento dp por volumen dV) de magnitud

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2}$$

Esta cantidad de movimiento es una propiedad del campo; no está asociada con la masa de una partícula en movimiento en el sentido habitual.

Existe además una rapidez de flujo de cantidad de movimiento correspondiente. El volumen dV ocupado por una onda electromagnética (rapidez c) que pasa a través de un área A en un tiempo dt es $dV = Ac dt$. Cuando se sustituye esto en la

$$\text{ecuación } \frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2} \text{ y se reordena, se}$$

encuentra que la rapidez de flujo de cantidad de movimiento por unidad de área es

$$\frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \text{ (rapidez de flujo de cantidad de movimiento)}$$

Esto representa la cantidad de movimiento que se transfiere por unidad de área y por unidad de tiempo.

Se obtiene la rapidez promedio de transferencia de cantidad de movimiento por unidad de área sustituyendo S por $S_m = I$ en la ecuación

$$\frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$$

A esa cantidad de movimiento se debe el fenómeno de la **presión de radiación**. Cuando una onda electromagnética es absorbida en su totalidad por una

superficie, se transfiere a ésta la cantidad de movimiento de la onda. Para simplificar consideraremos una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Con base en las ideas expuestas en la sección 8.1, vemos que la rapidez dp/dt con la que se transfiere cantidad de movimiento a la superficie absorbente es igual a la fuerza ejercida sobre la superficie. La fuerza promedio por unidad de área debida a la onda, o **presión de radiación** p_{rad} , es el cociente del valor promedio de dp/dt entre el área absorbente A . (Utilizamos el subíndice “rad” para distinguir la presión de la cantidad de movimiento, que también se representa mediante el símbolo p). De acuerdo con la ecuación

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2}, \text{ la presión de radiación es}$$

$$p_{\text{rad}} = \frac{S_m}{c} = \frac{I}{c} \text{ (presión de radiación, absorción}$$

total de la onda)

Si la onda se refleja en su totalidad, el cambio de cantidad de movimiento es dos veces más grande, y la presión es

$$p_{\text{rad}} = \frac{S_m}{c} = \frac{I}{c} \quad p_{\text{rad}} = \frac{2S_m}{c} = \frac{2I}{c} \text{ (presión de}$$

radiación, reflexión total de la onda)

Por ejemplo, el valor de I (o S_m) correspondiente a la luz solar directa, antes de atravesar la atmósfera terrestre, es de aproximadamente $1,4 \text{ kW/m}^2$. De

$$\text{acuerdo ecuación } p_{\text{rad}} = \frac{S_m}{c} = \frac{I}{c} \text{ la presión}$$

promedio correspondiente sobre una superficie absorbente es

$$p_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = \frac{1,4 \times 10^{-3}}{3,0 \times 10^8} = 4,7 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

$$\text{Según la ecuación } p_{\text{rad}} = \frac{S_m}{c} = \frac{I}{c}, \text{ la presión}$$

promedio sobre una superficie totalmente reflectante es el doble de esto: $\frac{2I}{c}$ o $9,4 \times 10^6 \text{ Pa}$. Estas presiones

son muy pequeñas del orden de 10^{-10} atm , pero se pueden medir con instrumentos sensibles.

La presión de radiación de la luz solar es mucho mayor en el interior del Sol que en la Tierra. En el interior de las estrellas de masa mucho mayor que la del Sol y más luminosas que éste, la presión de radiación es tan grande que aumenta considerablemente la presión gaseosa en el interior de la estrella y de este modo contribuye a evitar que la estrella se colapse bajo el efecto de su propia gravedad. En ciertos casos la presión de radiación proyecta efectivamente parte del material de la estrella hacia el espacio.

Ejemplo 7. Prueba de un transmisor espacial de radio. Usted es un especialista en misiones de la

NASA que efectúa su primer vuelo en el trasbordador espacial. En virtud de su extensa capacitación en física, se le ha asignado la tarea de evaluar el comportamiento de un nuevo transmisor de radio a bordo de la Estación Espacial Internacional (EEI).

Encaramado en el brazo móvil del trasbordador, usted apunta un detector sensible hacia la EEI, que está a $2,5 \text{ km}$ de distancia, y encuentra que la amplitud de campo eléctrico de las ondas de radio provenientes del transmisor es de $0,090 \text{ V/m}$, y que la frecuencia de las ondas es de 244 MHz . Halle lo siguiente:

- la intensidad de la onda de radio donde usted se encuentra;
- la amplitud de campo magnético de la onda donde usted se encuentra;
- la potencia de salida total del transmisor de radio de la EEI.
- ¿Qué suposiciones, en su caso, hizo usted para efectuar sus cálculos?

Solución.

$$\text{a) } I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\text{máx}}^2, \quad E_{\text{máx}} = 0,090 \text{ V/m}, \text{ luego}$$

$$I = 1,1 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

$$\text{b) } E_{\text{máx}} = c B_{\text{máx}} \text{ Luego}$$

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = 3,0 \times 10^{-10} \text{ T}$$

$$\text{c) } P_{\text{av}} = I(4\pi r^2) =$$

$$(1,075 \times 10^{-5})(4\pi)(2,5 \times 10^3)^2 = 840 \text{ W}$$

d) El cálculo en la parte (c) asume que el transmisor emite uniformemente en todas las direcciones.

Ejemplo 8. Una sonda espacial situada a $2,0 \times 10^{10} \text{ m}$ de una estrella mide la intensidad total de la radiación electromagnética proveniente de la estrella, la cual resulta ser de $5,0 \times 10^3 \text{ W/m}^2$. Si la estrella irradia de modo uniforme en todas direcciones, ¿cuál es la potencia de salida promedio total?

Solución.

$$P_m = I(4\pi r^2) = (5,0 \times 10^3)(4\pi)(2,0 \times 10^{10})^2 = 2,5 \times 10^{25} \text{ J}$$

Ejemplo 9. La intensidad de un rayo láser cilíndrico es de $0,800 \text{ W/m}^2$. El área de sección transversal del haz es de $3,0 \times 10 \text{ m}^2$, y la intensidad es uniforme en toda la sección transversal del haz.

- ¿Cuál es la potencia de salida promedio del láser?
- ¿Cuál es el valor rms (eficaz) del campo eléctrico en el haz?

Solución.

$$\text{a) La potencia media del haz es}$$

$$P = IA = (0,800)(3,0 \times 10^{-4}) = 2,4 \times 10^{-4} \text{ W}$$

$$\text{b) Tenemos que, } I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\text{rms}}^2 = \epsilon_0 c E_{\text{rms}}^2.$$

Luego,

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{I}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{0,800}{(8,85 \times 10^{-12})(3,00 \times 10^8)}} \\ = 17,4 \text{ V/m}$$

Ejemplo 10. Una fuente intensa de luz irradia uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 5,0 m de la fuente de radiación la presión sobre una superficie perfectamente absorbente es de $9,0 \times 10^{-6}$ Pa. ¿Cuál es la potencia media de salida de la fuente?

Solución.

$$p_{\text{rad}} = I/c \text{ de aquí } I = cp_{\text{rad}} \\ = 2,70 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

Luego

$$P_m = I(4\pi r^2) = (2,70 \times 10^3)(4\pi)(5,0)^2 \\ = 8,5 \times 10^5 \text{ W}$$

Ejemplo 11. Una onda electromagnética sinusoidal emitida por un teléfono celular tiene una longitud de onda de 35,4 cm y una amplitud de campo eléctrico de $5,40 \times 10^{-2}$ V/m a una distancia de 250 m de la antena. Calcule

- la frecuencia de la onda;
- la amplitud del campo magnético;
- la intensidad de la onda.

Solución.

$$a) f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \times 10^8}{0,354} = 8,47 \text{ Hz}$$

$$b) B_{\text{max}} = \frac{E_{\text{max}}}{c} = \frac{0,0540}{3,00 \times 10^8} = 1,80 \times 10^{-10} \text{ T}$$

$$c) I = S_{\text{av}} = \frac{EB}{2\mu_0} = \frac{(0,0540)(1,80 \times 10^{-10})}{2\mu_0} \\ = 3,87 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Ejemplo 12. Una fuente de luz monocromática con una potencia de salida de 60,0 W irradia luz uniformemente en todas direcciones con una longitud de onda de 700 nm. Calcule $E_{\text{máx}}$ y $B_{\text{máx}}$ de la luz de 700 nm a una distancia de 5,00 m de la fuente.

Solución.

$$P = S_m A = \frac{E_{\text{max}}^2}{2c\mu_0} (4\pi r^2) \Rightarrow E_{\text{max}} = \sqrt{\frac{Pc\mu_0}{2\pi r^2}}$$

$$\Rightarrow E_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{(60,0)(3,00 \times 10^8)\mu_0}{2\pi(5,00)^2}} = 12,0 \text{ V/m}$$

\Rightarrow

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = \frac{12,0}{3,00 \times 10^8} = 4,00 \times 10^{-8} \text{ T}$$

Ejemplo 13. Si la intensidad de la luz solar directa en un punto de la superficie terrestre es de $0,78 \text{ kW/m}^2$, halle

a) la densidad de cantidad de movimiento (cantidad de movimiento por unidad de volumen) promedio de la luz solar;

b) la rapidez de flujo de cantidad de movimiento promedio de la luz solar.

Solución.

a) La densidad de cantidad de movimiento

$$\frac{dp}{dV} = \frac{S_m}{c^2} = \frac{780}{(3,0 \times 10^8)^2} = 8,7 \times 10^{-15} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

b) La razón de flujo de la cantidad de movimiento

$$\frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{S_{\text{av}}}{c} = \frac{780}{3,0 \times 10^8} = 2,6 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

Ejemplo 14. En las instalaciones del Simulador Espacial de 25 pies del Jet Propulsion Laboratory de la NASA, una serie de lámparas de arco elevadas produce luz con una intensidad de 2500 W/m^2 en el piso de las instalaciones. (Esto simula la intensidad de la luz solar cerca del planeta Venus). Halle la presión de radiación promedio (en pascal y en atmósferas) sobre

- una sección totalmente absorbente del piso.
- una sección totalmente reflectante del piso.
- Halle la densidad de cantidad de movimiento promedio (cantidad de movimiento por unidad de volumen) de la luz en el piso.

Solución.

a) Luz absorbida:

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{S_m}{c} = \frac{2500}{3,0 \times 10^8} \\ = 8,33 \times 10^{-6} \text{ Pa} \Rightarrow$$

$$p_{\text{rad}} = \frac{8,33 \times 10^{-6}}{1,013 \times 10^5} = 8,33 \times 10^{-11} \text{ atm}$$

b) Luz reflejada:

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{2S_m}{c} \\ = \frac{2(2500)}{3,0 \times 10^8} = 1,67 \times 10^{-5} \text{ Pa} \Rightarrow$$

$$p_{\text{rad}} = \frac{1,67 \times 10^{-5}}{1,013 \times 10^5} = 1,65 \times 10^{-10} \text{ atm.}$$

El factor 2 se presenta porque la dirección del vector cantidad de movimiento se invierte con la reflexión.

Así el cambio en cantidad de movimiento es dos veces la cantidad de movimiento original

c) La densidad de cantidad de movimiento

$$\frac{dp}{dV} = \frac{S_m}{c^2} = \frac{2500}{(3,0 \times 10^8)^2} \\ = 2,78 \times 10^{-14} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

Ejemplo 15. Una onda electromagnética sinusoidal se propaga en un vacío en la dirección +z. Si en un

instante en particular y en cierto punto del espacio el campo eléctrico tiene la dirección + x y una magnitud de 4,00 V/m, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético de la onda en el mismo punto del espacio y en el mismo instante?

Solución.

$$B_{m\acute{a}x} = \frac{E_{m\acute{a}x}}{c} = 1,33 \times 10^{-8} \text{ T}$$

$\vec{E} \times \vec{B}$ está en la dirección de propagación. Para \vec{E}

en la dirección + x, $\vec{E} \times \vec{B}$ está en la dirección

+ z cuando \vec{B} está en la dirección + y .

Ejemplo 16. Se establece una onda electromagnética estacionaria en el aire con una frecuencia de 750 MHz entre dos planos conductores separados por una distancia de 80,0 cm. ¿En qué posiciones entre los planos se podría colocar una carga puntual en reposo de modo que permaneciera en reposo? Explique su respuesta.

Solución.

$$\Delta x_{\text{nodos}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = \frac{3,00 \times 10^8}{2(7,50 \times 10^8)} = 0,200 \text{ m} = 20,0 \text{ cm}$$

Debe haber nodos en los planos, separados 80,0 cm, y hay dos nodos entre los planos, cada uno a 20,0 cm de un plano. Es a 20 cm, 40 cm, y 60 cm que una carga puntual permanece en reposo, puesto que el campo eléctrico en esos puntos es cero.

Ejemplo 17. Con respecto a una onda electromagnética que se en aire, determine la frecuencia de una onda cuya longitud de onda es de a) 5,0 km; b) 5,0 m; c) 5,0 μ m; d) 5,0 nm.

Solución.

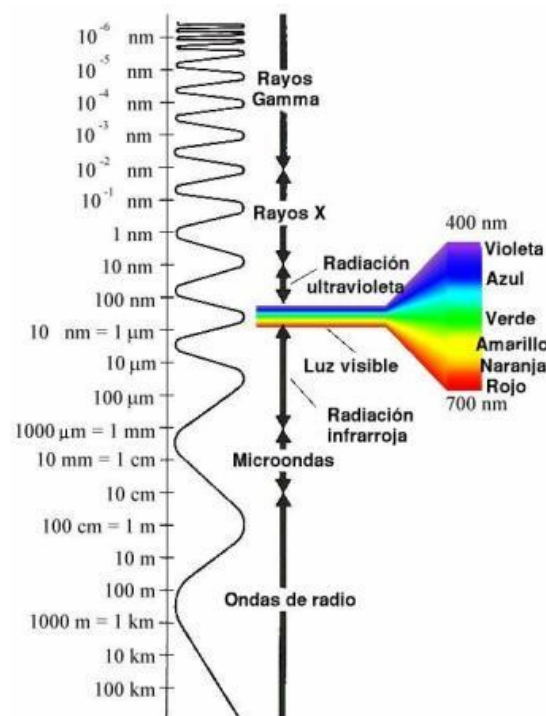
$$a) f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,0 \times 10^8}{5000} = 6,0 \times 10^4 \text{ Hz}$$

$$b) f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,0 \times 10^8}{5,0} = 6,0 \times 10^7 \text{ Hz}$$

$$c) f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,0 \times 10^8}{5,0 \times 10^{-6}} = 6,0 \times 10^{13} \text{ Hz}$$

$$d) f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,0 \times 10^8}{5,0 \times 10^{-9}} = 6,0 \times 10^{16} \text{ Hz}$$

EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO.



Las ondas electromagnéticas cubren una amplia gama de frecuencias o de longitudes de ondas y pueden clasificarse según su principal fuente de producción. La clasificación no tiene límites precisos.

Región del espectro	Intervalo de frecuencias (Hz)
Radio-microondas	0 - 3,0x10 ¹²
Infrarrojo	3,0x10 ¹² - 4,6x10 ¹⁴
Luz visible	4,6x10 ¹⁴ - 7,5x10 ¹⁴
Ultravioleta	7,5x10 ¹⁴ - 6,0x10 ¹⁶
Rayos X	6,0x10 ¹⁶ - 1,0x10 ²⁰
Radiación gamma	1,0x10 ²⁰ - ...

Fuente: Leonberger. *Revealing the small range of radio-microwave frequencies*. Phys. Educ. Vol. 37, September 2002, pp. 425-427

CARACTERÍSTICAS DE LAS DISTINTAS REGIONES DEL ESPECTO

Las ondas de radiofrecuencia

Sus frecuencias van de 0 a 10⁹ Hz, se usan en los sistemas de radio y televisión y se generan mediante circuitos oscilantes.

Las ondas de radiofrecuencia y las microondas son especialmente útiles por que en esta pequeña región del espectro las señales producidas pueden penetrar las nubes, la niebla y las paredes. Estas son las frecuencias que se usan para las comunicaciones vía satélite y entre teléfonos móviles. Organizaciones internacionales y los gobiernos elaboran normas para decidir que intervalos de frecuencias se usan para

distintas actividades: entretenimiento, servicios públicos, defensa, etc. La región denominada AM comprende el intervalo de 530 kHz a 1600 kHz, y la región denominada FM de 88 MHz a 108 MHz. La región FM permite a las emisoras proporcionar una excelente calidad de sonido debido a la naturaleza de la modulación en frecuencia.

Las microondas

Se usan en el radar y otros sistemas de comunicación, así como en el análisis de detalles muy finos de la estructura atómica y molecular. Se generan mediante dispositivos electrónicos.

La radiación infrarroja

Se subdivide en tres regiones, infrarrojo lejano, medio y cercano. Los cuerpos calientes producen radiación infrarroja y tienen muchas aplicaciones en la industria, medicina, astronomía, etc.

La luz visible

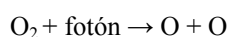
Es una región muy estrecha pero la más importante, ya que nuestra retina es sensible a las radiaciones de estas frecuencias. A su vez, se subdivide en seis intervalos que definen los colores básicos (rojo, naranja, amarillo, verde, azul y violeta).

Radiación ultravioleta

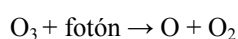
Los átomos y moléculas sometidos a descargas eléctricas producen este tipo de radiación. No debemos olvidar que la radiación ultravioleta es la componente principal de la radiación solar.

La energía de los fotones de la radiación ultravioleta es del orden de la energía de activación de muchas reacciones químicas lo que explica muchos de sus efectos.

El oxígeno se disocia en la ozonósfera por la acción de la radiación ultravioleta. Una molécula de oxígeno absorbe radiación de longitudes de onda en el intervalo entre 1600 Å y 2400 Å (o fotones de energía comprendida entre 7.8 eV y 5.2 eV) y se disocia en dos átomos de oxígeno.



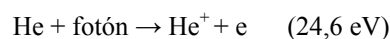
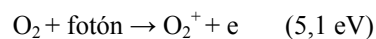
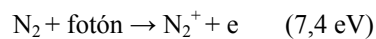
El oxígeno atómico producido se combina con el oxígeno molecular para formar ozono, O_3 , que a su vez se disocia fotoquímicamente por absorción de la radiación ultravioleta de longitud de onda comprendida entre 2400 Å y 3600 Å (o fotones de energía entre 5,2 eV y 3,4 eV).



Estas dos reacciones absorben prácticamente toda radiación ultravioleta que viene del Sol por lo que solamente llega una pequeña fracción a la superficie de la Tierra. Si desapareciese de la capa de ozono, la radiación ultravioleta destruiría muchos organismos a causa de las reacciones fotoquímicas.

La radiación ultravioleta y rayos X producidos por el Sol interactúa con los átomos y moléculas presentes en la alta atmósfera produciendo gran cantidad de iones y electrones libres (alrededor de 10^{11} por m^3). La región de la atmósfera situada a unos 80 km de altura se denomina por este motivo ionosfera.

Algunas de las reacciones que ocurren más frecuentemente son:



Entre paréntesis se indica la energía de ionización. Como resultado de esta ionización tienen lugar muchas reacciones secundarias.

Rayos X

Si se aceleran electrones y luego, se hacen chocar con una placa metálica, la radiación de frenado produce rayos X. Los rayos X se han utilizado en medicina desde el mismo momento en que los descubrió Roentgen debido a que los huesos absorben mucho más radiación que los tejidos blandos. Debido a la gran energía de los fotones de los rayos X son muy peligrosos para los organismos vivos.

Rayos gamma

Se producen en los procesos nucleares, por ejemplo, cuando se desintegran las sustancias radioactivas. Es también un componente de la radiación cósmica y tienen especial interés en astrofísica. La enorme energía de los fotones gamma los hace especialmente útiles para destruir células cancerosas. Pero son también peligrosos para los tejidos sanos por lo que la manipulación de rayos gamma requiere de un buen blindaje de protección.

Ejemplo 18. Un espejo pequeño con un área de $5,00 \text{ cm}^2$ frente a una fuente de luz monocromática situada a $3,20 \text{ m}$ de distancia. En el espejo la amplitud de campo eléctrico de la luz de la fuente es de $0,0280 \text{ V/m}$.

a) ¿Cuánta energía incide en el espejo?

- b) ¿Cuál es la presión de radiación promedio que la luz ejerce sobre el espejo?
 c) ¿Cuál es la salida total de energía radiante si se supone que irradia uniformemente en todas direcciones?

Solución.

- a) La energía incidente en el espejo es

$$\text{Energía} = Pt = IAt = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E^2 At$$

⇒

$$E = \frac{1}{2} \epsilon_0 (3,00 \times 10^8)(0,028)^2 (5,00 \times 10^{-4})(1,00) = 5,0 \times 10^{-10} \text{ J}$$

- b) La presión de radiación

$$p_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 (0,0280)^2 = 6,94 \times 10^{-15} \text{ Pa}$$

- c) La potencia $P = I 4\pi R^2 = c p_{\text{rad}} 2\pi R^2$

$$\Rightarrow P = 2\pi (3,00 \times 10^8)(6,94 \times 10^{-15})(3,20)^2 = 1,34 \times 10^{-4} \text{ Pa}$$

Ejemplo 19. Un láser pequeño de helio y neón emite luz visible roja con una potencia de 3,20 mW en un haz de 2,50 mm de diámetro.

- a) ¿Cuál es la amplitud de los campos eléctrico y magnético de la luz?
 b) ¿Cuál es la densidad de energía promedio asociada con el campo eléctrico y con el campo magnético?
 c) ¿Cuál es la energía contenida en un tramo del haz de 1,00 m de largo?

Solución.

- a) La intensidad del laser

$$I = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi D^2} = \frac{4(3,20 \times 10^{-3})}{\pi(2,50 \times 10^{-3})^2} = 652 \text{ W/m}^2$$

Pero $I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E^2 \Rightarrow E = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} =$

$$\sqrt{\frac{2(652)}{\epsilon_0 (3,00 \times 10^8)}} = 701 \text{ V/m}$$

Y $B = \frac{E}{c} = \frac{701}{3,00 \times 10^8} = 2,34 \times 10^{-6} \text{ T}$

b) $u_{B_m} = u_{E_m} = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{4} \epsilon_0 (701)^2$

$$= 1,09 \times 10^{-6} \text{ J/m}^3$$

Observar el factor adicional ½ puesto que estamos haciendo un promedio.

- c) En un metro de haz láser, la energía total es:

$$E_{\text{tot}} = u_{\text{tot}} \text{Vol} = 2u_E (AL) = 2u_E \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 L$$

$$\Rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{2(1,09 \times 10^{-6}) \pi (2,50 \times 10^{-3})^2 (1,00)}{4} = 1,07 \times 10^{-11} \text{ J}$$

Ejemplo 20. Un conductor cilíndrico de sección transversal circular tiene un radio a y una conductividad g , y transporta una corriente constante I .

- a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de campo eléctrico E en un punto situado dentro del alambre, a una distancia a del eje?
 b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de campo magnético B en el mismo punto?
 c) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de Poynting S en el mismo punto? (La dirección de S es aquella en la que fluye energía electromagnética hacia adentro o hacia afuera del conductor).
 d) Con base en el resultado del inciso (c), halle la rapidez de flujo de energía hacia el volumen que ocupa un tramo de longitud ℓ del conductor. (Sugerencia: Integre S sobre la superficie de este volumen). Compare su resultado con la rapidez de generación de energía térmica en el mismo volumen. Comente por qué se puede pensar que la energía disipada en un conductor portador de corriente, debido a su resistencia, entra a través de los lados cilíndricos del conductor.

Solución.

a) $E = gJ = \frac{g\ell}{A} = \frac{g\ell}{\pi a^2}$, en dirección de la corriente.

b) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ en sentido antihorario mirando a la corriente.

c) La dirección del vector Poynting $\hat{S} = \hat{E} \times \hat{B}$, con la corriente en la dirección z .

Su magnitud es

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{gI}{\pi a^2} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{gI^2}{2\pi^2 a^3}$$

d) Sobre una longitud ℓ , la razón con la que ingresa la energía es

$$SA = \frac{\rho \ell^2}{2\pi^2 a^3} 2\pi a \ell = \frac{\rho \ell^2}{\pi a^2}$$

La pérdida de energía térmica es

$$I^2 R = I^2 \frac{g \ell}{A} = \frac{g \ell I^2}{\pi a^2}, \text{ que es exactamente igual al flujo de la energía electromagnética.}$$

Ejemplo 21. Cierta condensador consiste en dos placas circulares de radio r separadas por una distancia d . Sin tener en cuenta el pestañeo, demuestre que, durante el proceso de carga del condensador. La rapidez de flujo de energía hacia el espacio entre las placas es igual a la rapidez con la que aumenta la energía electrostática almacenada en

el condensador. (Sugerencia: Integre \vec{S} sobre la superficie del volumen cilíndrico vacío comprendido entre las placas).

Solución.

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \text{ y } \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = EA = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{q}{\pi \epsilon_0 r^2} \text{ tal que la magnitud del vector Poynting}$$

$$\text{es } S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{qi}{2\epsilon_0 \pi^2 r^3} = \frac{q}{2\epsilon_0 \pi^2 r^3} \frac{dq}{dt}.$$

Ahora, la razón del flujo de energía en la región entre las placas es:

$$\begin{aligned} \int \vec{S} \cdot \hat{n} dA &= S(2\pi r \ell) = \frac{\ell q}{\epsilon_0 \pi r^2} \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\ell}{\epsilon_0 \pi r^2} \frac{d(q^2)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\ell}{\epsilon_0 A} q^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) = \frac{dU}{dt} \end{aligned}$$

Éste es la razón de incremento en la energía electrostática U almacenada en el condensador.

Ejemplo 22. Se puede usar una espira circular de alambre como antena de radio. Si una antena de 18,0 cm de diámetro está situada a 2,0 km de una fuente de 95,0 MHz con una potencia total de 55,0 kW, ¿cuál es la fuerza electromotriz máxima que se induce en la espira? (Suponga que el plano de la espira de la antena es perpendicular a la dirección del campo magnético de la radiación y que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones).

Solución.

$$\text{La potencia de la antena es } P = IA = \frac{cB_{\max}^2}{2\mu_0} 4\pi r^2$$

Tal que

$$\begin{aligned} B_{\max} &= \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{4\pi r^2 c}} = \sqrt{\frac{2\mu_0 (5,50 \times 10^4)}{4\pi (2500)^2 (3,00 \times 10^8)}} \\ &= 2,42 \times 10^{-9} \text{ T } \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \omega B_{\max} = 2\pi f B_{\max} \\ &= 2\pi (95,0 \times 10^6) (2,42 \times 10^{-9}) \\ &= 1,44 \text{ T/s } \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -A \frac{dB}{dt} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dB}{dt} \\ &= \frac{\pi (0,180)^2 (1,44)}{4} = 0,0366 \text{ V} \end{aligned}$$

Ejemplo 23. Se ha propuesto colocar en órbita terrestre un satélite recolector de energía solar. La potencia recogida se enviaría a la Tierra en forma de un haz de radiación de microondas. En el caso de un haz de microondas con un área de sección transversal de 36,0 m² y una potencia total de 2,80 kW en la superficie terrestre, ¿cuál es la amplitud del campo eléctrico del haz en la superficie del planeta?

Solución.

$$\begin{aligned} I &= \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E^2 \\ \Rightarrow E &= \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2(2,80 \times 10^3 / 36)}{\epsilon_0 (3,00 \times 10^8)}} \\ &= 242 \text{ V/m.} \end{aligned}$$

Ejemplo 24. Linterna al rescate. Usted es el único tripulante de la nave espacial interplanetaria T:1339 Vorga, que lleva a cabo misiones de carga entre la Tierra y las colonias mineras del cinturón de asteroides. Cierta día usted está trabajando afuera de la nave, a una distancia de 2,0 UA del Sol. [1 UA (unidad astronómica) es la distancia promedio de la Tierra al Sol: 149 600 000 km.]. Por desgracia, usted pierde contacto con el casco de la nave y comienza a alejarse hacia el espacio. Entonces intenta regresar hacia la nave con ayuda de los cohetes de su traje espacial, pero el combustible se agota y los cohetes dejan de funcionar antes que usted consiga regresar a la nave. Se halla usted en una situación difícil, flotando a 16,0 m de la nave con velocidad cero respecto a ella. Por fortuna, usted tiene una lámpara de 200 W, la cual enciende para utilizar su haz como un “cohetes de luz” que lo impulse de regreso a la nave,

a) Si usted, su traje espacial y la lámpara tienen en conjunto una masa de 150 kg, ¿Cuánto tiempo tardará en regresar a la nave?

b) ¿Existe alguna otra forma de utilizar la lámpara para conseguir el mismo objetivo de regresar a la nave?

Solución.

a) Encontrar la fuerza sobre la persona debido a la cantidad de movimiento por la luz:

$$\begin{aligned} p_{\text{rad}} &= I/c \text{ y } F = p_{\text{rad}} A \text{ da} \\ F &= I A/c = P_{\text{av}} / c \end{aligned}$$

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{P_m}{mc} = \frac{200}{(150)(3,00 \times 10^8)} = 4,44 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2$$

Luego $x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ da

$$t = \sqrt{\frac{2(x - x_0)}{a_x}} = \sqrt{\frac{2(16,0)}{4,44 \times 10^{-9}}} = 8,49 \times 10^4 \text{ s} = 23,6 \text{ h}$$

La fuerza de la radiación es muy pequeña. En el cálculo hemos no se ha tomado en cuenta cualquier otra fuerza obre la persona.

b) Podrías lanzar la linterna en la dirección fuera de la nave. Por la conservación de la cantidad de movimiento lineal te moverías hacia la nave con la misma magnitud de la cantidad de movimiento que diste a linterna.

Ejemplo 25. El inventor Nikola Tesla, del siglo XIX, propuso transmitir energía eléctrica por medio de ondas electromagnéticas sinusoidales. Suponga que se pretende transmitir energía eléctrica en un haz con un área de sección transversal de 100 m^2 . ¿Qué amplitudes de campo eléctrico y magnético se requieren para transmitir una cantidad de potencia equivalente a la que manejan las líneas de transmisión modernas, las cuales tienen voltajes y corrientes del orden de 500 kV y 1000 A ?

Intensidad I , corriente i .

Solución.

$$P = IA \Rightarrow I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E^2$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{\frac{2P}{A \epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2Vi}{A \epsilon_0 c}} \Rightarrow$$

$$E = \sqrt{\frac{2Vi}{A \epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2(5,00 \times 10^5)(1000)}{(100)\epsilon_0(3,00 \times 10^8)}} = 6,14 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$B = \frac{E}{c} = \frac{6,14 \times 10^4}{3,00 \times 10^8} = 2,05 \times 10^{-4} \text{ T}$$

Ejemplo 26. El espacio interplanetario contiene muchas partículas pequeñas conocidas como polvo interplanetario. La presión de radiación proveniente del Sol fija un límite inferior al tamaño de estas partículas de polvo. Para comprender el origen de este límite, considere una partícula esférica de polvo de radio R y densidad de masa ρ .

a) Escriba una expresión de la fuerza gravitatoria que el Sol (masa M) ejerce sobre la partícula cuando ésta se halla a una distancia r del Sol.

b) Sea L la luminosidad del Sol, equivalente a la rapidez con la que emite energía en forma de radiación electromagnética. Halle la fuerza que se

ejerce sobre la partícula (totalmente absorbente) debido a la presión de radiación solar. El área pertinente es el área de sección transversal de la partícula, no su área total. Como parte de su respuesta, explique por qué es así.

c) La densidad de masa de una partícula representativa de polvo interplanetario es de alrededor de 3000 kg/m^3 . Halle el radio de partícula R con el que las fuerzas gravitatoria y de radiación que actúan sobre la partícula son de igual magnitud. La luminosidad del Sol es de $3,0 \times 10^{26} \text{ W}$. ¿Depende su respuesta de la distancia entre la partícula y el Sol? ¿Por qué?

d) Explique por qué es poco probable hallar en el Sistema Solar partículas de polvo con un radio menor que el calculado en el inciso (c). [Sugerencia: Construya la relación de las dos expresiones de fuerza halladas en los incisos (a) y (b)].

Solución.

$$a) F_G = \frac{GM_S m}{r^2} = \frac{GM_S}{r^2} \frac{4\pi R^3 \rho}{3} = \frac{4\pi GM_S R^3 \rho}{3r^2}$$

b) Si se asume que la radiación del sol es interceptada por la sección transversal de la partícula, podemos escribir la fuerza sobre la partícula como:

$$F = \frac{IA}{c} = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\pi R^2}{c} = \frac{LR^2}{4cr^2}$$

c) Si la fuerza de la gravedad y la fuerza de la presión de la radiación en una partícula del sol son iguales, podemos resolver para el radio de la partícula:

$$F_G = F \Rightarrow \frac{4\pi GM_S R^3 \rho}{3r^2} = \frac{LR^2}{4cr^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{3L}{16\pi GM_S \rho c} \Rightarrow$$

$$R = \frac{3(3,9 \times 10^{26})}{16\pi (6,7 \times 10^{-11}) (2,0 \times 10^{30}) (3000 \text{ kg/m}^3) (3,0 \times 10^8)}$$

$$\Rightarrow R = 1,9 \times 10^{-7} \text{ m}$$

d) Si la partícula tiene un radio más pequeño que lo encontrado en la parte (c), entonces la presión de la radiación supera la fuerza gravitacional y tiene como resultado una aceleración alejándose del sol, de esta manera quita tales partículas del Sistema Solar.

Ejemplo 27. La NASA está considerando seriamente el concepto de navegación solar a vela. Un velero solar utiliza una vela grande, de poca masa, y la energía y la cantidad de movimiento de la luz solar para impulsarse.

a) ¿Cómo debe ser la vela: absorbente o reflectante? ¿Por qué?

b) La producción total de potencia del Sol es de $3,9 \times 10^{26} \text{ W}$. ¿De qué tamaño debe ser una vela para impulsar un vehículo espacial de 10000 kg contra la

fuerza gravitatoria del Sol? Exprese su resultado en kilómetros cuadrados.

c) Explique por qué su respuesta al inciso (b) es independiente de la distancia respecto al Sol.

Solución.

a) La transferencia de la cantidad de movimiento es siempre mayor cuando se utilizan superficies reflectoras (considere una bola que choca con una pared, la pared ejerce una mayor fuerza si la bola rebota en lugar de pegarse). Tal que en navegación solar es mejor utilizar una vela reflectora.

b) La ecuación para la repulsión viene de equilibrar la fuerza gravitacional y la fuerza de la presión de la radiación. Según lo visto en el problema anterior, lo último es:

$$F_{\text{rad}} = \frac{2LA}{4\pi r^2 c} \text{ Así: } F_G = F_{\text{rad}} \Rightarrow$$

$$\frac{GM_s m}{r^2} = \frac{2LA}{4\pi r^2 c} \Rightarrow A = \frac{4\pi GM_s mc}{2L} \Rightarrow$$

$$A = \frac{4\pi(6,7 \times 10^{-11})(2,0 \times 10^{30})(10000)(3,0 \times 10^8)}{(2)3,9 \times 10^{26}}$$

$$\Rightarrow A = 648 \times 10^6 \text{ m}^2 = 6,48 \text{ km}^2$$

c) Esta respuesta es independiente de la distancia del sol desde que la fuerza gravitacional y la presión de la radiación disminuyen con el cuadrado de la distancia, y la distancia se cancela del problema.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. a) Demostrar que la ecuación

$$E_y = E_{y0} \text{sen}(kx - \omega t) \text{ puede escribirse en la}$$

$$\text{forma } E_y = E_{y0} \text{sen}k(x - ct), \text{ siendo } c = \frac{\omega}{k}. \text{ ¿En}$$

qué sentido se mueve esta onda?

b) Sustituir esta función en la ecuación

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \text{ y demostrar que se satisface}$$

$$\text{esta ecuación si } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

c) Utilizar los valores conocidos de μ_0 y ϵ_0 en

$$\text{unidades SI para demostrar que } \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \text{ vale}$$

aproximadamente 3×10^8 m/s.

Respuesta.

a) La onda se está moviendo en la dirección x.

2. a) Demostrar que el valor medio cuadrático del campo eléctrico en una onda a relacionado con la

$$\text{intensidad } I \text{ por } E_{\text{rms}} = \sqrt{\mu_0 c I}$$

$$\text{b) Demostrar que } B_{\text{rms}} = \frac{E_{\text{rms}}}{c}.$$

3. Una onda electromagnética tiene una intensidad $I = 100 \text{ W/m}^2$. Hallar E_{rms} y B_{rms} .

Respuesta.

$$E_{\text{rms}} = 194 \text{ V/m}, B_{\text{rms}} = 6,47 \text{ mG}$$

$$4. \text{ Demostrar que el vector de Poynting } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

tiene unidades de W/m^2 .

5. La amplitud de una onda electromagnética es $E_0 = 400 \text{ V/m}$. Hallar

a) B_0 ,

b) la densidad de energía electromagnética total media y

c) la intensidad.

Respuesta.

a) 13,3 mG, b) $7,08 \times 10^{-7} \text{ J/m}^3$, c) 212 W/m^2 .

6. Un haz de láser tiene un diámetro de 1,0 mm y una potencia media de 1,5mW. Hallar la intensidad del haz y E_{rms} y B_{rms} .

Respuesta.

$$I = 1,91 \text{ kW/m}^2, E_{\text{rms}} = 849 \text{ V/m}, B_{\text{rms}} = 28 \text{ mG}$$

$$7. \text{ a) Deducir la ecuación } \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \text{ (b)}$$

$$\text{Eliminar E de las ecuaciones } \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial B_z}{\partial t} \text{ y}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \text{ para obtener la ecuación de}$$

onda correspondiente a B_z .

8. Una fuente o foco puntual emite radiación uniformemente en todas direcciones.

a) Demostrar que si P_m es su potencia media, la

$$\text{intensidad a una distancia } r \text{ es } I = \frac{P_m}{4\pi r^2}.$$

b) Si la intensidad de la luz solar que incide sobre las capas superiores de la atmósfera terrestre es 1400 W/m^2 , hallar la emisión de potencia del Sol

c) Hallar E_{rms} y B_{rms} debido al Sol en las capas superiores de la atmósfera terrestre.

Respuesta.

b) $3,9 \times 10^{26} \text{ W}$

c) $E_{\text{rms}} = 726 \text{ V/m}, B_{\text{rms}} = 24,2 \text{ mG}$

9. Suponer que un foco incandescente de 100 W es un foco puntual que radia uniformemente en todas direcciones.

a) Hallar la intensidad del foco a 1,0 m.

b) Suponiendo que la onda es plana, hallar E_{rms} y B_{rms} a esta distancia.

10. Por un conductor cilíndrico largo de radio a y resistividad ρ circula una corriente constante I distribuida uniformemente en toda su sección recta.

a) Utilizar la ley de Ohm para relacionar el campo

eléctrico \vec{E} en el conductor con I , ρ y a .

b) Hallar el campo magnético \vec{B} en el exterior y junto al conductor.

c) En $r = a$ (superficie del conductor) utilizar los resultados de las partes (a) y (b) para calcular el

vector Poynting $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$. ¿Qué sentido tiene \vec{S} ?

d) Hallar el flujo de \vec{S} a través de la superficie del conductor de longitud L y área $2\pi aL$ y demostrar que la potencia que entra en el conductor es igual a $I^2 R$, siendo R la resistencia.