MECANICA DE FLUIDOS

Ejercicios resueltos aplicando la ley de Newton de la viscosidad

www.thefiniteelement.com

Actualizado el 30/03/2012

1. Ejercicios – Viscosidad

1.1 Ejercicio 1 – Rotación de cilindro sobre superficie

Se tiene un cilindro sobre una superficie como se ve en la figura 1. Entre la superficie y el cilindro hay una capa de líquido con viscosidad μ y dicho cilindro gira a una velocidad angular constate ω determinada. La separación entre el cilindro y la superficie es "y" y el radio del cilindro es constante e igual a R.

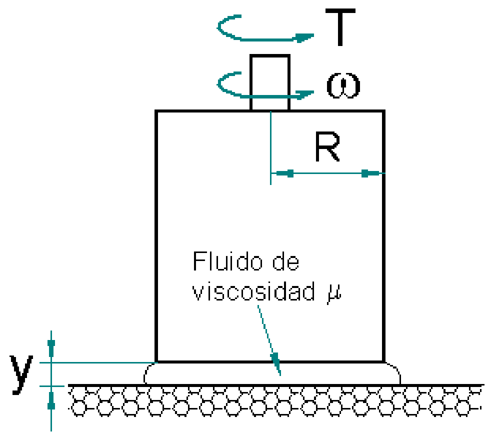

Figura 1.

1. Aplicando la ecuación para el esfuerzo cortante, halle una expresión para hallar el torque T que se debe aplicar para mantener el cilindro girando. La expresión debe estar en función de μ, R, ω e y.

2. Teniendo en cuenta la expresión hallada para T, deduzca una para hallar la viscosidad μ.

Desarrollo

1. La expresión para el esfuerzo cortante es:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Luego, tenemos que el esfuerzo es igual a un diferencial de fuerza sobre un diferencial de area,

$$\frac{dF}{dA} = \mu \frac{du}{dy}$$

De donde,

$$dF = \mu \frac{du}{dy} dA$$

Luego, al ser una distancia de separación pequeña podemos hacer,

$$\frac{du}{dy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\omega r - 0}{y - 0} = \frac{\omega r}{y}$$

Al tener en cuenta el análisis diferencial expuesto en la figura 2 deducimos que,

$$dA = r dr d\theta$$

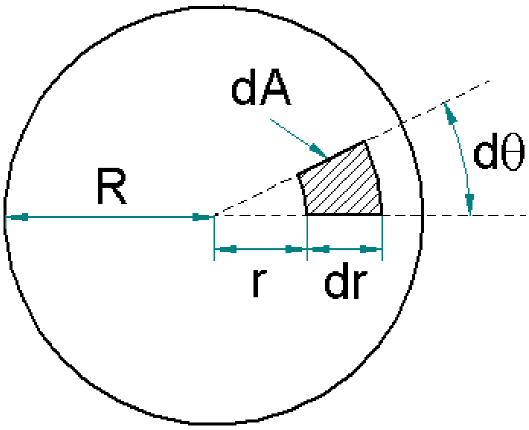

Figura 2. Análisis diferencial de la superficie del fondo del cilindro.

Reemplazando los valores de dA y du/dy en dF resulta,

$$dF = \frac{\mu\omega}{y} r^2 dr d\theta$$

Para hallar el torque necesitamos la ecuación diferencial para el torque, la cual es,

$$dT = dF.r = \frac{\mu\omega}{y} r^3 dr d\theta$$

Integrando para hallar el valor de T:

$$T = \int_0^T dT = \frac{\mu\omega}{y} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \, dr \, d\theta$$

$$T = \frac{\pi\mu\omega R^2}{2y}$$

2. Como ya se tenía la expresión para el torque solo despejamos la viscosidad para dejarla en función del torque, la velocidad angular, la separación y el radio del cilindro, asi:

$$\mu = \frac{2yT}{\pi\omega R^4}$$

1.2 Ejercicio 2 – Rotación de cono sobre superficie

Calcular el momento torsional necesaria para hacer girar el cono mostrado en la figura 1 a una velocidad ω constante, si un fluido de viscosidad μ llena el espacio entre él y la superficie cónica. Dicha separación tiene un valor de "y", el radio del cono es R y el ángulo que forma la pared con la vertical es α.

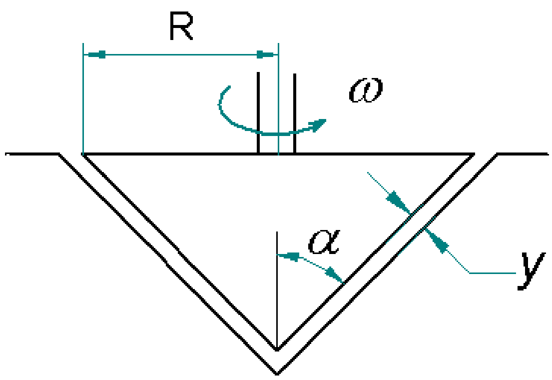

Figura 1.

Desarrollo

1. La expresión para el esfuerzo cortante es:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Luego, tenemos que el esfuerzo es igual a un diferencial de fuerza sobre un diferencial de área

$$\frac{dF}{dA} = \mu \frac{du}{dy}$$

Por lo tanto,

$$dF = \mu \frac{du}{dy} dA$$

Debido a que la separación entre las superficies es muy pequeña podemos decir que,

$$\frac{du}{dy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\omega r - 0}{y - 0} = \frac{\omega r}{y}$$

Ahora, tomando el diferencial de area aproximadamente como una cinta cónica, como se aprecia en la figura 2, decimos que,

$$dA = 2\pi r ds = 2\pi r \frac{dr}{sen\ \alpha}$$

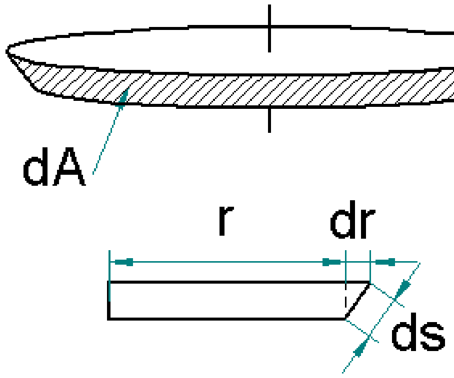

Figura 2. Tomando el diferencial de área.

Sabiendo de antemano que,

$$sen\ \alpha = \frac{dr}{ds}$$

Luego, tenemos la expresión para dF al reemplazar du/dy y dA.

$$dF = \frac{2\pi\mu\omega}{\text{ysen } \alpha} \text{r}^2\text{dr}$$

Tomando la ecuación diferencial para el torque tendremos,

$$dT = rdF = \frac{2\pi\mu\omega}{y\ sen\ \alpha} r^3 dr$$

$$T = \frac{2\pi\mu\omega}{y\ sen\ \alpha} \int_0^R r^3 dr$$

Finalmente, luego de haber integrado dT entre 0 y T y el radio entre 0 y R resulta,

$$T = \frac{\pi\mu\omega r^4}{2y\ sen\ \alpha}$$