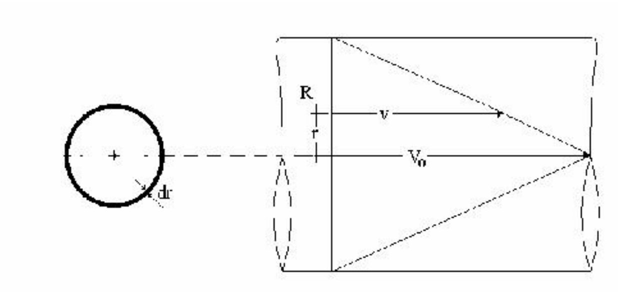
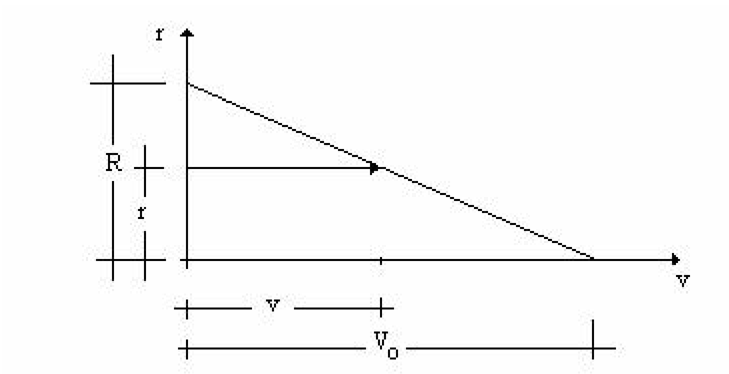
Capítulo 3

MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS

Problema 3.1
El fluido en un conducto de sección circular de radio R tiene la distribución de velocidades lineal, según se indicada en la figura. Determinar el caudal y la velocidad media.



Determinación de la ecuación de la velocidad



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$r - r_o = m\,(v - v_o)$$

$$r - R = -\frac{R}{V_o}\,(v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea

$$v = \frac{V_0}{R}\,(R - r)$$

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v \, da$$

Como el diferencial de área es da $= 2\,\pi\, r\, dr$ y la velocidad instantánea es $v = \dfrac{V_0}{R}(R - r)$ se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q = \int_0^R \frac{V_0}{R}\left(R - r\right) 2\,\pi\, r\, dr$$

$$Q = 2\,\pi \frac{V_0}{R} \int_0^R \left(R - r\right) r\, dr$$

$$Q = 2\,\pi \frac{V_0}{R}\left[\frac{R\, r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^R$$

$$Q = 2\,\pi \frac{V_0}{R}\left[\frac{R\, R^2}{2} - \frac{R^3}{3}\right]$$

$$Q = \frac{V_0}{3}\,\pi\, R^2$$

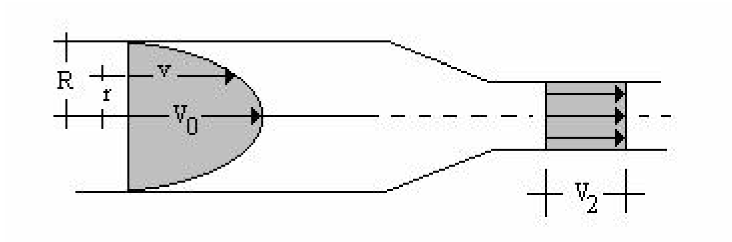
Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\left(\dfrac{V_0}{3}\,\pi\, R^2\right)}{\pi\, R^2}$$

$$V = \frac{V_0}{3}$$

Problema 3.2
Un líquido está fluyendo a través de una tubería de radio, R = 20 cm. La distribución de velocidades está dada por la expresión $v = V_0\,(1 - r^2/R^2)$. Determinar:

a) Una expresión para calcular el caudal en función de π, R, V_0.
b) La velocidad media en el tubo después que el radio R_2 se reduce a la mitad del radio inicial, considerando una velocidad $V_0 = 2.00$ m/s.



La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v \, da$$

Como el diferencial de área es $da = 2\pi r\,dr$ y la velocidad instantánea es $v = V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q = \int_0^R V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r\,dr$$

$$Q = 2\pi \frac{V_0}{R^2}\int_0^R \left(R^2 - r^2\right) r\,dr$$

$$Q = 2\pi \frac{V_0}{R^2}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$Q = 2\pi \frac{V_0}{R}\left[\frac{R^2 R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right]$$

$$Q = \frac{V_0}{2}\pi R^2$$

Determinación de la velocidad en la sección reducida

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{\left(\frac{V_0}{2}\pi R^2\right)}{\pi R_2^{\,2}}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$V_2 = \frac{\left(\frac{2.00}{2}\,\pi\,0.20^2\right)}{\pi\,0.10^2} = 4.00 \text{ m/s}$$

Problema 3.3
La distribución de velocidades para un flujo en una tubería puede expresarse por la fórmula $v = V_{máx}(1 - r/R)^{1/7}$
Determinar el caudal y la velocidad media para $V_{max} = 2.00$ m/s y $D = 40$ cm.

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,da$$

Como el diferencial de área es $da = 2\,\pi\,r\,dr$ y la velocidad instantánea es $v = 2\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}$ se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q = \int_0^R 2\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} 2\,\pi\,r\,dr$$

Para realizar la integral se hace el cambio de variable

$$1 - \frac{r}{R} = u \qquad \Rightarrow \qquad r = R\,(1 - u) \qquad \Rightarrow \qquad dr = -R\,du$$

cambio de los límites de integración; para $r = 0$, $u = 1$ y para $r = R$, $u = 0$

$$Q = 4\pi \int_1^0 u^{1/7}\,R(1-u)(-R\,du) = -\int_1^0 \left(u^{1/7} - u^{8/7}\right)du$$

$$Q = -4\,\pi\,R^2\left[\frac{7u^{8/7}}{8} - \frac{7u^{15/7}}{15}\right]_1^0 = 4\pi R^2\left[\frac{7}{8} - \frac{7}{15}\right]$$

$$Q = \frac{49}{30}\,\pi\,R^2$$

Para $R = 0.20$ m, se tiene,

$$Q = \frac{49}{30}\,\pi\, 0.20^2 = 0.205 \text{ m}^3/\text{s}$$

Determinación de la velocidad media

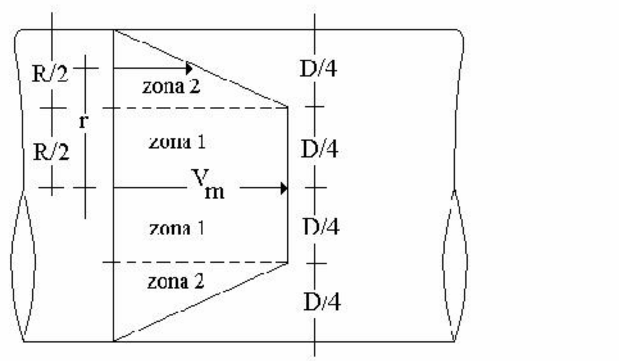
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.205}{\frac{\pi}{4}\,0.40^2} = 1.63 \text{ m/s}$$

Problema 3.4

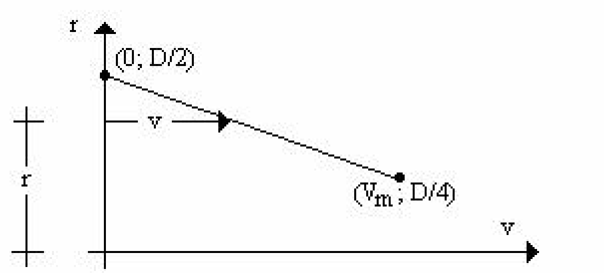
Para la distribución de velocidades que se muestra en el esquema. Determinar:

a) El caudal y la velocidad media en función de V_m y R

b) Si D = 0.40 m y V_m = 2.00 m/s, cuál es el caudal y la velocidad media



Determinación de la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$r - r_o = m\,(v - v_o)$$

$$r - \frac{D}{2} = -\frac{D}{4V_m}(\,v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2

$$v = \frac{2\,V_m}{R}(R - r)$$

La ecuación de la velocidad en la zona 1, es constante y es $v = V_m$

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,da$$

Como el diferencial de área es $da = 2\,\pi\,r\,dr$ y las velocidades instantáneas son, en la zona 1 $v = V_m$ y en la zona 2, $v = \dfrac{2\,V_m}{R}(R - r)$, se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q = \int_0^{R/2} V_m\,2\,\pi\,r\,dr + \int_{R/2}^{R} \frac{2\,V_m}{R}(R - r)\,2\,\pi\,r\,dr$$

$$Q = V_m\,2\,\pi \int_0^{R/2} r\,dr + \frac{4\,V_m\,\pi}{R}\int_{R/2}^{R}(R - r)\,r\,dr$$

$$Q = V_m\,2\,\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{R/2} + \frac{4\,V_m\,\pi}{R}\left[\frac{R\,r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_{R/2}^{R}$$

$$Q = V_m\,2\,\pi\left[\frac{(R/2)^2}{2}\right] + \frac{4\,V_m\,\pi}{R}\left[\frac{R\,R^2}{2} - \frac{R^3}{3} - \frac{R\,(R/2)^2}{2} + \frac{(R/2)^3}{3}\right]$$

Al simplificar se obtiene

$$Q = \frac{7\,V_m}{12}\,\pi\,R^2$$

Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\left(\dfrac{7\,V_m}{12}\,\pi\,R^2\right)}{\pi\,R^2}$$

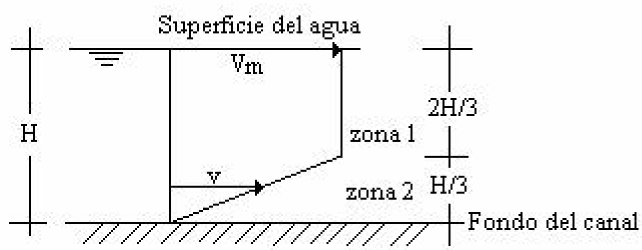
$$V = \frac{7}{12} V_m$$

Al sustituir los valores numéricos obtenemos el caudal y la velocidad media

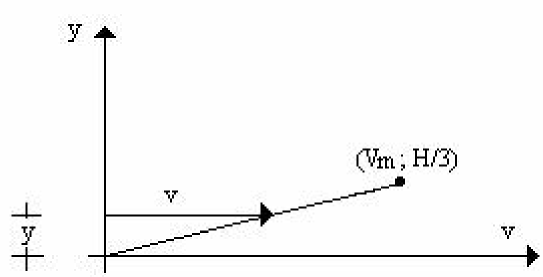
$$Q = \frac{7 \times 2.00}{12} \pi\, 0.20^2 = 0.147 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V = \frac{7}{12} 2.00 = 1.17 \text{ m/s}$$

Problema 3.5
Para la distribución de velocidades, en el canal de gran anchura que se indica en el esquema, calcular el caudal unitario, q y la velocidad media, V.



Determinación de la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2 es



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m (x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$y - y_o = m (v - v_o)$$

$$y - 0 = \frac{\left(\frac{H}{3}\right)}{V_m} (v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2

$$v = \frac{3\,V_m}{H}\,y$$

La ecuación de la velocidad en la zona 1, es constante y es $v = V_m$

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,da$$

Como el diferencial de área es da = 1.00 dy y las velocidades instantáneas son, en la zona 1 $v = V_m$ y en la zona 2, $v = \frac{3\,V_m}{4}\,y$, se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$q = \int_0^{H/3} \frac{3\,V_m}{H}\,y\,dy + \int_{H/3}^{H} V_m\,dy$$

$$q = \frac{3\,V_m}{H}\int_0^{H/3} y\,dy + V_m \int_{H/3}^{H} dy$$

$$q = \frac{3\,V_m}{H}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{H/3} + V_m\,[y]_{H/3}^{H}$$

$$q = \frac{3\,V_m}{H}\left[\frac{(H/3)^2}{2}\right] + V_m\left[H - \frac{H}{3}\right]$$

Al simplificar se obtiene

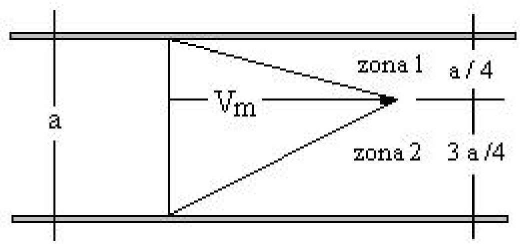
$$q = \frac{5\,V_m}{6}\,H$$

Determinación de la velocidad media

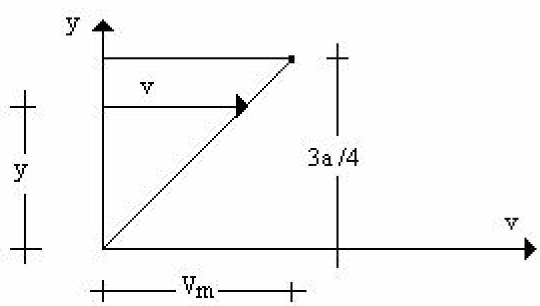
$$V = \frac{q}{A} = \frac{\left(\dfrac{5\ V_m}{6}\ H\right)}{1.00\ \ H}$$

$$V = \frac{5}{6}\ V_m$$

Problema 3.6
Para la distribución de velocidades indicadas en la figura, determinar el caudal y la velocidad media para flujo entre dos placas paralelas de ancho B, si estas se encuentran separadas una distancia a.



Determinación de la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$y - y_o = m\,(v - v_o)$$

$$y - 0 = \frac{\left(\frac{3}{4}a\right)}{V_m}(v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2

$$v = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,y$$

Determinación del caudal en la zona 2

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,da$$

Como el diferencial de área es da = B dy y las velocidad instantánea en la zona 2 es $v = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,y$ se obtiene al sustituir en la expresión anterior

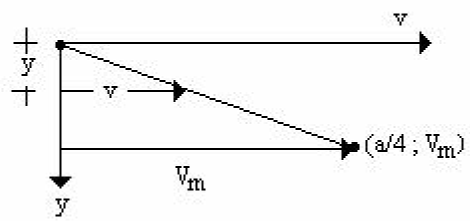
$$Q_2 = \int_0^{3a/4} \frac{4\,V_m}{3\,a}\,y\;B\,dy$$

$$Q_2 = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,B\int_0^{3a/4} y\,dy$$

$$Q_2 = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,B\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{3a/4}$$

$$Q_2 = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,B\left[\frac{\left(\frac{3}{4}a\right)^2}{2}\right] = \frac{3V_m\,Ba}{8}$$

Determinación de la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 1



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$y - y_o = m\,(v - v_o)$$

$$y - 0 = \frac{\left(\frac{1}{4}a\right)}{V_m}\,(v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2

$$v = \frac{4\,V_m}{a}\,y$$

Determinación del caudal en la zona 1

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,da$$

Como el diferencial de área es $da = B\,dy$ y la velocidad instantánea en la zona 1 es $v = \frac{4\,V_m}{a}\,y$ se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q_1 = \int_0^{a/4} \frac{4\,V_m}{a}\,y\;B\,dy$$

$$Q_1 = \frac{4\,V_m}{a}\,B\int_0^{a/4} y\;dy$$

$$Q_1 = \frac{4\,V_m}{a}\,B\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a/4}$$

$$Q_1 = \frac{4\,V_m}{a}\,B\left[\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2}{2}\right] = \frac{V_m\,B\,a}{8}$$

El caudal total en las zonas 1 y 2 es

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = \frac{V_m\,B\,a}{8} + \frac{3V_m\,Ba}{8}$$

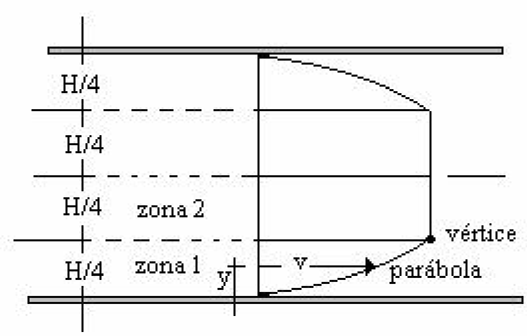
$$Q_T = \frac{1}{2}\,V_m\,B\,a$$

Determinación de la velocidad media

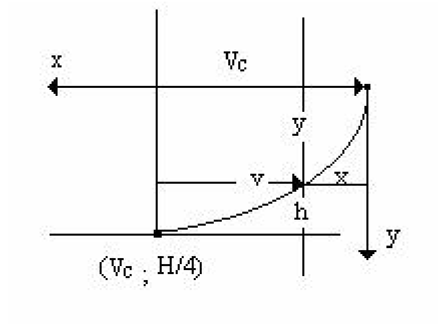
$$V = \frac{Q_T}{A} = \frac{\frac{1}{2}V_m\,B\,a}{B\,a}$$

$$V = \frac{1}{2}\,V_m$$

Problema 3.7
Calcular el caudal y la velocidad media para un flujo entre dos placas paralelas fijas, separadas a una distancia H, de 1.00 m de ancho, según la distribución de velocidades mostradas en la figura.



Determinación de la ecuación de la velocidades



La ecuación general de la parábola es $x = k\,y^2$, para el presente caso, se tiene

$$V_c = k\left(\frac{H}{4}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad k = \frac{16\,V_C}{H^2} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{16\,V_C}{H^2}\,y^2$$

El cambio de variables es

$$x + v = V_C \quad\Rightarrow x = V_C - v$$

$$y + h = \frac{H}{4} \quad\Rightarrow y = \frac{H}{4} - h$$

$$V_c - v = \frac{16\,V_C}{H^2}\left(\frac{H}{4} - h\right)^2$$

$$v = V_c - \frac{16\,V_C}{H^2}\left(\frac{H}{4} - h\right)^2$$

Determinación del caudal en la zona 1

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,d\,a$$

Como el diferencial de área es, $da = 1.00\,dy$, y la velocidad instantánea en la zona 1 es $v = V_c - \frac{16\,V_C}{H^2}\left(\frac{H}{4} - h\right)^2$

se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q_1 = \int_0^{H/4} \left(V_C - \frac{16\,V_C}{H^2} \left(\frac{H}{4} - h \right)^2 \right) dh \times 1.00$$

$$Q_1 = \int_0^{H/4} \left(V_C - \frac{16\,V_C}{H^2} \frac{H^2}{4^2} + \frac{16\,V_C}{H^2} \frac{2H}{4} h - \frac{16\,V_C}{H^2} h^2 \right) dh$$

$$Q_1 = \int_0^{H/4} \left(\frac{8\,V_C}{H} h - \frac{16\,V_C}{H^2} h^2 \right) dh$$

$$Q_1 = \left[\frac{8\,V_C}{H} \frac{h^2}{2} - \frac{16\,V_C}{H^2} \frac{h^3}{3} \right]_0^{H/4}$$

$$Q_1 = \left[\frac{8\,V_C}{H} \frac{\left(\frac{H}{4}\right)^2}{2} - \frac{16\,V_C}{H^2} \frac{\left(\frac{H}{4}\right)^3}{3} \right]$$

Simplificando se obtiene

$$Q_1 = \frac{1}{6}\, V_C\, H$$

Determinación del caudal en la zona 2

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\, da$$

Como el diferencial de área es $da = B\,dy$ y la velocidad instantánea en la zona 1 es $v = V_C$

$$Q_2 = \int_{H/4}^{H/2} V_C\, dh = \left[V_C\, h \right]_{H/4}^{H/2}$$

$$Q_2 = V_C \left[\frac{H}{2} - \frac{H}{4} \right] = \frac{1}{4} V_C \, H$$

El caudal en las zonas 1 y 2 es

$$Q_{1\text{-}2} = Q_1 + Q_2 = \frac{Vc\,H}{6} + \frac{Vc\,H}{4}$$

$$Q_{1\text{-}2} = \frac{5}{12} V_C\,H$$

El caudal total entre las dos placas es

$$Q_T = 2\left(\frac{5}{12}\right) V_C\,H = \frac{5}{6} V_C\,H$$

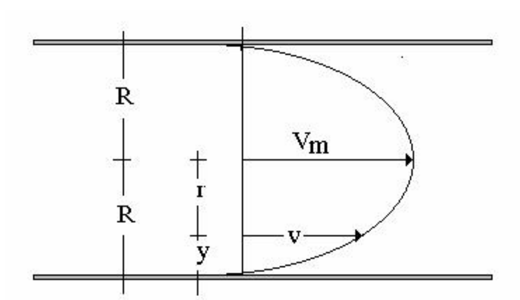
Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q_T}{A} = \frac{\frac{5}{6} V_C\,H}{H}$$

$$V = \frac{5}{6} V_C$$

Problema 3.8
Si la velocidad puede expresarse como $v/V_m = (y/R)^{1/n}$, encuentre una expresión para, v/V_m , en función de n, para los siguientes casos:

a) Flujo bidimensional entre dos placas.
b) Flujo axial simétrico en una tubería.



Flujo bidimensional entre dos placas planas

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v \, da$$

Como el diferencial de área es da = B dy y las velocidad instantánea es $v = V_m\,(y/R)^{1/n}$

$$Q = 2\int_0^R V_m \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} B\,dy$$

$$Q = V\;(2\,R\,B)$$

Igualando las expresiones anteriores se tiene

$$V\;(2\,R\,B) = 2\,V_m\,\frac{1}{R^{1/n}}\int_0^R (y)^{1/n}\,B\,dy$$

$$V\;R = \frac{V_m}{R^{1/n}}\left[\frac{y^{1+1/n}}{1+1/n}\right]_0^R$$

$$V\;R = \frac{V_m}{R^{1/n}}\,\frac{n}{n+1}\,R^{1+1/n}$$

$$V = V_m\,\frac{n}{n+1}$$

$$\frac{V}{V_m} = \frac{n}{n+1}$$

Flujo axial simétrico en una tubería

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v \, da$$