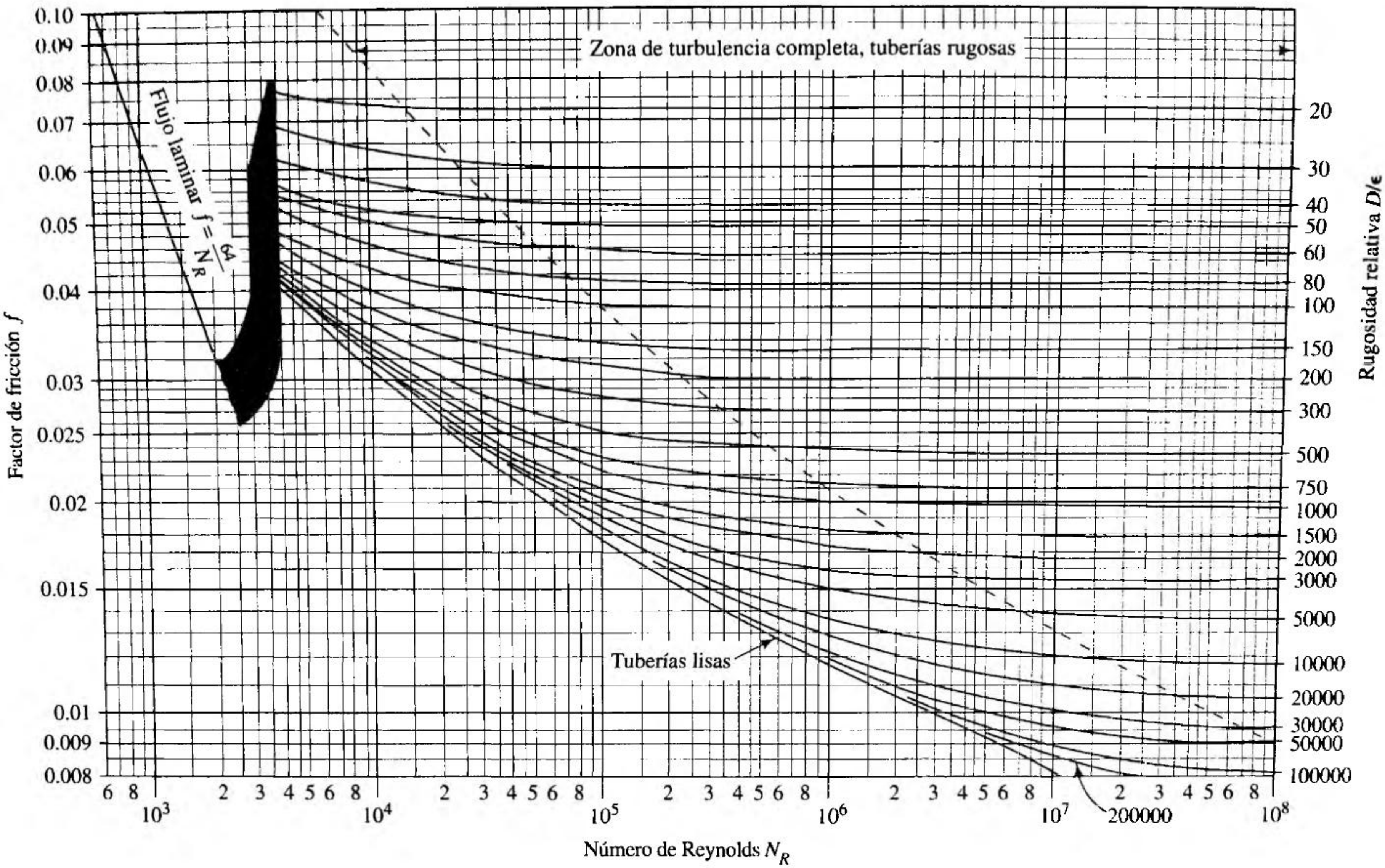


FIGURA 8.6 Diagrama de Moody. (Fuente: Pao, R. H. F. 1961. *Fluid Mechanics*. Nueva York: John Wiley e hijos, p. 284.)

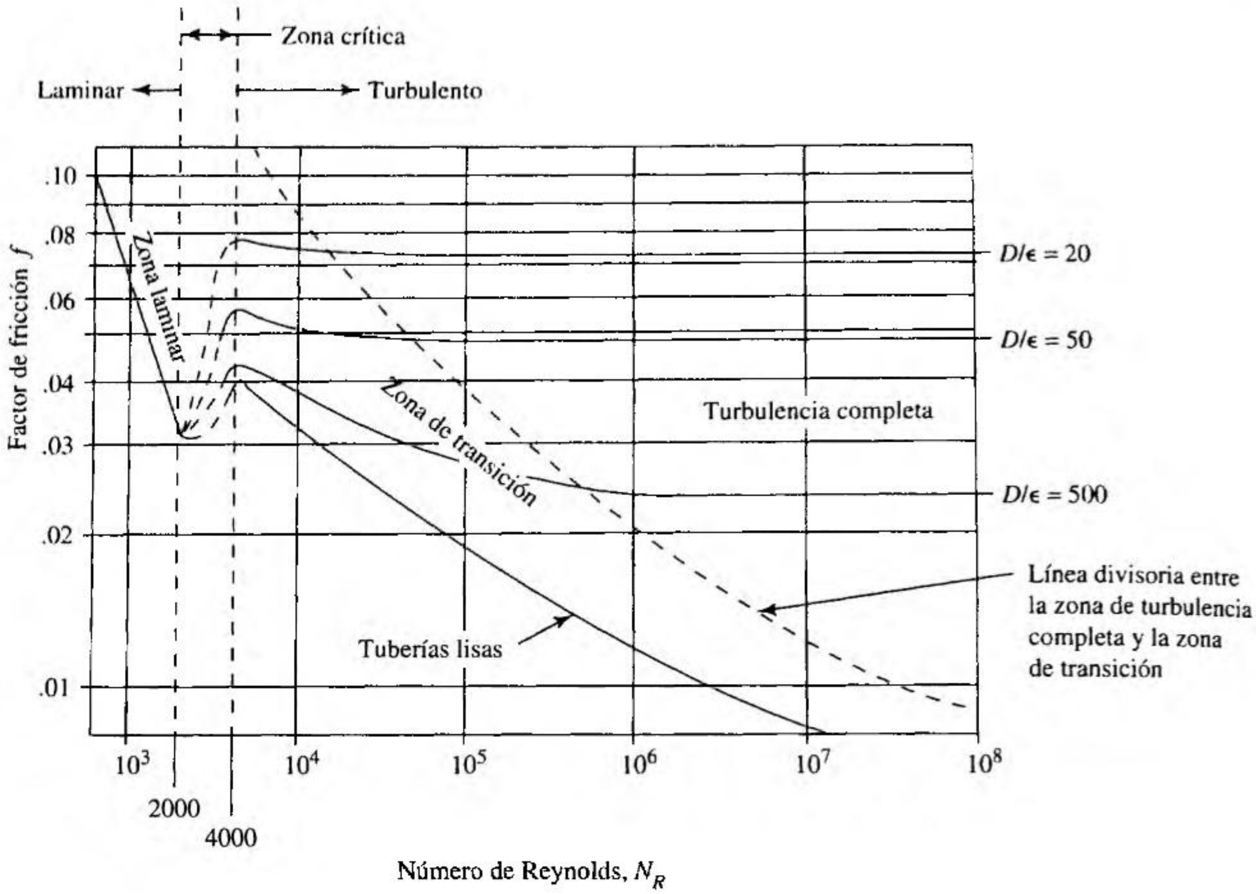


FIGURA 8.7 Explicación de las partes del diagrama de Moody.

Si es posible, hay que evitar la zona crítica entre los números Reynolds 2000 y 4000 porque no puede predecirse el tipo de flujo dentro de ese rango. La banda sombreada muestra la manera en que el factor de fricción podría cambiar de acuerdo con el valor de rugosidad relativa. Para valores bajos de D/ϵ (que indican rugosidad grande de la pared de la tubería), el incremento del factor de fricción es grande conforme el flujo pasa de laminar a turbulento. Por ejemplo, para un flujo en una tubería con $D/\epsilon = 20$, el factor de fricción se incrementaría de 0.032 para $N_R = 2000$, al final del rango laminar, a aproximadamente 0.077 para $N_R = 4000$, al principio del rango turbulento, lo que representa un incremento de 240%. Además, no puede predecirse el valor del número de Reynolds donde ocurriría esto. Debido a que la pérdida de energía es directamente proporcional al factor de fricción, los cambios de tal magnitud son significativos.

Debe observar que debido a que a la rugosidad relativa se le define como D/ϵ, un valor alto de ella indica un valor bajo de ϵ, es decir, una tubería lisa. De hecho, la curva que dice *tuberías lisas* se emplea para materiales como el vidrio, los cuales tienen una rugosidad tan baja que el cociente D/ϵ arrojaría un número extraordinariamente grande, que tendería al infinito.

En algunos textos y referencias utilizan otras convenciones para reportar la rugosidad relativa: ϵ/D, ϵ/r o r/ϵ, donde r es el radio de la tubería. Creemos que la convención que se emplea en este libro hace que los cálculos e interpolaciones sean más fáciles.

8.7.2 Uso del diagrama de Moody

El diagrama de Moody se utiliza para ayudar a determinar el valor del factor de fricción f para el flujo turbulento. Debe conocerse el valor del número de Reynolds y la rugosidad relativa. Por tanto, los datos básicos que se requieren son el diámetro interior de la tubería, el material de que está hecho, la velocidad del flujo y el tipo de fluido y su temperatura, a partir de los cuales se determina la viscosidad. Los problemas modelo siguientes ilustran el procedimiento para encontrar el valor de f.

☐ **PROBLEMA MODELO 8.5** Determine el factor de fricción f si por una tubería de hierro dúctil recubierta de 1 pulg de diámetro, fluye agua a 160 °F y 30.0 pies/s.

Solución Primero debe evaluar el número de Reynolds para determinar si se trata de flujo laminar o turbulento:

$$N_R = \frac{vD}{\nu}$$

Aquí, D = 1 pulg = 0.0833 pie y $\nu = 4.38 \times 10^{-6}$ pies²/s. Ahora tenemos

$$N_R = \frac{(30.0)(0.0833)}{4.38 \times 10^{-6}} = 5.70 \times 10^5$$

Así, el flujo es turbulento. A continuación debe evaluar la rugosidad relativa. En la tabla 8.2 encontramos que $\epsilon = 8 \times 10^{-4}$ pies. Entonces, la rugosidad relativa es

$$\frac{D}{\epsilon} = \frac{0.0833 \text{ pie}}{8 \times 10^{-4} \text{ pies}} = 1.04 \times 10^2 = 104$$

Observe que para que D/ϵ sea una razón adimensional, tanto D como ϵ deben estar en las mismas unidades.

Los pasos finales en el procedimiento son como sigue:

1. Localice el número de Reynolds en la abscisa del diagrama de Moody:

$$N_R = 5.70 \times 10^5$$

2. Haga una proyección vertical hasta alcanzar la curva para $D/\epsilon = 104$. Como 104 está cerca de 100, esa es la curva que se emplea.
3. Realice una proyección horizontal hacia la izquierda, y se lee $f = 0.038$.

☐ **PROBLEMA MODELO 8.6** Si en el problema 8.5 la velocidad del flujo de agua fuera de 0.45 pie/s y todas las demás condiciones permanecieran igual, determine el factor de fricción f. Se escribe

Solución

$$N_R = \frac{vD}{\nu} = \frac{(0.45)(0.0833)}{4.38 \times 10^{-6}} = 8.55 \times 10^3$$

$$\frac{D}{\epsilon} = \frac{0.0833}{8 \times 10^{-4}} = 104$$

Así, de la figura 8.6, $f = 0.044$. Observe que éste se localiza en la parte curva de D/ϵ, y que existe un incremento significativo en el factor de fricción en comparación con el del problema modelo 8.5.

☐ **PROBLEMA MODELO 8.7** Determine el factor de fricción f si en una tubería de acero estándar de 1½ pulg, cédula 40, circula alcohol etílico a 25 °C y 5.3 m/s.

Solución Evaluamos el número de Reynolds por medio de la ecuación

$$N_R = \frac{vD\rho}{\eta}$$

Del apéndice B, $\rho = 787\ kg/m^3$ y $\eta = 1.00 \times 10^{-3}$ Pa·s. Asimismo, para una tubería de 1½ pulg, cédula 80, $D = 0.0381$ m. Con esto, tenemos

$$N_R = \frac{(5.3)(0.0381)(787)}{1.00 \times 10^{-3}} = 1.59 \times 10^5$$

Así, el flujo es turbulento. Para una tubería de acero, $\epsilon = 4.6 \times 10^{-5}$ m, por lo que la rugosidad relativa es

$$\frac{D}{\epsilon} = \frac{0.0381\ m}{4.6 \times 10^{-5}\ m} = 828$$

De la figura 8.6, encontramos que $f = 0.0225$. Para obtener este valor debe interpolarse tanto para N_R como para D/ϵ, por lo que es de esperar que haya alguna variación. Sin embargo, usted debiera ser capaz de leer el valor del factor de fricción con una exactitud ± 0.0005 en esta parte de la gráfica.

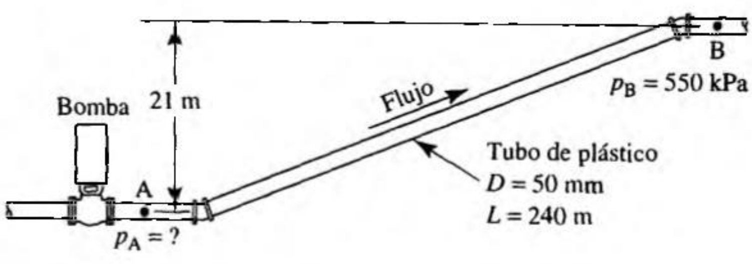
■

El siguiente es un problema modelo programado que ilustra una situación común de fluido en tuberías. Como parte de la solución, debe calcular la pérdida de energía debido a la fricción.

PROBLEMA MODELO PROGRAMADO

☐ **PROBLEMA MODELO 8.8** Observe la figura 8.8. En una planta de procesamiento químico debe llevarse benceno a 50 °C (sg = 0.86) al punto B, con una presión de 550 kPa. Se instala una bomba en el punto A, 21 m por debajo de B, y se conectan los dos puntos por medio de un tubo de plástico de 240 m, con diámetro interior de 50 mm. Si el flujo volumétrico es de 110 L/min, calcule la presión que se requiere en la salida de la bomba.

FIGURA 8.8 Problema modelo 8.8.



Escriba la ecuación de la energía entre los puntos A y B.

La relación es

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} - h_L = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \frac{v_B^2}{2g}$$

Se requiere el término h_L porque hay una pérdida de energía debido a la fricción entre los puntos A y B. El punto A es la salida de la bomba y el objetivo del problema es calcular p_A.

¿Se cancelan algunos términos en esta ecuación de la energía?

Sí, la velocidad del flujo es la misma en los puntos A y B. Por tanto, los dos términos de carga de velocidad se cancelan como sigue:

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \cancelto{0}{\frac{v_A^2}{2g}} - h_L = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \cancelto{0}{\frac{v_B^2}{2g}}$$

Despeje algebraicamente para p_A.

La ecuación es

$$p_A = p_B + \gamma[(z_B - z_A) + h_L] \tag{8–6}$$

¿Cuál es el valor de $z_B - z_A$?

Encontramos que $z_B - z_A = +21$ m porque el punto B está más elevado que el punto A.

Esto nos lleva a h_L, la pérdida de energía debido a la fricción entre A y B. ¿Cuál es el primer paso?

El primer paso es la evaluación del número de Reynolds. Debe determinar el tipo de flujo, laminar o turbulento. Antes de ver el panel siguiente, termine el cálculo del número de Reynolds.

El valor correcto es $N_R = 9.54 \times 10^4$. A continuación presentamos la manera de encontrarlo:

$$N_R = vD\rho/\eta$$

Para un tubo de 50 mm, $D = 0.050$ m y $A = 1.963 \times 10^{-3}$ m^2. Entonces, tenemos

$$Q = (110\,\mathrm{L/min})\left(\frac{1\,\mathrm{m^3/s}}{60\,000\,\mathrm{L/min}}\right) = 1.83 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1.83 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}}{1.963 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2}} = 0.932\,\mathrm{m/s}$$

Para el benceno a 50 °C con gravedad específica de 0.86, encontramos

$$\rho = (0.86)(1000\,\mathrm{kg/m^3}) = 860\,\mathrm{kg/m^3}$$

$$\eta = 4.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{Pa{\cdot}s} \qquad \text{(del apéndice D)}$$

Entonces, tenemos

$$N_R = \frac{(0.932)(0.050)(860)}{4.2 \times 10^{-4}} = 9.54 \times 10^4$$

Por tanto, el flujo es turbulento. ¿Cuál relación debe emplearse para calcular h_L?

Para un flujo turbulento debe usarse la ecuación de Darcy:

$$h_L = f \times \frac{L}{D} \times \frac{v^2}{2g}$$

Se necesita el valor D/ϵ para utilizar el diagrama de Moody y encontrar el valor de f.

La rugosidad de un tubo de plástico está dada en la tabla 8.2, y es 3.0×10^{-7} m. Entonces,

$$\frac{D}{\epsilon} = \frac{0.050\,\mathrm{m}}{3.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 166\;700 = 1.667 \times 10^5$$

Ahora observe en el diagrama de Moody que como el valor de D/ϵ es muy grande, las curvas convergen hacia la de *tuberías lisas*. Por tanto, para el valor de $N_R = 9.54 \times 10^4$ se lee $f = 0.018$ en dicha curva. Con esto concluimos el cálculo de h_L.

El valor correcto es $h_L = 3.83$ m.

$$h_L = f \times \frac{L}{D} \times \frac{v^2}{2g} = 0.018 \times \frac{240}{0.050} \times \frac{(0.932)^2}{2(9.81)}\,\mathrm{m}$$

$$h_L = 3.83\ \mathrm{m}$$

Si regresamos a la ecuación (8-6) podemos calcular p_A.

Debe tenerse $p_A = 759$ kPa, como sigue:

$$p_A = p_B + \gamma[(z_B - z_A) + h_L]$$

$$p_A = 550\ \mathrm{kPa} + \frac{(0.86)(9.81\ \mathrm{kN})}{\mathrm{m}^3}(21\ \mathrm{m} + 3.83\ \mathrm{m})$$

$$p_A = 550\ \mathrm{kPa} + 209\ \mathrm{kN/m^2} = 550\ \mathrm{kPa} + 209\ \mathrm{kPa}$$

$$p_A = 759\ \mathrm{kPa}$$

■

8.8 ECUACIONES PARA EL FACTOR DE FRICCIÓN

El diagrama de Moody de la figura 8.6 es un medio exacto y conveniente, que basta para determinar el valor del factor de fricción al resolver problemas con cálculos manuales. Sin embargo, si los cálculos han de ser automáticos para llegar a la solución en una computadora o calculadora programable, necesitamos ecuaciones para el factor de fricción.

Las ecuaciones que utilizó Moody en su obra son la base del enfoque computacional.* Pero esas ecuaciones son engorrosas y requieren un enfoque iterativo. A continuación presentamos dos ecuaciones que permiten obtener la solución directa para el factor de fricción. Una cubre el flujo laminar y la otra se emplea en el turbulento.

En la *zona de flujo laminar*, para valores por debajo de 2000, f se obtiene de la ecuación (8-5),

FACTOR DE FRICCIÓN PARA EL FLUJO LAMINAR

$$f = 64/N_R$$

Esta relación, desarrollada en la sección 8-5, aparece en el diagrama de Moody como línea recta en el lado izquierdo de la gráfica.

Por supuesto, para números de Reynolds entre 2000 y 4000, el flujo está en el rango crítico y es imposible predecir el valor de f.

La ecuación siguiente, que permite el cálculo directo del valor del factor de fricción para flujo turbulento, la desarrollaron P. K. Swamee y A. K. Jain, y se menciona en la referencia número 3:

FACTOR DE FRICCIÓN PARA EL FLUJO TURBULENTO

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{1}{3.7\,(D/\epsilon)} + \frac{5.74}{N_R^{0.9}}\right)\right]^2} \tag{8-7}$$

---

* Varios investigadores llevaron a cabo trabajos pioneros para desarrollar las ecuaciones; los más notables fueron C. F. Colebrook, L. Prandtl, H. Rouse, T. van Karman y J. Nikuradse, cuyos artículos se mencionan en la bibliografía de la referencia número 2.

La ecuación (8-7) produce valores de f que están $\pm 1.0\%$ dentro del rango de rugosidad relativa D/ϵ, de 100 a 1×10^6 y para números de Reynolds de 5×10^3 a 1×10^8. Ésta es virtualmente toda la zona turbulenta del diagrama de Moody.

Resumen Para calcular el valor del factor de fricción f cuando se conoce el número de Reynolds y la rugosidad relativa, se emplea la ecuación (8-5) para el flujo laminar, y la ecuación (8-7) para el flujo turbulento.

□ **PROBLEMA MODELO 8.9** Calcule el valor del factor de fricción si el número de Reynolds para el flujo es de 1×10^5 y la rugosidad relativa es igual a 2000.

Solución Como esto se encuentra en la zona turbulenta, empleamos la ecuación (8-7),

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{1}{3.7(2000)} + \frac{5.74}{(1 \times 10^5)^{0.9}}\right)\right]^2}$$

$$f = 0.0204$$

Este valor está muy cerca del que se lee en la figura 8.6.

■

8.9 FÓRMULA DE HAZEN-WILLIAMS PARA EL FLUJO DE AGUA

La ecuación de Darcy presentada en este capítulo para calcular la pérdida de energía debido a la fricción es aplicable para cualquier fluido newtoniano. Para el caso de flujo de agua en sistemas de tubería es conveniente un enfoque alternativo.

La *fórmula de Hazen-Williams* es una de las más populares para el diseño y análisis de sistemas hidráulicos. Su uso se limita al flujo de agua en tuberías con diámetros mayores de 2.0 pulg y menores de 6.0 pies. La velocidad del flujo no debe exceder los 10.0 pies/s. Asimismo, está elaborada para agua a 60 °F. Su empleo con temperaturas mucho más bajas o altas ocasionaría cierto error.

La fórmula de Hazen-Williams es específica en cuanto a las unidades. En el sistema de unidades tradicional de Estados Unidos adopta la forma siguiente:

FÓRMULA DE HAZEN-WILLIAMS EN UNIDADES TRADICIONALES DE ESTADOS UNIDOS

$$v = 1.32 C_h R^{0.63} s^{0.54} \tag{8–8}$$

donde

v = Velocidad promedio del flujo (pies/s)

C_h = Coeficiente de Hazen-Williams (adimensional)

R = Radio hidráulico del conducto de flujo (pies)

s = Relación h_L/L: pérdida de energía/longitud del conducto (pies/pies)

El uso del radio hidráulico en la fórmula permite su aplicación a secciones no circulares y también a circulares. Para las secciones circulares se emplea $R = D/4$. Esto lo estudiaremos en el capítulo 9.

El coeficiente C_h sólo depende de la condición de la superficie de la tubería o conducto. La tabla 8.3 proporciona valores que son comunes. Observe que algunos de ellos son descritos como tubos nuevos y limpios, mientras que el valor de diseño toma en cuenta la acumulación de depósitos en las superficies interiores de la tubería des-

TABLA 8.3 Coeficiente de Hazen-Williams, C_h.

Tipo de tubo	C_h Promedio para tuberías nuevas y limpias	C_h Valor de diseño
Acero, hierro dúctil o fundido con aplicación centrífuga de cemento o revestimiento bituminoso	150	140
Plástico, cobre, latón, vidrio	140	130
Acero, hierro fundido, sin recubrimiento	130	100
Concreto	120	100
Acero corrugado	60	60

pués de cierto tiempo, aun cuando fluya agua limpia a través de ellos. Tuberías más lisas presentan valores más elevados de C_h que las rugosas.

Con unidades del SI, la fórmula de Hazen-Williams es

FÓRMULA DE HAZEN-WILLIAMS EN UNIDADES DEL SI

$$v = 0.85 C_h R^{0.63} s^{0.54} \tag{8-9}$$

donde

v = Velocidad promedio del flujo (m/s)
C_h = Coeficiente de Hazen-Williams (adimensional)
R = Radio hidráulico del conducto de flujo (m)
s = Relación h_L/L: pérdida de energía/longitud del conducto (m/m)

Igual que antes, el flujo volumétrico se calcula con $Q = Av$.

□ PROBLEMA MODELO 8.10 Para qué velocidad de flujo de agua habría una pérdida de 20 pies de carga en una tubería de acero nueva y limpia de 6 pulg, cédula 40, con una longitud de 1000 pies. Calcule el flujo volumétrico a dicha velocidad. Después vuelva a calcular con el valor de diseño de C_h para tubo de acero.

Solución Al utilizar la ecuación (8-8), escribimos

$$s = h_L/L = (20\,\text{pies})/(1000\,\text{pies}) = 0.02$$
$$R = D/4 = (0.5054\,\text{pie})/4 = 0.126\,\text{pie}$$
$$C_h = 130$$

Entonces,

$$v = 1.32\, C_h R^{0.63} s^{0.54}$$
$$v = (1.32)(130)(0.126)^{0.63}(0.02)^{0.54} = 5.64\,\text{pies/s}$$
$$Q = Av = (0.2006\,\text{pie}^2)(5.64\,\text{pies/s}) = 1.13\,\text{pies}^3/\text{s}$$

Ahora, ajustamos el resultado para el valor de diseño de C_h.

Observe que la velocidad y el flujo volumétrico son directamente proporcionales al valor de C_h. Si el tubo se deteriorara por el uso, de modo que $C_h = 100$, el flujo volumétrico permisible que limitaría la pérdida de energía al mismo valor de 20 pies por 1000 pies de longitud de tubo, sería

$$v = (5.64\,\text{pies/s})(100/130) = 4.34\,\text{pies/s}$$
$$Q = (1.13\,\text{pies}^3/\text{s})(100/130) = 0.869\,\text{pie}^3/\text{s}$$

■

8.10 OTRAS FORMAS DE LA FÓRMULA DE HAZEN-WILLIAMS

Las ecuaciones (8-8) y (8-9) permiten el cálculo directo de la velocidad de flujo para un tipo y tamaño dados de conducto, cuando se conoce o especifica la pérdida de energía por unidad de longitud. El flujo volumétrico se calcula con $Q = Av$, sencillamente. Es frecuente que se quiera utilizar otros cálculos para:

1. Determinar el tamaño de tubería que se requiere para conducir un flujo volumétrico dado con una pérdida de energía limitada a cierto valor especificado.
2. Obtener la pérdida de energía para un flujo volumétrico dado a través de una tubería conociendo su tamaño y longitud.

La tabla 8.4 presenta varias formas que adopta la fórmula de Hazen-Williams y que facilitan dichos cálculos.

TABLA 8.4 Formas alternativas de la fórmula Hazen-Williams.

Unidades tradicionales de Estados Unidos	Unidades del SI
$v = 1.32C_hR^{0.63}s^{0.54}$	$v = 0.85C_hR^{0.63}s^{0.54}$
$Q = 1.32AC_hR^{0.63}s^{0.54}$	$Q = 0.85AC_hR^{0.63}s^{0.54}$
$h_L = L\left[\dfrac{Q}{1.32AC_hR^{0.63}}\right]^{1.852}$	$h_L = L\left[\dfrac{Q}{0.85AC_hR^{0.63}}\right]^{1.852}$
$D = \left[\dfrac{2.31Q}{C_hs^{0.54}}\right]^{0.380}$	$D = \left[\dfrac{3.59Q}{C_hs^{0.54}}\right]^{0.380}$
Nota: las unidades deben ser consistentes:	
v en pies/s	v en m/s
Q en pies^3/s	Q en m^3/s
A en pies^2	A en m^2
h_L, L, R y D en pies	h_L, L, R y D en m
s en pies/pies (adimensional)	s en m/m (adimensional)

8.11 NOMOGRAMA PARA RESOLVER LA FÓRMULA DE HAZEN-WILLIAMS

El nomograma que presentamos en la figura 8.9 permite resolver la fórmula de Hazen-Williams con sólo alinear cantidades conocidas por medio de una recta y leer las incógnitas en la intersección de ésta con el eje vertical apropiado. *Observe que el nomograma está construido para el valor del coeficiente de Hazen-Williams con C_h = 100.* Si las condiciones reales de la tubería garantizan el empleo de un valor diferente de C_h, se emplean las fórmulas siguientes para ajustar los resultados. El subíndice 100 se refiere al valor que se lee en el nomograma para $C_h = 100$. El subíndice c se refiere al valor para el C_h dado.

$$v_c = v_{100}(C_h/100) \quad \text{[velocidad]} \qquad (8\text{–}10)$$

$$Q_c = Q_{100}(C_h/100) \quad \text{[flujo volumétrico]} \qquad (8\text{–}11)$$

$$D_c = D_{100}(100/C_h)^{0.38} \quad \text{[diámetro de la tubería]} \qquad (8\text{–}12)$$

$$s_c = s_{100}(100/C_h)^{1.85} \quad \text{[pérdida de carga/longitud]} \qquad (8\text{–}13)$$

La línea punteada de la gráfica muestra el empleo del nomograma para los datos del problema modelo 8.10, para el caso de $C_h = 100$.

Un uso frecuente de un nomograma como el de la figura 8.9 consiste en determinar el tamaño de tubería que se requiere para conducir un flujo volumétrico dado, al mismo tiempo que se limita la pérdida de energía a cierto valor especificado. Por esto constituye una herramienta conveniente de diseño. (Consulte la referencia 4.)